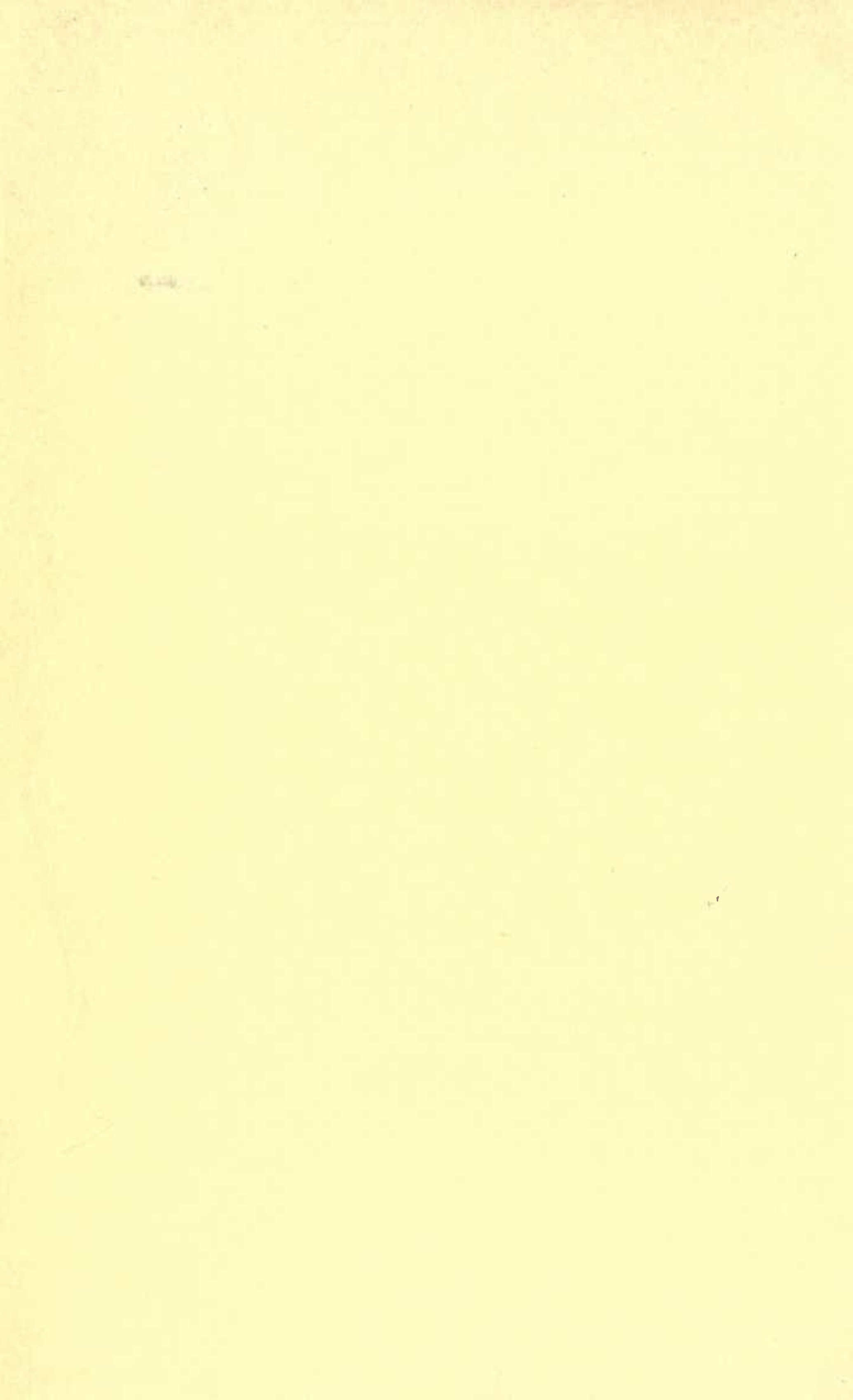




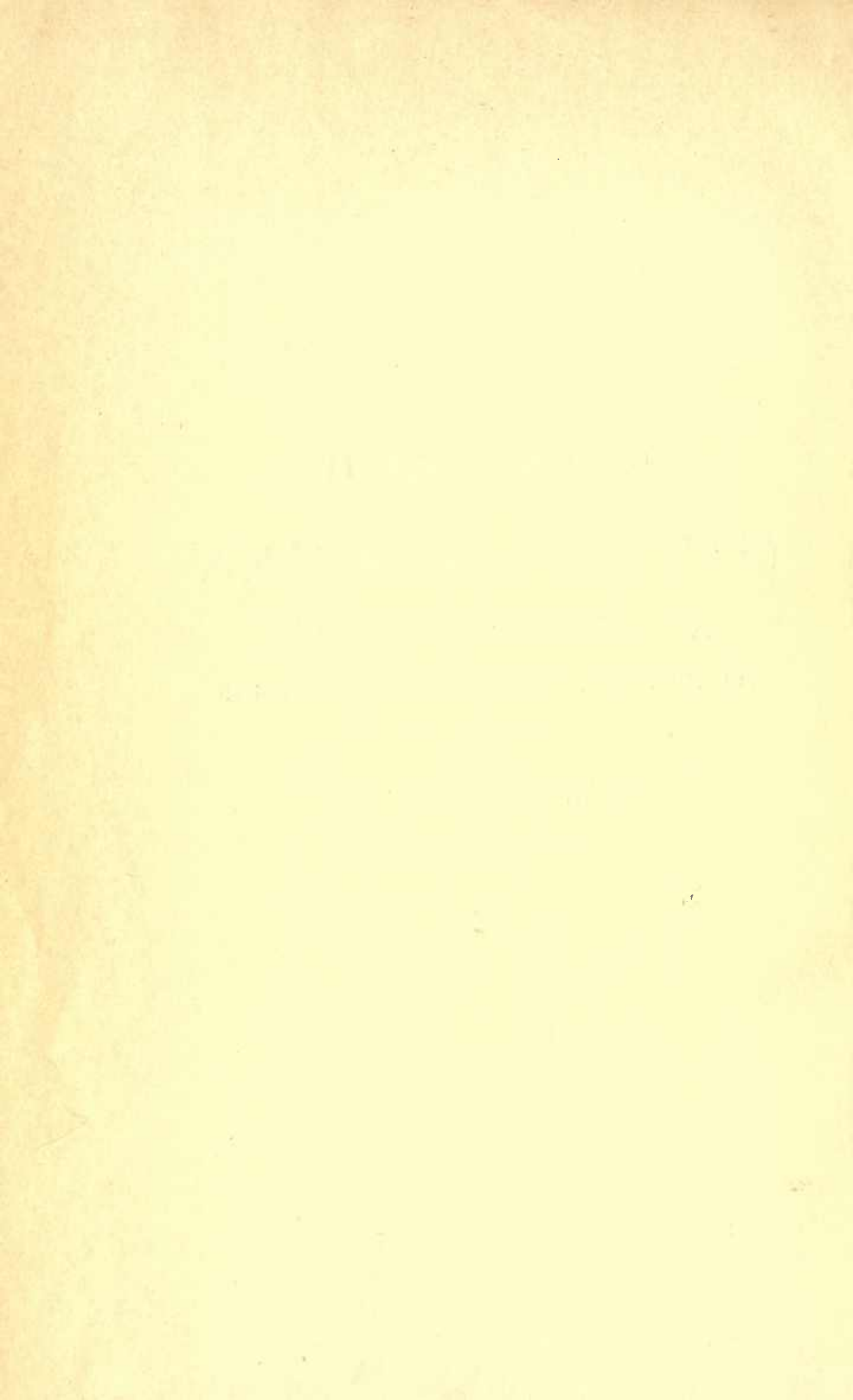




ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

ZWEITER BAND:

ANALYSIS



ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

ZWEITER BAND IN DREI TEILEN

ANALYSIS

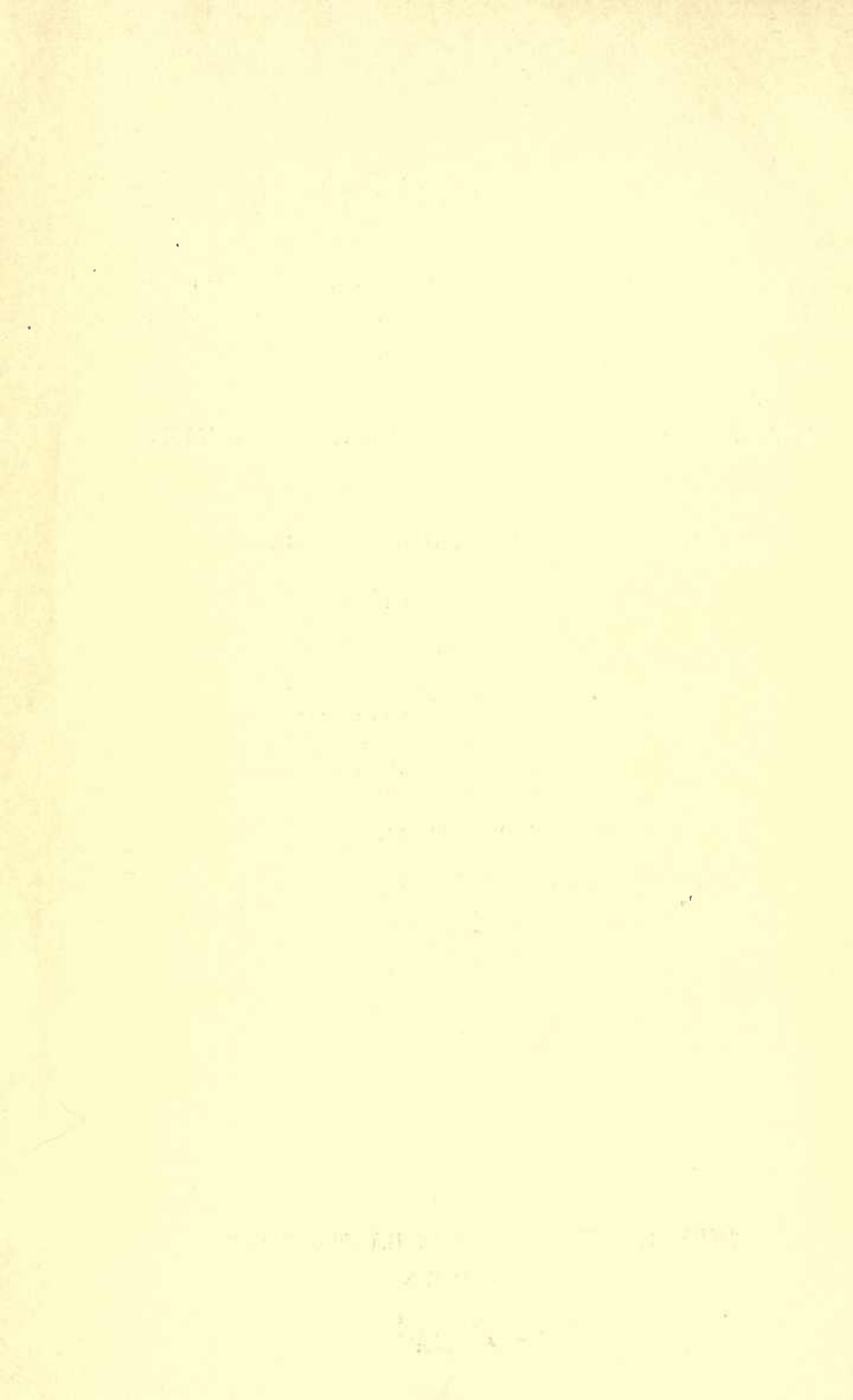
REDIGIERT VON

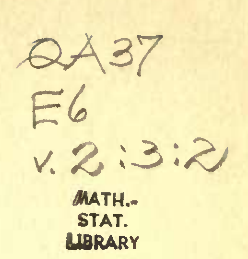
H. BURKHARDT†, W. WIRTINGER
(1898–1914) IN WIEN (1905–1912)
R. FRICKE UND E. HILB
IN BRAUNSCHWEIG IN WÜRZBURG

DRITTER TEIL

ZWEITE HÄLFTE

LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1923—1927





Inhaltsverzeichnis zu Band II, 3. Teil, 2. Hälfte.

C. Nachträge (Fortsetzung).

7. Neuere Untersuchungen über Differenzengleichungen. Von N. E. Nörlund in Kopenhagen.

I. Lineare Gleichungen.

Seite

1. Ein Satz von Poincaré 676
2. Fakultätenreihen 682
3. Interpolationsreihen 686
4. Integration von Differenzengleichungen durch Fakultätenreihen 692
5. Untersuchungen von Birkhoff 698
6. Andere Darstellungen der Lösungen 700
7. Ein Satz von Hölder über die Gammafunktion 703

II. Nichtlineare Gleichungen.

8. Untersuchungen von Picard 705
9. Verhalten der Lösungen für große Werte von x 707

III. Das Summationsproblem.

10. Einfache Summen 711
11. Mehrfache Summen 716

IV. Spezielle Differenzengleichungen.

12. Gleichungen, die sich durch hypergeometrische Funktionen oder Gammafunktionen auflösen lassen 717
13. Die Laplacesche Differenzengleichung 720

(Abgeschlossen im April 1922.)

8. Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie. Von H. Bohr in Kopenhagen und H. Cramér in Stockholm.

Erster Teil.

I. Allgemeine Theorie der Dirichletschen Reihen.

1. Definition einer Dirichletschen Reihe 724
2. Die drei Konvergenzabszissen 725
3. Der Eindeutigkeitssatz 728
4. Die Koeffizientendarstellungsformel 729

Seite

5. Beziehung zwischen der Reihe auf der Konvergenzgeraden und der Funktion bei Annäherung an die Konvergenzgerade 730
6. Das Konvergenzproblem 734
7. Anwendung der Theorie der diophantischen Approximationen 739
8. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Dirichletsche Reihe 743
9. Der Mittelwertsatz 745
10. Über die Nullstellen einer Dirichletschen Reihe 746
11. Zusammenhang verschiedener Dirichletscher Reihen 748
12. Multiplikation Dirichletscher Reihen 750
13. Summabilität Dirichletscher Reihen 753

II. Die Riemannsche Zetafunktion.

14. Die Zetafunktion und ihre Funktionalgleichung 759
15. Die Riemann-Hadamardsche Produktentwicklung 763
16. Die Riemann-v. Mangoldtsche Formel für die Anzahl der Nullstellen . 765
17. Über die Werte von $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 (> \frac{1}{2})$ . . 766
18. Über die Größenordnung der Zetafunktion auf vertikalen Geraden . . 768
19. Näheres über die Nullstellen im kritischen Streifen 771
20. Folgerungen aus der Riemannschen Vermutung 775
21. Verallgemeinerte Zetafunktionen 777

Zweiter Teil.

22. Einleitung. Bezeichnungen 780

III. Die Verteilung der Primzahlen.

23. Der Primzahlsatz. Ältere Vermutungen und Beweisversuche 782
24. Die Beweise von Hadamard und de la Vallée Poussin 784
25. Die Beweismethoden von Landau 786
26. Andere Beweise 787
27. Die Restabschätzung 788
28. Die Riemannsche Primzahlformel 792
29. Theorie der L-Funktionen 795
30. Die Verteilung der Primzahlen einer arithmetischen Reihe 801
31. Andere Primzahlprobleme 805

IV. Weitere zahlentheoretische Funktionen.

32. Die Funktionen $\mu(n)$, $\lambda(n)$ und $\varphi(n)$ 810
33. Zusammenhangssätze 814
34. Teilerprobleme 815
35. Ellipsoidprobleme 823
36. Allgemeinere Gitterpunktprobleme 826
37. Verteilung von Zahlen, deren Primfaktoren vorgeschriebenen Bedingungen genügen 827
38. Neuere Methoden der additiven Zahlentheorie 829
39. Diophantische Approximationen 833

V. Algebraische Zahlen und Formen.

40. Quadratische Formen und Körper 836
41. Die Zetafunktionen von Dedekind und Hecke 842
42. Die Verteilung der Ideale und der Primideale 847

(Abgeschlossen im Mai 1922.)

Seite

9. Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen. Nach den unter der Leitung von E. BOREL in Paris redigierten französischen Referaten bearbeitet von A. ROSENTHAL in Heidelberg.

9a. Die Punktmengen. Nach dem französischen Artikel von L. ZORETTI in Caen bearbeitet von A. ROSENTHAL in Heidelberg.

Allgemeines.

1. Einleitung 856
2. Die Anwendungen der Mengenlehre 857

Grundlegende Eigenschaften der Punktmengen.

3. Lineare Mengen. Definitionen 859
4. Die Ableitungen einer Punktmenge 861
5. Der Cantor-Bendixsonsche Satz 866
6. Nicht abgeschlossene Mengen 871
7. Mächtigkeit der Punktmengen 874
8. Die abgeschlossenen und die offenen Mengen 877
9. Der Borelsche Überdeckungssatz und seine Verallgemeinerungen . . . 882
9a. Die Mengen erster und zweiter Kategorie 886
9b. Die Borelschen Mengen 889

Die Struktur der abgeschlossenen Mengen.

10. Einteilung der abgeschlossenen Mengen 895
10a. Die Struktur der allgemeinsten abgeschlossenen Mengen 901
11. Flächenhafte Kontinua 904
12. Linienhafte Kontinua 907
13. Die Begrenzung eines ebenen Gebietes 916
13a. Die Begrenzung eines n-dimensionalen Gebietes 929
14. Punkthafte Mengen 931
15. Mengen, die von einem Parameter abhängen 938

Korrespondenzen zwischen Bereichen von m und n Dimensionen.

16. Die Mächtigkeit des n-dimensionalen Kontinuums. Peano-Kurven . . 941
17. Die Invarianz der Dimensionszahl bei umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen 948
17a. Die übrigen Invarianten der umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen 953
17b. Sonstige Untersuchungen über umkehrbar eindeutige und stetige Transformationen 957

Der Inhalt der Punktmengen.

18. Die Cantorsche Inhaltsdefinition 962
19. Der Jordansche Inhalt. 965
20. Das Borelsche und das Lebesguesche Maß 969
20a Spezielle Sätze über Inhalt und Maß 982
20b. Carathéodorys Meßbarkeitstheorie 990
20c. Das m-dimensionale Maß im n-dimensionalen Raum 994

Anwendungen der Mengenlehre.

21. Anwendungen auf die allgemeine Funktionenlehre 1001
22. Anwendungen auf die Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen . 1002

Seite
23. Anwendungen auf die Theorie der Funktionen komplexer Veränderlichen 1011
24. Anwendungen auf die Analysis situs 1012

Verallgemeinerungen.

25. Die Geradenmengen 1014
26. Die Funktionalrechnung. Allgemeine Räume 1015
26a. Raum von unendlich vielen Dimensionen, Funktionenraum und andere spezielle Räume 1025

9b. Integration und Differentiation. Nach dem französischen Artikel von P. Montel in Paris bearbeitet von A. Rosenthal in Heidelberg.

Bestimmtes Integral der beschränkten Funktionen einer Veränderlichen.

27. Das Integral nach Cauchy 1032
28. Das Riemannsche Integral 1033
29. Das obere und untere Integral nach Darboux 1037
30. Das Lebesguesche Integral 1039
31. Geometrische Definition des Integrals 1047

Bestimmtes Integral nicht beschränkter Funktionen.

32. Uneigentliche Integrale 1050
33. Das Lebesguesche Integral für nicht beschränkte Funktionen 1056
34. Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals 1058
35. Andere Verallgemeinerungen des Integralbegriffs 1059
35a. Integraldefinitionen von W. H. Young, J. Pierpont und F. Riesz. . . 1060
35b. Das Borelsche Integral 1064
35c. Das Denjoysche Integral 1065
35d. Das Stieltjessche Integral 1071
35e. Die Hellingerschen Integrale 1073
35f. Das Perronsche Integral 1074

Integration von Reihen.

36. Integrierbarkeit der Grenzfunktionen 1076
37. Gliedweise Integrierbarkeit 1077

Ableitungen und primitive Funktionen.

38. Eigenschaften der vier Derivierten 1086
39. Eigenschaften der Ableitungen 1089
40. Existenz der Ableitungen 1091
40a. Beziehungen zwischen den vier Derivierten 1096
41. Integrierbarkeit der Ableitungen und der vier Derivierten 1098
42. Bestimmung einer Funktion mit Hilfe ihrer Ableitung oder einer ihrer vier Derivierten 1101
43. Wirkliche Aufsuchung der primitiven Funktionen einer gegebenen Derivierten oder einer gegebenen Ableitung 1104
44. Funktionen, die unbestimmte Integrale sind 1110
44a. Allgemeinere Auffassung des unbestimmten Integrals 1113
44b. Die approximativen Ableitungen 1114

Integrale und Ableitungen der Funktionen mehrerer Veränderlichen.

45. Meßbare Funktionen. Summierbare Funktionen. Mehrfache Lebesguesche Integrale 1115
46. Partielle Ableitungen und totales Differential 1123
47. Die unbestimmten Integrale und ihre Differentiation 1130
48. Integration partieller Differentialgleichungen 1134

Seite

9c. Funktionenfolgen. Nach dem französischen Artikel von M. Fréchet in Poitiers (jetzt in Straßburg) bearbeitet von A. Rosenthal in Heidelberg.

Reihen und Folgen von Funktionen einer Veränderlichen.

49. Gleichmäßig konvergente Reihen von stetigen Funktionen 1137
49a. Die Verteilung der Stellen gleichmäßiger und ungleichmäßiger Konvergenz 1143
49b. Gleichgradig stetige Funktionenmengen 1144
50. Der Weierstraßsche Satz 1146
51. Interpolation. Beste Approximation 1153
52. Quasi-gleichmäßige Konvergenz 1163
53. Grenzfunktionen stetiger Funktionen 1167
54. Die Baireschen Funktionenklassen 1168
54a. Klassifikation der Borelschen Mengen und ihre Beziehungen zu den Baireschen Funktionen 1172
55. Die analytisch darstellbaren Funktionen 1177
56. Konvergenzcharakter von Folgen meßbarer Funktionen 1179
57. Konvergenz im Mittel 1181
57a. Allgemeine Beziehungen zwischen meßbaren Funktionen und Baireschen Klassen 1182

Reihen und Folgen von Funktionen mehrerer Veränderlichen.

58. Funktionen mehrerer Veränderlichen 1185

(Abgeschlossen im Juli 1923.)

10. Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen. Von E. Hilb in Würzburg und M. Riesz in Stockholm.

1. Festsetzungen und Bezeichnungen 1191
2. Geschichtlicher Überblick 1191

I. Fouriersche Reihen.

3. Fourierkoeffizienten 1192
4. Konvergenz der Fourierschen Reihe 1194
5. Die konjugierte Reihe 1198
6. Gleichmäßige Konvergenz und absolute Konvergenz 1200
7. Verschiedene Konvergenz- und Divergenzerscheinungen 1201
8. Summationsverfahren 1204
9. Die Besselsche Ungleichung und der Parsevalsche Satz 1209
10. Der Riesz-Fischersche Satz und verwandte Sätze 1212
11. Operationen mit Fourierreihen 1214

II. Allgemeine trigonometrische Reihen.

12. Die Arbeit Riemanns 1217
13. Weiterentwicklung im Anschluß an Riemann 1219
14. Konvergenz- und Divergenzerscheinungen bei allgemeinen trigonometrischen Reihen 1222

III. Anhang.

15. Mehrfache Fourierreihen und trigonometrische Reihen 1223
16. Der Grad der Annäherungen 1224

(Abgeschlossen am 24. Juli 1922.)

Seite

11. Allgemeine Reihenentwicklungen. Von E. HILB in Würzburg und O. SZÁSZ in Frankfurt.

Erster Teil.

Entwicklungen bei reellen unabhängigen Veränderlichen.

I. Allgemeine Sätze über Entwicklungen nach orthogonalen, polaren und biorthogonalen Funktionensystemen.

1. Auftreten orthogonaler und biorthogonaler Funktionensysteme 1232
2. Sätze über die Fourierkoeffizienten 1234
3. Abgeschlossenheit eines orthogonalen Funktionensystems. Entsprechende Sätze für biorthogonale Systeme 1237
4. Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Möglichkeit der Reihenentwicklungen von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften. Singuläre Integrale 1239
5. Integraldarstellungen 1243

II. Entwicklungen nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen.

6. Auftreten der Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik . . 1244
7. Randwertaufgaben 1246
8. Die Greensche Funktion bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen sich selbst adjungierter Probleme 1250
9. Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus 1254
10. Angenäherte Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen für große Parameterwerte 1256
11. Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen nicht selbstadjungierter Probleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1258
12. Historischer Überblick 1260
13. Darstellungen bei Auftreten singulärer Stellen der Differentialgleichungen 1264

Zweiter Teil.

Entwicklungen bei komplexen unabhängigen Veränderlichen.

Einleitung 1266
1. Der Konvergenzbereich der Faktoriellenreihen 1268
2. Gleichmäßige Konvergenz 1270
3. Absolute Konvergenz 1270
4. Summabilität der Faktoriellenreihen 1271
5. Beziehungen zu Dirichletschen Reihen 1271
6. Darstellbarkeitsbedingungen 1272
7. Entwicklungen nach den Näherungsnennern eines Kettenbruches . . . 1273
8. Entwicklungen nach den Integralen linearer Differentialgleichungen . 1274
9. Sonstige Reihenentwicklungen 1274
10. Approximation 1276

(Abgeschlossen im Juli 1922.)

12. Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Von L. LICHTENSTEIN in Leipzig.

I. Bezeichnungen und Abkürzungen.

1. Bezeichnungen und Abkürzungen 1279

Seite

II. Lineare Differentialgleichungen.

2. Die erste Randwertaufgabe 1280
a) Beschränkte ebene Gebiete. Lineare Differentialgleichungen in der Normalform. Methode der sukzessiven Approximationen. Das alternierende Verfahren 1280
b) Beschränkte Gebiete der Klasse B oder D in $\mathfrak{E}$. Zurückführung auf eine lineare Integralgleichung 1281
c) Beschränkte Gebiete der Klasse B oder D in $\mathfrak{E}$. Die am Rande verschwindende Greensche Funktion 1287
d) Beschränkte Gebiete allgemeiner Natur in $\mathfrak{E}$ 1291
e) Beschränkte Gebiete in $\mathfrak{E}$. Allgemeine lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zurückführung auf die Normalform. Konforme Abbildung nichtanalytischer Flächenstücke auf ebene Gebiete 1294
f) Unitätssätze 1297
g) Gebiete in $\mathfrak{E}_m$. Räumliche Gebiete 1299
3. Das zweite Randwertproblem. Höhere Randwertaufgaben 1303
4. Einige allgemeine Eigenschaften der Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus 1308
5. Sich selbst adjungierte lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus 1310
a) Existenz der Eigenwerte. Entwicklungssätze 1310
b) Eigenwerte in Abhängigkeit von dem Gebiete und der Randbedingung. Asymptotische Verteilung der Eigenwerte 1315

III. Nichtlineare Differentialgleichungen.

6. Analytischer Charakter der Lösungen 1320
7. Randwertaufgaben 1324
a) Lösungen in der Nachbarschaft einer gegebenen Lösung 1324
b) Randwertaufgaben ohne einschränkende Voraussetzungen über die Größe des Gebietes oder den Wert etwaiger in der Differentialgleichung vorkommenden Parameter 1327
c) Die Differentialgleichung $\Delta u = ke^u$ $(k > 0)$ 1330
Nachtrag 1333

(Abgeschlossen im März 1924.)

13. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Von Ernst Hellinger in Frankfurt a. M. und Otto Toeplitz in Kiel.

I. Ursprung der Theorie.

1. Der allgemeine algebraische Grundgedanke 1340
2. Der besondere Typus der Integralgleichung zweiter Art 1344
3. Die Entwicklung nach Iterierten (Neumannsche Methode) 1347
4. Der lösende Kern (Resolvente) 1350
5. Die Fredholmsche Entdeckung 1351
6. Hilberts Eigenwerttheorie 1358
7. Umgrenzung des Funktionenbereiches 1364
8. Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen 1367

II. Auflösungstheorie.

A. Die linearen Integralgleichungen zweiter Art.

9. Die Fredholmsche Theorie 1370
10. Andere Auflösungsmethoden 1376

Seite
11. Die iterierten und assoziierten Kerne 1383
12. Uneigentlich singuläre Integralgleichungen. 1385
13. Allgemeinere Integrationsbereiche. Systeme von Integralgleichungen. 1388
14. Besondere Kerne 1391

B. Die Methode der unendlichvielen Veränderlichen.

15. Zusammenhang zwischen Integralgleichungen und linearen Gleichungssystemen mit unendlichvielen Unbekannten 1392
16. Hilberts Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme 1399

C. Andere Untersuchungen über lineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten und lineare Integralgleichungen.

17. Die Methode der unendlichen Determinanten. 1417
18. Theorie der beschränkten Gleichungssysteme. 1423
19. Die allgemeinsten Gleichungssysteme für Unbekannte von konvergenter Quadratsumme. 1433
20. Andere Konvergenzbedingungen für die Unbekannten 1442
21. Eigentlich singuläre Integralgleichungen zweiter Art 1450
22. Integralgleichungen erster Art. Momentenproblem 1453
23. Neuere Untersuchungen über lineare Volterrasche Integralgleichungen 1459
24. Lineare Funktionaloperationen 1466
   a) Die Algebra der Funktionaloperationen. 1466
   b) Der Standpunkt der Mengenlehre 1468
   c) Der formal-abstrakte Standpunkt (general analysis) 1471
   d) Besondere lineare Funktionalgleichungen 1476

D. Nichtlineare Probleme.

25. Nichtlineare Integralgleichungen und nichtlineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten 1481
26. Vertauschbare Kerne. 1487
27. Integrodifferentialgleichungen 1493
28. Nichtlineare Funktionaloperationen 1498
29. Numerische Behandlung linearer und nichtlinearer Probleme 1501

III. Eigenwerttheorie.

A. Integralgleichungen mit reellem symmetrischem Kern.

30. Eigenwerte und Eigenfunktionen 1504
31. Die iterierten und assoziierten Kerne 1507
32. Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte 1509
33. Die Existenz der Eigenwerte 1513
34. Entwicklungssätze 1521
35. Abhängigkeit der Eigenwerte vom Integrationsbereich und ihr asymptotisches Verhalten 1527
36. Uneigentlich singuläre symmetrische Integralgleichungen. Allgemeinere Integrationsbereiche. Systeme von Integralgleichungen 1531
37. Besondere symmetrische Kerne 1534

B. Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern.

38. Besondere unsymmetrische Kerne, die sich wie symmetrische verhalten 1535
39. Elementarteilertheorie der allgemeinen unsymmetrischen Kerne (Entwicklung nach Hauptfunktionen) 1543

Seite

C. Die vollstetigen quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

40. Hilberts Hauptachsentheorie der vollstetigen quadratischen Formen . 1553
41. Besondere vollstetige Bilinearformen, die sich wie quadratische Formen verhalten 1561
42. Elementarteilertheorie der allgemeinen vollstetigen Bilinearformen . . 1574

D. Weitere Untersuchungen über quadratische und bilineare Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

43. Beschränkte quadratische Formen von unendlichvielen Veränderlichen 1575
44. Eigentlich singuläre Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern 1591
45. Der allgemeine Standpunkt der Funktionaloperationen 1595
a) Die Algebra der Funktionaloperationen. 1595
b) Der formal-abstrakte Standpunkt (general analysis) 1595
c) Die methodische Auswirkung der Theorie. 1596

(Abgeschlossen im Juni 1927.)

Register zu Band II, 3. Teil 1603

Übersicht
über die im vorliegenden Bande II, 3. Teil, 2. Hälfte zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

C. Nachträge (Fortsetzung).

Heft	Inhalt
Heft 6. 14. VII. 1923.	7. Nörlund: Neuere Untersuchungen über Differenzengleichungen. 8. Bohr und Cramér: Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie. Titel und Inhaltsverzeichnis zu Band II, 3. Teil, 1. Hälfte.
Heft 7. 1. IV. 1924.	9. Borel-Rosenthal: Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen. 9a. Zoretti und Rosenthal: Die Punktmengen. 9b. Montel und Rosenthal: Integration und Differentiation. 9c. Fréchet und Rosenthal: Funktionenfolgen.
Heft 8. 10. IX. 1924.	10. Hilb und Riesz: Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen. 11. Hilb und Szász: Allgemeine Reihenentwicklungen. 12. Lichtenstein: Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.
Heft 9. 15. XII. 1927.	13. Hellinger und Toeplitz: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Titel und Inhaltsverzeichnis zu Band II, 3. Teil, 2. Hälfte. Register zu Band II, 3. Teil.

II C 7. NEUERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIFFERENZENGLEICHUNGEN.

VON

N. E. NÖRLUND

IN KOPENHAGEN.

Inhaltsübersicht.

I. Lineare Gleichungen.

1. Ein Satz von *Poincaré*.
2. Fakultätenreihen.
3. Interpolationsreihen.
4. Integration von Differenzengleichungen durch Fakultätenreihen.
5. Untersuchungen von *Birkhoff*.
6. Andere Darstellungen der Lösungen.
7. Ein Satz von *Hölder* über die Gammafunktion.

II. Nichtlineare Gleichungen.

8. Untersuchungen von *Picard*.
9. Verhalten der Lösungen für große Werte von x.

III. Das Summationsproblem.

10. Einfache Summen.
11. Mehrfache Summen.

IV. Spezielle Differenzengleichungen.

12. Gleichungen, die sich durch hypergeometrische Funktionen oder Gammafunktionen auflösen lassen.
13. Die *Laplace*schen Differenzengleichungen.

Literatur.

S. F. Lacroix, Traité des différences et des séries, faisant suite au traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 1. Aufl. Paris 1800; 2. Aufl. Paris 1819.

G. Boole, A Treatise on the Calculus of finite Differences, 1. Aufl. Cambridge 1860; 2. Aufl. London 1872; Deutsche Ausg. Braunschweig 1867.

W. Heymann, Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen, Leipzig 1891.

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, Leipzig 1896.
S. Pincherle e *U. Amaldi,* Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' analisi, Bologna 1901.
D. Seliwanoff, Lehrbuch der Differenzenrechnung, Leipzig 1904.
N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906.
T. N. Thiele, Interpolationsrechnung, Leipzig 1909.
N. E. Nörlund, Bidrag til de lineaere Differensligningers Theori, Kopenhagen 1910.
G. Wallenberg und *A. Guldberg,* Theorie der linearen Differenzengleichungen, Leipzig und Berlin 1911.
P. Funk; Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendungen in der Theorie der Baukonstruktionen, Berlin 1920.

Zur Ergänzung des vorliegenden Referates sind die folgenden Referate heranzuziehen:

I E, *D. Seliwanoff,* Differenzenrechnung.
I D 3, *J. Bauschinger,* Interpolation.
I D 1, *E. Czuber,* Wahrscheinlichkeitsrechnung, Nr. 6: Die Differenzenrechnung als methodisches Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
II A 3, *G. Brunel,* Bestimmte Integrale, Nr. 12: Γ-Funktion.
II A 11, *S. Pincherle,* Funktionaloperationen und -gleichungen.

I. Lineare Gleichungen.

1. Ein Satz von Poincaré. Lineare homogene Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, d. h. die sogenannten rekurrenten Reihen, sind von *Lagrange*[1]) eingehend behandelt worden *Laplace*[2]) hat durch seine Theorie der erzeugenden Funktionen und besonders durch die nach ihm benannte Integraltransformation wichtige Hilfsmittel für die Auflösung von Gleichungen mit rationalen Koeffizienten erbracht. Im Referate I E (*D. Seliwanoff*) wurde von

1) *Lagrange*, Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes, Misc. Taurinensia 1 (1759) [1761], p. 33—42, Œuvres 1 (Paris 1867), p. 23—36; Recherches sur les suites récurrentes, Nouv. Mém. Acad. Berlin 6 (1775) [1776], p. 183—272, Œuvres 4 (Paris 1869), p. 151—251; Mémoires sur l'expression du terme général des séries récurrentes lorsque l'équation génératrice a des racines égales, Mém. Acad. Berlin 1792/93 [1798], p. 247—257, Œuvres 5 (Paris 1870), p. 624—641.

2) *Laplace*, Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards, Mém. Acad. Sc. Paris (Savants étrangers) 7 (1773) [1776], Œuvres 8 (Paris 1891), p. 69—197; Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards, Mém. Acad. Sc. Paris (Savants étrangers) 6 (1774), Œuvres 8 (Paris 1891), p. 5—24; Mémoire sur les suites, Mém. Acad. Sc. Paris 1779 (1782), Œuvres 10 (Paris 1894), p. 1—89; Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, Œuvres 7 (Paris 1886), p. 7—180.

den älteren Arbeiten über Differenzengleichungen berichtet.[3]) Wir beschränken uns hier auf die funktionentheoretischen Untersuchungen der Lösungen. Die Aufmerksamkeit der Analytiker wurde zunächst auf die Gleichung

$$f(x+1) = xf(x)$$

gelenkt. Diese Gleichung wird von der Gammafunktion befriedigt, und es hat sich dabei herausgestellt, daß schon sehr spezielle Differenzengleichungen wesentlich neue transzendente Funktionen definieren. Über die Gammafunktion ist im Referate II A 3 (*G. Brunel*) berichtet. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion sind schon von *Euler*, *Legendre*, *Gauß* und *Weierstraß* hergeleitet worden. Aber es sollte noch lange dauern, bis die analytischen Eigenschaften der Lösungen einer umfassenderen Klasse von Differenzengleichungen erforscht würden. Den Anstoß zu einer derartigen Untersuchung hat der folgende, von *Poincaré*[4]) hergeleitete Satz gegeben. Wir betrachten eine lineare Gleichung von der Form:

$$(1) \quad f(n+k) + p_{k-1}(n)f(n+k-1) + \cdots + p_1(n)f(n+1) + p_0(n)f(n) = 0,$$

wo die Veränderliche n eine ganze positive Zahl ist, und wo die Koeffizienten $p_i(n)$ Funktionen von n sind, die je einem bestimmten Grenzwerte A_i zustreben, wenn n ins Unendliche wächst. Die charakteristische Gleichung

$$z^k + A_{k-1}z^{k-1} + \cdots + A_1 z + A_0 = 0$$

hat k Wurzeln a_i, die laut Annahme die Ungleichheiten

$$(2) \quad |a_1| > |a_2| > \cdots > |a_k|$$

befriedigen. *Poincaré* zeigt nun, daß $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ einem bestimmten Grenzwert zustrebt, wenn n ins Unendliche zunimmt. Dieser Grenzwert ist eine der Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ist im allgemeinen gleich a_1, jedoch ist für gewisse partikuläre Lösungen der Grenzwert eine der anderen Wurzeln.

---

3) Wertvolle Ergänzungen hierzu finden sich in dem Lehrbuch von *G. Wallenberg* und *A. Guldberg*, Theorie der linearen Differenzengleichungen, Leipzig u. Berlin 1911. Dieses Buch enthält u. a. eine ausführliche Darstellung zahlreicher meist formaler Untersuchungen über Differenzengleichungen, die nicht innerhalb des Rahmens dieses Referats fallen.

4) *Poincaré*, Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies, Amer. J. Math. 7 (1885), p. 213—217, p. 237—258. Der Beweis von *Poincaré* ist von *Picard* präzisiert worden, vgl. *Picard*, Traité d'Analyse 3 (Paris 1908), p. 419—422.

Pincherle[5]) hat diese Partikulärintegrale näher untersucht, und zwar unter der Annahme, daß die Koeffizienten $p_i(n)$ rationale Funktionen von n sind. Insbesondere hat *Pincherle* die Wichtigkeit des von ihm sogenannten ausgezeichneten Integrals hervorgehoben und dessen Existenz bewiesen; es ist dies dasjenige bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Partikulärintegral, für welches der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

gleich der absolut kleinsten Wurzel a_k wird. Ohne die einschränkende Annahme zu machen, daß die $p_i(n)$ rationale Funktionen von n sind, hat *Perron*[6]) bewiesen, daß es immer k Partikulärintegrale $f_i(n)$ gibt, derart, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_i(n+1)}{f_i(n)} = a_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, daß $p_0(n) \neq 0$. Weitergehend beweist *Perron*[7]), daß, ohne die Annahme (2) zu machen, es immer k Lösungen gibt, derart, daß

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_i(n)|} = |a_i|,$$

sofern $p_0(n)$ für alle n von Null verschieden ist. *W. B. Ford* hat den Fall betrachtet, wo die Koeffizienten $p_i(n)$ derart gegen die Grenze A_i streben, daß

$$p_i(n) - A_i = O(\tau(n)),$$

wo $\tau(n)$ eine derartige positive Funktion ist, daß die Reihe $\sum \tau(n)$ konvergiert. Wenn die Wurzeln a_i der charakteristischen Gleichung alle voneinander und von Null verschieden sind, so beweist *Ford*[8]), gestützt auf die Untersuchungen von *Dini* über lineare Differentialgleichungen, folgendes: Wenn $a_1, a_2, \ldots a_h$ $(h \leq k)$ diejenigen Wurzeln sind, deren Modul den kleinsten Wert a hat, so existiert eine Lösung

5) *Pincherle,* Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle, Acta math. 16 (1893), p. 341—363; Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti, Giorn. mat. 32 (1894), p. 209—291.

6) *Perron,* Über einen Satz des Herrn Poincaré, J. reine angew. Math. 136 (1909), p. 17—38. Für Gleichungen zweiter Ordnung vgl. *Van Vleck,* On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values, Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 255—256; *Pincherle,* Studio sopra un teorema del Poincaré relativo alle equazioni ricorrenti, Rend. Accad. Bologna, Sessione delli 26 Marzo 1905.

7) *Perron,* Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung, J. reine angew. Math. 137 (1910), p. 6—64; Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen, Math. Ann. 84 (1921), p. 1—15.

8) *Ford,* Sur les équations linéaires aux differences finies, Ann. Mat. pura ed appl. (3) 13 (1907), p. 263—328.

der Differenzengleichung, welche für ganze Werte von n, die größer als eine bestimmte Zahl sind, die Form hat:

$$f(n) = c_1 a_1^n + c_2 a_2^n + \cdots + c_h a_h^n + a^n \varepsilon(n),$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_h$ willkürliche Konstanten sind, während

$$\varepsilon(n) = O\Big(\sum_{\nu=n}^{\infty} \tau(\nu)\Big).$$

Verschiedene Fälle, wo die charakteristische Gleichung gleiche Wurzeln hat, oder wo sie mehrere unendlich große oder verschwindende Wurzeln hat, sind von *Ford*[9]), *Nörlund*[10]) und *Perron*[11]) untersucht worden. *Perron* betrachtet die Differenzengleichung

$$f(n+k) + \sum_{i=0}^{k-1} n^{\beta_i} p_i(n) f(n+i) = 0, \qquad (p_0(n) \neq 0)$$

wo die β_i beliebige reelle Zahlen sind, und die absoluten Werte der $p_i(n)$, soweit sie nicht identisch verschwinden (in welchem Fall $\beta_i = -\infty$ gesetzt wird), mit wachsendem n gegen endliche, von Null verschiedene Grenzwerte konvergieren. Markiert man in einem rechtwinkligen X-Y-Koordinatensystem die $k+1$ Punkte mit den Koordinaten

$$0, 0; \quad i, \beta_{k-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

und umspannt sie mit einem nach der positiven Y-Seite konvexen *Newton-Puiseux*schen Polygonzug, dessen Strecken $s_1, s_2, \ldots s_\sigma$ seien, derart, daß die Strecke s_λ den Richtungskoeffizienten q_λ und eine Projektion von der (ganzzahligen) Länge r_λ hat, so gibt es k linear unabhängige Integrale, die derart in σ Klassen zerfallen, daß für die Integrale der λ^{ten} Klasse und ihre linearen Verbindungen stets

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{|f(n)|}{(n!)^{q_\lambda}}}$$

endlich und von Null verschieden ist; die Anzahl der Integrale der

9) *Ford*, a. a. O. und Studies on divergent series and summability, Michigan Science series 2 (New York 1916), p. 73—74.

10) *Nörlund*, Sur la convergence des fractions continues, Paris C. R. 147 (1908), p. 585—587; Sur les équations aux différences finies, Ib. 149 (1909), p. 841—843; Fractions continues et différences réciproques, Acta math. 34 (1910), p. 1—108.

11) *Perron*, Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen, Math. Ann. 66 (1909), p. 446—487; Über lineare Differenzengleichungen, Acta math. 34 (1910), p. 109—137; Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen im Unendlichen, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 129—137. An *Perrons* Arbeiten schließt sich die Dissertation von *P. Kreuser*, Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen, Borna-Leipzig 1914, an.

λ^{ten} Klasse ist r_λ. Nach *Kreuser* gehört zur λ^{ten} Klasse eine charakteristische Gleichung vom Grad r_λ, und der obige lim sup ist gleich dem absoluten Betrag einer Gleichungswurzel; so zerfällt jede der σ Klassen noch in Unterklassen entsprechend den verschiedenen absoluten Beträgen der Wurzeln.

Betrachten wir weiter die Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$f(n+2) - (2 + p(n))f(n+1) + (1 + q(n))f(n) = 0,$$

wo

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} q(n) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung hat hier die Doppelwurzel 1. Im allgemeinen existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} \tag{3}$$

nicht. Aber wenn die Ungleichungen

$$p(n) > 0, \qquad p(n) > q(n)$$

für alle hinreichend großen Werte von n erfüllt sind, so hat *Perron*[12]) nachgewiesen, daß der Grenzwert (3) existiert und gleich 1 ist.

Wenn die k Koeffizienten $p_i(n)$ der Differenzengleichung (1) für große reelle positive Werte von n durch Potenzreihen der Form:

$$p_i(n) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{i,s}}{n^s}$$

asymptotisch dargestellt werden, so gibt es k der Differenzengleichung formell genügende, divergente Reihen, welche ähnlich gebildet sind wie die einer linearen Differentialgleichung genügenden *Thomé*schen Normalreihen. Unter der Annahme, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung voneinander und von Null verschieden sind, hat *Horn*[13]) durch eine Methode sukzessiver Annäherungen bewiesen, daß diese k Reihen k linear unabhängige Lösungen für große ganzzahlige positive n im Sinne von *Poincaré* asymptotisch darstellen. Zu einem ähnlichen Resultat gelangt *Ford*[14]) für Gleichungen zweiter Ordnung unter Benutzung eines anderen Approximationsverfahrens. *Erb*[15]) hat

12) Über lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung, deren charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, Sitzungsb. Akad. Heidelberg 1917, A. 17.

13) *Horn,* Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen, Math. Ann. 53 (1900), p. 177—192; Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für große Werte der Veränderlichen, J. reine angew. Math. 138 (1910), p. 159—191.

14) *Ford,* On the integration of the homogeneous linear difference equation of second order, Trans. Amer. math. Soc. 10 (1909), p. 319—336.

15) *Th. Erb*, Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differenzengleichungen durch Potenzreihen, Diss. Pirmasens 1913.

die hier genannten Untersuchungen von *Perron* und *Horn* fortgesetzt. Er betrachtet die obige *Perron*sche Gleichung, wo die β_i rationale Zahlen sind, während die Koeffizienten $p_i(n)$ sich durch Reihen der Form

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{i \cdot s}}{n^{\frac{s}{\nu}}}$$

asymptotisch darstellen lassen, wobei ν eine ganze positive Zahl ist. *Erb* leitet die entsprechenden asymptotischen Darstellungen der Lösungen unter der Annahme ab, daß die *Kreuser*schen charakteristischen Gleichungen nicht gleiche Wurzeln haben, und daß noch einer weiteren ähnlichen Bedingung genügt ist.

Für Systeme linearer Differenzengleichungen erhält man natürlich einen dem *Poincaré*schen Satz entsprechenden ähnlichen Satz. Der ausführliche Beweis hierfür ist von *Van Vleck*[16]) und *Perron*[17]) gegeben.

Die hier genannten Untersuchungen haben wichtige Anwendungen[18]) gefunden bei der Bestimmung des Konvergenzgebiets von Reihen oder Kettenbrüchen und beim Studium der Integrale von linearen Differentialgleichungen. Bei solchen Anwendungen handelt es sich ausschließlich um das asymptotische Verhalten der Lösungen der Differenzengleichung für große *ganzzahlige* Werte der Veränderlichen. Eine eigentliche Theorie der Differenzengleichungen entsteht aber erst, wenn man der Veränderlichen, um Aufschluß über die analytischen Eigenschaften der Lösungen zu erhalten, beliebige reelle oder komplexe Werte gibt. Diesbezügliche Untersuchungen sind nahezu gleichzeitig von *Birkhoff*, *Carmichael*, *Galbrun* und *Nörlund* angefangen. Dabei

---

16) *Van Vleck*, On the extension of a theorem of Poincaré for difference-equations, Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 342—352.

17) *Perron*, Über Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung, J. reine angew. Math. 147 (1917), p. 36—53.

18) Vgl. zum Beispiel *Perron*, Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten, Acta math. 34 (1910), p. 139—163. *Nörlund*, Fractions continues et différences réciproques, Acta math. 34 (1910), p. 1—108. *E. R. Neumann*, Der Poincarésche Satz über Differenzengleichungen in seiner Anwendung auf eine Integralgleichung, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 238—261. *Abramesco*, Sur les séries de polynomes à une variable complexe, J. math. pures appl. (9) 1 (1922), p. 77—84. Über Anwendungen der Differenzengleichungen auf Fragen der Technik und Physik und besonders über eine elementare Anwendung des Satzes von *Poincaré* siehe Bericht von *Wallenberg*, Anwendung eines Satzes von Poincaré aus der Theorie der linearen Differenzengleichungen auf die Zahlenreihe des Fibonacci, Sitzungsb. Berliner math. Ges. 14 (1915), p. 32—40. Über weitere technische Anwendungen vgl. *P. Funk*, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen, Berlin 1920.

hat es sich herausgestellt, daß die Potenzreihen, deren man sich bei funktionentheoretischen Untersuchungen gewöhnlich bedient, durchaus ungeeignet sind, um die Lösungen darzustellen. Denn die Potenzreihenentwicklungen, die man bilden kann, sind in den Fällen divergent, die uns am meisten interessieren müssen, nämlich wenn es sich um eine Entwicklung in der Nähe eines singulären Punktes handelt. Will man aber in der Nähe eines regulären Punktes entwickeln, so erhält man Reihen, die in einem allzu beschränkten Bereich konvergieren. Außerdem erfordert die Bestimmung der Potenzreihen umständliche und wenig übersehbare Rechnungen. Es gibt dagegen andere, bisher wenig beachtete Reihentypen, die für die vorliegende Untersuchung besonders gut geeignet sind, und die wir deshalb hier besprechen müssen. Es sind dies die sogenannten Fakultäten- und Interpolationsreihen.

2. **Fakultätenreihen.** Eine Reihe von der Form

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s s!}{x(x+1)\dots(x+s)} \tag{4}$$

nennt man eine Fakultätenreihe. Die Koeffizienten a_s sind dabei von x unabhängig angenommen. Der Kürze halber setzen wir $x = \sigma + i\tau$. Der Konvergenzbereich der Reihe (4) ist, wie es *Jensen*[19]), *Nielsen*[20]) und *Landau*[21]) gezeigt haben, eine Halbebene, die links von einer Senkrechten zur Abszissenachse, der Konvergenzgeraden, begrenzt wird. In anderen Worten: es existiert eine reelle Zahl λ derart, daß die Reihe für $\sigma > \lambda$ konvergent und für $\sigma < \lambda$ divergent ist. Die Zahl λ heißt die Konvergenzabszisse der Reihe. In ihrer Konvergenzhalbebene braucht eine Fakultätenreihe nicht absolut zu konvergieren. *Nielsen*[22]) hat bewiesen, daß das Gebiet der absoluten Konvergenz ebenfalls eine Halbebene ist, welche links von einer Geraden $\sigma = \mu$ begrenzt ist. Die Reihe konvergiert somit bedingt im Bande $\lambda < \sigma < \mu$. Die Zahl μ befriedigt die Ungleichheit $\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$.

Der erste, der sich mit Fakultätenreihen eingehender beschäftigt

19) *Jensen,* Tidsskrift for Math. (4) 5 (1881), p. 130, Aufgabe 451; Om Raekkers Konvergens, Ib. (5) 2 (1884), p. 69—72.

20) *Nielsen,* Recherches sur les séries de factorielles, Ann. Éc. Norm. (3) 19 (1902), p. 409—453; Les séries de factorielles et les opérations fondamentales, Math. Ann. 59 (1904), p. 355—376; Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, p. 237—299.

21) *Landau,* Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzungsb. Akad. München 36 (1906), p. 151—218.

22) a. a. O. Handbuch usw., p. 238.

hat, ist *Schlömilch*[23]); er hat besonders ihren Zusammenhang mit dem Integral von *Laplace*

$$\int_0^1 t^{x-1}\varphi(t)\,dt$$

erkannt. Diesen Zusammenhang haben später *Pincherle*[24]) und *Nielsen*[25]) näher untersucht, aber erst *Landau* hat (a. a. O.) die Theorie der Fakultätenreihen auf eine sichere Grundlage gestellt.

Die Fakultätenreihe stellt eine analytische Funktion $\Phi(x)$ dar, die sich im Inneren des Konvergenzbereichs regulär verhält, die Punkte $x = 0, -1, -2, \ldots$ ausgenommen, wenn solche Punkte im Inneren liegen. Der Punkt $x = \infty$ ist im allgemeinen eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion $\Phi(x)$. Setzen wir

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} + R_n(x),$$

so hat *Nörlund*[26]) gezeigt, daß $|x^{n+1}R_n(x)|$ in der Halbebene $\sigma \geq \varkappa$ kleiner als eine Konstante bleibt; hier bedeutet $\varkappa$ eine positive Größe, größer als die Konvergenzabszisse λ. Die Fakultätenreihe läßt daher mit beliebiger Annäherung das Verhalten der durch sie dargestellten Funktion $\Phi(x)$ erkennen, wenn x innerhalb des Konvergenzgebiets ins Unendliche geht, und sie erweist sich somit als ein sehr nützliches Werkzeug, wenn man eine analytische Funktion in der Umgebung eines singulären Punktes untersuchen will. Sie liefert eine Darstellung der Funktion, die gültig bleibt, wenn man sich dem singulären Punkte in der Weise nähert, daß man in einem gewissen, von ihm ausstrahlenden Winkelraum verbleibt; dafür ist nur der singuläre Punkt ins Unendliche zu verlegen. In dieser Beziehung erweist sich also die Fakultätenreihe als der Potenzreihe wesentlich überlegen.

Für die Anwendung der Fakultätenreihen in der Funktionentheorie ist es von Bedeutung zu wissen, wie die Konvergenzabszisse der Reihe von den analytischen Eigenschaften der entsprechenden

23) *Schlömilch*, Über Fakultätenreihen, Ber. Ges. Leipzig 11 (1859), math. p. 109—137; Über die Entwickelung von Funktionen complexer Variablen in Fakultätenreihen, Ib. 15 (1863), p. 58—62.

24) *Pincherle*, Sur les fonctions déterminantes, Ann. Éc. Norm. (3) 22 (1905), p. 9—68; Sulle serie di fattoriali, Atti R. Accad. Linc. Rend. (5) 11_1 (1902), p. 139—144; Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali, Ib. (5) 12_2 (1903), p. 336—343.

25) *Nielsen*, Sur la représentation asymptotique d'une série de factorielles, Ann Éc. Norm. (3) 21 (1904), p. 449—458.

26) *Nörlund*, Diss. Kopenhagen 1910; Sur les séries de facultés, Acta math. 37 (1914), p. 327—387.

Funktion abhängt. Bei den Potenzreihen gilt bekanntlich, daß der Konvergenzkreis bis zum nächsten singulären Punkt reicht. So einfach liegt aber die Sache bei den Fakultätenreihen nicht; das Konvergenzproblem dieser Reihen hat *Nörlund*[27]) näher erörtert. Es sei $\Phi(x)$ eine Funktion, welche sich durch die Reihe (4) in einer gewissen Halbebene darstellen läßt. Dann gibt es eine reelle Zahl α von der Beschaffenheit, daß $\Phi(x)$ für $\sigma > \alpha + \varepsilon$ regulär und beschränkt ist, aber nicht in dem Streifen $\alpha - \varepsilon < \sigma < \alpha + \varepsilon$, wie klein auch die positive Größe ε sein mag. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß α positiv ist. Dann ist immer $\alpha \leq \lambda$, *und im allgemeinen ist α kleiner als die Konvergenzabszisse λ.* Bewegt sich x in der Halbebene $\sigma \geq \alpha + \varepsilon$ irgendwie ins Unendliche, so streben dabei $\Phi(x)$ und alle Ableitungen dieser Funktion nach $\frac{1}{x}$ gleichmäßig je einem Grenzwert zu. Wie kann man jetzt die analytische Fortsetzung der Funktion in dem Streifen $\alpha < \sigma < \lambda$ erhalten? Hierbei kommen zwei Transformationen in Frage, die beide in der Theorie der Differenzengleichungen eine wichtige Rolle spielen.

Erstens läßt sich die Funktion $\Phi(x)$ immer durch eine Fakultätenreihe der Form

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s\, s!}{(x+\varrho)(x+\varrho+1)\ldots(x+\varrho+s)} \tag{5}$$

darstellen, wo ϱ eine beliebige Zahl ist. Nehmen wir ϱ positiv an, so ist die Konvergenzabszisse λ_ϱ dieser Reihe eine kontinuierliche Funktion von ϱ, welche monoton abnimmt, wenn ϱ ins Unendliche wächst. Sie strebt somit einem Grenzwert λ_∞ zu. Man hat immer $\alpha \leq \lambda_\infty \leq \lambda_\varrho \leq \lambda$, und im allgemeinen ist λ_∞ größer als α. Es scheint somit, als ob weder λ noch μ noch λ_∞ mit einfachen analytischen Eigenschaften der Funktion $\Phi(x)$ in Zusammenhang steht.[28]) Die Reihe (5) gibt uns also die analytische Fortsetzung der Funktion in dem Streifen $\lambda_\varrho < \sigma < \lambda$; aber diese Transformation, die übrigens mit der *Cesàro*schen Summationsmethode äquivalent ist, erlaubt uns nicht in den Streifen $\alpha < \sigma < \lambda_\infty$ einzudringen.

Zweitens kann die Funktion $\Phi(x)$ sich immer durch eine Fakultätenreihe der Form

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_s\, s!}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)} \tag{6}$$

27) *Nörlund,* a. a. O. und Sur les séries de facultés, Paris C. R. 158 (1914), p. 1252—1253; Sur les séries de facultés et les méthodes de sommation de Cesàro et de M. Borel, Ib., p. 1325—1327.

28) Aus Untersuchungen von *H. Bohr* geht hervor, daß die Sache bei den *Dirichlet*schen Reihen ganz anders liegt.

darstellen, wenn ω positiv und größer als 1 ist. Noch mehr: es gibt eine positive Zahl Θ von der Beschaffenheit, daß die Entwicklung (6) gilt, wenn $\omega > \Theta$, nicht aber für $\omega < \Theta$. Es sei $\lambda(\omega)$ die Konvergenzabszisse der Reihe (6); da ist, für $\omega > \Theta$, $\lambda(\omega)$ eine kontinuierliche Funktion von ω, die monoton abnimmt, wenn ω wächst. $\lambda(\omega)$ strebt somit einem Grenzwert zu, wenn ω ins Unendliche wächst. Dieser Grenzwert ist gleich α. Die Grenzkonvergenzabszisse $\lambda(\infty) = \alpha$ ist somit eine Zahl, die zu den Singularitäten der durch die Reihe dargestellten Funktion $\Phi(x)$ in einfacher Beziehung steht. Es kommt vor, daß $\lambda(\omega) = \alpha$ schon für einen endlichen Wert ω_1 von ω; dann ist diese Gleichung ebenfalls erfüllt für $\omega > \omega_1$.

Betreffs des Verhaltens der Funktion $\Phi(x)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = \alpha$ hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Auf der Geraden $\sigma = \alpha$ liegt ein singulärer Punkt, oder der Streifen $\alpha - \varepsilon < \sigma < \alpha$ enthält unendlich viele singuläre Punkte, die sich der Geraden $\sigma = \alpha$ unbeschränkt nähern, wenn man auf ihr ins Unendliche wandert.

2. Die Funktion $\Phi(x)$ ist für $\sigma > \alpha_0$ regulär, wo $\alpha_0 < \alpha$. In diesem Falle strebt die Funktion $\Phi(x)$ keinem Grenzwert zu, wenn x, im Innern des Streifens $\alpha_0 < \sigma \leq \alpha$ verbleibend, ins Unendliche wächst; vielmehr genügt sie keiner Gleichung der Form

$$|\Phi(\sigma + i\tau)| = O(|\tau|^k), \qquad (\alpha_0 < \sigma \leq \alpha)$$

wie groß auch k angenommen wird.

Welche Funktionen lassen sich durch Fakultätenreihen darstellen? Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir, daß die Funktion $\Phi(x)$ sich in der Halbebene $\sigma \geq \alpha + \varepsilon$ asymptotisch durch eine Potenzreihe von der Form

$$\Phi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x^n} \tag{7}$$

darstellen läßt. Diese Reihe ist unbedingt und gleichmäßig summierbar im Sinne von *Borel* (durch die Exponentialmethode). Und umgekehrt: wenn die Reihe (7) im Sinne von *Borel* unbedingt und gleichmäßig summierbar ist, so läßt sich die entsprechende Funktion durch eine konvergente Fakultätenreihe (6) darstellen, wenn die positive Zahl ω geeignet gewählt wird.[29]) In den meisten Fällen, wo man sich di-

29) *Nörlund,* a. a. O. Vgl. dazu auch noch *Watson,* The Transformation of an asymptotic Series into a convergent Series of inverse Factorials, Rend. Circ. mat. Palermo 34 (1912), p. 41—88, wo ein ähnlicher, aber wesentlich speziellerer Satz bewiesen ist. Vgl. ferner *F. Nevanlinna,* Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen, Diss. Helsingfors 1918, wo die Untersuchung von *Watson* weitergeführt ist.

vergenter Potenzreihen bedient hat, kann man deshalb mit konvergenten Fakultätenreihen auskommen.[30])

3. Interpolationsreihen. Im dem Referat I D 3 (*Bauschinger*) ist schon die *Stirling*sche Interpolationsformel

$$F(x) = F(0) + \sum_{s=0}^{\infty} x(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)\dots(x^2 - s^2)(a_s + b_s x) \tag{8}$$

besprochen. Die Koeffizienten a_s und b_s sind von x unabhängig und werden durch die Werte der Funktion $F(x)$ in den Punkten $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ leicht ausgedrückt. Wenn diese Reihe in der Nähe irgendeines Punktes konvergiert, so konvergiert sie in jedem Kreise gleichmäßig und stellt somit immer eine ganze Funktion dar.[31]) Um eine genaue Abgrenzung der ganzen Funktionen, welche sich durch die *Stirling*sche Reihe darstellen lassen, zu erhalten, definieren wir eine stetige Funktion $\psi(v)$ folgendermaßen:

$$\psi(v) = \cos v \log\left(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2}\cos v\right)^2 + 2\sin v \arcsin\left(\sqrt{2}\sin v\right)$$

in dem Intervall $0 < v < \frac{\pi}{4}$, und $\psi(v) = \pi \sin v$ in dem Intervall $\frac{\pi}{4} < v < \frac{\pi}{2}$. $\psi(v)$ soll außerdem eine gerade periodische Funktion mit der Periode π sein. Die also definierte Funktion ist stetig und positiv für alle Werte von v. Sie ist monoton wachsend in dem Intervall $0 < v < \frac{\pi}{2}$, monoton abnehmend in dem Intervall $\frac{\pi}{2} \leq v < \pi$, und sie genügt den Ungleichungen

$$\pi \geq \psi(v) \geq 2\log\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Wenn die Reihe (8) konvergiert, so ist die ganze Funktion $F(x)$ von solcher Beschaffenheit, daß der Grenzwert

$$h(v) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log |F(re^{iv})|}{r}$$

existiert und $h(v) \leq \psi(v)$ für alle v. Umgekehrt: wenn $h(v) < \psi(v)$, läßt sich die ganze Funktion $F(x)$ durch die *Stirling*sche Reihe (8)

30) Über Anwendungen der Fakultätenreihen in der Theorie der Differentialgleichungen vgl. das Ref. II B 5 (*Hilb*), p. 492, und *Horn*, Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen, Jahresber. deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), p. 323—329.

31) *Nörlund,* Nogle Bemärkninger angaaende Interpolation med äquidistante Argumenter, Mitt. Ges. Wiss. Kopenhagen (math.-phys.) 4, No. 3 (1921), p. 1—34; Sur la formule d'interpolation de Stirling, Paris C. R. 174 (1922), p. 919—921; Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton, Ann. Éc. Norm. (3) 39 (1922), p. 343—403 und 40 (1923).

darstellen. Noch genauer läßt sich die Konvergenzbedingung folgendermaßen formulieren: Es sei $F(x) = F(re^{iv})$ eine ganze Funktion, welche den Ungleichungen

$$|F(x) - F(-x)| < r^{\beta_1} e^{r\psi(v)}, \quad |F(x) + F(-x)| < r^{\beta_2} e^{r\psi(v)}$$

für alle hinreichend großen r genügt. Diese Funktion läßt sich durch die Reihe (8) darstellen, wenn $\beta_1 < 0$, $\beta_2 < 1$. Diese Ungleichungen genügen nur, um bedingte Konvergenz zu sichern. Wenn aber $\beta_1 < -1$, $\beta_2 < 0$, wird die *Stirling*sche Reihe absolut konvergieren.

Mit der *Stirling*schen Reihe nahe verwandt ist die *Gauß*sche Interpolationsreihe:

$$(9) \qquad F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \binom{x+s}{2s} + \sum_{s=0}^{\infty} b_s \binom{x+s}{2s+1}.$$

Die ganze Funktion $F(x)$ läßt sich durch diese Reihe darstellen, wenn β_1 und β_2 beide negativ sind.

Es kann sich ereignen, daß für alle Werte von v $h(v) = \psi(v)$. Besonders interessant ist aber der Fall, daß $h(v) = \psi(v)$ in einer endlichen Anzahl von Punkten im Intervall $-\pi \leq v \leq \pi$, während $h(v) < \psi(v)$ für alle anderen v. Dann konvergiert die *Stirling*sche Reihe, wenn $\beta_1 < \frac{1}{2}$, $\beta_2 < \frac{3}{2}$, und die *Gauß*sche Reihe, wenn $\beta_1 < \frac{1}{2}$, $\beta_2 < \frac{1}{2}$.

In der Differenzenrechnung spielt außerdem noch *Newtons* Interpolationsformel:

$$(10) \qquad F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (x-1)(x-2)\ldots(x-s)$$

eine wichtige Rolle. Die Koeffizienten a_s beruhen auf den Werten der Funktion $F(x)$ für ganzzahlige positive x. Der Konvergenzbereich dieser Reihe ist, wie *Bendixson*[32]) als erster gezeigt, eine Halbebene, die links von der Konvergenzgeraden $\sigma = \lambda$ begrenzt wird. Wenn die Konvergenzabszisse λ gleich $-\infty$ ist, konvergiert die Reihe für alle endlichen Werte von x. Die *Newton*sche Reihe (10) stellt eine analytische Funktion $F(x)$ dar, die sich im Inneren des Konvergenzbereichs regulär verhält. Während die drei soeben besprochenen Reihendarstellungen nur auf eine Weise möglich sind, so gilt dies nicht mehr für die *Newton*sche Reihe. Wenn eine Funktion durch die Reihe (10) definiert ist, läßt sie sich durch unendlich viele andere Reihen von derselben Form darstellen, und man kann der Konvergenzabszisse einen beliebigen ganzzahligen Wert geben, der größer als eine bestimmte

32) *Bendixson*, Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauß, Acta math. 9 (1887), p. 15—34.

Zahl ist. *Frobenius*[33]) und *Pincherle*[34]) haben die Nullentwicklungen von der Form (10) untersucht und gezeigt, daß jede Nullentwicklung sich in der Form $c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \cdots + c_n\psi_n(x)$ schreiben läßt, wo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ beliebige Konstanten sind, während

$$\psi_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\binom{x-1}{s} \quad \text{und} \quad \psi_{r+1}(x) = \binom{x-1}{r}\psi_1(x-r).$$

Wenn c_n von Null verschieden ist, so ist die Konvergenzabszisse dieser Reihe gleich n. Die Reihe konvergiert noch in den Punkten $x = 1, 2, \ldots, n$ und ist für $x = r$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ gleich c_r, während sie im Innern der Konvergenzhalbebene gleich Null ist. Wenn die Funktion $F(x)$ für $\sigma > \alpha$ regulär ist, wollen wir im folgenden voraussetzen, daß die Koeffizienten der Reihe (10) so gewählt sind, daß der Wert der Reihe für alle ganzzahligen x, die größer als α sind, mit dem Wert der Funktion übereinstimmt.

Pincherle[35]) hat den Zusammenhang zwischen der *Newton*schen Reihe und den Integralen der Form

$$\int t^{x-1}\varphi(t)\,dt$$

erörtert. Von dieser Integraldarstellung machen *Nielsen*[36]) und *Carlson* Gebrauch. Setzen wir

$$\varphi(v) = \cos v \log(2\cos v) + v \sin v,$$

so hat *Carlson*[37]) bewiesen, daß die durch die Reihe (10) definierte Funktion $F(x)$ folgender Ungleichung genügt:

$$|F(\gamma + re^{iv})| < e^{r\varphi(v)}\frac{(1+r)^{\lambda + 1/2 + \varepsilon(r)}}{\sqrt{1 + r\cos v}},$$

wo $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$. Hier soll γ größer als die Konvergenzabszisse λ sein, und $\varepsilon(r)$ bedeutet eine Funktion, die gleichmäßig gegen Null konvergiert, wenn $r \to \infty$.

---

33) *Frobenius,* Über die Entwicklung analytischer Funktionen in Reihen, die nach gegebenen Funktionen fortschreiten, J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 1—30.

34) *Pincherle,* Sulle serie di fattoriali, Atti R. Accad. Linc. Rend. (5) 11_1 (1902), p. 139—144, p. 417—426.

35) *Pincherle,* Sur les fonctions déterminantes, Ann. Éc. Norm. (3) 22 (1905), p. 1—68. Vgl. auch *Pincherle*, Sopra un problema d'interpolazione, Rend. Circ. mat. Palermo 14 (1900), p. 142—144.

36) *Nielsen,* Sur quelques applications intégrales d'une série de coefficients binomiaux, Rend. circ. mat. Palermo 19 (1905), p. 129—139; Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, p. 124—127, p. 225—234.

37) *Carlson,* Sur les séries de coefficients binomiaux, Nova Acta R. Soc. Scient. Upsaliensis (4) 4, Nr. 3 (1915). Vgl. auch die Dissertation von *Carlson,* Sur une classe de séries de Taylor, Upsala 1914.

Das Konvergenzproblem der *Newton*schen Reihe hat *Carlson*[38]) und später *Nörlund*[39]) behandelt. Es sei $F(x)$ eine analytische Funktion, die in der Halbebene $\sigma > \gamma$ regulär ist und dort die Ungleichung

$$(11) \qquad |F(\gamma + re^{iv})| < e^{r\varphi(v)}(1+r)^{\beta+\varepsilon(r)}$$

erfüllt, wo $\varepsilon(r)$ für $\frac{\pi}{2} \geq v \geq -\frac{\pi}{2}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert, wenn $r \to \infty$. Diese Funktion läßt sich durch eine Reihe der Form (10) darstellen, deren Konvergenzabszisse die größere der beiden Zahlen γ und $\beta + \frac{1}{2}$ nicht übersteigt. Setzen wir

$$h(v) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log |F(\gamma + re^{iv})|}{r}, \quad \frac{\pi}{2} \geq v \geq \frac{\pi}{2}.$$

Wenn $h(v) < \varphi(v)$, konvergiert die Reihe absolut für $\sigma > \gamma$. Wenn aber $h(v)$ seine obere Grenze $\varphi(v)$ in einer endlichen Anzahl von Punkten im Innern des Intervalls $\frac{\pi}{2} > v > -\frac{\pi}{2}$ erreicht, während sonst $h(v) < \varphi(v)$, so wird die Konvergenzabszisse die größere der beiden Zahlen γ und β nicht übersteigen.

Wenn man die Funktion $F(x)$ über die Konvergenzgerade hinaus analytisch fortsetzen will, so kommen dieselben beiden linearen Transformationen wie bei den Fakultätenreihen in Frage. Die durch die Reihe (10) definierte Funktion $F(x)$ läßt sich immer durch eine Reihe der Form

$$(12) \qquad F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s (x + \varrho - 1)(x + \varrho - 2)\ldots(x + \varrho - s)$$

darstellen, wo ϱ eine positive Zahl ist. Es sei μ die untere Grenze der Zahlen β, für welche die Ungleichung (11) erfüllt ist. $\mu = \mu(\gamma)$ ist eine Funktion von γ, die niemals wächst, wenn γ wächst, und die außerdem in jedem Intervall, wo sie endlich ist, auch stetig ist Wenn $\mu(\gamma) = -\infty$, konvergiert die Reihe (12) für $\sigma > \gamma$. Wenn $\mu(\gamma) > -\infty$, so gibt es eine Zahl γ_1 derart, daß für $\sigma \geq \gamma_1 + \varepsilon$ die Funktion $F(x)$ regulär ist und die Funktion $\mu(\sigma)$ beschränkt ist, während diese Bedingungen nicht beide erfüllt sind für $\sigma \geq \gamma_1 - \varepsilon$, wie klein auch die positive Zahl ε gewählt wird. Die Gleichung

$$\mu(\gamma) + \tfrac{1}{2} - \gamma = \varrho$$

38) *Carlson,* a. a. O. *Bockwinkel* hat die Resultate *Carlsons* unter Benutzung eines anderen Beweisverfahrens wiedergefunden. Vgl. *Bockwinkel,* Über die Entwicklung einer Funktion in einer Binomialkoeffizientenreihe, Nieuw Archief voor Wiskunde 13 (1920), p. 189—208.

39) *Nörlund,* Sur la formule d'interpolation de Newton, Paris C. R. 174 (1922), p. 1108—1110; Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton, Ann. Éc. Norm. (3) 39 (1922), p. 343—403 und 40 (1923).

bestimmt γ als Funktion von ϱ. Die Funktion $\gamma(\varrho)$ ist stetig und monoton abnehmend. Es sei λ_ϱ die Konvergenzabszisse der Reihe (12), da ist

$$\gamma(\varrho) - 1 \leq \lambda_\varrho \leq \gamma(\varrho).$$

Wenn ϱ über jede Grenze hinaus wächst, strebt die Konvergenzabszisse λ_ϱ dem Grenzwert γ_1 zu. Wenn $\mu(\gamma_1 + 0)$ endlich ist, so ist schon $\lambda_\varrho = \gamma_1$ für $\varrho \geq \mu(\gamma_1 + 0) + \frac{1}{2} - \gamma_1$. Die Reihe (12) gibt uns also die analytische Fortsetzung der Funktion in dem Streifen $\gamma_1 < \sigma < \lambda$, aber sie erlaubt uns nicht, die Gerade $\sigma = \gamma_1$ zu überschreiten.

Die Funktion $F(x)$ läßt sich ferner durch eine Reihe der Form

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s (x - \omega)(x - 2\omega) \ldots (x - s\omega) \tag{13}$$

darstellen, wo ω positiv ist. Es gibt eine positive Zahl ω_1 derart, daß diese Entwicklung für $0 < \omega < \omega_1$ gültig ist, nicht mehr aber für $\omega > \omega_1$. Wenn σ eine genügend große feste Zahl ist, kann man eine positive Zahl k finden, derart daß

$$|F(\sigma + i\tau)| = O(e^{k|\tau|}).$$

Es sei ξ die untere Grenze der Zahlen k, für welche diese Gleichung erfüllt ist. Alsdann ist $\xi = \xi(\sigma)$ eine nicht negative monotone Funktion von σ. Es gibt nun eine reelle Zahl α, derart daß für $\sigma > \alpha + \varepsilon$ die Funktion $F(x)$ regulär und die Funktion $\xi(\sigma)$ beschränkt ist, während diese Bedingungen nicht beide erfüllt sind für $\sigma > \alpha - \varepsilon$, wie klein auch die positive Zahl ε gewählt wird. Die Konvergenzabszisse $\lambda(\omega)$ der Reihe (13) strebt dem Grenzwert α zu, wenn $\omega \to 0$. Es kann der Fall eintreten, daß $\lambda(\omega)$ schon für einen positiven Wert von ω gleich α wird. Setzen wir

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\,\xi(\alpha + 0)},$$

so ist $\omega_0 \geq 0$. Wenn ω_0 positiv ist, so ist $\lambda(\omega)$ konstant und gleich α für $0 < \omega \leq \omega_0$. Im Innern des Intervalls $\omega_0 < \omega < \omega_1$ ist $\lambda(\omega)$ dagegen monoton wachsend und stetig; sie wird durch die Gleichung

$$\xi(\lambda(\omega)) = \frac{\pi}{2\omega}$$

eindeutig bestimmt.

Nach vorstehendem ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $F(x)$ durch eine Reihe der Form (12) darstellbar ist, daß sie in einer Halbebene $\sigma > \alpha$ regulär ist und dort die Ungleichung

$$|F(x)| < e^{k|x|}$$

erfüllt, wo k eine positive Zahl ist.

Konvergenzbedingungen für die Reihen von *Newton, Stirling* oder *Gauß*, die jedoch von wesentlich geringerer Tragweite als die vor-

genannten sind, haben *Rietti*[40]), *Whittaker*[41]), *Kameda*[42]), *Ogura*[43]), *Fujiwara*[44]) und *Okada*[45]) hergeleitet. Neuerdings haben *Pólya*[46]) und *Carlson*[47]) sehr schöne Anwendungen der Reihen (8) und (10) zur Untersuchung der sogenannten ganzwertigen Funktionen gemacht.

Verallgemeinerungen der hier besprochenen Fakultäten- und Interpolationsreihen haben *Frobenius*[48]), *Hermite*[49]), *Bendixson*[50]), *Pincherle*[51]), *Runge*[52]), *Teixeira*[53]), *Martinotti*[54]), *Faber*[55]), *Okada*[56]) und *Carmichael*[57])

---

40) *Rietti*, Alcuni sviluppi in serie di fattoriali, Giorn. mat. 51 (1913), p. 240—245.

41) *Whittaker*, On the Functions which are represented by the Expansions of the Interpolation-Theory, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 35 (1915), p. 181—194.

42) *Kameda*, On the Theory on finite Differences, Tôhoku math. J. 16 (1919), p. 62—72.

43) *Ogura*, On a certain transcendental integral Function in the Theory of Interpolation, Tôhoku math. J. 17 (1920), p. 64—72; On the Theory of Interpolation, Ib. p. 129—145; On some central Difference Formulas of Interpolation, Ib. p. 232—241; Sur la théorie de l'interpolation de Stirling et les zéros des fonctions entières, Bull. Sc. math. (2) 45 (1921), p. 31—40; Sur la théorie de l'interpolation, C. R. du Congrès international des mathématiciens, Toulouse 1921, p. 316—322.

44) *Fujiwara*, Über die Gültigkeitsbedingung der Interpolationsformeln von Gauß, Tôhoku math. J. 20 (1921), p. 18—21.

45) *Okada*, On the Representations of Functions by the Formulas of Interpolation, Ib. p. 79—96.

46) *Pólya*, Über ganzwertige ganze Funktionen, Rend. Circ. mat. Palermo 40 (1915), p. 1—16; Über ganze ganzwertige Funktionen, Gött. Nachr. (math.-phys.) 1920, p. 1—10; *Hardy*, On a theorem of Mr. G. Pólya, Proc. Cambr. philos. Soc. 19 (1919), p. 60—63; *Landau*, Note on Mr. Hardys extension of a theorem of Mr. Pólya, Ib. 20 (1920), p. 14—15.

47) *Carlson*, Über ganzwertige Funktionen, Math. Ztschr. 11 (1921), p. 1—23.

48) *Frobenius*, Über die Entwicklung analytischer Funktionen in Reihen, die nach gegebenen Funktionen fortschreiten, J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 1—30.

49) *Hermite*, Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Ib. 84 (1878), p. 70—79 = Œuvres 3, Paris 1912, p. 432—443.

50) *Bendixson*, Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauß, Acta math. 9 (1889), p. 15—34.

51) *Pincherle*, Sull'interpolatione, Mem. Ist. Bologna (5) 3 (1893), p. 293—318; Sulle serie di fattoriali generalizzate, Rend. Circ. mat. Palermo 37 (1914), p. 379—390.

52) *Runge*, Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten, Ztschr. Math. Phys. 46 (1901), p. 224—243.

53) *Teixeira*, Sur la convergence des formules d'interpolation de Lagrange, de Gauß etc., J. reine angew. Math. 126 (1903), p. 116—162.

54) *Martinotti*, Su le serie d'interpolazione, Reale Ist. Lomb. Rend. (2) 43 (1910), p. 391—401; Ulteriori ricerche su le serie d'interpolazione, Ib. p. 556—569; Su la convergenza dei polinomi e delle serie d'interpolazione, Ib. p 760—770.

untersucht. Für die Theorie der Differenzengleichungen werden besonders die vom letztgenannten Verfasser betrachteten Entwicklungen von Bedeutung sein.

4. Integration von Differenzengleichungen durch Fakultätenreihen. Wir nehmen jetzt an, daß die Koeffizienten $P_i(x)$ in der Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(x) f(x+i) = 0 \tag{14}$$

analytische Funktionen sind, und wollen dann die Lösungen als Funktionen der komplexen Variablen x untersuchen. Die Bestimmung der allgemeinen Lösung läßt sich auf die Bestimmung eines Fundamentalsystems von Lösungen $f_1(x), f_2(x) \ldots f_k(x)$ reduzieren, die analytische Funktionen von x sind derart, daß zwischen ihnen keine homogene lineare Relation

$$\pi_1(x) f_1(x) + \pi_2(x) f_2(x) + \cdots + \pi_k(x) f_k(x) = 0$$

besteht, worin die $\pi_i(x)$ periodische Funktionen mit der Periode 1 sind, die nicht sämtlich verschwinden. Die Determinante des Fundamentalsystems

$$\begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x) & \ldots & f_k(x) \\ f_1(x+1), & f_2(x+1) & \ldots & f_k(x+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(x+k-1), & f_2(x+k-1) & \ldots & f_k(x+k-1) \end{vmatrix}$$

kann für keinen Wert von x verschwinden, der nicht mit singulären Stellen der Differenzengleichung kongruent ist.[58]) Die allgemeine Lösung hat dann die Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \pi_i(x) f_i(x),$$

---

55) *Faber,* Beitrag zur Theorie der ganzen Funktionen, Math. Ann. 70 (1911), p. 48—78.

56) *Okada,* a. a. O. p. 64—79, p. 96—99.

57) *Carmichael,* On a general class of series of the form $\sum c_n g(x+n)$, Trans. Amer. math. Soc. 17 (1916), p. 207—232; Examples of a remarkable class of series, Bull. Amer. math. Soc. 23 (1917), p. 407—425. On the asymptotic character of functions defined by series of the form $\sum c_n g(x+n)$, Amer. J. Math. 39 (1917), p. 385—403; On the representation of functions in series of the form $\sum c_n g(x+n)$, Ib. 40 (1918), p. 113—126.

58) *Casorati,* Il calcolo delle difference finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle ordierne ricerche basate sullo variabilità complessa, Ann. mat. pura appl. (2) 10 (1880), p. 10—43; *Pincherle,* Le operzioni distributive e le loro applicazioni all' analisi, Bologna 1901, p. 218 bis 228; *Wallenberg,* Theorie der linearen Differenzengleichungen, Leipzig und Berlin 1911, p. 32—50; *Nörlund,* Sur l'existence de solutions d'une équation linéaire aux différences finies, Ann. Éc. Norm. (3) 31 (1914), p. 208—213.

wo $\pi_i(x)$ willkürliche Funktionen sind, die die Periodizitätsbedingungen $\pi_i(x) = \pi_i(x+1)$ befriedigen.

Setzen wir

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}, \quad \underset{\omega}{\Delta^n} f(x) = \underset{\omega}{\Delta}\left(\underset{\omega}{\Delta^{n-1}} f(x)\right),$$

wobei $\underset{\omega}{\Delta^0} f(x) = f(x), \quad \underset{\omega}{\Delta^1} f(x) = \underset{\omega}{\Delta} f(x),$

so läßt sich die Gleichung (14) immer in der Form

$$(15) \qquad \sum_{i=0}^{k} p_i(x)\, x^i \underset{-1}{\Delta^i} f(x) = 0$$

schreiben. Wir nehmen zunächst an, daß die Koeffizienten $p_i(x)$ Funktionen sind, die in einer gewissen Halbebene sich durch Fakultätenreihen der Form

$$(16) \qquad a_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s+1}}{x(x+1)\ldots(x+s)}$$

darstellen lassen und daß $p_k(x) = 1$ ist. Dann besitzt die Gleichung ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form[59])

$$(17) \qquad f_i(x) = x^{\varrho_i}(\varphi_0(x) + \varphi_1(x) \log x + \cdots + \varphi_n(x) (\log x)^n),$$

wo $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$ konvergente Fakultätenreihen der Form (16) sind. Diese Entwicklungen zeigen, daß die Lösungen $f_i(x)$ analytische Funktionen von x sind, die in einer gewissen Halbebene $\sigma > \lambda$ regulär sind. Wenn x in solcher Weise gegen Unendlich wächst, daß es beständig innerhalb des Konvergenzgebietes bleibt, so konvergieren die Fakultätenreihen gegen ihre konstanten Glieder, und $f_i(x)$ verhält sich asymptotisch wie

$$(18) \qquad f_i(x) \sim x^{\varrho_i}(k_0 + k_1 \log x + \cdots + k_n (\log x)^n),$$

wo $k_0, k_1 \ldots k_n$ Konstanten bezeichnen, die nicht alle Null sind. Bezeichnet man die singulären Stellen der Koeffizienten $p_i(x)$ mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, so ist ersichtlich, daß die Lösungen in unserem Fundamentalsystem in jedem endlichen Gebiete regulär sind, außer in den Punkten $0, -1, -2, -3, \ldots$, die Pole sind, und in den Punkten

$$\beta_s - i, \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, 3, \ldots \\ i = k, k+1, k+2, \ldots \end{pmatrix}$$

die Pole oder wesentlich singuläre Punkte sind. In der Nähe dieser Punkte verhalten sich die Lösungen wie eine rationale Funktion der

59) *Nörlund*, Sur les équations aux différences finies, Paris C. R. 149 (1909), p. 841—843; Über lineare Differenzengleichungen, Mém. Acad. Roy. Sc. Danemark (7) 6 (1911), p. 312—316; Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés, Rend. Circ. mat. Palermo 35 (1913), p. 177—216.

Koeffizienten. Wenn z. B. die Koeffizienten $p_i(x)$ meromorphe Funktionen von x sind, so sind die Lösungen $f_i(x)$ ebenfalls eindeutige meromorphe Funktionen.

Die hier gegebenen Sätze lassen sich umkehren. Jede lineare homogene Differenzengleichung der k-ten Ordnung, die ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form (17) hat, läßt sich auf die Form (15) bringen, wo die Koeffizienten $p_i(x)$ durch konvergente Fakultätenreihenentwicklungen dargestellt werden können.

Wenn wir die speziellere Voraussetzung machen, daß die Koeffizienten $p_i(x)$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes regulär sind, so kann man noch ein anderes Fundamentalsystem von Lösungen der Form (17) bilden, wo aber jetzt $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$ Fakultätenreihen der Form

$$a_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s+1}}{x(x-1)\dots(x-s)}$$

sind, die in einer gewissen Halbebene $\sigma < \lambda$ konvergieren. Zwischen den beiden Fundamentalsystemen existieren lineare Gleichungen, deren Koeffizienten periodische Funktionen von x sind. Diese Gleichungen zeigen, daß die Lösungen $f_i(x)$ durch den Ausdruck (18) für $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$ asymptotisch dargestellt werden, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl ist.

Für Systeme von linearen Differenzengleichungen hat *S. Stadler*[60]) entsprechende Sätze hergeleitet.

Hat eine Differenzengleichung der Form (14) rationale Koeffizienten, so kann man vermittels der *Laplace*schen Transformation

$$f(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt \tag{19}$$

die Lösung der Differenzengleichung auf die Lösung einer Differentialgleichung reduzieren. Nehmen wir an, daß die Koeffizienten in der Differenzengleichung (14) auf die Form

$$P_i(x) = \sum_{s=0}^{s=p} C_{i,s}(x+i)(x+i+1)\dots(x+i+s-1)$$

gebracht sind, wo die $C_{i,s}$ von x unabhängige Konstanten sind, und wo vorausgesetzt wird, daß $C_{k,p} \neq 0$ und $C_{0,p} \neq 0$. Bestimmt man $v(t)$ als Integral der Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i t^i Q_i(t) \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0, \tag{20}$$

wo

$$Q_i(t) = \sum_{s=0}^{s=k} C_{s,i} t^s,$$

60) *S. Stadler,* Sur les systèmes d'équations aux différences finies linéaires et homogènes, Thèse, Lund 1918.

so befriedigt $f(x)$ die Differenzengleichung, vorausgesetzt, daß der Integrationsweg in passender Weise gewählt wurde. Die singulären Stellen für die Differentialgleichung sind außer 0 und ∞ die Wurzeln *der charakteristischen Gleichung* $Q_p(t) = 0$. Es seien diese $a_1, a_2, \ldots a_k$, und stellen wir uns sie so geordnet vor, daß, wenn man $a_s = r_s e^{i\zeta_s}$ setzt,

$$0 \leq \zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \cdots \leq \zeta_k < 2\pi$$

ist. Wenn a_j eine n-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist, so nehmen wir vorläufig an, daß es zugleich eine $(n-m)$-fache Wurzel in $Q_{p-m}(t) = 0$ $(m = 1, 2 \ldots n-1)$ ist. Die singulären Stellen sind dann alle Stellen der Bestimmtheit. In der Umgebung von $t = a_j$ existieren n linear unabhängige Integrale von der Form

$$v_j = (t-a_j)^{\varrho_j} \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \psi_\nu(t-a_j)(\log(t-a_j))^\nu,$$

wo $\psi_\nu(t-a)$ eine in der Umgebung von $t = a$ reguläre Funktion ist. Mit a_j als Zentrum zeichnen wir einen Kreis mit so kleinem Radius, daß alle andern singulären Stellen außerhalb dieses Kreises liegen. Es möge der Radiusvektor des Punktes a_j (bzw. eine Verlängerung des Radiusvektors) den Kreis im Punkte b_j (bzw. c_j) schneiden und l_j eine Schleife bezeichnen, die von der Geraden von Null bis b_j, dem in positiver Umlaufrichtung durchlaufenen Kreis und der Geraden von b_j bis Null zusammengesetzt ist; es möge ferner L_j eine Schleife bezeichnen, die von der Geraden von ∞ bis c_j in der Verlängerung des Radiusvektors, dem in negativer Umlaufrichtung durchlaufenen Kreis und von der Geraden von c_j bis ∞ gebildet wird. Wir setzen jetzt[61])

$$f_j(x) = \int_{l_j} t^{x-1} v_j(t)\, dt, \tag{21}$$

$$\bar{f}_j(x) = \int_{L_j} t^{x-1} v_j(t)\, dt \tag{22}$$

und bezeichnen die Nullpunkte für $P_0(x)$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und die Nullpunkte für $P_k(x-k)$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_p$. Dann bilden $f_1(x), f_2(x) \ldots f_k(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (14), und die Integrale (21) konvergieren, wenn x einen größeren reellen Teil hat als

61) *Nörlund*, Sur la convergence des fractions continues, Paris C. R. 147 (1908), p. 585—587; Sur les équations linéaires aux différences finies, Ib. 155 (1912), p. 1485—1487; 156 (1913), p. 51—53; Bidrag til de lineaere Differensligningers Theori, Diss. Kopenhagen 1910; Über lineare Differenzengleichungen, Mém. Acad. Roy. Sc. Danemark (7) 6 (1911), p. 309—326; Fractions continues et différences réciproques, Acta math. 34 (1910), p. 1—108; Sur les équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels, Ib. 40 (1915), p. 191—249.

diejenige der Zahlen α_s, deren reeller Teil am größten ist. Ebenso bilden $\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x) \ldots \bar{f}_k(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differenzengleichung, und die Integrale (22) konvergieren, wenn x einen kleineren reellen Teil hat als diejenige der Wurzeln γ_s, deren reeller Teil am kleinsten ist. Die Lösungen $f_j(x)$ sind meromorphe Funktionen von x mit Polen in den Punkten

$$\alpha_s - n. \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, 3 \ldots p \\ n = 0, 1, 2, 3 \ldots \end{pmatrix}$$

Die Lösungen $\bar{f}_j(x)$ sind meromorphe Funktionen mit Polen in den Punkten

$$\gamma_s + n. \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, 3 \ldots p \\ n = 0, 1, 2, 3 \ldots \end{pmatrix}$$

Für alle andern endlichen Werte von x sind sie regulär. Es kommt nun besonders darauf an, diese Funktionen in der Umgebung des unendlich fernen Punktes zu untersuchen. Für die Lösung $f_j(x)$ erhält man eine Entwicklung der Form

$$(23) \qquad f_j(x) = a_j^x x^{-\varrho_j} \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \varphi_\nu(x) (\log x)^\nu,$$

wo die $\varphi_\nu(x)$ Fakultätenreihen der Form (6) sind, die in einer gewissen Halbebene $\sigma > \lambda$ konvergieren. Die Lösung $\bar{f}_j(x)$ läßt sich ebenfalls durch eine Entwicklung der Form (23) darstellen, wo aber jetzt die $\varphi_\nu(x)$ Fakultätenreihen der Form

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_s \cdot s!}{x(x-\omega) \ldots (x - s\omega)}$$

sind, die in einer gewissen Halbebene $\sigma < \bar{\lambda}$ konvergieren. Diese Entwicklungen zeigen, wie die Lösungen sich bei Annäherung an den Punkt $x = \infty$ vom Innern der Konvergenzhalbebene verhalten. Besonders hat man

$$(24) \qquad \lim_{|x| \to \infty} \frac{f_j(x)}{a_j^x x^{-\varrho_j - 1} (\log x)^n} = k$$

gleichmäßig für $\frac{\pi}{2} \geq \operatorname{Arg} x \geq -\frac{\pi}{2}$, und

$$(25) \qquad \lim_{|x| \to \infty} \frac{\bar{f}_j(x)}{a_j^x x^{-\varrho_j - 1} (\log x)^n} = \bar{k},$$

gleichmäßig für $\frac{3\pi}{2} \geq \operatorname{Arg} x \geq \frac{\pi}{2}$, wo k und $\bar{k}$ von Null verschiedene Konstanten bezeichnen, während n eine ganze positive Zahl ist. Die Winkelräume, innerhalb welcher die asymptotischen Werte der Lösungen sich derart unmittelbar bestimmen lassen, ergänzen sich unter-

einander. Um die Lösungen in der ganzen Umgebung von $x = \infty$ zu untersuchen, liegt es deshalb nahe, Relationen zwischen den beiden Fundamentalsystemen zu suchen. Diese Relationen haben eine sehr einfache Form. Um sie zu bestimmen, kann man in $f_j(x)$ den Integrationsweg l_j abändern, doch ohne irgendeinen singulären Punkt zu überschreiten, bis er zuletzt aus einer Reihe von Schleifen $L_1, L_2 \ldots L_k$ und einem Kreis mit Null als Zentrum besteht, dessen Radius wir über jede Grenze hinaus wachsen lassen. Es möge α_j eine n-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung sein und

$$\alpha_j = \alpha_{j+1} = \cdots = \alpha_{j+n-1}.$$

Es gilt dann folgende Gleichung:

$$f_j(x) = \bar{f}_j(x) + \sum_{\nu=j}^{\nu=k} \pi_\nu(x) \bar{f}_\nu(x) + e^{2\pi i x} \sum_{\nu=1}^{\nu=j-1} \pi_\nu(x) \bar{f}_\nu(x),$$

wo
$$\pi_\nu(x) = \sum_{s=1}^{s=p} \sum_{n=1}^{n=m_s} \frac{A_{s,n}^{(\nu)}}{(e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1)^n}.$$

m_s bezeichnet hier die Multiplizität der Wurzel α_s, und die von x unabhängigen Konstanten $A_{s,n}^{(\nu)}$ können bestimmt werden, wenn wir die Gruppe der Differentialgleichung (20) als bekannt voraussetzen. Diese linearen Relationen mit periodischen Koeffizienten bilden einen Kernpunkt der Theorie. Sie zeigen, wie sich jede Lösung $f_j(x)$ verhält, wenn x gegen ∞ längs einer willkürlichen Linie wächst. Die Umgebung des unendlich fernen Punktes wird in eine Reihe von Winkelräumen geteilt, von denen der eine eine Öffnung hat, die $\geq \pi$ ist; innerhalb jedes dieser Winkelräume gilt eine asymptotische Gleichung der Form (24), aber die Lösung $f_j(x)$ wird innerhalb verschiedener Winkelräume durch verschiedene Entwicklungen asymptotisch dargestellt.

Wenn die obengenannten Voraussetzungen über die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ der charakteristischen Gleichung nicht erfüllt sind, lassen sich die Lösungen nicht mehr durch Fakultätenreihen darstellen. Statt dessen erhält man Entwicklungen der Form

$$f_j(x) = \left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)\right)^\mu \alpha_j^x \varphi(x),$$

wo q eine ganze Zahl und μ eine rationale Zahl ist, während $\varphi(x)$ eine *Newton*sche Reihe der Form (13) bedeutet. Diese Entwicklungen geben ebenfalls Aufschlüsse über das asymptotische Verhalten der Lösungen, wenn auch nicht mit so großer Annäherung wie die Fakultätenreihendarstellungen.

5. Untersuchungen von Birkhoff. Wegen der großen Einfachheit der Matrixbezeichnung betrachtet *Birkhoff*[62]) anstatt einer einzelnen Gleichung ein System von n linearen Differenzengleichungen erster Ordnung

$$f_i(x+1) = \sum_{j=1}^{j=n} p_{ij}(x) f_j(x). \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{26}$$

Hier sind die Koeffizienten $p_{ij}(x)$ rationale Funktionen mit einem Pol μter Ordnung in $x = \infty$. Man hat somit

$$p_{ij}(x) = c_{ij} x^\mu + c_{ij}^{(1)} x^{\mu-1} + \cdots \qquad (|x| > R)$$

Außerdem wird noch vorausgesetzt, daß die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_n$ der charakteristischen Gleichung

$$| c_{ij} - \delta_{ij} \varrho | = 0$$

(wo $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$ und $\delta_{ii} = 1$) voneinander und von Null verschieden sind. Wenn die n Systeme von Funktionen

$$\begin{array}{c} f_{11}(x) \ldots f_{n1}(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{1n}(x) \ldots f_{nn}(x) \end{array}$$

n linear unabhängige Lösungen sind, so bildet das System der Funktionen $f_{ij}(x)$ eine Matrixlösung $F(x)$. Das System der Funktionen $p_{ij}(x)$ bildet eine zweite Matrix $P(x)$, und die n^2 Gleichungen, denen die n Lösungen genügen, können in eine einzige Matrixgleichung

$$F(x+1) = P(x) F(x) \tag{27}$$

zusammengefaßt werden. Diese Gleichung kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$F(x-1) = P^{-1}(x-1) F(x).$$

Die allgemeinste Matrixlösung von (26) ist dann

$$H(x) = F(x) \Pi(x), \tag{28}$$

wo $\Pi(x)$ eine Matrix beliebiger periodischer Funktionen von der Periode 1 ist, deren Determinante von Null verschieden ist. Die Gleichung (27) besitzt zwei symbolische Lösungen

$$F(x) = P(x-1) P(x-2) \ldots,$$
$$F(x) = P^{-1}(x) P^{-1}(x+1) \ldots,$$

die in dem speziellen Falle gegen Grenzmatrizen konvergieren, wo die Koeffizienten von der Form

$$p_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{c_{ij}^{(2)}}{x^2} + \frac{c_{ij}^{(3)}}{x^3} + \cdots$$

62) *Birkhoff,* General Theory of linear difference Equations, Trans. Amer. math. Soc. 12 (1911), p. 243—284.

sind. Um die Konvergenz im allgemeinen Falle zu sichern, verfährt *Birkhoff* folgendermaßen: Die Gleichung (27) wird von n^2 divergenten Reihen der Form

$$x^{\mu x}(\varrho_j e^{-\mu})^x x^{r_j}\left(c_1 + \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{x^2} + \cdots\right)$$

formal befriedigt. Die aus diesen Reihen gebildete Matrix wird mit $S(x)$ bezeichnet, diejenige Matrix, die daraus hervorgeht, indem man alle Reihen bei dem k^{ten} Gliede abbricht, mit $T(x)$. *Birkhoff* betrachtet nun die Matrizenfolgen

$$P(x-1)P(x-2)\ldots P(x-m)T(x-m),$$
$$P^{-1}(x)P^{-1}(x+1)\ldots P^{-1}(x+m)T(x+m+1),$$

und er beweist, daß alle aus den λ ersten Kolonnen und irgendwelchen λ Zeilen der ersten dieser Matrizen ($\lambda = 1, 2, \ldots n$), oder aus den λ letzten Kolonnen und irgendwelchen λ Zeilen der zweiten Matrix gebildeten Determinanten gegen Grenzfunktionen konvergieren, wenn m über jede Grenze hinaus wächst. Diese Grenzwerte sind von k unabhängig. *Birkhoff* erhält somit zwei partikulare Matrixlösungen $F(x)$ und $H(x)$; diese werden die erste und zweite Hauptmatrixlösung genannt. Die Elemente von $F(x)$ sind regulär bis auf Pole in den Punkten $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3$, wo α ein Pol eines der Elemente von $P(x)$ ist, und sie besitzen die asymptotische Form der entsprechenden Elemente von $S(x)$ in einer gewissen Halbebene. Die Elemente von $H(x)$ sind regulär bis auf Pole in den Punkten $\gamma - 1$, $\gamma - 2$, $\gamma - 3, \ldots$, wo γ ein Pol eines der Elemente von $P^{-1}(x-1)$ ist, und sie besitzen ebenfalls die asymptotische Form der entsprechenden Elemente von $S(x)$ in einer gewissen Halbebene. Zwischen $H(x)$ und $F(x)$ besteht eine Relation von der Form (28). Die Hauptmatrixlösungen sind durch ihre asymptotischen Werte eindeutig bestimmt.

Birkhoff[63]) gibt zugleich einen Beweis für die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems für lineare Differenzengleichungen. Die Zahl der charakteristischen Konstanten in den beiden Hauptmatrixlösungen ist genau gleich der Zahl der willkürlichen Konstanten in den als Polynome angenommenen Koeffizienten $p_{ij}(x)$. Es gibt immer ein System von der Form (27) mit vorgeschriebenen charakteristischen Konstanten.

63) *Birkhoff,* The generalized Riemann Problem for linear differential Equations and the allied Problems for linear Difference and q-Difference Equations, Proc. Amer. Acad. Arts. Sc. 49 (1913), p. 521—568. Vgl. auch *Nörlund,* Sur le problème de Riemann dans la théorie des équations aux différences finies, Paris C. R. 156 (1913), p. 200—203. Sur une classe de fonctions hypergéométriques, Bull. Acad. Danemark 1913, p. 135—153.

Im Anschluß an *Birkhoffs* Untersuchungen beweist *Williams*[64]) die Existenz von zwei Hauptlösungen eines Systems nichthomogener linearer Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten. Er benutzt hierbei die von *Lagrange* herrührende Methode der Variation der Konstanten.[65])

6. Andere Darstellungen der Lösungen. Mittels der *Laplace*schen Transformation (19) untersucht *Galbrun*[66]) eine Differenzengleichung der Form (14) mit rationalen Koeffizienten. Es sei a_j eine Wurzel der charakteristischen Gleichung, die eine singuläre Stelle der Bestimmtheit der Differentialgleichung (20) ist. *Galbrun* betrachtet eine geschlossene Linie L_j, welche in ihrem Inneren den Punkt a_j enthält und alle übrigen singulären Punkte von (20) ausschließt, sowie eine geschlossene Linie L_0, die außer dem Nullpunkt keinen singulären Punkt von (20) enthält, und bildet ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differenzengleichung von folgender Form:

$$f_j(x) = \int_{L_j} t^{x-1} v_j(t)\, dt + \int_{L_0} t^{x-1}(r_1 \bar{v}_1 + \cdots + r_p \bar{v}_p)\, dt;$$

hierin ist $v_j(t)$ eine Lösung von (20), welche a_j als singulären Punkt besitzt, während $\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_p$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden, und $r_1, \ldots r_p$ sind gewisse rationale Funktionen von $e^{2\pi i x}$. Ein zweites Fundamentalsystem erhält man, wenn die Kontur L_0 durch eine geschlossene Linie L_∞ ersetzt wird, die alle singulären Stellen der Differentialgleichung mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes einschließt. Diese Lösungen sind meromorphe Funktionen von x, deren Pole *Galbrun* bestimmt; ferner leitet er ein System von divergenten Reihen her von der Form:

$$a_j^x x^{-\varrho_i}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right),$$

welche Reihen die Lösungen innerhalb gewisser Winkelräume asymptotisch darstellen.[67]) *Galbrun*[68]) betrachtet noch besonders den Fall, wo

64) *Williams*, The Solutions of non-homogeneous linear difference Equations and their asymptotic Form, Trans. Amer. math. Soc. 14 (1913), p. 209—240.

65) Vgl. hierzu *Wallenberg* und *Guldberg*, Theorie der Differenzengleichungen, p. 87—93.

66) *Galbrun*, Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable, Paris C. R. 148 (1909), p. 905—907; Ib. 149 (1909), p. 1046—1047; Ib. 150 (1910), p. 206—208; Acta math. 36 (1913), p. 1—68.

67) Vgl. die in Fußnote 13) zitierten Arbeiten von *Horn*, worin dieselben asymptotischen Darstellungen für positive Werte von x betrachtet werden.

68) *Galbrun*, Sur la représentation asymptotique des solutions d'une équation aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable, Paris C. R.

a_j eine zweifache Wurzel der charakteristischen Gleichung und zugleich eine Unbestimmtheitsstelle der Differentialgleichung (20) ist. Er findet dann asymptotische Darstellungen der Form[69]):

$$a_j^x e^{k\sqrt{x}} x^{-\varrho}\left(c_0 + \frac{c_1}{x^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{c_p}{x^{\frac{p}{2}}} + \cdots\right).$$

Eine schöne Anwendung der *Laplace*schen Transformation macht *Horn*[70]), indem er ein System linearer Differenzengleichungen von der Form (26) auf ein System linearer Integralgleichungen vom *Volterra*schen Typus zurückführt. Es wird angenommen, daß die Koeffizienten

$$p_{ij}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{ij}^{(\nu)}}{x^\nu}$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär sind, und daß die Wurzeln der Gleichung

$$|c_{ij}^{(0)} - \delta_{ij}\varrho| = 0$$

voneinander und von Null verschieden sind. *Horn* setzt nun

$$f_i(x) = \int_0^\infty w_i(t) e^{-tx} dt$$

und bestimmt die Funktionen $w_i(t)$ als Lösungen der *Volterra*schen Integralgleichungen

$$(e^{-t} - b_i) w_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t H_{ij}(t-\tau) w_j(\tau) d\tau, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wo

$$H_{ij}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{ij}^{(\nu)} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Er beweist hierdurch, daß die Lösungen der Differenzengleichungen sich durch konvergente *Laplace*sche Integrale und somit ebenfalls durch Fakultätenreihen darstellen lassen.

Carmichael hatte früher dasselbe System betrachtet[71]) und durch eine Methode der sukzessiven Annäherungen ein Fundamentalsystem von Lösungen gefunden, dessen analytische Eigenschaften er unter-

---

151 (1910), p. 1114—1116. Sur certaines solutions exceptionnelles d'une équation linéaire aux différences finies, Bull. Soc. math. France 49 (1921), p. 206—241.

69) Unter etwas anderen Voraussetzungen gelangt später *Erb* in der in Fußnote 15) zitierten Arbeit zu asymptotischen Entwickelungen, die nach nicht ganzzahligen Potenzen von x fortschreiten.

70) *Horn,* Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), p. 210—225.

71) *Carmichael,* Linear difference Equations and their analytic Solutions, Trans. Amer. math. Soc. 12 (1911), p. 99—134.

sucht. In einer späteren Abhandlung[72]) erhält *Carmichael* Resultate, die mit den von *Birkhoff* gefundenen wesentlich äquivalent sind, die aber unter Benutzung eines neuen Approximationsverfahrens hergeleitet werden.

Watson betrachtet die Gleichung (14) im Falle $k = 2$. Er nimmt an, daß die Koeffizienten eindeutige Funktionen von x sind, und daß der aus ihnen gebildete Ausdruck

$$v(x) = \frac{P_2(x-1)P_0(x)}{P_1(x-1)P_1(x)}$$

eine in der Umgebung von $x = \infty$ reguläre Funktion ist, die sich daher in eine konvergente Reihe der Form

$$v(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

entwickeln läßt. Außerdem wird noch angenommen, daß c_0 nicht eine reelle Größe $\geq \frac{1}{4}$ ist. *Watson* untersucht[73]) die beiden Kettenbrüche

$$\frac{1}{1-}\,\frac{v(x+1)\;|}{|\;1-}\,\frac{v(x+2)\;|}{|\;1-\cdots},$$

$$\frac{1}{1-}\,\frac{v(x)\;|}{|\;1-}\,\frac{v(x-1)\;|}{|\;1-}\,\frac{v(x-2)\;|}{|\;1-\cdots}$$

und erzielt dabei zwei Lösungen der Differenzengleichung, welche er als ein Produkt von unendlich vielen Kettenbrüchen darstellt. Es gelingt ihm nicht aufzuklären, ob die Lösungen immer voneinander linear unabhängig sind.

Wenn die Koeffizienten $P_i(x)$ in der Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(x) f(x+i) = 0$$

ganze Funktionen von endlicher Höhe und dabei $P_0(x)$ und $P_k(x)$ von Null verschieden sind, kann man die Existenz von k linear unabhängigen

72) *Carmichael,* On the Solutions of linear homogeneous difference Equations Amer. J. Math. 38 (1916), p. 185—220.

73) *Watson,* The Solution of the homogeneous linear difference Equation of the second order, Proc. Lond. math. Soc. (2) 8 (1910), p. 125—161; Ib. (2) 10 (1912), p. 211—248. Für ganzzahlige Werte von x untersucht *Watson* dieselben Differenzengleichungen in Quart. J. pure appl. math. 41 (1910), p. 50—55. Über die Darstellung der Lösungen von Differenzengleichungen durch Kettenbrüche vgl. auch *Pincherle*, Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti, Giorn. mat. 32 (1894), p. 209—291; *De Montessus de Ballore,* Sur les fractions continues algébriques, Rend. Circ. math. Palermo 19 (1905), p. 185—257; Acta math. 32 (1909), p. 257—281; *Wallenberg,* Theorie der linearen Differenzengleichungen, Leipzig 1911, p. 218—222, und die in Fußnote 10) zitierten Arbeiten von *Nörlund.*

Lösungen beweisen[74]), die ganze Funktionen von x sind. Die Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} R_\nu(x) g(x+\nu) \tag{29}$$

genügt nämlich der Differenzengleichung, wenn die $R_\nu(x)$ durch die Rekursionsformel

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(x+\nu-i) R_{\nu-i}(x) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$P_0(x) R_0(x) = 1,$$

$$R_\nu(x) = 0, \quad (\nu = -1, -2, \ldots, -k+1)$$

bestimmt werden. Die willkürliche Funktion $g(x)$ läßt sich auf unendlich viele Arten so festlegen, daß die Reihe (29) innerhalb jedes endlichen Gebietes gleichmäßig konvergiert; von diesen Festlegungen geben eine Anzahl von k ein System von linear unabhängigen ganzen Lösungen.

7. Ein Satz von Hölder über die Gammafunktion. Während die meisten Funktionen, welche in der Analysis eingebürgert sind, die Eigenschaft haben, daß zwischen der unabhängigen Veränderlichen, der Funktion und einer Anzahl ihrer Ableitungen eine algebraische Gleichung besteht, ist für die Gammafunktion eine solche Gleichung nicht möglich. Dieser von *Hölder*[75]) entdeckte Satz kann beträchtlich verallgemeinert werden, und weist darauf hin, daß die Differenzengleichungen eine Klasse von transzendenten Funktionen definieren, die von wesentlich anderer Natur sind als die Integrale der Differentialgleichungen. Die Gammafunktion genügt der Gleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Hölder betrachtet zunächst die logarithmische Ableitung der Gammafunktion

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

---

74) *Nörlund,* Sur l'existence de solutions d'une équation linéaire aux différences finies, Ann. Éc. Norm. (3) 31 (1914) p. 205—221.

75) *Hölder,* Über die Eigenschaft der Gammafunktion, keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen, Math. Ann. 28 (1887), p. 1—13. Andere Beweise von *Hölders* Satz geben *E. H. Moore,* Concerning Transcendentally Transcendental Functions, Math. Ann. 48 (1897), p. 49—74. *A. Ostrowski,* Neuer Beweis des *Hölder*schen Satzes, daß die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, Math. Ann. 79 (1918), p. 286—289. Vgl. auch *Stadigh*, Ein Satz über Funktionen, die algebraische Differentialgleichungen befriedigen, und über die Eigenschaft der Funktion $\zeta(s)$, keiner solchen Gleichung zu genügen. Diss. Helsingfors 1902. Eine naheliegende Verallgemeinerung des Satzes von *Hölder* gibt *N. Nielsen,* Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, p. 103—112.

die eine Lösung der Differenzengleichung

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x} \tag{30}$$

ist. Vorausgesetzt, daß für die Funktion $\Psi(x)$ eine algebraische Differentialgleichung existierte, denke man sich diese in die Form

$$G(x;\ \Psi(x),\ \Psi'(x), \ldots, \Psi^{(n)}(x)) = 0 \tag{31}$$

gebracht, wobei G eine ganze Funktion von $\Psi(x)$, $\Psi'(x), \ldots, \Psi^{(n)}(x)$ bedeutet, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sein müssen. Aus dieser Gleichung folgt nun:

$$\begin{aligned} G(x+1;\ \Psi(x+1),\ \Psi'(x+1), \ldots, \Psi^{(n)}(x+1)) \\ - G(x;\ \Psi(x),\ \Psi'(x), \ldots \Psi^{(n)}(x)) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Mit Hilfe der Gleichung (30) kann man die linke Seite der Gleichung (32) auf die Form einer ganzen Funktion von $\Psi(x)$, $\Psi'(x), \ldots, \Psi^{(n)}(x)$ bringen, mit Koeffizienten, die rationale Funktionen von x sind. Durch diese Schlußweise zeigt *Hölder*, daß die Gleichung (31) mit Hilfe der Gleichung (30) immer mehr reduziert werden kann, bis man schließlich eine Gleichung der Form

$$\sum_{s=0}^{s=n} c_s \Psi^{(s)}(x) + R(x) = 0$$

findet, wobei von den Konstanten c_s mindestens eine von Null verschieden ist, während $R(x)$ eine rationale Funktion bedeutet. Dieses ist aber, wie leicht zu ersehen ist, ein Widerspruch. Es ist somit eine Gleichung von der betrachteten Form nicht möglich. Hieraus schließt *Hölder* leicht, daß die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten genügen kann.

Barnes[76]) betrachtet eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung

$$f(x+1) - p(x)f(x) = p_1(x), \tag{33}$$

wo $p(x)$ und $p_1(x)$ eindeutige analytische Funktionen sind. Er beweist, daß die Lösungen im allgemeinen keiner algebraischen Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten genügen. Es gibt jedoch verschiedene Ausnahmefälle, die von *Barnes* näher erörtert werden. Setzt man

$$F(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)},$$

wo $f(x)$ eine Lösung der Gleichung (33) ist, so befriedigt $F(x)$ eine

76) *Barnes,* On Functions generated by linear difference Equations of first Order, Proc. London math. Soc. (2) 2 (1904), p. 280—292.

Differenzengleichung der Form

$$F(x+1) = \frac{p_1(x)F(x) + p_2(x)}{p_3(x)F(x) + p_4(x)}.$$

Unter der Annahme, daß $p_1(x), \ldots p_4(x)$ rationale Funktionen von x sind, haben *Tietze*[77]), *Stridsberg*[78]) und *Mason*[79]) sich die Frage gestellt, ob eine Lösung dieser Gleichung zugleich einer algebraischen Differentialgleichung genügen kann, und sie haben gezeigt, daß eine derartige Lösung nur in ziemlich trivialen Fällen vorhanden ist.

II. Nichtlineare Differenzengleichungen.

8. Untersuchungen von Picard. Es mögen $R_1, R_2, \ldots, R_m$ rationale Funktionen von m Veränderlichen sein, die so beschaffen sind, daß

$$(34) \qquad f_i' = R_i(f_1, f_2, \ldots, f_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

eine birationale Transformation darstellt. *Picard* betrachtet[80]) das System der Differenzengleichungen

$$(35) \qquad f_i(x+\omega) = R_i(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

und beweist die Existenz eines Systems von eindeutigen meromorphen Lösungen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$, die zugleich periodische Funktionen mit der Periode $i\omega'$ sind. Hierbei bedeuten ω und ω' positive Konstanten. Zunächst betrachtet *Picard* Gleichungen der Form (35), deren rechte Seiten $R_1, R_2, \ldots R_m$ Polynome sind. Durch eine lineare Transformation kann man im allgemeinen erreichen, daß diese Polynome die Gestalt

$$\mu_i f_i + Q_i(f_1, f_2, \ldots, f_m), \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

annehmen, wo die μ_i Konstanten und die Q_i Polynome bezeichnen, die keine Glieder erster Ordnung enthalten. In erster Annäherung kann man setzen:

$$f_i(x+\omega) = \mu_i f_i(x). \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

Diesen Gleichungen kann man durch m doppelperiodische Funktionen

77) *Tietze*, Über Funktionalgleichungen, deren Lösungen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können. Monatsh. Math. Phys. 16 (1905), p. 329—364.

78) *Stridsberg*, Contributions à l'étude des fonctions algébrico-trancendantes qui satisfont à certaines équations fonctionelles algébriques, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik (Stockholm) 6 (1910), Nr. 15 und Nr. 18.

79) *Mason*, Character of the Solutions of certain Functional Equations, Amer. J. Math. 36 (1914), p. 419—440.

80) *Picard*, Sur une classe de transcendantes nouvelles, Paris C. R. 117 (1893), p. 472—476; Acta math. 18 (1894), p. 133—154.

zweiter Art $f_i^{(0)}(x)$ genügen, die alle dieselben Pole besitzen. Die Multiplikatoren für die Periode $i\omega'$ sollen gleich 1 sein. Sodann werden sukzessiv die Funktionen $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)} \ldots$ den Gleichungen

$$f_i^{(n)}(x+\omega) = \mu_i f_i^{(n)}(x) + Q_i(f_1^{(n-1)}(x), f_2^{(n-1)}(x), \ldots f_m^{(n-1)}(x))$$
$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

gemäß bestimmt, wobei zugleich dafür gesorgt wird, daß diese Funktionen periodisch mit der Periode $i\omega'$ sind, und daß sie dieselben Pole im Bande $0 < \sigma < \omega$ besitzen. *Picard* zeigt nun, daß die $f_i^{(n)}(x)$ gegen einen Grenzwert $f_i(x)$ konvergieren, wenn $n \to \infty$. Diese Funktionen $f_i(x)$ genügen den Gleichungen (35), und sie sind meromorph in der Halbebene $\sigma > 0$ mit unendlich vielen Polen. Der Fall, wo die rechten Seiten der Gleichungen (34) rationale gebrochene Funktionen sind, kann durch eine Transformation auf denjenigen zurückgeführt werden, wo dieselben Polynome sind. Wenn außerdem noch die Transformation (34) birational ist, so folgt aus den Gleichungen (35), daß

$$f_i(x) = Q_i(f_1(x+\omega), f_2(x+\omega), \ldots, f_m(x+\omega)), \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

wo die Q_i rationale Funktionen bedeuten. Hieraus kann man aber schließen, daß die Lösungen $f_i(x)$ in der ganzen Ebene eindeutige meromorphe Funktionen mit der Periode $i\omega'$ sind. Bei diesem Existenzbeweis wurde vorausgesetzt, daß weder m noch eine der Zahlen μ_i von der Form

$$e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}}$$

ist, wo ν eine ganze Zahl bedeutet. In einer späteren Abhandlung[81]) zeigt *Picard*, wie man diese Einschränkungen beseitigen kann. Die Polynome $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$ werden durch unendliche Reihen, die keine Glieder erster Ordnung enthalten, ersetzt. Dadurch fällt die Ungleichung für m weg, und der Beweis wird vereinfacht. Um die singulären Werte der Multiplikatoren μ_i zu vermeiden, genügt es, die Funktionen $f_i(x)$ mit einer passend gewählten doppelperiodischen Funktion zweiter Art zu multiplizieren. Dadurch geht das ursprüngliche System von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten in ein anderes System über, dessen Koeffizienten Funktionen von x sind. Aber die benutzte Methode der sukzessiven Annäherungen läßt sich diesen Gleichungen gegenüber ebenso gut anwenden.

Picard benutzt auch ein anderes Approximationsverfahren[82]), indem

---

81) *Picard,* Sur une classe de fonctions transcendantes, Paris C. R. 123 (1896), p. 1035—1037; Acta math. 23 (1900), p. 333—337.

82) *Picard,* Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes, Paris C. R. 156 (1913), p. 978—983; Ann. Éc. Norm. (3) 30 (1913), p. 247—253.

die Lösungen $f_i(x)$ nach Potenzen eines Parameters λ entwickelt werden:

$$f_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_i^{(n)}(x),$$

wo als Ausgangsfunktionen $f_i^{(0)}(x)$ doppelperiodische Funktionen zweiter Art dienen. Die so erhaltenen Lösungen haben die Pole der Funktionen $f_i^{(0)}(x)$ als wesentlich singuläre Punkte.

Mit dem von *Picard* untersuchten Problem nahe verwandt ist folgendes, welches *E. E. Levi* behandelt.[83]) Er stellt sich die Aufgabe: alle in der ganzen Ebene meromorphen Funktionen zu finden, die der Differenzengleichung

$$f(x + \omega) = R(f(x))$$

genügen und zugleich periodisch mit der Periode ω_1 sind. Hier bedeutet $R(z)$ eine rationale Funktion von z. Mittels der Substitution

$$u = e^{\frac{2\pi i x}{\omega_1}}$$

wird die Aufgabe auf die äquivalente zurückgeführt, alle Lösungen der Gleichung

$$f(xq) = R(f(x))$$

zu finden, die höchstens die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ als wesentlich singuläre Punkte haben, wo $q = e^{\frac{2\pi i \omega}{\omega_1}}$. Ein ähnliches und allgemeineres Problem hat *Poincaré* gelöst[84]), jedoch unter gewissen Einschränkungen betreffend q. Die von *Levi* gefundenen Funktionen sind entweder linear gebrochene Funktionen von den *Poincaré*schen, oder sie reduzieren sich auf elementare Transzendenten.

9. Verhalten der Lösungen für große Werte von x. Der in Nr. 1 besprochene Satz von *Poincaré* kann auf nichtlineare Gleichungen erweitert werden. *Lattès*[85]) untersucht eine Differenzengleichung der k^{ten} Ordnung

$$f(x + k) = g(f(x), f(x + 1), \ldots, f(x + k - 1)),$$

83) *E. E. Levi,* Sopra una classe di trascendenti meromorfe, Ann. mat. pura ed. appl. (3) 14 (1907), p. 93—113.

84) *Poincaré,* Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes, J. math. pures appl. (4) 6 (1890), p. 313—365.

85) *Lattès,* Sur la convergence des relations de récurrence, Paris C. R. 150 (1910), p. 1106—1109; Sur les séries de Taylor à coefficients récurrents; Ib. 150 (1910), p. 1413—1415; Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites, Ann. Fac. Sc. Toulouse (3) 3 (1912), p. 73—124. Vgl. auch: Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation, Ann. mat. pura ed appl. (3) 13 (1906), p. 1—137; Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double, Bull. Soc. math. France 39 (1911), p. 309—345.

wo $g(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ eine in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Funktion ist, die im Nullpunkt den Wert Null hat. Diese Gleichung kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$f(x+k) + \sum_{i=0}^{i=k-1} A_i f(x+i) = g_1(f(x), f(x+1), \ldots, f(x+k-1)),$$

wo $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ eine Funktion bedeutet, deren Entwickelung nach Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ keine Glieder erster Ordnung enthält. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ die Wurzeln der Gleichung

$$z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \cdots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Unter der Annahme, daß

$$1 > |a_1| > |a_2| > \cdots > |a_k| > 0,$$

und daß die Anfangswerte hinreichend klein vorgegeben sind, zeigt *Lattès*, daß der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

existiert. Er ist im allgemeinen gleich a_1 und für gewisse partikuläre Lösungen gleich einer der anderen Wurzeln. Mit Hilfe dieses Theorems verallgemeinert *Lattès* einen Satz von *Fatou*[86]), indem er beweist, daß die Funktion von z

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$$

in der ganzen Ebene meromorph ist und die sämtlichen Stellen

$$z = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_k^{s_k} \qquad (s_1 \ldots s_k = 0, -1, -2, \ldots)$$

zu Polen hat.[87])

Für ganzzahlige Werte von x hat *Horn*[88]) das System der Differenzengleichungen

$$(36) \qquad f_i(x+1) = x^k G_i(x, f_1(x), \ldots f_m(x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

betrachtet, wo k eine ganze nicht negative Zahl ist, und G_i eine Funktion von $x, f_1, \ldots, f_m$ bedeutet, welche für $x = \infty$, $f_1 = 0, \ldots, f_m = 0$ verschwindet und in der Umgebung dieser Stelle regulär ist:

$$G_i(x, f_1, \ldots, f_m) = \frac{a_{i0}}{x} + a_{i1} f_1 + \cdots + a_{im} f_m + \cdots$$

86) *Fatou,* Sur une classe remarquable de séries de Taylor, Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 43—53.

87) Einen allgemeineren Satz gibt *Lattès* später in der Abhandlung: Sur le prolongement analytique de certaines séries de Taylor, Bull. Soc. math. France 42 (1914), p. 95—112.

88) *Horn,* Zur Theorie der nicht linearen Differential- und Differenzengleichungen, J. reine angew. Math. 141 (1912), p. 182—216.

Unter der Voraussetzung, daß die Determinante

$$|a_{ij} - \delta_{ij}\varrho|$$

die Elementarteiler $\varrho - a_1, \ldots, \varrho - a_m$ hat, wird das System auf die Form

$$x^{-k} f_i(x+1) = a_i f_i(x) + g_i(x, f_1(x), \ldots f_m(x))$$

gebracht, worin

$$g_i(x, f_1, \ldots, f_m) = \sum A^{(i)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \left(\frac{1}{x}\right)^\lambda f_1^{\lambda_1} \ldots f_m^{\lambda_m}.$$

$$(\lambda = 1,\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0;\ \lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \geq 2)$$

Diese Differenzengleichungen werden auf ein System von Summengleichungen[89]) zurückgeführt. Wenn $k = 0$ und

$$0 < |a_1| \leq \cdots \leq |a_\mu| < 1 < |a_{\mu+1}| \leq \cdots \leq |a_m|,$$

setzt *Horn* demgemäß

$$f_i^{(n)} = c_i a_i^x + a_i^x \sum_{x_0}^{x} a_i^{-x-1} g_i(x, f_1^{(n-1)}, \ldots, f_m^{(n-1)}),$$

wo $i = 1, 2, \ldots \mu$, und

$$f_i^{(n)} = -a_i^x \sum_{x}^{\infty} a_i^{-x-1} g_i(x, f_1^{(n-1)}, \ldots, f_m^{(n-1)}),$$

wo $i = \mu + 1, \ldots m$ ist. Wenn k positiv ist, wird vorausgesetzt, daß $a_1, \ldots a_m$ von Null verschieden sind, und die $f_i^{(n)}$ werden durch die Gleichungen

$$f_i^{(n)} = -(\Gamma(x))^k a_i^x \sum_{x}^{\infty} \frac{g_i(x, f_1^{(n-1)}, \ldots, f_m^{(n-1)})}{(\Gamma(x))^k a_i^{x+1}}$$

bestimmt. Wenn $n \to \infty$, konvergieren die $f_i^{(n)}$ gegen ein System von Lösungen f_i der Differenzengleichungen. Diese Lösungen haben für große positive x eine asymptotische Darstellung der Form

$$f_i(x) \sim \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \cdots.$$

Auf ganz andere Weise behandelt *Horn* später einen besonderen Fall der Gleichungen (36):

$$f(x+1) = af(x) + g(x, f(x)), \tag{37}$$

wo a eine von 1 verschiedene Konstante und

$$g(x, y) = \sum A_{\lambda\mu} \frac{y^\mu}{x^\lambda},\quad \lambda = 1,\ \mu = 0;\ \lambda + \mu \geq 2$$

---

89) Über die Theorie der Summengleichungen vgl. *Horn,* Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen, J. reine angew. Math. 140 (1911), p. 120—158, p. 159—174; Analytische Lösungen von Summengleichungen, Arkiv Math. Phys. (3) 26 (1918), p. 132—145; *Perron,* Zur Theorie der Summengleichungen, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 159—170; Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen, Math. Ann. 84 (1921), p. 1—15.

eine in der Umgebung von $x = \infty$, $y = 0$ reguläre Funktion ist. Er findet[90]) eine analytische Lösung der Form

$$f(x) = \int_0^\infty w(t) e^{-xt} dt, \tag{38}$$

wo $w(t)$ einer Integralgleichung unendlich hoher Ordnung genügt. Setzt man

$$w^{(\mu)}(t) = \int_0^t w(\tau) w^{(\mu-1)}(t-\tau) d\tau,$$

$$G_\mu w^{(\mu)}(t) = \int_0^t G_\mu(t-\tau) w^{(\mu)}(\tau) d\tau,$$

wo die ganze transzendente Funktion G_μ durch die Reihe

$$G_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^\infty A_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

definiert ist, so hat die Differenzengleichung (37) als *Laplace*sche Transformierte die Integralgleichung

$$(e^{-t} - a) w(t) = G_0(t) + \sum_{\mu=2}^\infty A_{0\mu} w^{(\mu)}(t) + \sum_{\mu=1}^\infty G_\mu w^{(\mu)}(t).$$

Es sei $a = e^{-s}$. Die Integralgleichung besitzt eine Lösung $w(t)$, welche sich in die für $|t| < |s|$ konvergente Potenzreihe

$$w(t) = \sum_{n=1}^\infty C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

entwickeln läßt. Das *Laplace*sche Integral (38) konvergiert in einer gewissen Halbebene und stellt eine analytische Lösung der Differenzengleichung dar. Die Gleichung wird formal durch die im allgemeinen divergente Reihe

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{C_n}{x^n}$$

befriedigt. Unter der Annahme $|a| > 1$ findet *Horn*[91]) noch eine konvergente Entwickelung der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty (\pi(x) a^{-x} x^{-\alpha})^n \varphi_n(x),$$

---

90) *Horn,* Laplacesche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen, J. reine angew. Math. 146 (1916), p. 95—115.

91) *Horn,* Über eine nichtlineare Differenzengleichung, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 26 (1917), p. 230—251.

wo $\pi(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode 1 ist, während $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ konvergente Fakultätenreihen sind. Dem bisher ausgeschlossenen Falle $a = 1$ widmet *Horn* zuletzt eine eingehende Untersuchung[92]), wobei das Verhalten einer Lösung in der Nähe von $x = \infty$ vermittels Fakultätenreihenentwickelungen charakterisiert wird.

Neuerdings haben *Julia*[93]) und *Fatou*[94]) sehr schöne Arbeiten über die Iteration rationaler Funktionen veröffentlicht. Setzt man

$$f(x+1) = R(f(x)), \tag{39}$$

wo R eine rationale Funktion bedeutet, so handelt es sich hier besonders um eine Untersuchung der Menge der Werte $f(1), f(2), \ldots f(n) \ldots$ und um die Ableitung dieser Menge in ihrer Abhängigkeit von dem Ausgangswert $f(0)$. Diese Untersuchungen gehören aber eher zur Iterationsrechnung, worüber in dem Referate II A 11 (*Pincherle*) berichtet ist.

Die Theorie der nichtlinearen Differenzengleichungen ist noch ziemlich zurückgeblieben, sie kann aber durch Heranziehung der in dem nächsten Abschnitt besprochenen Untersuchungen wesentlich gefördert werden.

III. Das Summationsproblem.

10. Einfache Summen. Das wichtigste und zugleich schwierigste Problem in der Differenzenrechnung ist die Frage nach der Lösung der Gleichung

$$F(x+1) - F(x) = \varphi(x), \tag{40}$$

d. i. die Summe einer gegebenen Funktion $\varphi(x)$. Die Existenz einer Lösung dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich, aber unter den unendlich vielen Lösungen gibt es eine ausgezeichnete, *die Hauptlösung*, und das Problem besteht darin, diese Hauptlösung herauszufinden. Der erste Ansatz zur Behandlung dieses Problems findet sich in den zahlreichen älteren Arbeiten über die *Euler-Maclaurin*sche Summenformel[95]), worüber in dem Referate II A 12 (*Burkhardt*) Nr. **105** be-

---

92) *Horn*, Zur Theorie der nichtlinearen Differenzengleichungen, Math. Ztschr. 1 (1918), p. 80—114.

93) *Julia*, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, J. math. pures appl. (7) 4 (1918), p. 47—245.

94) *Fatou*, Sur les équations fonctionnelles, Bull. Soc. math. France 47 (1919), p. 161—271; 48 (1920), p. 33—94 und p. 208—314.

95) Hierbei handelt es sich zunächst nur um ganzzahlige Werte der Veränderlichen x.

richtet ist. Eine strenge und erschöpfende Behandlung dieser Summenformel hat neuerdings *E. Lindelöf*[96]) gegeben.

Plana[97]) und *Abel*[98]) finden eine Lösung der Gleichung (40) von der Form

$$F(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi(x) + i\int_0^\infty \frac{\varphi(x+it)-\varphi(x-it)}{1-e^{2\pi t}}\,dt,$$

aber erst *Cauchy*[99]) hat diese Formel bewiesen. *Guichard*[100]) nimmt an, daß $\varphi(x)$ eine beliebige ganze Funktion ist, und weist nach, daß es immer eine andere ganze Funktion gibt, die der Gleichung (40) genügt. Er betrachtet das Integral

$$F(x) = \int_A^B \frac{\varphi(z)\,e^{2\pi i z}}{e^{2\pi i z} - e^{2\pi i x}}\,dz,$$

wo A und B zwei Punkte der imaginären Achse sind. Dieses Integral stellt eine Lösung innerhalb eines gewissen Rechtecks dar, aber diese Lösung hat unendlich viele singuläre Stellen. Um diese zu beseitigen, läßt er A und B sich auf der imaginären Achse ins Unendliche entfernen und führt gleichzeitig unter das Integralzeichen eine gewisse ganze Funktion $E(z)$ ein, um die Konvergenz des Integrals zu sichern. Er findet somit eine ganze Lösung, die sich innerhalb des Bandes $0 < \sigma < 1$ durch das Integral

$$F(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(z)\,E(x)\,dz}{E(z)\,(1-e^{2\pi i(x-z)})}$$

darstellen läßt. *Guichard* behandelt auch das System der Gleichungen

$$F(x+\omega) - F(x) = \varphi(x), \quad F(x+\omega_1) - F(x) = \varphi_1(x),$$

96) *Lindelöf,* Quelques applications d'une formule sommatoire générale, Acta Soc. scient. Fennicae 31 (1902); Sur une formule sommatoire générale, Acta math. 27 (1903), p. 305—311; Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905.

97) *Plana,* Note sur une nouvelle expression analytique des nombres bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites, Mém. Acad. Turin 25 (1820), p. 403—418.

98) *Abel,* Solution de quelques problemes à l'aide d'intégrales définies, Magazin for Naturvidenskaberne 1 (1823), Œuvres 1 (2. Aufl.), Christiania 1881, p. 20—27; L'intégrale finie $\sum^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple, Magazin for Naturvidenskaberne 3 (1825), Œuvres 1 (2. Aufl.), p. 34—39.

99) *Cauchy,* Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques, Mém. Acad. Sc. Paris 6 (1827), p. 603—612, Œuvres (1) 2 (Paris 1908), p. 12—19.

100) *Guichard,* Sur la résolution de l'équation aux différences finies $G(x+1) - G(x) = H(x)$, Ann. Éc. Norm. (3) 4 (1887), p. 361—380. Das *Guichard*sche Integral ist wiedergefunden worden von *Weber,* Über Abels Summation endlicher Differenzenreihen, Acta math. 27 (1903), p. 225—233.

wo $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ ganze Funktionen sind, die der Gleichung

$$\varphi(x+\omega_1)-\varphi(x)=\varphi_1(x+\omega)-\varphi_1(x)$$

genügen, und er beweist die Existenz einer meromorphen Lösung $F(x)$. Auf andere Weise verfährt *Appell.*[101]) Wenn $\varphi(x)$ ein Polynom

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

ist, läßt sich ein Polynom angeben, welches der Gleichung (40) genügt. Man findet

$$F(x)=\frac{a_0}{1}B_1(x)+\frac{a_1}{2}B_2(x)+\cdots+\frac{a_n}{n+1}B_{n+1}(x),$$

wo $B_n(x)$ das *Bernoulli*sche Polynom bedeutet. Wenn aber $\varphi(x)$ eine ganze Funktion

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

ist, so wird die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}B_n(x)$

im allgemeinen nicht konvergieren. *Appell* subtrahiert von dem Polynom $B_n(x)$ die n ersten Glieder seiner trigonometrischen Reihe. Wenn die somit erhaltene Funktion mit $\Psi_n(x)$ bezeichnet wird, so zeigt *Appell*, daß die Reihe

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}\Psi_n(x)$$

gleichmäßig konvergiert und eine ganze Lösung der Gleichung (40) darstellt. Dasselbe Beweisverfahren benutzt *Hurwitz.*[102]) Er beweist außerdem die Existenz einer meromorphen Lösung der Gleichung (40), wenn $\varphi(x)$ eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion ist, und hieraus schließt er leicht, daß die Gleichung (33) immer eine meromorphe Lösung besitzt, wenn die Koeffizienten $p_0(x)$ und $p_1(x)$ meromorphe Funktionen sind. Einen andern Beweis hierfür gibt später *Barnes.*[103])

Watson[104]) untersucht den speziellen Fall, wo in der Gleichung

$$f(x+1)=p(x)f(x)$$

101) *Appell,* Sur les fonctions périodiques de deux variables, J. math. pures appl. (4) 7 (1891), p. 157—176.

102) *Hurwitz*, Sur l'intégrale finie d'une fonction entière, Acta math. 20 (1897), p. 285—312; ib. 22 (1899), p. 179—180.

103) *Barnes,* The linear Difference Equation of the first Order, Proc. London math. Soc. (2) 2 (1904), p. 439—469.

104) *Watson,* A Note on the Solution of the linear Difference Equation of the first Order, Quart. J. pure appl. M. 41 (1910), p. 10—20.

$p(x)$ in der Nähe von $x = \infty$ regulär ist:

$$p(x) = 1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots,$$

und er findet leicht eine Lösung von der Form

$$f(x) = e^{c_1 \Psi(x)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{c_1}{x+n}}}{p(x+n)},$$

wo $\Psi(x)$ die logarithmische Ableitung von $\Gamma(x)$ bedeutet. *Watson* erörtert, wie sich diese Lösung für große Werte von $|x|$ verhält.

Den vorerwähnten Satz von *Guichard* beweist *Carmichael*[105]) in der Weise, daß er für die Funktion $F(x)$ eine Potenzreihe ansetzt und diese in die Gleichung (40) substituiert. Dann ergibt sich für die Bestimmung der Koeffizienten der Reihe ein unendliches System linearer Gleichungen, welches derart gelöst wird, daß die Potenzreihe in der ganzen Ebene konvergiert.

Appell hat (a. a. O.) den Satz *Guichards* auf Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt. Es seien zwei ganze Funktionen $\varphi_1(x, y)$ und $\varphi_2(x, y)$ gegeben, welche die Gleichung

$$\varphi_1(x, y+1) - \varphi_1(x, y) = \varphi_2(x+1, y) - \varphi_2(x, y)$$

erfüllen, so existiert eine dritte ganze Funktion $F(x, y)$, welche die beiden Gleichungen

$$F(x+1, y) - F(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad F(x, y+1) - F(x, y) = \varphi_2(x, y)$$

befriedigt.

Picard[80]) betrachtet die Gleichung

$$F(x+\omega) - \mu F(x) = \varphi(x),$$

wo ω eine positive Zahl ist. Er nimmt an, daß $\varphi(x)$ eine in der ganzen Ebene eindeutige periodische Funktion mit der Periode $2\pi i$ ist, die auf der imaginären Achse regulär ist, und er findet eine eindeutige periodische Lösung, welche in dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq \omega$ regulär ist. Im allgemeinen gibt es nur eine solche Lösung; wenn aber μ von der Form $e^{n\omega}$ ist, wo n eine ganze Zahl bedeutet, gibt es unendlich viele Lösungen. Periodische Lösungen haben ebenfalls *Appell*[106]) und *Brodén*[107]) untersucht.

105) *Carmichael,* On the Theory of linear difference Equations, Amer. J. Mat. 35 (1913), p. 163—171.

106) *Appell,* Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes, Math. Ann. 19 (1882), d. 84—112.

107) *Brodén,* Einige Anwendungen diskontinuierlicher Integrale auf Fragen der Differenzenrechnung, Acta Universitatis Lundensis (2) 8 (1912). Bemerkungen über sogenannte finite Integration, Arkiv för Mat. Astr. och Fys. (Stockholm) 7 (1911).

Der Gleichung

$$(40) \qquad F(x+1) - F(x) = \varphi(x)$$

kann man die Gleichung

$$(41) \qquad G(x+1) + G(x) = \varphi(x)$$

zur Seite stellen. Zwischen den Lösungen dieser beiden Gleichungen bestehen zahlreiche bemerkenswerte Beziehungen. *Nörlund* hat die Gleichungen (40) und (41) sehr ausführlich behandelt.[108]) Er hebt im besonderen die Existenz von zwei Hauptlösungen $F(x)$ und $G(x)$ hervor, die sich durch ihre analytischen Eigenschaften auszeichnen. Die Hauptlösung $F(x)$ bzw. $G(x)$ gewinnt man durch ein bestimmtes Summationsverfahren

$$F(x) = \mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \Delta x, \qquad G(x) = \mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \nabla x$$

das von $\varphi(x)$ zu $F(x)$ bzw. $G(x)$ führt. Diese Definition der Hauptlösungen ist gewissermassen analog mit der Definition der Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dF(x)}{dx} = \varphi(x)$$

als ein bestimmtes Integral. *Nörlund* zeigt auch, daß die Hauptlösungen durch gewisse Grenzbedingungen eindeutig bestimmt sind. Weiter sei bemerkt, daß das Summationsverfahren, welches von $\varphi(x)$ zu $F(x)$ bzw. $G(x)$ führt, wieder auf $F(x)$ bzw. $G(x)$ angewendet werden kann, das heißt: die beiden Grenzwerte

$$\mathop{\mathrm{S}} F(x) \Delta x, \qquad \mathop{\mathrm{S}} G(x) \nabla x$$

existieren. Wenn dagegen $F(x)$ oder $G(x)$ durch eine von der Hauptlösung verschiedene Lösung ersetzt wird, so existiert der entsprechende Grenzwert nicht mehr. Dieser Umstand zeigt deutlich die besondere Bedeutung der Hauptlösungen, denn man kann eine beliebige Differenzengleichung durch die Methode der sukzessiven Approximationen unter Benutzung des genannten Summationsverfahrens auflösen. Wenn man aber dabei irgendeine von der Hauptlösung verschiedene Lösung als Näherungswert nimmt, so hört das Approximationsverfahren zu konvergieren auf.

---

108) *Nörlund*, Mémoire sur les polynomes de Bernoulli, Acta math. 43 (1920), p. 121—196; Mémoire sur le calcul aux différences finies, Ib. 44 (1922), p. 71—211; Acta Universitatis Lundensis (2) 14 (1918), Nr. 15; Sur les équations aux differences finies, C. R. du Congrès international des Mathématiciens, Toulouse 1920, p. 98—119; Paris C. R. 169 (1919), p. 372—375, 462—465, 770—773, 894—896; Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies, Bull. Sc. math. (2) 44 (1920), p. 174—192, 200—220; Sur les équations aux différences linéaires à coefficients constants, Nyt Tidsskrift Mat. (Kopenhagen) 23 B (1912), p. 1—13.

Hilb hat die interessante Bemerkung gemacht[109]), daß man zu den Hauptlösungen auch auf ganz andere Weise gelangen kann. Er reduziert die Gleichungen (40) und (41) entweder auf eine Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung oder auf eine Integralgleichung, oder er betrachtet die Differenzengleichung als ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen. *Hilb* stützt sich hierbei auf seine schönen Untersuchungen[110]) über lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit rationalen Koeffizienten sowie auf Untersuchungen von *Schürer*[111]) und *Pincherle*[112]). *Hilb* charakterisiert ebenso wie *Nörlund* die Lösungen durch Grenzbedingungen. Mittels ähnlicher Methoden behandelt *Hilb*[113]) als Beispiel einer allgemeinen Theorie die Gleichung

$$(ax + b)f(x + 1) + (cx + d)f(x) = \varphi(x),$$

in der a, b, c und d gegebene Konstanten sind.

Es gibt verschiedene Klassen von Funktionalgleichungen, die mit der Gleichung (40) verwandt sind. Wir müssen aber leider darauf verzichten, auf diese einzugehen, um die Grenzen dieses Referats nicht zu überschreiten. Nur sei erwähnt, daß *Schürer*[114]) durch Behandlung der Differential-Differenzengleichung

$$f'(x + 1) = \varphi(x)f(x)$$

zu bemerkenswerten Resultaten gelangt ist.

11. Mehrfache Summen. Setzen wir

$$\mathop{\Delta}_{\omega} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega}, \quad \mathop{\nabla}_{\omega} F(x) = \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2},$$

$$\mathop{\Delta^n}_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n} F(x) = \mathop{\Delta}_{\omega_n} \Big(\mathop{\Delta^{n-1}}_{\omega_1\cdots\omega_{n-1}} F(x)\Big), \quad \mathop{\nabla^n}_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n} F(x) = \mathop{\nabla}_{\omega_n} \Big(\mathop{\nabla^{n-1}}_{\omega_1\cdots\omega_{n-1}} F(x)\Big),$$

und betrachten wir die Differenzengleichungen

$$\mathop{\Delta^n}_{\omega_1\cdots\omega_n} F(x) = \varphi(x), \tag{42}$$

$$\mathop{\nabla^n}_{\omega_1\cdots\omega_n} G(x) = \varphi(x), \tag{43}$$

---

109) *Hilb*, Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen, Math. Ann. 85 (1922), p. 89—98.

110) *Hilb*, Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten, Math. Ann. 82 (1920), p. 1—39; Ib. 84 (1921), p. 16—30, 43—52. Vgl. auch *Perron*, Math. Ann. 84 (1921), p. 31—42.

111) *Schürer*, Eine gemeinsame Methode zur Behandlung gewisser Funktionalgleichungsprobleme, Ber. Ges. Leipzig 70 (1918), p. 185—246.

112) *Pincherle*, Sull' inversione degl' integrali definiti, Mem. Soc. ital. Sc. (3) 15 (1907), p. 3—43.

113) *Hilb*, Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen, Math. Ztschr. 14 (1922), p. 211—229.

114) *Schürer*, Integraldifferenzen- und Differentialdifferenzengleichungen, Preisschriften Jablonowskischen Ges. 46 (1919).

wo $\varphi(x)$ eine gegebene Funktion ist. Unter verschiedenen, ziemlich allgemeinen Annahmen über $\varphi(x)$ definiert *Nörlund*[115]) eine Hauptlösung $F(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$ bzw. $G(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$ dieser Gleichungen, und er untersucht die Eigenschaften dieser Lösungen als Funktionen der $n+1$ Veränderlichen $x, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Besonders gibt er an, wie die Lösungen sich asymptotisch verhalten, wenn x in beliebiger Weise gegen ∞ wächst, oder wenn eine oder mehrere der Zahlen $\omega_1 \ldots \omega_n$ gegen Null konvergieren. Die Hauptlösungen erzielt man durch Anwendung eines geeigneten Summationsverfahrens auf gewisse mehrfache Reihen. Sie werden indessen auch durch Grenzbedingungen vollständig charakterisiert. Die Interpolationsreihen von *Stirling* und *Newton* leiten in gewissen Fällen zu konvergenten Reihendarstellungen. Die Funktionen F und G genügen vielen bemerkenswerten Beziehungen, von denen nur die drei folgenden erwähnt werden sollen:

$$\sum_{s=0}^{m-1} F\left(x + \frac{s\omega_1}{m} \,\Big|\, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right) = mF\left(x \,\Big|\, \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \ldots \omega_n\right),$$

wo m eine beliebige ganze positive Zahl ist;

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s G\left(x + \frac{s\omega_1}{m} \,\Big|\, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right) = G\left(x \,\Big|\, \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \ldots \omega_n\right),$$

wo m eine ungerade positive Zahl ist;

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2\cdots+s_n} F\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \cdots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \,\Big|\, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right)$$
$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^n \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n G\left(x \,\Big|\, \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots \frac{\omega_n}{m_n}\right).$$

Hier bedeuten $m_1, m_2, \ldots m_n$ beliebige ganze gerade positive Zahlen.

IV. Spezielle Differenzengleichungen.

12. Gleichungen, die sich durch hypergeometrische Funktionen oder Gammafunktionen auflösen lassen. Bei seinen Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe leitet *Gauß*[116]) verschiedene Diffe-

115) *Nörlund*, Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies, Bull. Sc. math. 44 (1920); Sur certaines équations aux différences finies, Trans. Amer. math. Soc. 24 (1922); Remarques diverses sur le calcul aux différences finies, J. math. pures appl. (9) 2 (unter der Presse).

116) *Gauß*, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$, Nachr. Ges. Gött. 1813; Ges. Werke 3 (Göttingen 1876), p. 125—162.

renzengleichungen her, deren diese Funktionen genügen, und er hebt besonders die Bedeutung dieser *relationes inter functiones contiguas* hervor. Als ein Spezialfall dieser Relationen ergibt sich die Differentialgleichung zweiter Ordnung der hypergeometrischen Funktion. Diese Differentialgleichung kann mit folgender Differenzengleichung:

$$(44)\quad (x-\alpha)(x-\alpha_1)\Delta^2 f(x) + \beta(x-\beta_1)\Delta f(x) + \gamma f(x) = 0$$

verglichen werden, weil sie das einfachste Beispiel einer linearen Differenzengleichung abgibt, welche sich nicht durch elementare Funktionen lösen läßt. Dabei rechnen wir die Gammafunktion zu den elementaren Transzendenten. Außerdem sei noch bemerkt, daß die Differenzengleichung (44) durch einen Grenzübergang in die Differentialgleichung für die *Gauß*sche hypergeometrische Reihe übergeführt wird. *Boole*[117]) behandelt die Gleichung (44) durch symbolische Methoden und stellt die Lösungen durch *Newton*sche Interpolationsreihen dar; doch fehlt der Konvergenzbeweis der Reihen. *Thomae*[118]) zeigt, daß die allgemeine Lösung sich durch hypergeometrische Reihen darstellen läßt. In einer späteren Abhandlung definiert *Thomae*[119]), nach dem Vorgange von *Riemann,* eine gewisse Funktion durch ihre Grenzbedingungen und Unstetigkeiten, und er zeigt, daß diese Funktion der Gleichung (44) genügt. Außerdem stellt er eine große Anzahl von hypergeometrischen Reihen auf, die Lösungen der Gleichung sind.

In einer schönen Monographie über die hypergeometrische Funktion zeigt *Pincherle*[120]) die Bedeutung dieser Funktion für die linearen

---

117) *Boole,* A Treatise on the Calculus of finite Differences, 1. Aufl. Cambridge 1860; 2. Aufl. London 1872, p. 260—263; Deutsche Ausgabe, Braunschweig 1867, p. 189—193.

118) *Thomae,* Die Recursionsformel $(B + An)\varphi(n) + (B' - A'n)\varphi(n+1)$ $(B'' + A''n)\varphi(n+2) = 0$, Ztschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 349—367; Integration der Differenzengleichung $(n+\varkappa+1)(n+\lambda+1)\Delta^2\varphi(n) + (a+bn)\Delta\varphi(n)$ $+ c\varphi(n) = 0$, Ztschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 146—158, 428—439; vgl. auch die in Fußn. 127) zitierte Arbeit von *Barnes.*

119) *Thomae,* Ueber die Function, welche durch Reihen von der $1 + \frac{p}{1}\frac{p'}{q'}\frac{p''}{q''}$ $+ \frac{p}{1}\frac{p+1}{2}\frac{p'}{q'}\frac{p'+1}{q'+1}\frac{p''}{q''}\frac{p''+1}{q''+1} + \cdots$ dargestellt werden, J. reine angew. Math. 87 (1879), p. 26—73. Eine einfachere und strenge Behandlung desselben Problems gibt *Nörlund,* Sur une classe de fonctions hypergéométriques, Bull. Acad. Sc. Copenhagen 1913, p. 135—153. Über die Bestimmung der Lösungen linearer Differenzengleichungen im allgemeinen Fall durch ihre Unstetigkeiten vgl. die in Nr. 5 besprochenen Arbeiten von *Birkhoff.*

120) *Pincherle,* Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti, Giorn. mat. 32 (1894), p. 209—291; vgl. auch *Heymann,* Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen,

Differenzengleichungen zweiter Ordnung. *Mellin*[121]) behandelt folgende Differenzengleichung erster Ordnung

$$f(x+1) = p_0(x) f(x) + p_1(x), \tag{45}$$

wo $p_0(x)$ und $p_1(x)$ rationale Funktionen bezeichnen, und er findet eine Lösung der Form

$$\int t^{x-1} v(t)\, dt,$$

wo $v(t)$ ein Integral der Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{i=n} (a_i + b_i t)\, t^i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

ist. Er betrachtet vor allem diejenigen Fälle, wo die Gleichung (45) sich durch Gammafunktionen und verwandte Funktionen auflösen läßt. *Barnes*[122]) hat verschiedene spezielle Funktionen, welche einer Gleichung der Form (45) genügen, ausführlich untersucht; besonders gibt er eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der Gammafunktion an.

Leipzig 1891, p. 298—323; Zur Theorie der Differenzengleichungen, J. reine angew. Math. 109 (1892), p. 112—117; Über Differential- und Differenzengleichungen, welche durch die hypergeometrische Reihe von Gauß integriert werden können, Ib. 122 (1900), p. 164—171.

121) *Mellin,* Zur Theorie der Gammafunktion, Acta math. 8 (1886), p. 37—80; Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen, Ib. 9 (1887), p. 137—166; Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung, Ib. 15 (1891), p. 317—384; Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen, Ib 25 (1902), p. 139—164; Ueber die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und hypergeometrischen Functionen, Acta Soc. Sc. Fennicae 21 (1896), Nr. 1.

122) *Barnes,* On the Theory of the *G*-Funktion, Quart. J. pure appl. math. 31 (1900), p. 264—314; The Theory of the double Gamma Function, Phil. Trans. London 196 A (1901), p. 265—387; Genesis of the double Gamma Function, Proc. London math. Soc. 31 (1900), p. 358—381; On the Theory of the multiple Gamma Function, Trans. Cambridge phil. Soc. 19 (1904), p. 374—425. Dieselben oder ähnliche Funktionen behandeln *Appell,* Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes, Math. Ann. 19 (1882), p. 84—102; *Zinine*, Die Funktion Gamma und die Funktion Omega von Heine (russisch), Warschau 1884; *Alexéevsky,* Ueber eine Klasse von Funktionen, welche der Gammafunktion ähnlich sind, Ber. Ges. Leipzig 46 (1894), p. 268—275; *Beaupain,* Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin, Mém. courronés et sav. étr. Acad. Belgique 59 (1903); *Hardy,* On the expression of the Double Zeta-Function and Double Gamma-Function in terms of Elliptic Functions, Trans. Cambridge phil. Soc. 20 (1905), p. 1—35; *Kuylenstierna,* Sur les solutions analytiques de deux équations linéaires simultanées aux différences finies du premier ordre, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 11 (1916) und 13 (1918); *Post,* On the generalized Gamma Functions, Ann. of Math. (2) 20 (1919).

13. Die Laplacesche Differenzengleichung. In mehreren Arbeiten hat *Pincherle*[123]) auf die Bedeutung der *Laplace*schen Transformation

$$f(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt$$

für die Auflösung von Differenzengleichungen hingewiesen. Besonders behandelt[124]) er die *Laplace*sche Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^{i=k} [c_i + b_i(x+i)] f(x+i) = 0$$

und zeigt, daß die Lösungen sich durch hypergeometrische Funktionen mehrerer Veränderlicher ausdrücken lassen. Später untersuchen *Heymann*[125]), *Webb*[126]), *Barnes*[127]) und *Wallenberg*[128]) dieselbe Gleichung. Man bestimmt $v(t)$ als Integral der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$t\frac{dv(t)}{dt} \sum_{i=0}^{i=k} b_i t^i = v(t) \sum_{i=0}^{i=k} c_i t^i.$$

Sind $a_1, a_2, \ldots a_k$ die Wurzeln von $\sum_{i=0}^{i=k} b_i t^i = 0$, so erhält man ein Fundamentalsystem von Lösungen $f(x)$, die ganze Funktionen von x sind, indem man entweder als Integrationsweg Doppelumläufe um zwei der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_k$ wählt oder Integrationswege benutzt, die in geeigneter Richtung von einem der Punkte a_i ausgehen und daselbst endigen.

Neben die *Laplace*sche Transformation stellt sich die folgende Transformation

$$f(x) = \int \frac{v(t)\, dt}{\Gamma(t-x)}, \tag{46}$$

wodurch man eine gegebene Differenzengleichung auf eine andere

123) *Pincherle,* Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari alle differenze, e viceversa, Reale Ist. Lomb. Rend. (2) 19 (1886), p. 559—562; Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni, Mem. Ist. Bologna (4) 8 (1887), p. 125—144; Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle, Acta math. 16 (1893), p. 341—363.

124) *Pincherle,* Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate, Atti R. Acad. Linc. Rend. (4) 4 (1888), p. 694—700, 792—799.

125) *Heymann,* Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen, Leipzig 1891, p. 310—316.

126) *Webb,* On the solution of linear difference equations by definite integrals, Messenger math. (2) 34 (1905), p. 40—45.

127) *Barnes,* On the homogeneous linear difference Equation of the second Order with linear Coefficients, Messenger math. (2) 34 (1905), p. 52—71.

128) *Wallenberg* und *Guldberg,* Theorie der linearen Differenzengleichungen, Leipzig 1911, p. 189—200. Vgl. auch *Nörlund,* Acta math. 40 (1915), p. 242—247

Differenzengleichung zurückführt. Betrachten wir zum Beispiel eine Gleichung der Form[129])

$$(47)\qquad \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Delta^i Q(x)}{i!} f(x+i) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Delta^{i-1} P(x)}{(i-1)!} f(x+i),$$

wo $Q(x)$ und $P(x)$ Polynome sind:

$$Q(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n),$$
$$P(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n).$$

Das Integral (46) genügt dieser Gleichung, wenn man v als Lösung der Gleichung

$$v(x+1) = \frac{Q(x)}{P(x)} v(x)$$

bestimmt. Man hat somit

$$v(x) = \frac{\Gamma(x-\alpha_0)\,\Gamma(x-\alpha_1)\ldots\Gamma(x-\alpha_n)}{\Gamma(x-\gamma_1)\,\Gamma(x-\gamma_2)\ldots\Gamma(x-\gamma_n)}\,\pi(x),$$

wo $\pi(x)$ eine periodische Funktion bedeutet. n verschiedene Bestimmungen dieser Funktion geben ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (47).

129) *Nörlund*, Sur une classe d'intégrales définies, J. math. pures appl. (6) 9 (1913), p. 77—88.

(Abgeschlossen im April 1922.)

II C 8. DIE NEUERE ENTWICKLUNG DER ANALYTISCHEN ZAHLENTHEORIE.

Von

H. BOHR und **H. CRAMÉR**

in Kopenhagen (Dänemark) — in Stockholm (Schweden)

Dieser Artikel, welcher den 1900 abgeschlossenen *Bachmann*schen Artikel (I C 3) weiterführen soll, besteht aus zwei Teilen, von denen der erste, der von *Bohr* ausgearbeitet ist, insofern einen vorbereitenden Charakter trägt, als er sich ausschließlich mit den für die Behandlung der zahlentheoretischen Probleme nötigen funktionen- und reihentheoretischen Hilfsmitteln beschäftigt, während der zweite, welcher von *Cramér* herrührt, die betreffenden Probleme selbst behandelt.

Es wurde von den Verfassern zweckmäßig gefunden, dem Artikel, obwohl er sich nur in geringem Grade mit der älteren, in dem *Bachmann*schen Artikel behandelten Literatur befaßt, jedoch eine in sich abgerundete Form zu geben, so daß er gewissermaßen als ein selbständiges Ganzes hervortritt.*)

Inhaltsübersicht.

Erster Teil.

I. Allgemeine Theorie der Dirichletschen Reihen.

1. Definition einer *Dirichlet*schen Reihe.
2. Die drei Konvergenzabszissen.
3. Der Eindeutigkeitssatz.
4. Die Koeffizientendarstellungsformel.
5. Beziehung zwischen der Reihe auf der Konvergenzgeraden und der Funktion bei Annäherung an die Konvergenzgerade.
6. Das Konvergenzproblem.
7. Anwendung der Theorie der diophantischen Approximationen.

---

*) Bei der Ausarbeitung ist uns die von dem Meister des Gebietes, *J. Hadamard,* in der französischen Ausgabe der Encyklopädie gegebene Bearbeitung und Weiterführung des *Bachmann*schen Artikels von großer Bedeutung gewesen. Dasselbe gilt von dem klassischen Werk von *E. Landau,* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. 1—2, Leipzig und Berlin 1909, welches wir im folgenden einfach mit „Handbuch" zitieren werden.

8. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine *Dirichlet*sche Reihe.
9. Der Mittelwertsatz.
10. Über die Nullstellen einer *Dirichlet*schen Reihe.
11. Zusammenhang verschiedener *Dirichlet*scher Reihen.
12. Multiplikation *Dirichlet*scher Reihen.
13. Summabilität *Dirichlet*scher Reihen.

II. Die Riemannsche Zetafunktion.

14. Die Zetafunktion und ihre Funktionalgleichung.
15. Die *Riemann-Hadamard*sche Produktentwicklung.
16. Die *Riemann-v. Mangoldt*sche Formel für die Anzahl der Nullstellen.
17. Über die Werte von $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 (> \frac{1}{2})$.
18. Über die Größenordnung der Zetafunktion auf vertikalen Geraden.
19. Näheres über die Nullstellen im kritischen Streifen.
20. Folgerungen aus der *Riemann*schen Vermutung.
21. Verallgemeinerte Zetafunktionen.

Zweiter Teil.

22. Einleitung. Bezeichnungen.

III. Die Verteilung der Primzahlen.

23. Der Primzahlsatz. Ältere Vermutungen und Beweisversuche.
24. Die Beweise von *Hadamard* und *de la Vallée Poussin.*
25. Die Beweismethoden von *Landau.*
26. Andere Beweise.
27. Die Restabschätzung.
28. Die *Riemann*sche Primzahlformel.
29. Theorie der L-Funktionen.
30. Die Verteilung der Primzahlen einer arithmetischen Reihe.
31. Andere Primzahlprobleme.

IV. Weitere zahlentheoretische Funktionen.

32. Die Funktionen $\mu(n)$, $\lambda(n)$ und $\varphi(n)$.
33. Zusammenhangssätze.
34. Teilerprobleme.
35. Ellipsoidprobleme.
36. Allgemeinere Gitterpunktprobleme.
37. Verteilung von Zahlen, deren Primfaktoren vorgeschriebenen Bedingungen genügen.
38. Neuere Methoden der additiven Zahlentheorie.
39. Diophantische Approximationen.

V. Algebraische Zahlen und Formen.

40. Quadratische Formen und Körper.
41. Die Zetafunktionen von *Dedekind* und *Hecke.*
42. Verteilung der Ideale und der Primideale.

Erster Teil.

In diesem Teil, der, wie in den einleitenden Worten gesagt, einen rein analytischen Charakter trägt, d. h. von den zahlentheoretischen Anwendungen prinzipiell absieht, wird die Theorie der *Dirichletschen Reihen* besprochen, welche sich — obwohl ihre wesentliche Bedeutung in ihrer Stellung als besonders geeignetes Hilfsmittel zur funktionentheoretischen Behandlung von zahlentheoretischen Aufgaben zu ersehen ist, und sie immer noch ihre meisten Problemstellungen der analytischen Zahlentheorie verdankt — doch im Laufe der letzten Jahrzehnte zu einem selbständigen Abschnitt der allgemeinen Reihenlehre entwickelt hat. Das Referat ist in zwei Kapitel eingeteilt, von denen das erste die Theorie der allgemeinen *Dirichlet*schen Reihen behandelt, während das zweite der für das Studium der Primzahlen fundamentalen speziellen *Dirichlet*schen Reihe, welche die *Riemann*sche Zetafunktion darstellt, gewidmet ist. Bei der Abfassung ist mehr Gewicht auf eine bequeme Übersicht der wichtigeren Resultate als auf strenge Vollständigkeit gelegt.

I. Allgemeine Theorie der Dirichletschen Reihen.[1])

1. Definition einer Dirichletschen Reihe. Unter *einer allgemeinen Dirichletschen Reihe* wird eine unendliche Reihe der Form

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

verstanden; hierbei bedeutet $s = \sigma + it$ eine komplexe, unabhängige Variable, die Koeffizienten a_n sind beliebige komplexe Zahlen, während die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ eine reelle monoton wachsende Zahlenfolge mit $\lambda_n \to \infty$ bezeichnet.[2]) Für die folgende Darstellung wird es bequem sein, die (unwesentliche) Annahme $\lambda_1 \geqq 0$ zu machen. Für $\lambda_n = n$ ist (1) eine Potenzreihe in der Variablen e^{-s}. In dem beson-

---

1) Betreffs vieler Einzelheiten in der Theorie sei der Leser auf *E. Landau,* Handbuch, und *G. H. Hardy-M. Riesz,* The general theory of Dirichlet's series, Cambridge tracts, Nr. 18 (1915), verwiesen.

2) *W. Schnee,* Über irreguläre Potenzreihen und Dirichletsche Reihen, Dissertation, Berlin 1908, und *K. Väisälä,* Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen, Acta Universitatis Dorpatensis (1921), betrachten auch Reihen mit *komplexen* Exponenten λ_n und untersuchen, unter welchen Bedingungen solche Reihen sich „ähnlich“ benehmen wie Reihen mit reellen Exponenten.

ders wichtigen Spezialfall $\lambda_n = \log n$ erhalten wir die *gewöhnlichen Dirichletschen Reihen*

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Die spezielle Reihe (2), bei welcher $a_n = 1$ ist für alle n, also die Reihe

$$(3) \qquad \sum \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

definiert die *Riemannsche Zetafunktion*, deren Theorie in einem besonderen Kapitel behandelt wird. Als ein anderes wichtiges Beispiel einer gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihe (2) sei eine solche erwähnt[3]), bei der die Koeffizienten a_n sich periodisch wiederholen (etwa mit der Periode k), und die Summe der Koeffizienten erstreckt über eine Periode gleich 0 ist, wo also

$$(4) \qquad a_n = a_m \quad \text{für} \quad m \equiv n \pmod{k}, \quad \sum_{n=1}^{k} a_n = 0.$$

Zu diesem Typus gehört z. B. die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen

$$(5) \qquad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

welche durch formale Multiplikation der Zetareihe (3) mit dem Faktor $1 - 2^{1-s}$ entsteht. Andere wichtige Typen gewöhnlicher *Dirichlet*scher Reihen werden in Nr. 7 besprochen.

2. Die drei Konvergenzabszissen. Eine *Dirichlet*sche Reihe (1), die in einem Punkte $s_0 = \sigma_0 + it_0$ *absolut konvergiert*, wird offenbar in jedem Punkte $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geqq \sigma_0$ absolut konvergieren; denn es ist ja, $s - s_0 = s'$ gesetzt,

$$(6) \qquad \sum a_n e^{-\lambda_n s} = \sum a_n e^{-\lambda_n s_0} \cdot e^{-\lambda_n s'}$$

und $|e^{-\lambda_n s'}| \leqq 1$ für $\Re(s') \geqq 0$. Jede Reihe (1) besitzt daher eine *absolute Konvergenzabszisse* σ_A derart, daß (1) für $\sigma > \sigma_A$ absolut konvergiert, für $\sigma < \sigma_A$ dagegen nicht; hierbei sind, den Werten $+\infty$ und $-\infty$ von σ_A entsprechend, diejenigen Fälle mit inbegriffen, wo die Reihe nirgends bzw. überall absolut konvergiert.

Tiefer liegt der Satz von *Jensen*[4]), daß, wenn die Reihe (1) im Punkte $s_0 = \sigma_0 + it_0$ *konvergiert*, sie dann auch in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ konvergiert. Diesen Hauptsatz der Theorie beweist *Jensen*

---

3) *G. Lejeune Dirichlet,* Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres, Crelles J. 19 (1839), p. 324—369 = Werke, Bd. 1, p. 411 u. f.

4) *J. L. W. V. Jensen,* Om Rækkers Konvergens, Tidsskr. for Math. (5) 2 (1884), p. 63—72.

von (6) aus, indem er mit Hilfe partieller (*Abel*scher) Summation nachweist, daß bei festem s' mit $\Re(s') > 0$ die Zahlenfolge $\{e^{-\lambda_n s'}\}$ eine „konvergenzerhaltende" ist in dem Sinne, daß aus der Konvergenz einer Reihe $\sum b_n$ die Konvergenz der „multiplizierten" Reihe $\sum b_n e^{-\lambda_n s'}$ folgt. Es gibt also auch eine *Konvergenzabszisse* $\sigma_B (\leqq \sigma_A)$ derart, daß (1) für $\sigma > \sigma_B$ konvergiert, für $\sigma < \sigma_B$ divergiert.

Cahen[5]), der zuerst die *Dirichlet*schen Reihen einer systematischen Untersuchung unterworfen hat, zeigt, daß (1) in jedem Gebiete $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$, $|s| < K$ *gleichmäßig konvergiert* und somit in der Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_B$ eine *reguläre analytische Funktion* $f(s)$ darstellt. Im allgemeinen konvergiert aber eine Reihe (1) *nicht* gleichmäßig in der *ganzen* Halbebene $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$, und *Bohr*[6]) hat daher die *gleichmäßige Konvergenzabszisse* σ_G eingeführt, welche definiert wird als die untere Grenze aller Abszissen σ_0, für die (1) in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ gleichmäßig konvergiert. Hierbei ist offenbar $-\infty \leqq \sigma_B \leqq \sigma_G \leqq \sigma_A \leqq +\infty$, und es können die drei Konvergenzabszissen alle Werte tatsächlich haben, welche mit diesen Ungleichungen verträglich sind.[7])

Die drei Konvergenzabszissen einer Reihe (1) können leicht aus den Koeffizienten und Exponenten der Reihe bestimmt werden. Für die Abszisse σ_B gilt nach *Cahen*[8]) der Satz: Falls $\sigma_B > 0$ ist[9]), wird

5) *E. Cahen,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues, Ann. Éc. Norm. (3) 11 (1894), p. 75—164.

6) *H. Bohr*, a) Sur la convergence des séries de Dirichlet, Paris C. R. 151 (1910), p. 375—377; b) Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen, Crelles J. 143 (1913), p. 204—211; c) Nogle Bemærkninger om de Dirichletske Rækkers ligelige Konvergens, Mat. Tidsskr. B 1921, p. 51—55.

7) *L. Neder,* Über die Lage der Konvergenzabszissen einer Dirichletschen Reihe zur Beschränktheitsabszisse ihrer Summe, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), No. 20.

8) *E. Cahen,* a. a. O. 5). Ein Teil des Satzes findet sich schon bei *J. L. W. V. Jensen,* Sur une généralisation d'une théorème de Cauchy, Paris C. R. 106 (1888), p. 833—836.

9) Die Bedingung $\sigma_B > 0$ bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, weil ja die Konvergenzabszisse σ_B, falls sie $> -\infty$ ist, immer durch die einfache Transformation $s = s' - c$ um eine Konstante c vergrößert werden kann. Ausdrücke für σ_B, die im Falle $\sigma_B < 0$ oder sogar für jede Lage von σ_B gelten, sind gegeben von *S. Pincherle,* Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti, Atti d. IV Congr. intern. d. Mat. 2 (Rom 1908), p. 44—48; *K. Knopp,* Über die Abszisse der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihe, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 10 (1910), p. 1—7; *W. Schnee,* Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen, Gött. Nachr. 1910, p. 1—42; *T. Kojima,* a) On the convergence-abscissa of general Dirichlet's series, Tôhoku J. 6 (1914), p. 134—139; b) Note on the convergence-abscissa of

sie durch den Ausdruck

(7) $$\sigma_B = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log |S_n|}{\lambda_n} \qquad \left(S_n = \sum_1^n a_m\right)$$

gegeben; d. h. σ_B ist die untere Grenze aller positiven Zahlen α, für welche die „summatorische" Funktion S_n gleich $O(e^{\lambda_n \alpha})$ ist.[10])

Aus (7) ergibt sich sofort, daß im Falle $\sigma_A > 0$

$$\sigma_A = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log R_n}{\lambda_n}. \qquad \left(R_n = \sum_1^n |a_m|\right)$$

Für die gleichmäßige Konvergenzabszisse σ_G gilt schließlich, falls $\sigma_G > 0$ ist, die entsprechende Formel[11]):

$$\sigma_G = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log T_n}{\lambda_n},$$

wo T_n, bei festem n, die obere Grenze von $\left|\sum_1^n a_m e^{-\lambda_m i t}\right|$ für $-\infty < t < \infty$ bezeichnet.

Für Reihen (1), bei denen die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ hinreichend schnell ins Unendliche wächst (z. B. für die Potenzreihen, wo $\lambda_n = n$ ist), gilt immer die Gleichung $\sigma_A = \sigma_B$ $(= \sigma_G)$, d. h. sie besitzen keinen bedingten Konvergenzstreifen. Die genaue notwendige und hinreichende Bedingung, die eine Exponentenfolge erfüllen muß, damit jede zu ihr gehörige *Dirichlet*sche Reihe der Bedingung $\sigma_A = \sigma_B$ genügt, ist

(8) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0.$$

Dirichlet's series, Tôhoku J. 9 (1916), p. 28—37; *M. Fujiwara,* a) On the convergence-abscissa of general Dirichlet's series, Tôhoku J. 6 (1914), p. 140—142; b) Über Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihe, Tôhoku J. 17 (1920), p. 344—350; *E. Lindh* (bei *Mittag-Leffler*), Sur un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet, Paris C. R. 160 (1915), p. 271—273; *B. Malmrot,* Sur une formule de M. Fujiwara, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 14 (1919), No. 4, p. 1—10.

10) Soll die Reihe (1) noch in Punkten *auf* der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ (> 0) konvergieren, ist es nach *Jensen,* a. a. O. 8), notwendig (aber nicht hinreichend, vgl. Nr. 5), daß die summatorische Funktion S_n der Bedingung $S_n = o(e^{\lambda_n \sigma_B})$ genügt.

11) Für *gewöhnliche Dirichlet*sche Reihen $(\lambda_n = \log n)$ bei *H. Bohr,* Darstellung der gleichmäßigen Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ als Funktion der Koeffizienten der Reihe, Arch. Math. Phys. (3) 21 (1913), p. 326—330, für *beliebige Dirichlet*sche Reihen bei *M. Kuniyeda,* Uniform convergence-abscissa of general Dirichlet's series, Tôhoku J. 9 (1916), p. 7—27. In der letzten Arbeit sind auch Formeln für σ_G angegeben, die für jede Lage von σ_G gelten. (Vgl. Note 9).)

Allgemein gilt der Satz[12]), daß *die maximale Breite M des bedingten Konvergenzstreifens* $\sigma_B \leqq \sigma \leqq \sigma_A$ für alle zu einer gegebenen Exponentenfolge gehörigen Reihen (1) durch den Ausdruck

$$M = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n}$$

gegeben wird. Für die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) ist somit die maximale Breite $M = 1$. Diese Breite 1 wird z. B. bei jeder Reihe (2), die den Bedingungen (4) genügt, erreicht; in der Tat ist hier $\sigma_A = 1$, $\sigma_B = 0$.

3. Der Eindeutigkeitssatz. Aus der einfachen Bemerkung, daß die Funktion $e^{-\lambda s} = e^{-\lambda(\sigma + it)}$ $(\lambda > 0)$ für $\sigma \to \infty$ um so schneller gegen 0 abnimmt, je größer der Exponent λ ist, ergibt sich leicht: falls eine *Dirichlet*sche Reihe (1) mit $\sigma_B < \infty$ die Bedingung $\sigma_A < \infty$ oder nur die Bedingung $\sigma_G < \infty$ [6c]) erfüllt, dann *überwiegen für $\sigma \to \infty$ die Anfangsglieder der Reihe den Rest,* d. h. es gilt, bei jedem festen N, für $\sigma \to \infty$ *gleichmäßig in t* die Limesgleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} + o(e^{-\lambda_N \sigma}); \tag{9}$$

hieraus folgt sofort, daß, wenn nicht sämtliche Koeffizienten a_n gleich 0 sind, die Summe $f(s)$ bei hinreichend großem K in der ganzen Halbebene $\sigma > K$ von 0 verschieden sein wird. Für *Reihen* (1) *mit* $\sigma_G < \infty$ gilt daher der folgende *Eindeutigkeitssatz*: Sind zwei *Dirichlet*sche Reihen $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ und $g(s) = \sum b_n e^{-\mu_n s}$ gleichgroß in allen Punkten einer Zahlenfolge $\{s_n = \sigma_n + it_n\}$ mit $\sigma_n \to \infty$, dann sind die beiden Reihen identisch; denn in der *Dirichlet*schen Reihe $\sum c_n e^{-\nu_n s}$, welche durch Subtraktion von $f(s)$ und $g(s)$ entsteht, müssen ja alle Koeffizienten c_n gleich 0 sein.

Für eine *beliebige Dirichlet*sche Reihe (1) mit $\sigma_B < \infty$ gilt die Limesgleichung (9) für $\sigma \to \infty$ im allgemeinen *nicht* gleichmäßig in t, wenn t das *ganze* Intervall $-\infty < t < \infty$ durchläuft. Dagegen gilt (9), wie von *Perron*[13]) bewiesen, gleichmäßig in t, wenn t durch eine Bedingung der Form $|t| < e^{k\sigma}$ beschränkt wird, wo k eine beliebige Konstante bedeutet. In diesem *allgemeinen Fall* finden wir daher den folgenden *Eindeutigkeitssatz*: Wenn zwei *Dirichlet*sche Reihen mit

---

12) *E. Cahen,* a. a. O. 5). Vgl. auch *Hardy-Riesz,* a. a. O. 1), p. 9.

13) *O. Perron*, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Crelles J. 134 (1908), p. 95—143. Daß die Limesgleichung (9) für ein *festes t* gilt, steht schon bei *Dirichlet,* Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von *Dedekind,* Braunschweig 1863, p. 410—414. Vgl. auch eine (in Math. Ztschr. bald erscheinende) Arbeit von *L. Neder,* Über Gebiete gleichmäßiger Konvergenz Dirichletscher Reihen.

$\sigma_B < \infty$ in den Punkten einer Zahlenfolge $\{s_n\}$ mit $\sigma_n \to \infty$ und $|t_n| < e^{k\sigma}$ gleichgroß sind, so sind die beiden Reihen identisch. Hier kann die Forderung $|t_n| < e^{k\sigma_n}$ nicht weggelassen werden, denn es existieren tatsächlich Reihen (1), deren Koeffizienten nicht alle 0 sind, die jedoch eine Folge von Nullstellen $\{s_n\}$ mit $\sigma_n \to \infty$ besitzen.[14])

4. Die Koeffizientendarstellungsformel. Aus dem Eindeutigkeitssatze in Nr. 3 folgt sofort: wenn eine in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ reguläre analytische Funktion $f(s)$ durch eine konvergente *Dirichlet*sche Reihe darstellbar ist, dann müssen die Exponenten λ_n und die Koeffizienten a_n dieser Reihe aus der Funktion $f(s)$ eindeutig bestimmt werden können. Die tatsächliche Bestimmung dieser beiden Zahlenfolgen $\{\lambda_n\}$ und $\{a_n\}$ wird durch den unten folgenden Satz gegeben, dessen *formale* Herleitung[15]) sich aus der bekannten, für jedes positive c gültigen Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\alpha s}}{s}\, ds = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

ergibt, während seine strenge Begründung zuerst von *Hadamard* und *Perron*[16]) gegeben wurde. Dieser Satz lautet: *Es sei* (1) *eine beliebige Dirichletsche Reihe mit der Konvergenzabszisse* $\sigma_B < \infty$ *und* c *eine positive Zahl* $> \sigma_B$. *Dann gilt für jedes* x *im Intervalle* $\lambda_N < x < \lambda_{N+1}$ *die Formel*

$$\sum_1^N a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{e^{xs}}{s}\, ds. \tag{10}$$

Es ist also das auf der rechten Seite stehende Integral $J(x)$ streckenweise konstant (für $0 < x < \infty$) und die Exponenten λ_n sind die Unstetigkeitsstellen von $J(x)$, während die Koeffizienten a_n sich

14) *H. Bohr,* Beweis der Existenz Dirichletscher Reihen, die Nullstellen mit beliebig großer Abszisse besitzen, Palermo Rend. 31 (1911), p. 235—243.

15) Vgl. *L. Kronecker,* Notiz über Potenzreihen, Monatsber. Akad. Berlin (1878), p. 53—58, und *E. Cahen,* a. a. O. 5). Ein Spezialfall kommt schon bei *B. Riemann,* Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsber. Akad. Berlin 1859, p. 671—680 = Werke, p. 145—153, vor.

16) *J. Hadamard,* Sur les séries de Dirichlet, Palermo Rend. 25 (1908), p. 326—330, beweist den Satz unter der Annahme, daß die Reihe eine *absolute* Konvergenzhalbebene besitzt (also $\sigma_A < \infty$) und *O. Perron,* a. a. O. 13) für den allgemeinen Fall. Vgl. auch *E. Phragmén,* Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemannschen Primzahlformel, Oefvers. af Kgl. Vetensk. Förh. 48 (Stockholm 1891), p. 721—744 und *H. v. Mangoldt,* Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel: Zu Riemanns Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“, Sitzungsber. Akad. Berlin 1894, p. 883—896.

als die Sprünge in den Punkten λ_n ergeben.[17]) In einer Unstetigkeitsstelle λ_n selbst ist das Integral $J(x)$ wohl nicht direkt konvergent, es hat aber einen Hauptwert, definiert durch $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}$, und dieser Hauptwert ist gleich dem Mittelwert $\frac{1}{2}(J(\lambda_n+0)+J(\lambda_n-0))$.

Das Integral in (10) konvergiert im allgemeinen nur bedingt. Bei verschiedenen Untersuchungen ist es deshalb bequem, statt (10) die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{e^{xs}}{s^2}\,ds = \sum_1^N a_n(x-\lambda_n) \tag{11}$$

zu benutzen, wo das Integral (wenigstens im Falle $\sigma_G < \infty$, vgl. Nr. 6) absolut konvergiert. Die Formeln (10) und (11) sind übrigens Spezialfälle der allgemeinen Formel[18])

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{e^{xs}}{s^\alpha}\,ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_1^N a_n(x-\lambda_n)^{\alpha-1}, \tag{12}$$

wo $\alpha \geqq 1$ ist.

5. Beziehung zwischen der Reihe auf der Konvergenzgeraden und der Funktion bei Annäherung an die Konvergenzgerade. In den Punkten der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ einer *Dirichlet*schen Reihe (1) kann das Verhalten der Reihe sehr verschiedenartig sein. Wie im Spezialfall einer Potenzreihe ($\lambda_n = n$) bestehen aber auch bei den allgemeinen *Dirichlet*schen Reihen wichtige Zusammenhänge zwischen dem Verhalten der *Reihe* in einem Punkte der Konvergenzgeraden und dem Verhalten der dargestellten *Funktion* $f(s)$, wenn die Variable s sich diesem Punkte nähert. Da dies Problem im Spezialfall $\lambda_n = n$ im Artikel II C 4 ausführlich besprochen ist, sollen hier nur einige Hauptresultate erwähnt werden. Zuerst nennen wir den Satz (Analogon zum *Abel-Stolz*schen Satze über Potenzreihen): wenn die Reihe (1) in einem Punkte s_0 der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ *konvergiert* mit der Summe A, dann existiert der *Grenzwert* $\lim f(s)$ und ist $= A$, wenn s sich von rechts längs einer horizontalen Geraden oder sogar

17) Eine andere, von *Hadamard* herrührende Methode, um die Koeffizienten a_n einer *Dirichlet*schen Reihe aus der durch die Reihe dargestellten Funktion zu bestimmen, wird in Nr. 9 besprochen; diese letzte Methode — und nicht die oben angegebene — ist übrigens als die unmittelbare Verallgemeinerung der *Cauchy*schen Methode zur Bestimmung der Koeffizienten einer Potenzreihe anzusehen.

18) *J. Hadamard,* Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 199—220. Wegen der strengen Begründung im Falle $\sigma_A = \infty$ vgl. *O. Perron,* a. a. O. 13).

in einem der Halbebene $\sigma > \sigma_B$ ganz angehörenden Winkelraum dem Punkte s_0 nähert.[19]) Dieser Satz läßt sich natürlich *nicht* ohne weiteres *umkehren,* d. h. aus der Existenz des Grenzwertes folgt nicht die Konvergenz der Reihe im Punkte s_0. Bedingungen, unter welchen die Umkehrung erlaubt ist, wurden von *Landau, Schnee, Littlewood* und *Hardy-Littlewood* gegeben.[20]) Hier sei nur der tiefliegende Satz von *Littlewood* erwähnt, wonach die Bedingung

$$a_n e^{-\lambda_n s_0} = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \qquad (\text{für } n \to \infty)$$

für die besprochene Umkehrung genügt.

Von etwas anderer Art — weil *Regularität* im Punkte s_0 statt Grenzwert für $s \to s_0$ vorausgesetzt wird — ist ein für verschiedene Anwendungen sehr wichtiger Satz von *M. Riesz*[21]), der als die Verallgemeinerung eines *Fatou*schen Satzes über Potenzreihen ($\lambda_n = n$) anzusehen ist, und der besagt, daß, falls eine *Dirichlet*sche Reihe (1) mit $\sigma_B > 0$ die Bedingung

$$(13) \qquad S_n = a_1 + \cdots a_n = o(e^{\lambda_n \sigma_B})$$

erfüllt, sie in jedem Punkte der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$, in welchem die Funktion $f(s)$ *regulär* ist, *konvergiert,* und zwar gleichmäßig in jedem Regularitätsintervall. Die Bedeutung dieses Satzes zeigt sich

19) Für Annäherung längs einer horizontalen Geraden siehe *Dirichlet-Dedekind,* a. a. O. 13), p. 410—414; für Annäherung im Winkelraum *E. Cahen,* a. a. O. 5).

20) *E. Landau*, a) Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes, Monatsh. Math. Phys. 18 (1907), p. 8—28; b) Über einen Satz des Herrn Littlewood, Palermo Rend. 35 (1913), p. 265—276; *W. Schnee,* Über Dirichletsche Reihen, Palermo Rend. 27 (1909), p. 87—116; *J. Littlewood*, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. London math. Soc. (2) 9 (1910), p. 434—448; *G. H. Hardy* u. *J. Littlewood,* Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. London math. Soc. (2) 13 (1913), p 174—191.

21) *M. Riesz,* a) Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, Paris C. R. 149 (1909), p. 309—312; b) Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen, Acta Math. 40 (1916), p. 349—361. Ein Beweis des Spezialfalls $\lambda_n = \log n$ wurde schon früher (nach einer Mitteilung von *Riesz*) von *E. Landau*, Über die Bedeutung einiger neuer Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, Prac. Mat. Fiz. 21 (1910), p. 97—177, veröffentlicht. Vgl. auch *D. Kojima*, On the double Dirichlet series, Reports Tôhoku University 9 (1920), p. 351—400.

Riesz hat bedeutende Verallgemeinerungen seines Satzes in Aussicht gestellt. Vgl. eine demnächst in den Acta Univ. hung. Francesco-Jos. erscheinende Arbeit. Eine besonders wichtige dieser Verallgemeinerungen — welche den Fall Summabilität statt Konvergenz behandelt, vgl. Nr. **13** — ist in der zahlentheoretischen Arbeit von *H. Cramér,* Über das Teilerproblem von Piltz, Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), No. 21, nach einer Mitteilung von *Riesz* veröffentlicht. Vgl. auch *A. Walfisz,* Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Diss. Göttingen 1922, p. 1—56.

schon darin, daß die Bedingung (13), wie früher[10]) erwähnt, *notwendig* ist, damit die Gerade $\sigma = \sigma_B$ überhaupt eine Konvergenzstelle der Reihe enthalte.

An die erstgenannten Sätze schließt sich eine Reihe von weiteren Sätzen an, wo an Stelle der Konvergenz der Reihe im Punkte s_0 und der Existenz des Grenzwertes der Funktion bei Annäherung an diesen Punkt, bestimmte Art von (eigentlicher) *Divergenz* der Reihe im Punkte s_0 und entsprechende bestimmte Art von *Unendlichwerden* der Funktion bei Annäherung an den Punkt tritt. Solche Sätze, die durch Vergleich mit speziellen einfachen Typen *Dirichlet*scher Reihen abgeleitet werden, verdankt man besonders *Knopp*[22]) und *Schnee*[23]). Als ein einfaches Beispiel für eine gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe (2) sei der folgende Satz genannt (wo es sich um den Punkt $s_0 = 0$ handelt). Aus

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{\log^\alpha n} = A \qquad (\alpha > 0)$$

folgt

$$\lim_{s \to 0} s^\alpha f(s) = A\Gamma(\alpha + 1),$$

wo s durch positive Werte gegen 0 strebt. Mit der viel schwierigeren Frage nach der *Umkehrung* solcher Sätze haben sich *Hardy* und *Littlewood*[24]) beschäftigt. So haben sie z. B. die Umkehrung des eben erwähnten Satzes in dem Falle bewiesen, wo die Koeffizienten a_n sämtlich *positiv* sind. Der weitestgehende von *Hardy* und *Littlewood* bewiesene Satz, welcher den allgemeinen Typus *Dirichlet*scher Reihen (1) betrifft (wo jedoch $\lambda_n : \lambda_{n+1} \to 1$ vorausgesetzt wird) besagt[24b]), daß, wenn eine Reihe (1) mit der Konvergenzabszisse $\sigma_B = 0$ die Limesgleichung

$$\lim_{s \to 0} s^\alpha f(s) = A \qquad (\alpha \geqq 0)$$

erfüllt, und ihre Koeffizienten a_n reell sind und der „einseitigen" Bedingung $a_n > -K\lambda_n^{\alpha-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ genügen[25]), die Gleichung gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{\lambda_n^\alpha} = \frac{A}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

---

22) *K. Knopp*, a) Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Diss. Berlin 1907; b) Divergenzcharaktere gewisser Dirichletscher Reihen, Acta Math. 34 (1911), p. 165—204; c) Grenzwerte von Dirichletschen Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Crelles J. 138 (1910), p. 109—132.

23) *W. Schnee*, a) a. a. O. 2); b) a. a. O. 20). In der letzten Arbeit gibt *Schnee* einige interessante spezielle Typen *Dirichlet*scher Reihen an, die als „Vergleichsreihen" besonders geeignet sind.

24) Vgl. insbesondere *G. H. Hardy* u. *J. Littlewood*, a) a. a. O. 20); b) Some theorems concerning Dirichlet's series, Mess. of math. 43 (1914), p. 134—147.

25) Hieraus folgt sofort als Corollar, daß der Satz, im Falle komplexer Koeffizienten, gültig ist, falls die oben angegebene „einseitige" Bedingung durch

Mit den obigen Fragestellungen eng verwandt ist das Problem nach der Beziehung des Verhaltens der Funktion bei Annäherung an einen Punkt s_0 auf der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ und der Art der Divergenz der Reihe in einem Punkte s_1, welcher *links* von dieser Geraden in derselben Höhe wie s_0 gelegen ist; der einfachen Formulierung halber seien beide Punkte auf der reellen Achse angenommen, und zwar $s_1 = 0$ (also $s_0 = \sigma_B > 0$), so daß die Partialsummen im Punkte s_1 die Werte der summatorischen Funktion $S_n = a_1 + \cdots a_n$ ergeben. Hier ist vor allem ein Satz von *Dirichlet*[26]) über gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihen (mit $\sigma_B = 1$) zu erwähnen, der besagt, daß aus

$$\frac{S_n}{n} \to A \qquad \text{(für } n \to \infty\text{)}$$

folgt

$$f(s)(s-1) \to A. \qquad \text{(für zu 1 abnehm. } s\text{)}$$

Auch dieser Satz läßt sich nicht ohne weiteres umkehren[27]), und zwar nicht einmal, wenn den Koeffizienten der Reihe Bedingungen der Art auferlegt werden (z. B. daß sie alle positiv sein sollen), welche beim vorhergehenden Problem für die Gültigkeit des Umkehrsatzes genügten; es läßt sich im allgemeinen nur behaupten[28]), daß aus $f(s)(s-1) \to A$ folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geqq A \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leqq A.$$

Bei den obigen Sätzen, wo aus dem Verhalten der Funktion auf das Verhalten der Reihe geschlossen wurde, bezog sich die Annahme über die Funktion stets auf ihr Verhalten in der Nähe eines *einzigen* Punktes auf der Konvergenzgeraden. Von *Landau*[29]) rührt der folgende

---

die „allseitige" Bedingung $a_n = O(\lambda_n^{\alpha-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}))$ ersetzt wird. Im speziellen Falle $\alpha = 0$ reduziert sich dieser letzte Satz auf den oben erwähnten *Littlewood*schen Satz (über Konvergenz).

26) *G. Lejeune Dirichlet,* Sur un théorème relatif aux séries, J. de math. (2) 1 (1856), p. 80—81 = Werke, Bd. 2, p. 195—200. Verallgemeinerungen solcher Sätze finden sich z. B. bei *A. Pringsheim,* Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Math. Ann. 37 (1890), p. 38—60; *A. Berger*, Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres, Nova Acta Upsala (3) 14 (1891), Nr. 2; *J. Franel,* Sur la théorie des séries, Math. Ann. 52 (1899), p. 529—549.

27) Wäre dies der Fall, so „würde das ganze Gebäude der Primzahltheorie mit großer Geschwindigkeit errichtet werden können" (*Landau*, Handbuch, Bd. 1, p. 114).

28) *O. Hölder,* Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze, Math. Ann. 20 (1882), p. 535—549. Vgl. auch *E. Landau,* Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Vertheilung der Primideale, Crelles J. 125 (1903), p. 64—188.

29) *E. Landau,* Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, Palermo Rend. 26 (1908), p. 169—302. Eine Verschärfung seines Satzes gab *Landau* a. a. O. 21).

tiefliegende Satz her, in welchem Voraussetzungen über die Funktion bei Annäherung an *alle* Punkte der Konvergenzgeraden gemacht werden und daraus ein sehr genaues Resultat über das Verhalten der Reihe (nämlich Umkehrung des obigen *Dirichlet*schen Satzes) hergeleitet wird: Es sei eine gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe (2) mit positiven Koeffizienten (und $\sigma_B = 1$) in allen Punkten der Konvergenzgeraden $\sigma = 1$ regulär mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum A besitzt; ferner sei für $\sigma \geqq 1$ (und $|t| \to \infty$) die Relation $f(s) = O(|t|^k)$ bei passender Wahl einer Konstanten k erfüllt. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = A.$$

Landau[30]) hat später diesen Satz auf beliebige *Dirichlet*sche Reihen (1) übertragen. Eine Verallgemeinerung dieses *Landau*schen Satzes und andere ähnliche Sätze haben auf anderem Wege *Hardy* und *Littlewood*[31]) gefunden.

6. Das Konvergenzproblem. In Nr. 2 wurde besprochen, wie die drei Konvergenzabszissen σ_A, σ_B, σ_G von den Koeffizienten und Exponenten der Reihe aus bestimmt werden können. Wir wenden uns nun zu einem viel schwierigeren Problem, dem sogenannten *Konvergenzproblem* der *Dirichlet*schen Reihen, nämlich zur Frage, ob und in welcher Weise die Lage dieser Abszissen (und vor allem der Konvergenzabszisse σ_B) mit einfachen analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion $f(s)$ zusammenhängt. Im speziellen Fall $\lambda_n = n$ (Potenzreihe in e^{-s}) ist diese Frage ja einfach dahin zu beantworten, daß die Reihe genau so weit konvergiert, wie die Funktion $f(s)$ *regulär* bleibt; in der Tat, es liegt ja hier immer ein singulärer Punkt auf der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ ($= \sigma_A = \sigma_G$). Es gilt aber nicht nur in dem ganz speziellen Fall $\lambda_n = n$, sondern für alle solche *Dirichlet*sche Reihen (1), deren Exponentenfolge die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0 \tag{14}$$

erfüllt (wo also, nach Nr. 2, $\sigma_B = \sigma_A$ ist), daß das Konvergenzproblem in einfachster Weise zu lösen ist; die Funktion $f(s)$ braucht wohl hier *nicht* auf (oder in unendlicher Nähe links von) der Konvergenzgeraden

30) *E. Landau,* Handbuch, p. 874.

31) *G. H. Hardy* u. *J. Littlewood,* a) New proofs of the prime-number theorem and similar theorems, Quart. J. 46 (1915), p. 215—219; b) Contributions to the theory of the Riemann Zetafunction and the theory of the distributions of primes, Acta Math. 41 (1918), p. 119—196.

$\sigma = \sigma_B$ Singularitäten zu besitzen, es gilt aber der fast ebenso einfache Satz, daß die Reihe genau so weit konvergiert, wie die Funktion $f(s)$ *regulär und beschränkt* bleibt, d. h. es ist $\sigma_B (= \sigma_A) = \sigma_b$, wo σ_b (wie überall im folgenden) *die untere Grenze aller Zahlen* σ_0 *bezeichnet, für welche* $f(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ *regulär ist und einer Ungleichung* $|f(s)| < K = K(\sigma_0)$ *genügt.*[32]) Für Reihen (1), deren Exponentenfolge „sehr" schnell ins Unendliche wächst, gilt übrigens, daß die Funktion $f(s)$ überhaupt nicht über die Konvergenzgerade hinaus fortgesetzt werden kann; es läßt sich nämlich, wie zuerst *Wennberg*[33]) und später allgemeiner *Carlson* und *Landau*[34]) und *Szász*[35]) gezeigt haben, der *Hadamard-Fabry*sche Lückensatz für Potenzreihen auf beliebige *Dirichlet*sche Reihen übertragen. Der Satz lautet hier, daß für jede zu einer Exponentenfolge mit $\lambda_n : n \to \infty$ und $\liminf (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ gehörige Reihe (1) die Konvergenzgerade $\sigma = \sigma_B (= \sigma_A)$ eine *wesentlich singuläre Linie* ist.*)

In anderer Richtung — weil Voraussetzungen über die *Koeffizienten* und nicht über die Exponenten gemacht werden — liegt ein

32) Dieser Satz wurde zuerst von *H. Bohr*, a. a. O. 6b) bewiesen. Einen äußerst einfachen Beweis gab *E. Landau*, Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen, Math. Ztschr. 11 (1921), p. 317—318. Der Satz umfaßt offenbar den für die Potenzreihen ($\lambda_n = n$) gültigen Satz als Spezialfall, denn im Falle $\lambda_n = n$ ist ja $f(s)$ *periodisch* mit der Periode $2\pi i$, und $f(s)$ wird daher von selbst in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ beschränkt sein, wenn sie dort regulär ist.

Zur Definition der Abszisse σ_b vgl. auch die Arbeit von *H. Bohr*, Ein Satz über Dirichletsche Reihen, Münch. Sitzungsber. 1913, p. 557—562, worin bewiesen wird, daß, falls die durch eine beliebige *Dirichlet*sche Reihe (mit $\sigma_A < \infty$) definierte Funktion $f(s)$ nur in irgendeiner *Viertelebene* $\sigma > \sigma_0$, $t > t_0$ regulär und beschränkt ist, sie von selbst in der ganzen *Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt bleiben wird.

33) *S. Wennberg,* Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Diss. Upsala 1920.

34) *F. Carlson* u. *E. Landau*, Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes, Gött. Nachr. 1921, p. 184—188. Vgl. hierzu auch *L. Neder*, Über einen Lückensatz für Dirichletsche Reihen, Math. Ann. 85 (1922), p. 111—114.

35) *O. Szasz*, Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches, Math. Ann. 85 (1922), p. 99—110.

*) In einer soeben erschienenen interessanten Abhandlung von *A. Ostrowski*, Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, Hamburger Seminar 1 (1922), p. 327—350, die sich allgemein mit den Abschnittsfolgen einer *Dirichlet*schen Reihe beschäftigt, wird u. a. auch ein *Lückensatz* bewiesen, wo die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ nur „ab und zu" große Lücken aufweist; es wird gezeigt, daß die den Lücken entsprechende Abschnittsfolge so weit konvergiert, wie es von vornherein überhaupt gehofft werden konnte, d. h. so weit, wie die Funktion sich regulär verhält. Vgl. hierzu auch *H. Bohr*, a. a. O.[44])

wichtiger Satz von *Landau*[36]), der ebenfalls die Verallgemeinerung eines bekannten (*Vivanti*schen) Satzes über Potenzreihen darstellt und der besagt, daß, wenn alle Koeffizienten a_n *positiv* sind, der Punkt σ_B, worin die Konvergenzgerade durch die reelle Achse geschnitten wird, immer ein *singulärer* Punkt der Funktion ist.

Für solche *Dirichlet*sche Reihen (1), für welche die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (14) *nicht* erfüllt, z. B. für die *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihen (2), stellt sich das Konvergenzproblem (wenn keine besonderen Bedingungen über die Koeffizienten gemacht werden) viel schwieriger, und es scheint hier überhaupt zweifelhaft, ob es möglich ist, die Lage der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ durch „einfache“ analytische Eigenschaften der dargestellten Funktion genau zu charakterisieren.[37]) Bevor wir über die vorliegenden Resultate berichten können, müssen einige charakteristische Eigenschaften erörtert werden, die einer jeden von einer *Dirichlet*schen Reihe (1) dargestellten Funktion zukommen, und die das Verhalten dieser Funktion $f(s)$ für ins Unendliche wachsende Werte der Ordinate t betreffen. Zuerst nennen wir den Satz, daß jede solche Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$ die Limesgleichung

$$f(s) = f(\sigma + it) = o(|t|) \qquad (\text{für } |t| \to \infty) \tag{15}$$

erfüllt, sogar gleichmäßig in σ.[38]) Es bezeichne nunmehr hier (und überall im folgenden) σ_e ($\leqq \sigma_B$) *die untere Grenze aller Abszissen* σ_0,

---

36) *E. Landau*, Über einen Satz von Tschebyschef, Math. Ann. 61 (1905), p. 527—550. Verallgemeinerungen des *Landau*schen Satzes sind gegeben von *M. Fekete*, a) Sur les séries de Dirichlet, Paris C. R. 150 (1910), p. 1033—1036; b) Sur une théorème de M. Landau, Paris C. R. 151 (1910), p. 497—500.

Für die von *Landau* betrachteten Reihen mit $a_n > 0$ ist offenbar $\sigma_A = \sigma_B$; es sei beiläufig bemerkt, daß das bloße Bestehen dieser Gleichung $\sigma_A = \sigma_B$ *nicht* genügt um zu schließen, daß die Konvergenzgerade einen singulären Punkt enthält. *H. Bohr*, Über die Summabilität Dirichletscher Reihen, Gött. Nachr. 1909, p. 247—262.

37) So kennt man z. B. keinen allgemeinen Satz über gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihen (2), der uns aus einfachen analytischen Eigenschaften der durch die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen (5) definierten ganzen transzendenten Funktion $\zeta(s)(1 - 2^{1-s})$ darüber Aufschluß gibt, daß diese Reihe eben die Konvergenzabszisse $\sigma_B = 0$ besitzt. Anders verhält es sich, wie aus den späteren Ausführungen hervorgehen wird, mit der gleichmäßigen Konvergenzabszisse $\sigma_G = 1$ und der absoluten Konvergenzabszisse $\sigma_A = 1$ dieser Reihe.

38) *E. Landau*, Handbuch, Bd. 2, p. 824. Der Satz findet sich schon, wie von *Landau* angegeben, implizite bei *O. Perron*, a. a. O. 13). Wie von *H. Bohr*, Bidrag til de Dirichlet'ske Rœkkers Theori, Habilitationsschrift, Kopenhagen 1910, p. 32, bewiesen, läßt sich die Gleichung $f(s) = o(|t|)$ durch keine Gleichung der Form $f(s) = o(|t|^{\alpha})$ mit $\alpha < 1$ ersetzen.

für welche $f(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ *regulär und von endlicher Größenordnung in bezug auf* t *ist*, d. h. gleich $O(|t|^k)$ bei passender Wahl von $k = k(\sigma_0)$. Für jedes feste $\sigma > \sigma_e$ definieren wir alsdann die „Größenordnung" $\mu = \mu(\sigma)$ von $f(s)$ auf der vertikalen Geraden mit der Abszisse σ als die untere Grenze aller Zahlen α, für die $f(\sigma + it) = O(|t|^\alpha)$ ist. Die somit für $\sigma > \sigma_e$ definierte *Funktion* $\mu(\sigma)$ ist nach (15) gewiß $\leqq 1$ für $\sigma > \sigma_B$, und sie ist ferner, wie leicht zu sehen[39]), immer $\geqq 0$ für $\sigma > \sigma_B$. Die genaue Bestimmung der zu einer gegebenen *Dirichlet*schen Reihe gehörigen μ-Funktion ist im allgemeinen ein sehr schwieriges Problem. Doch läßt sich mit Hilfe der bekannten allgemeinen Sätze von *Phragmén* und *Lindelöf* (Artikel II C 4, Nr. **10**) über das Verhalten analytischer Funktionen in der Nähe einer wesentlich singulären Stelle (hier des Punktes $s = \infty$) leicht zeigen, *daß* $\mu(\sigma)$ *im ganzen Definitionsintervall* $\sigma > \sigma_e$ *eine stetige konvexe Funktion ist, die überall* $\geqq 0$ *ist, und die mit abnehmendem* σ *niemals abnimmt.* Wenn nicht nur $\sigma_B < \infty$, sondern auch $\sigma_G < \infty$ ist (was ja z. B. für jede gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe mit $\sigma_B < \infty$ der Fall ist), wird übrigens $\mu(\sigma)$ gleich 0 sein für alle hinreichend großen σ, nämlich mindestens für $\sigma > \sigma_G$.[40])

Kehren wir jetzt zum Konvergenzproblem zurück. *Landau*[41]) war der erste, der mit Erfolg die Frage angegriffen hat, inwiefern man aus der Kenntnis der Größenordnung der durch eine *Dirichlet*sche Reihe dargestellten Funktion (d. h. aus ihrer μ-Funktion) Schlüsse über die Lage der Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_B$ ziehen kann. Das Problem wurde später von *Schnee*[42]) in einer bedeutsamen Arbeit und von *Landau*[43]) selbst weiter verfolgt. Die Untersuchungen umfassen

---

39) *K. Ananda-Rau*, Note on a property of Dirichlet's series, London math. Soc. (2) 19 (1920), p. 114—116; *T. Jansson*, Über die Größenordnung Dirichletscher Reihen, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 15 (1920), No. 6.

40) Die angeführten Resultate über die μ-Funktion finden sich im wesentlichen implizite bei *E. Lindelöf*, Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$, Bull. de Soc. math. (2) 32 (1908), p. 341—356. Vgl. auch *H. Bohr*, a. a. O. 38), p. 28—36; *G. H. Hardy-M. Riesz*, a. a. O. 1), p. 16—18, und die a. a. O. 39) erwähnten Abhandlungen.

Eine sich auf das Verhalten der oberen Grenze $L(\sigma)$ der Funktion $|f(s)|$ im Intervall $\sigma > \sigma_G$ beziehende Ergänzung des *Lindelöf*schen Satzes über die Konvexität der μ-Funktion ist von *G. Doetsch*, Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 237—240, gegeben.

41) *E. Landau*, a. a. O. 29).

42) *W. Schnee*, Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, Math. Ann. 66 (1909), p. 337—349.

43) *E. Landau*, a) Über das Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen,

nicht den allgemeinsten Typus *Dirichlet*scher Reihen, sondern es wird der Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ die (für $\lambda_n = \log n$ erfüllte) Bedingung

$$(16) \qquad \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n k}) \qquad (k > 0)$$

auferlegt, welche offenbar darauf hinausläuft, daß die Exponenten nirgends allzu dicht aufeinander folgen dürfen.[44]) Indem wir uns der Einfachheit halber auf die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) beschränken, besagt das allgemeinste Resultat von *Landau* und *Schnee*: Es sei die Reihe (2) in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ nicht nur absolut konvergent, sondern „so deutlich" absolut konvergent, daß $a_n n^{-\sigma_0}$ gleich $O(n^{-1+\varepsilon})$ bei jedem $\varepsilon > 0$ ist; es sei ferner die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0 - \alpha$ $(\alpha > 0)$ regulär und gleich $O(|t|^k)$. Dann konvergiert die Reihe jedenfalls für

$$\sigma > \sigma_0 - \frac{\alpha}{1+k}.$$

Hierin ist speziell das Resultat (von *Schnee*[42])) enthalten, daß, falls $f(s)$ für $\sigma > \sigma_1$ $(= \sigma_0 - \alpha)$ regulär und, bei jedem $\delta > 0$, gleich $O(|t|^\delta)$ ist, $\sigma_B \leqq \sigma_1$ ist, d. h. eine *Dirichlet*sche Reihe (2) ist mindestens so weit nach links konvergent, wie die zugehörige μ-Funktion gleich 0 ist. Die genannten Sätze geben, mit Hilfe der μ-Funktion, hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Reihe in einer gewissen Halbebene, aber keine Bedingungen, die zugleich notwendig und hinreichend sind. Solche Bedingungen gibt es aber überhaupt nicht, d. h. es ist nicht möglich, von der bloßen Kenntnis der μ-Funktion zu einer *genauen* Bestimmung der Konvergenzabszisse σ_B zu gelangen; in der Tat[45]), es existieren *Dirichlet*sche Reihen, sogar vom Typus (2), die dieselbe μ-Funktion, aber verschiedene Konvergenzabszissen σ_B besitzen.

Palermo Rend. 28 (1909), p. 113—151; b) Neuer Beweis eines Hauptsatzes aus der Theorie der Dirichletschen Reihen, Leipziger Ber. 69 (1917), p. 336—348.

44) Die Bedingung (16) ist übrigens nicht die von *Landau* und *Schnee* benutzte; sie wurde erst später von *H. Bohr,* Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichletscher Reihen, Palermo Rend. 37 (1914), p. 1—16, eingeführt, der zeigte, daß sie die für die betreffenden Untersuchungen „genau richtige" Bedingung ist, d. h. die für die Gültigkeit der *Landau-Schnee*schen Sätze notwendige und hinreichende.

Zur Orientierung sei bemerkt, daß eine Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$, die der Bedingung (16) genügt, auch der Bedingung $\limsup \log n : \lambda_n < \infty$ genügt (aber nicht umgekehrt), so daß (nach Nr. 2) jede Reihe (1), die (16) erfüllt, gewiß ein *absolutes* Konvergenzgebiet besitzt, falls sie überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt.

45) *H. Bohr,* a. a. O. 38), p. 34.

Ganz anders verhält es sich mit dem Problem der Bestimmung der *gleichmäßigen* Konvergenzabszisse σ_G. Hier gilt nach *Bohr*[46]) der einfache Satz, daß jede *Dirichlet*sche Reihe (1), deren Exponentenfolge die Bedingung (16) erfüllt[47]), also speziell jede gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe (2), so weit nach links gleichmäßig konvergiert, wie von vornherein überhaupt gehofft werden konnte, d. h. es ist $\sigma_G = \sigma_b$, wo σ_b die oben definierte „Regularitäts- und Beschränktsheitsabszisse" bedeutet.

Es erübrigt die Frage nach dem Zusammenhang der Lage der *absoluten* Konvergenzgeraden $\sigma = \sigma_A$ mit den analytischen Eigenschaften der dargestellten Funktion zu erörtern. Diese Frage kann auch so gestellt werden, daß es sich um die Bestimmung der Breite des Streifens $\sigma_b \leqq \sigma \leqq \sigma_A$ handelt, in welchem die Funktion $f(s)$ über die absolute Konvergenzhalbebene hinaus regulär und beschränkt bleibt, und dann natürlich vor allem um den maximalen Wert dieser Breite bei gegebener Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$. Diese letztere Frage, zu deren Behandlung Hilfsmittel ganz anderer Art herangezogen werden müssen als diejenigen, worauf die oben referierten Untersuchungen beruhen, wird am Ende der nächsten Nummer besprochen. Dabei werden wir uns wesentlich auf die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) beschränken; bei diesen Reihen ist, nach dem obigen, $\sigma_b = \sigma_G$, und der besprochene Streifen $\sigma_b \leqq \sigma \leqq \sigma_A$ kann daher auch als derjenige Streifen charakterisiert werden, in welchem die Reihe gleichmäßig konvergiert ohne absolut zu konvergieren.

7. Anwendung der Theorie der diophantischen Approximationen. Die Rolle, welche die diophantischen Approximationen beim Studium der *Dirichlet*schen Reihen spielen, tritt am deutlichsten hervor bei der Aufgabe, die Menge der Werte zu bestimmen, welche eine gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihe (2) annimmt, wenn die Variable s eine feste vertikale Gerade $\sigma = \sigma_0$ durchläuft. Hierbei umkreist offenbar jedes *einzelne* Glied, d. h. sein Bildpunkt in einer komplexen Ebene, einen festen *Kreis*; in der Tat, es ist, $a_n = \varrho_n e^{i\varphi_n}$ gesetzt,

$$\frac{a_n}{n^{\sigma_0+it}} = \frac{\varrho_n}{n^{\sigma_0}} \cdot e^{i\{\varphi_n - t\log n\}},$$

46) *H. Bohr*, a. a. O. 6a) und b).

47) Bei diesem Problem — im Gegensatz zu dem obigen — ist die Bedingung (16) übrigens *nicht* die „genau richtige", d. h. die für die Gültigkeit des Satzes notwendige und hinreichende. Eine wesentliche Erweiterung der Bedingung (16) ist von *E. Landau*, a. a. O. 32) gegeben. Vgl. hierzu auch *L. Neder*, a) a. a. O. 7); b) Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen beschränkter Funktionen, Math. Ztschr. 14 (1922), p. 149—158.

wo der Modul $r_n = \varrho_n n^{-\sigma_0}$ nicht von t abhängt. Wie unmittelbar zu sehen, bewegen sich aber die Glieder nicht in der Weise „quasi unabhängig" voneinander jedes auf seinem Kreise, daß man bei passender Wahl der Variablen t erreichen kann, daß eine beliebig vorgegebene Anzahl N dieser Glieder beliebig nahe an N beliebig gegebene Punkte der entsprechenden N Kreisperipherien fallen; es ist ja dies z. B. für die drei Glieder $\frac{a_2}{2^s}$, $\frac{a_3}{3^s}$, $\frac{a_6}{6^s}$ gewiß nicht der Fall, denn aus der Gleichung $\frac{1}{2^s} \cdot \frac{1}{3^s} = \frac{1}{6^s}$ folgt sofort, daß, wenn die Bildpunkte der beiden ersten Glieder „sehr" nahe an zwei festen Punkten P_2 und P_3 auf ihren respektiven Kreisen liegen, der Bildpunkt des dritten Gliedes von selbst sehr nahe an einen festen, von P_2 und P_3 abhängigen, Punkt P_6 auf seiner Kreisperipherie fallen wird. Betrachten wir aber nicht die Größen $\frac{1}{n^s}$, wo n die sämtlichen Zahlen $1, 2, 3 \cdots$ durchläuft, sondern nur die Größen $\frac{1}{p_n^s}$, wo p_n die *Primzahlen* $2, 3, 5 \cdots$ durchläuft, so stellt die Sache sich ganz anders. Hier können wir nämlich, bei passender Wahl von t, erreichen, daß die Bildpunkte der N Größen $\frac{1}{2^s}, \frac{1}{3^s} \cdots \frac{1}{p_N^s}$ mit beliebig vorgegebener Genauigkeit in N beliebig gegebene Punkte ihrer N Kreisperipherien fallen; die Amplituden dieser Größen sind nämlich durch $-t \log 2$, $-t \log 3, \cdots$ $-t \log p_N$ gegeben, und weil die Primzahllogarithmen — wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen Zahl in Primfaktoren — im rationalen Körper *linear unabhängig* sind, können die genannten N Amplituden nach einem berühmten *Kronecker*schen Satz über diophantische Approximationen beliebig nahe (modulo 2π) an N beliebig gegebene Größen gebracht werden. Von dieser Bemerkung ausgehend hat *Bohr*[48]) die Bedeutung der diophantischen Approximationen für verschiedene Probleme in der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen gezeigt; es sollen im folgenden die wesentlichsten Resultate dieser Untersuchung kurz angegeben werden.

Es bezeichne $p_{n_1}^{\nu_1} \cdot p_{n_2}^{\nu_2} \cdots p_{n_r}^{\nu_r}$ die Zerlegung der ganzen Zahl n in Primfaktoren, und es sei in der beliebig gegebenen gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihe

$$\sum \frac{a}{n^s} = \sum a_n \left(\frac{1}{p_{n_1}^s}\right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{p_{n_2}^s}\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{1}{p_{n_r}^s}\right)^{\nu_r}$$

---

48) Vgl. insb. *H. Bohr,* Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$, Gött. Nachr. 1913, p. 441—488.

$\frac{1}{p_1^s} = x_1, \frac{1}{p_2^s} = x_2, \cdots \frac{1}{p_m^s} = x_m \cdots$ gesetzt, wodurch die Reihe die Form annimmt:

$$P(x_1, x_2, \cdots x_m \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} x_{n_2}^{\nu_2} \cdots x_{n_r}^{\nu_r}$$

$$= c + \sum c_\alpha x_\alpha + \sum c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \sum c_{\alpha,\beta,\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \cdots$$

wo $c = a_1$, $c_\alpha = a_{p_\alpha}$, $c_{\alpha,\beta} = a_{p_\alpha p_\beta}$, $\cdots$ ist. Hier sind vorläufig die Größen x_m alle Funktionen der einen Variablen s. Nun denken wir uns aber — weil ja oben gesehen wurde, daß die $x_m = p_m^{-s}$ sich in gewisser Beziehung „fast" so benehmen, als wären sie unabhängig voneinander — das Band zwischen den x_m ganz aufgelöst, d. h. wir fassen die x_m als *voneinander unabhängige* Variablen auf. Die obige Reihe $P(x_1, x_2, \cdots x_m \cdots)$ wird dann offenbar *eine Potenzreihe in den unendlich vielen Variabeln* $x_1, x_2, \cdots$, von der wir sagen werden, daß sie der gegebenen *Dirichlet*schen Reihe (2) entspricht. Betreffs der am Anfang des Paragraphen gestellten Frage nach *dem Verhalten der Reihe* (2) *auf einer vertikalen Geraden* $\sigma = \sigma_0$ ergibt sich dann der Satz: Es sei $\sigma_0 > \sigma_A$ (oder nur $\sigma_0 > \sigma_G$), und es bezeichne $U(\sigma_0)$ bzw. $W(\sigma_0)$ die Menge der Werte, welche die Reihe $f(s)$ auf bzw. in unendlicher Nähe[49]) der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt. Ferner bezeichne $M = M(\sigma_0)$ die Menge der Werte, welche die der *Dirichlet*schen Reihe entsprechende Potenzreihe $P(x_1, x_2 \cdots)$ annimmt, wenn die Variabeln $x_1, x_2 \cdots$ *unabhängig voneinander* die Kreise $|x_m| = p_m^{-\sigma_0}$ $(m = 1, 2 \cdots)$ durchlaufen. Dann gilt, 1. daß die Menge U in der Menge M *überall dicht* liegt, und 2. daß die Menge W mit der Menge M *identisch* ist. Die Wirkungsweise dieses Satzes wird durch seine später zu erwähnende Anwendung auf die Zetareihe deutlich hervorgehen.

Über die (in Nr. 6 erwähnte) Frage nach *der oberen Grenze* T *der Differenz* $\sigma_A - \sigma_b$ *für alle Dirichletschen Reihen* (2), findet man ferner mit Hilfe der Theorie der diophantischen Approximationen den Satz: Es ist

$$T = \frac{1}{S},$$

wo S die obere Grenze aller positiven Zahlen α mit der Eigenschaft bezeichnet, daß jede in einem Gebiete $|x_m| \leqq G_m$ $(m = 1, 2 \cdots)$ *beschränkte*[50]) Potenzreihe $P(x_1, x_2 \cdots)$ im Gebiet $|x_m| \leqq \varepsilon_m G_m (m = 1, 2 \ldots)$

49) Dies letzte so zu verstehen, daß eine Zahl w dann und nur dann zur Menge $W(\sigma_0)$ gehört, falls die Gleichung $f(s) = w$ in jedem Streifen $\sigma_0 - \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$ eine Lösung besitzt.

50) Eine Potenzreihe $P(x_1, x_2 \ldots)$ in unendlichvielen Variabeln heißt — nach *D. Hilbert*, Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen

absolut konvergiert, wenn nur $\Sigma \varepsilon_m^\alpha$ konvergiert (und $0 < \varepsilon_m < 1$). Es ist hierdurch die Bestimmung der „Maximalbreite" T auf die Bestimmung der (in der Theorie der Potenzreihen wesentlichen) Konstanten S zurückgeführt. Über diese Konstante S findet man sofort, daß sie $\geqq 2$ ist, woraus folgt, daß $T \leqq \frac{1}{2}$ ist.[51]) Die besonders wichtige Frage, ob nicht $T = 0$ ist (d. h. ob nicht immer $\sigma_A = \sigma_b$ ist), wurde von *Toeplitz*[52]) gelöst, der durch Untersuchungen über quadratische Formen mit unendlichvielen Variabeln zeigte, daß $S \leqq 4$, also $T \geqq \frac{1}{4}$ ist. Das Problem, S (und damit T) genau zu bestimmen, ist noch ungelöst.

Ein bemerkenswertes Resultat ergibt sich, wenn man den besprochenen Zusammenhang zwischen *Dirichlet*schen Reihen und Potenzreihen mit unendlichvielen Variabeln nicht auf die allgemeinen *Dirichlet*schen Reihen vom Typus (2), sondern auf zwei *spezielle Klassen* solcher Reihen anwendet, nämlich auf diejenigen Reihen (2), die formal eine Zerlegung in Addenden bzw. in Faktoren derart zulassen, daß dadurch *die einzelnen Primzahlen separiert werden*, d. h. deren Koeffizienten entweder die Bedingung: $a_n = 0$ für alle n, die mindestens zwei verschiedene Primzahlen enthalten, oder die Bedingung: $a_m a_l = a_{ml}$ für teilerfremde m und l erfüllen. Für diese beiden Typen *Dirichlet*scher Reihen — die übrigens fast alle in der analytischen Zahlentheorie vorkommenden Reihen (2) umfassen — gilt immer die Gleichung $\sigma_A = \sigma_b$, d. h. eine jede *Dirichlet*sche Reihe einer dieser Typen ist (im Gegensatz zu einer beliebigen Reihe (2)) *genau so weit*

Variabeln, Palermo Rend. 27 (1909), p. 59—74 — *beschränkt* in einem Gebiete $|x_m| \leqq G_m (m = 1, 2 \cdots)$, wenn 1. bei jedem festen m der m^{te} „Abschnitt" $P_m(x_1, \cdots x_m)$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, \cdots |x_m| \leqq G_m$ absolut konvergiert, und 2. eine absolute Konstante K derart existiert, daß bei jedem m und $|x_1| \leqq G_1, \cdots |x_m| \leqq G_m$ die Ungleichung $|P_m(x_1, \cdots x_m)| < K$ besteht.

51) *H. Bohr*, a. a. O. 48). Dies spezielle Resultat $T \leqq \frac{1}{2}$ ist, wie *G. H. Hardy*, The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series, Quart. J. of math. 47 (1916), p. 176—192 gezeigt hat, kein tiefliegendes, d. h. es läßt sich auch ohne Zurückgreifen auf die Theorie der Potenzreihen mit unendlichvielen Variabeln leicht herleiten. Vgl. auch eine interessante Note von *F. Carlson*, Sur les séries de Dirichlet, Paris C. R. 172 (1921), p. 838—840, und die eben erschienene Arbeit von *K. Grandjot*, Über das absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, Diss. Göttingen 1922, in welcher ein dem *Schnee-Landau*schen Satze über das Konvergenzproblem (vgl. Nr. 6) entsprechender Satz über das absolute Konvergenzproblem abgeleitet wird.

52) *O. Toeplitz*, Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen, Gött. Nachr. 1913, p. 417—432.

absolut konvergent, wie die dargestellte Funktion regulär und beschränkt bleibt.[53])

Die oben erwähnten Untersuchungen können von den gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) auf den allgemeinen Typus (1) erweitert werden.[54]) Eine ähnliche Rolle, wie die von den Primzahllogarithmen gebildete Zahlenfolge für die spezielle Exponentenfolge $\{\lambda_n = \log n\}$, spielt im Falle einer *beliebigen Exponentenfolge* $\{\lambda_n\}$ eine sogenannte *Basis* dieser Folge $\{\lambda_n\}$, d. h. eine (aus endlich oder abzählbarvielen Zahlen bestehende) Folge von *linear unabhängigen* Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ mit der Eigenschaft, daß jeder der Exponenten λ_n als lineare Funktion endlichvieler β mit rationalen Koeffizienten darstellbar ist. Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn die Exponenten λ_n *selbst* linear unabhängig sind (also selbst eine Basis bilden). Hier gilt ganz allgemein der Satz, daß $\sigma_A = \sigma_b$ ist.[55]) Dies ist die Verallgemeinerung eines obigen Satzes über gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihen (2), nach welchem die Gleichung $\sigma_A = \sigma_b$ immer gilt, wenn $a_n = 0$ ist für zusammengesetztes n.

8. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Dirichletsche Reihe. Beim Konvergenzproblem in Nr. 6 (und Nr. 7) waren wir von einer Funktion $f(s)$ ausgegangen, von der *vorausgesetzt* wurde, daß sie in einer gewissen Halbebene durch eine *Dirichlet*sche Reihe dargestellt war, und es handelte sich darum, die Lage der Konvergenzabszissen dieser Reihe aus den analytischen Eigenschaften der Funktion zu bestimmen. Mit dieser Frage verwandt, aber davon wesentlich zu trennen, ist die Frage, welche Bedingungen eine in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ *beliebig gegebene* analytische Funktion erfüllen muß, damit sie überhaupt in eine (dort konvergente) *Dirichlet*sche Reihe entwickelt werden kann. Es liegt hierbei nahe, von dem Satze über

53) Der „Grund", weshalb die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen (die ja der Bedingung $a_m a_l = a_{ml}$ genügt) die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_A = 1$ besitzt, ist also, daß die durch die Reihe dargestellte (ganze transzendente) Funktion $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ nicht über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus beschränkt bleibt.

54) *H. Bohr*, Zur Theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen, Math. Ann. 79 (1919), p. 136—156.

55) *H. Bohr*, Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen, Acta Math. 36 (1913), p. 197—240. Bei diesem Satze über die Bestimmung der *absoluten* Konvergenzabszisse σ_A ist bemerkenswert, daß — im Gegensatze zu den Sätzen in Nr. 6 über die Konvergenzabszisse σ_B und die gleichmäßige Konvergenzabszisse σ_G — überhaupt keine Bedingung über die „ungefähre" Lage der λ_n (z. B daß sie nicht allzu dicht aufeinander folgen dürfen) nötig ist, sondern nur die angegebene *arithmetische* Bedingung der linearen Unabhängigkeit, welche ja die „genaue" Lage der λ_n betrifft.

die Koeffizientendarstellung in Nr. 4 auszugehen, welcher die Koeffizienten und Exponenten der Reihe von der Funktion aus bestimmt, und zu untersuchen, ob nicht etwa die Konvergenz und streckenweise Konstanz des dort vorkommenden Integrals $J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{xs} f(s)}{s} ds$ für die Entwickelbarkeit einer Funktion $f(s)$ in eine *Dirichlet*sche Reihe genügt. Es zeigt sich nun, daß eine solche unmittelbare Umkehrung des Satzes in Nr. 4 *nicht* gilt[56]), daß sie aber *unter gewissen einschränkenden Bedingungen* gelingt.[57]) Die hierdurch gewonnenen Resultate sind jedoch von einem etwas komplizierten Charakter, und es zeigen überhaupt viele Eigenschaften der *Dirichlet*schen Reihen, daß dieser Reihentypus zur Darstellung von Funktionen allgemeinen Charakters nicht geeignet ist. In diesem Zusammenhange ist vor allem eine schöne Arbeit von *Ostrowski*[58]) zu erwähnen, worin zunächst der Satz bewiesen wird, daß eine durch eine *Dirichlet*sche Reihe (1) dargestellte Funktion $f(s)$ nur in dem sehr speziellen Fall einer *algebraischen „Differenzendifferentialgleichung"* genügen kann, in welchem die Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ eine *endliche* lineare Basis besitzt.[59]) Bei den weiteren Untersuchungen von *Ostrowski* erweist es sich als bequem, die Transformation $e^{-s} = x$ auszuführen, also statt einer *Dirichlet*schen Reihe (1) die entsprechende „irreguläre" Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

zu betrachten, die offenbar im Punkte $x = 0$ (welcher $\sigma = +\infty$ ent-

56) Vgl. *O. Perron,* a. a. O. 13) und *E. Landau,* Handbuch, p. 833.

57) Vgl. *J. Hadamard,* a) Sur les séries de Dirichlet, Palermo Rend. 25 (1908), p. 326—330; b) Rectification à la note „Sur les séries de Dirichlet", Palermo Rend. 25 (1908), p. 395—396 und insbesondere die Abhandlungen von *W. Schnee,* a. a. O. 9) und *M. Fujiwara,* Über Abelsche erzeugende Funktion und Darstellbarkeitsbedingung von Funktionen in Dirichletschen Reihen, Tôhoku J. 17 (1920), p. 363 bis 383. In anderer Richtung liegt eine Untersuchung von *J. Steffensen,* Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Funktion als Dirichletsche Reihe, Nyt Tidskr. f. Mat. 1917, p. 9—11.

58) *A. Ostrowski,* Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 241—298.

59) Für den speziellen Fall der *Zetafunktion* war es schon durch *D. Hilbert,* Sur les problèmes futurs des Mathématiques, C. R. du 2 congr. intern. d. math. Paris 1902, p. 58—114, bekannt, daß sie keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Vgl. auch *V. Stadigh,* Ein Satz über Funktionen, die algebraische Differentialgleichungen befriedigen, und über die Eigenschaft der Funktion $\zeta(s)$ keiner solchen Gleichung zu genügen, Dissertation Helsingfors 1902.

spricht) einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung besitzt. Die Frage nach den Funktionen $f(s)$, welche in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickelt werden können, tritt dann hier in der Gestalt auf, welche Art von Singularitäten im Punkte $x = 0$ durch eine irreguläre Potenzreihe bewältigt werden können. *Ostrowski* zeigt nun u. a., daß nur in dem oben genannten speziellen Fall, wo die Exponentenfolge eine endliche lineare Basis besitzt, die durch eine solche irreguläre Potenzreihe dargestellte Funktion $F(x)$ einer an der Stelle $x = 0$ *analytischen* Differentialgleichung genügen kann. Durch diesen Satz tritt deutlich zutage, wie „schwer" die Singularität ist, die eine *Dirichlet*sche Reihe im unendlichfernen Punkte besitzt.

9. Der Mittelwertsatz. Aus der Gleichung

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\alpha t}dt = \begin{cases} 0 \text{ für reelles } \alpha \neq 0 \\ 1 \text{ für } \alpha = 0 \end{cases}$$

folgt sofort durch formales Rechnen, daß, wenn

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s},\ g(s) = \sum b_n e^{-\lambda_n s}$$

zwei beliebige (zur selben λ-Folge gehörige) *Dirichlet*sche Reihen sind, die Gleichung gilt

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\sigma_1 + it)g(\sigma_2 - it)dt = \sum a_n b_n e^{-\lambda_n(\sigma_1+\sigma_2)}, \tag{17}$$

worin speziell, $b_n = \bar{a}_n$ und $\sigma_1 = \sigma_2$ entsprechend, die Gleichung

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma_1 + it)|^2 dt = \sum |a_n|^2 e^{-2\lambda_n\sigma_1}$$

enthalten ist. *Hadamard*[60]), der zuerst auf die Gleichung (17) hingewiesen hat, hat ihre Gültigkeit für den Fall bewiesen, in dem die zwei Reihen auf den Geraden $\sigma = \sigma_1$ bzw. $\sigma = \sigma_2$ *absolut* konvergieren, und *Landau*[61]) und *Schnee*[62]) haben später (unter einer gewissen einschränkenden Bedingung über die Dichte der λ-Folge) bewiesen, daß die Formel auch in anderen allgemeinen Fällen gültig bleibt. Als ein für die Anwendungen (z. B. auf die Zetafunktion) besonders wichtiges

60) *J. Hadamard,* Théorème sur les séries entières, Acta Math. 22 (1899), p. 55—63.

61) *E. Landau,* a) a. a. O. 29); b) Neuer Beweis des Schneeschen Mittelwertsatzes über Dirichletsche Reihen, Tôhoku J. 20 (1922), p. 125—130.

62) *W. Schnee,* Über Mittelwertsformeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen, Wiener Sitzungsber. (IIa) 118 (1909), p. 1439—1522.

Beispiel der *Landau-Schnee*schen Resultate nennen wir den sogenannten *Schneeschen Mittelwertsatz für gewöhnliche Dirichletsche Reihen* (2), der besagt, daß die Gleichung

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma_1+it)|^2dt=\sum\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma_1}}$$

für jedes $\sigma_1 > \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B)$ besteht (aber im allgemeinen *nicht* für $\sigma_1 \leqq \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B)$).

Aus der Gleichung (17) folgt ferner (indem $g(s)$ gleich $e^{-\lambda_n s}$ und $\sigma_2 = -\sigma_1$ gesetzt wird) die *Koeffizientendarstellungsformel*[63])

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(\sigma_1+it)e^{\lambda_n(\sigma_1+it)}dt=a_n;$$

diese Formel gilt nach *Landau*[61a]) bei jedem $\sigma > \sigma_B$, und nach *Schnee*[62]) konvergiert der Ausdruck auf der linken Seite sogar *gleichmäßig* in n (unter der oben erwähnten einschränkenden Bedingung über $\{\lambda_n\}$).

10. Über die Nullstellen einer Dirichletschen Reihe. Schon bei Besprechung des Eindeutigkeitssatzes in Nr. 3 wurde die Frage nach der Verteilung der *Nullstellen* einer *Dirichlet*schen Reihe berührt, indem gezeigt wurde, daß gewisse Gebiete der Konvergenzhalbebene nullpunktsfrei sind. Die erste allgemeine Untersuchung des Problems, *wie viel* Nullstellen eine *Dirichlet*sche Reihe in einer Halbebene $\sigma > \sigma_0$ $(> \sigma_B)$ besitzen kann, rührt von *Landau*[64]) her, der mit Hilfe des bekannten *Jensen*schen Satzes bewies, daß für jede *gewöhnliche Dirichlet*sche Reihe (2) die Anzahl $n(\sigma_B + \varepsilon, T)$ der im Gebiete $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$, $T < t < T + 1$ gelegenen Nullstellen gleich $O(\log T)$ und also die Anzahl $N(\sigma_B + \varepsilon, T)$ von Nullstellen im Gebiete $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$, $0 < t < T$ gleich $O(T \log T)$ ist. Für *beliebige Dirichlet*sche Reihen (1) bewies *Landau*[64a]) einen entsprechenden Satz, wo nur $\log T$ durch $\log^2 T$ ersetzt ist; später hat *Landau*[64b]) gezeigt, daß in der Formel $n(\sigma_B + \varepsilon, T) = O(\log^2 T)$ der Buchstabe O durch o ersetzt werden kann, während *Wennberg*[33]) bewiesen hat, daß man in der *Landau*schen Formel $N(\sigma_B + \varepsilon, T) = O(T \log^2 T)$ ganz allgemein, d. h. für jede *Dirichlet*sche Reihe (1), $\log^2 T$ durch $\log T$ ersetzen kann, so daß wir also für $N(\sigma_B + \varepsilon, T)$ (aber nicht für $n(\sigma_B + \varepsilon, T)$) genau dieselbe Formel bekommen, wie für die gewöhnlichen Reihen (2).

63) Vgl. Note 17).

64) a) *E. Landau,* Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen, Berliner Sitzungsber. 14 (1913), p. 897—907; b) Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 128—129.

Tiefer — weil auf dem *Schnee*schen Mittelwertsatze beruhend — liegt ein Satz von *Bohr* und *Landau*[65a]) über *gewöhnliche Dirichlet*sche Reihen (2), welcher besagt, daß bei jedem $\sigma_1 > \sigma_B + \frac{1}{2}$ die Relation $N(\sigma_1, T) = O(T)$ besteht.[66]) Dieser Satz läßt sich nicht verbessern; wohl aber gilt[65b]) für gewisse *spezielle*, für die zahlentheoretischen Anwendungen besonders wichtige Reihen (2), daß der Ausdruck $O(T)$ durch $o(T)$ ersetzt werden kann. Im Anschluß an diese Untersuchungen hat *Carlson*[67]) einen allgemeinen Satz über die Anzahl der Nullstellen einer gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihe gefunden, von dem ein (wegen Anwendung auf die Zetafunktion) besonders wichtiger Spezialfall so lautet: In der Reihe $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ sei $a_1 \neq 0$, und es sei σ_B etwa gleich 0; es mögen ferner die Koeffizienten b_n der (formal entwickelten) Reihe $1 : f(s) = \sum \frac{b_n}{n^s}$ die Bedingung $\lim |b_n| : \log n = 0$ erfüllen. Dann ist bei jedem $\varepsilon > 0$ die Anzahl $N(\frac{1}{2} + \varepsilon, T)$ nicht nur gleich $o(T)$, sondern sogar gleich $O(T^{1-4\varepsilon^2+\delta})$, wo δ beliebig klein ist.

Mit Hilfe von Sätzen aus dem *Picard-Landau*schen Satzkreis lassen sich ferner verschiedene interessante Resultate über den Wertvorrat einer *Dirichlet*schen Reihe (1) ableiten. So ergibt sich nach *Lindelöf*[68]), daß, falls $\sigma_b < \infty$ ist, und $f(s)$ für $\sigma > \sigma_b - \varepsilon$ regulär (also dann gewiß nicht beschränkt) bleibt, $f(s)$ in jedem Streifen um die Gerade $\sigma = \sigma_b$ *sämtliche Werte, höchstens mit einer einzigen Ausnahme* annimmt. Dasselbe Resultat gilt in jedem Streifen um die Gerade

65) *H. Bohr* und *E. Landau*, a) Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen, Palermo Rend. 37 (1914), p. 269—272; b) Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 158 (1914), p. 106—110.

66) Dieselbe Relation $N(\sigma_1, T) = O(T)$ gilt nach *Wennberg* 33) für eine beliebige *Dirichlet*sche Reihe (1), wenn $\sigma_1 > \sigma_b$ angenommen wird, und sie ist hier (wie *Wennberg* mit Hilfe diophantischer Approximationen beweist) die bestmögliche in dem Sinne, daß, falls die Reihe in der Halbebene $\sigma > \sigma_b + \varepsilon$ überhaupt eine Nullstelle besitzt, die Anzahl $N(\sigma_b + \varepsilon, T) \neq o(T)$ ist.

67) *F. Carlson*, Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion, Arkiv für Mat., Ast. och Fys. 15 (1920), No. 20. Vgl. auch *E. Landau*, Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion, Arkiv för Mat., Ast. och Fys. 16 (1921), No. 7, der mit Hilfe einer neuen Beweismethode des *Schnee*schen Mittelwertsatzes (vgl. 61b) einen abgekürzten Beweis des *Carlson*schen Satzes gibt.

68) *E. Lindelöf*, Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes, et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta soc. sc. Fenn. 35 (1908), No. 7. Vgl. auch *H. Bohr* und *E. Landau*, Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_x(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$, Gött. Nachr. 1910. p. 303—330.

$\sigma = \sigma_e$, falls $f(s)$ für $\sigma > \sigma_e - \varepsilon$ regulär ist.[69]) Ferner wird, nach *Wennberg*[33]), jede *Dirichlet*sche Reihe mit $\sigma_b = \infty$, in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ sämtliche Werte, höchstens mit einer Ausnahme, annehmen. Schließlich sei noch erwähnt, daß jede *Dirichlet*sche Reihe mit *linear unabhängiger* Exponentenfolge (und also mit $\sigma_b = \sigma_A$), falls sie nicht in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_b$ beschränkt ist, in dieser Halbebene überhaupt *jeden* Wert unendlich oft annimmt.[55])

11. Zusammenhang verschiedener Dirichletscher Reihen. Es seien

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it) \tag{18a}$$

und

$$F(z) = \sum a_n e^{-\mu_n z} \qquad (z = x + iy) \tag{18b}$$

zwei *Dirichlet*sche Reihen mit *denselben Koeffizienten* a_n, deren *Exponenten durch die Relation* $\mu_n = e^{\lambda_n}$ *verbunden sind.* Wie von *Cahen*[5]) gezeigt, besteht ein interessanter Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $f(s)$ und $F(z)$, indem jede von ihnen durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden kann, dessen Integrand in einfacher Weise von der anderen der beiden Funktionen abhängt. Formal ergeben sich diese Darstellungen sehr leicht aus der Integraldarstellung der Γ-Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad (\sigma > 0)$$

und ihrer im *Mellin*schen Sinne „reziproken" Formel[70])

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds \qquad (c > 0,\ x > 0).$$

In der Tat, es lassen sich diese beiden Formeln (nach einer einfachen Transformation) so schreiben:

$$e^{-\lambda_n s}\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-\mu_n x} dx, \quad e^{-\mu_n z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} e^{-\lambda_n s} ds,$$

69) Ein Beweis findet sich (implizite) bei *H. Bohr,* Über die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichletschen Reihen, Wiener Sitzungsber. (IIa) 119 (1910), p. 1391—1397.

70) Diese Formel, deren große Bedeutung sich in den Untersuchungen von *H. Mellin* gezeigt hat, ist (nach *Mellin,* Bemerkungen im Anschluß an den Beweis eines Satzes von *Hardy* über die Zetafunction, Ann. Acad. sc. Fenn. (A) 11 (1917), No. 3) schon von *S. Pincherle,* Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate, Rend. Ac. Linc. 4 (1888), p. 694—700 in etwas anderer Form angegeben. Auch in neueren Arbeiten von *Hardy* und *Littlewood* (vgl. z. B. a. a. O. 31) spielt diese „*Cahen-Mellin*sche Formel" eine wichtige Rolle.

und hieraus folgen sofort (durch Multiplikation mit a_n und Summation) die gesuchten Integraldarstellungen

$$(19\text{a}) \qquad f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} F(x) dx$$

und

$$(19\text{b}) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} f(s) ds.$$

Bei *Cahen* waren die Konvergenzuntersuchungen noch nicht streng durchgeführt. Dies geschah erst durch *Perron*[71]), der den Satz bewies: Wenn die Reihe (18a) für $\sigma > \sigma_0 > 0$ konvergiert (woraus leicht folgt, daß (18b) mindestens für $x > 0$ konvergiert), so gilt die Formel (19a) für $\sigma > \sigma_0$, und die Formel (19b) bei festem $c > \sigma_0$ für $x > 0$. Im Spezialfalle $\lambda_n = \log n$, $\mu_n = n$ haben wir es mit einer *gewöhnlichen Dirichletschen Reihe* $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ und einer einfachen *Potenzreihe* $F(z) = \sum a_n e^{-nz}$ zu tun.[72]) Ist außerdem noch $a_n = 1$ für alle n, wird $f(s) = \zeta(s)$ und $F(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, und wir erhalten aus der obigen Formel (19a) die von *Riemann*[73]) benutzte wichtige Integraldarstellung der Zetafunktion

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \qquad (\sigma > 1).^{74)}$$

---

71) *O. Perron*, a. a. O. 13). Vgl. auch *G. H. Hardy*, On a case of term-by-term integration of an infinite series, Mess. of Math. 39 (1910), p. 136—139.

72) Wie aus der Integraldarstellung (19a) ersichtlich ist, hängt das analytische Verhalten der *Dirichlet*schen Reihe $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ mit dem Verhalten der, für $x > 0$ konvergenten, Potenzreihe $F(z) = \sum a_n e^{-nz}$ bei Annäherung an den Punkt $z = 0$, d. h. mit dem Verhalten der (für $|u| < 1$ konvergenten) Potenzreihe $\varphi(u) = \sum a_n u^n$ bei Annäherung an den Punkt $u = 1$, eng zusammen. Vgl. hierüber *G. H. Hardy*, The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation, London math. Soc. (2) 8 (1909), p. 277—294 und *M. Fekete*, a. a. O. 36). So besteht z. B. der Satz [*A. Hurwitz*, Über die Anwendung eines funktionentheoretischen Principes auf gewisse bestimmte Integrale, Math. Ann. 53 (1900), p. 220—224], daß, falls $\varphi(u)$ im Punkte $u = 1$ *regulär* ist, $f(s)$ gewiß eine *ganze* Funktion ist. Auch die später zu erwähnende Untersuchung von *Hardy* über *Abel*sche Summabilität *Dirichlet*scher Reihen (2) basiert auf der Verbindung zwischen $f(s)$ und $\varphi(u)$.

73) *B. Riemann*, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Berliner Monatsber. 1859, p. 671—680 = Werke (2. Aufl.), p. 145—153.

74) Eine von der Integraldarstellung (19a) wesentlich verschiedene Integraldarstellung einer allgemeinen *Dirichlet*schen Reihe $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ ist von

Bei dem oben besprochenen Zusammenhang zweier *Dirichlet*scher Reihen handelte es sich um Reihen mit denselben Koeffizienten, aber verschiedenen Exponenten. Wie von *Cramér*[75]) gezeigt, besteht auch ein gewisser Zusammenhang zwischen zwei *Dirichlet*schen Reihen $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ und $g(s) = \sum b_n e^{-\lambda_n s}$ mit *denselben Exponenten*, deren Koeffizienten a_n und b_n aber derart voneinander abhängen, *daß* $b_n = a_n \varphi(\lambda_n)$ *ist, wo* $\varphi(z)$ *eine ganze transzendente Funktion von* z *ist*, welche die Bedingung $|\varphi(z)| < e^{k|z|}$ für alle hinreichend großen $|z|$ erfüllt. *Cramér* beweist nämlich, daß, falls die Funktion $f(s)$, welche durch die erste Reihe definiert wird, in einem Gebiete G_1, das über die Konvergenzgerade $\sigma = \sigma_B$ dieser Reihe hinausreicht, regulär ist, die durch die zweite Reihe definierte Funktion $g(s)$ ebenfalls über die „entsprechende" Gerade $\sigma = \sigma_B + k$ analytisch fortsetzbar sein wird, und zwar auf ein Gebiet G_2, das vom Gebiete G_1 in einfach angebbarer Weise abhängt.

12. Multiplikation Dirichletscher Reihen. Wie leicht zu sehen, wird man durch „gewöhnliches" Rechnen mit *Dirichlet*schen Reihen wieder zu *Dirichlet*schen Reihen geführt; speziell entsteht durch *Multiplikation* zweier beliebiger *Dirichlet*scher Reihen

$$(20) \qquad f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad \text{und} \quad g(s) = \sum b_n e^{-\mu_n s}$$

wiederum eine *Dirichlet*sche Reihe $\sum c_n e^{-\nu_n s}$, und zwar führt die Multiplikation zweier *gewöhnlicher Dirichlet*scher Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ und $\sum \frac{b_n}{n^s}$ wieder zu einer *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihe $\sum \frac{c_n}{n^s}$, deren Koeffizienten c_n durch die Formel $c_n = \sum a_m b_l$ bestimmt werden, wobei m und $l = n : m$ alle Teiler von n durchlaufen.[76])

J. Steffensen, Ein Satz über *Stieltjes*sche Integrale mit Anwendung auf *Dirichlet*sche Reihen, Palermo Rend. 36 (1913), p. 213—219, angegeben; die *Steffensen*sche Formel, die die absolute Konvergenz der Reihe für $\sigma > 0$ voraussetzt, lautet

$$f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty x^{-s} B(x)\, dx \qquad (0 < \sigma < 1),$$

wo $B(x)$ die *Partialbruchreihe*

$$B(x) = \sum \frac{a_n}{x + \mu_n} \qquad (\mu_n = e^{\lambda_n})$$

bezeichnet.

75) *H. Cramér*, a) Sur une classe de séries de Dirichlet, Dissertation Upsala (Stockholm 1917); b) Un théorème sur les séries de Dirichlet et son application, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 13 (1918), No. 22.

76) Aus diesem Bildungsgesetz der Koeffizienten c_n folgt z. B., wie von *H. Mellin*, Ein Satz über Dirichletsche Reihen, Ann. Ac. sc. Fenn. (A) 11 (1917), No. 1 hervorgehoben, daß die modulo q gebildeten „Partialreihen" der Produkt-

Sind die gegebenen Reihen (20) in einem Punkte s_0 beide *absolut konvergent*, so wird offenbar auch die durch Multiplikation entstandene Reihe im Punkte s_0 absolut konvergieren (und zwar mit der Summe $f(s_0) \cdot g(s_0)$). Einem bekannten *Mertens*schen Satze über Potenzreihen entsprechend (und ihn verallgemeinernd) gilt ferner nach *Stieltjes*[77]) der Satz, daß die Produktreihe konvergiert in jedem Punkt s_0 (mit der Summe $f(s_0) \cdot g(s_0)$), in welchem nur *eine* der Faktorenreihen absolut konvergiert, während die andere nur bedingt konvergiert. Dagegen braucht die Produktreihe in einem Punkte, worin *beide* Faktorenreihen bedingt konvergieren, *nicht* zu konvergieren, und dieses kann nicht nur am Rande der Konvergenzgebiete der Reihen der Fall sein; denn, wie *Landau*[29]) gezeigt hat, gibt es sogar zwei gewöhnliche *Dirichlet*sche Reihen (2), die beide in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ konvergieren, deren Produktreihe aber *nicht* in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ konvergiert. Andererseits gibt es doch, nach *Stieltjes* und *Landau*[78]), wichtige Sätze, welche die Konvergenz der Produktreihe in Gebieten, in welchen die Faktorenreihen *beide nur bedingt konvergieren*, sichern. Als ein charakteristisches Beispiel nennen wir den Satz, daß, falls die Faktorenreihen beide für $\sigma > \alpha$ konvergieren und für $\sigma > \alpha + \beta$ absolut konvergieren, die Produktreihe mindestens für $\sigma > \alpha + \frac{\beta}{2}$ konvergiert. Hierbei läßt sich die Zahl $\alpha + \frac{\beta}{2}$ durch keine bessere (d. h. kleinere) ersetzen, denn wie *Bohr*[38]) gezeigt hat, gibt es eine *Dirichlet*sche Reihe (2) mit $\sigma_A = 1$, $\sigma_B = 0$, deren Quadratreihe die Konvergenzabszisse $\sigma_B = \frac{1}{2}$ besitzt.[79])

---

reihe $\sum \frac{c_n}{n^s}$ in einfacher Weise durch die „Partialreihen" der gegebenen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ und $\sum \frac{b_n}{n^s}$ ausgedrückt werden können.

77) *T. Stieltjes*, Note sur la multiplication de deux séries, Nouv. Ann. de Math. (3) 6 (1887), p. 210—215.

78) *T. Stieltjes* a. a. O. 77) und Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres, Paris C. R. 101 (1885), p. 368—370 gibt ohne Beweise die wesentlichsten dieser Sätze an, doch nur für die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2). Verallgemeinerungen auf den Fall beliebiger *Dirichlet*scher Reihen (1) (sowie Verallgemeinerungen anderer Art) und Beweise der Sätze sind von *E. Landau*, Über die Multiplikation Dirichletscher Reihen, Palermo Rend. 24 (1907), p. 81—160 und Handbuch, p. 755—762 gegeben.

79) Von etwas anderer Art als die obigen Sätze ist ein Satz von *G. H. Hardy*, On the multiplication of Dirichlet's series, London math. Soc. (2) 10 (1911), p. 396—405, welcher besagt, daß, falls die Faktorenreihen beide im Punkte $s = 0$ konvergieren und $a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$, $b_n = O\left(\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}\right)$, auch die Produktreihe im Punkte 0 konvergiert. Vgl. hierzu auch *A. Rosenblatt*, Über einen Satz

Der bekannte *Cesàro*sche Satz über Potenzreihen ($\lambda_n = n$), der ja besagt, daß, wenn $\sum a_n x^n$ und $\sum b_n x^n$ in einem Punkte, etwa $x = 1$, mit den Summen A und B konvergieren, die Produktreihe $\sum c_n x^n$ im Punkte $x = 1$ gewiß summabel $(C, 1)$ mit der Summe $A \cdot B$ ist (d. h. das arithmetische Mittel ihrer Partialsummen strebt gegen $A \cdot B$) wurde von *Phragmén*, *M. Riesz* und *Bohr*[80]) auf beliebige *Dirichlet*sche Reihen (1) übertragen; der Satz besagt hier, daß, falls $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ und $\sum b_n e^{-\mu_n s}$ in einem Punkte, etwa $s = 0$, mit den Summen A und B konvergieren, die Produktreihe $\sum c_n e^{-\nu_n s}$ im Punkte $s = 0$ in dem Sinne *summabel mit der Summe* AB ist, daß, $C_n = \sum_1^n c_n$ gesetzt,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_1(\nu_2 - \nu_1) + C_2(\nu_3 - \nu_2) + \cdots + C_{n-1}(\nu_n - \nu_{n-1})}{\nu_n} = AB.$$

Im speziellen Falle *gewöhnlicher Dirichlet*scher Reihen

$$(\lambda_n = \mu_n = \nu_n = \log n)$$

lautet also die Gleichung:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_1(\log 2 - \log 1) + \cdots + C_{n-1}(\log n - \log(n-1))}{\log n} = AB.$$ [81])

Diese Mittelwertbildung (mit Gewichten) bildet den Ausgangspunkt für die bekannte, von *M. Riesz* ausgearbeitete, allgemeine Summabilitätsmethode für beliebige *Dirichlet*sche Reihen, über die wir im nächsten Paragraphen näher berichten werden. Aus dem oben angegebenen Satze geht speziell hervor, daß, falls die Produktreihe

---

des Herrn Hardy, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 80—84 (welcher zeigt, daß eine bei *Hardy* der Exponentenfolge auferlegte Bedingung unnötig ist) und *E. Landau*, Über einen Satz des Herrn Rosenblatt, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 29 (1920), p. 238. Ferner ist ein Satz von *Hardy* und *Littlewood*, a. a. O. 24 b) zu erwähnen, welcher aus der Voraussetzung der Konvergenz gewisser aus den beiden zu multiplizierenden Reihen gebildeten Hilfsreihen die Konvergenz der durch Multiplikation entstandenen Reihe folgert.

80) Der Beweis von *E. Phragmén* wurde brieflich *E. Landau* mitgeteilt und findet sich im Handbuch, p. 762—765. Vgl. auch *M. Riesz*, Sur la sommation des séries de Dirichlet. Paris C. R. 149 (1909), p. 18—21 und *H. Bohr*, a. a. O. 36).

81) Dagegen braucht das einfache [und, *Riesz*, a. a. O. 80), sogar auch das beliebig oft wiederholte] „arithmetische" Mittel $\frac{1}{n}(C_1 + C_2 + \cdots C_n)$ *nicht* für $n \to \infty$ zu konvergieren. [Es ist ein allgemeines Prinzip, daß eine Summabilitätsmethode durch Mittelwertbildungen der Form $\frac{\mu_1 C_1 + \cdots + \mu_n C_n}{\mu_1 + \cdots + \mu_n}$ um so kräftiger ist, je „langsamer" $\mu_1 + \cdots + \mu_n \to \infty$.] Über das nähere Verhältnis der „arithmetischen" Mittelwertbildung zu der „logarithmischen" Mittelwertbildung vgl. Nr. 13, Note 86.

konvergent (und nicht nur summabel) ist, sie gewiß die „richtige“ Summe, d. h. die Summe $A \cdot B$ hat. Dieser letzte Satz war schon früher von *Landau*[78]) in dem speziellen Falle, wo mindestens eine der Faktorenreihen eine *absolute* Konvergenzhalbebene besitzt, durch funktionentheoretische Überlegungen bewiesen.

Wir verlassen hiermit die Konvergenztheorie der *Dirichlet*schen Reihen, um uns der Summabilitätstheorie dieser Reihen zuzuwenden. Hierbei werden wir sehen, daß die Erweiterungen des Konvergenzbegriffes für die Theorie der *Dirichlet*schen Reihen eine noch größere Rolle spielt, als es z. B. bei den Potenzreihen der Fall ist. In der Tat, bei den *Dirichlet*schen Reihen können schon die allereinfachsten Summabilitätsmethoden in ganzen *Gebieten* außerhalb der Konvergenzhalbebene verwendet werden, während solche Methoden bei den Potenzreihen nur *auf dem Rande* des Konvergenzgebietes von Bedeutung sind.

13. Summabilität Dirichletscher Reihen. Der in Nr. 2 erwähnte Hauptsatz, daß das Konvergenzgebiet einer *Dirichlet*schen Reihe (1) eine Halbebene $\sigma > \sigma_B$ ist, beruhte auf dem Satze, daß die Zahlenfolge $\{e^{-\lambda_n s}\}$ bei festem s mit $\sigma > 0$ eine „konvergenzerhaltende“ war; es ist in derselben Weise klar, daß auch das Gebiet, in welchem eine *Dirichlet*sche Reihe (1) nach einer angegebenen Summabilitätsmethode *summabel* ist, ebenfalls eine *Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ sein wird, sobald die betreffende Summabilitätsmethode die Eigenschaft besitzt, daß die Zahlenfolge $\{e^{-\lambda_n s}\}$ für $\sigma > 0$ eine „summabilitätserhaltende“ ist. Dies ist nach *Bohr*[82]), der die Summabilität *Dirichlet*scher Reihen in Gebieten der komplexen Ebene zuerst untersucht hat[83]), für die *gewöhnlichen* *Dirichlet*schen Reihen (2) der Fall, wenn die benutzte Summabilitätsmethode die einfache *Cesàrosche Methode* (C, r) ist, wo r eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet (Artikel II C 4, p. 477 u. f.). Es besitzt also jede *Dirichlet*sche Reihe (2) eine Folge von *Summabilitätsabszissen* $\sigma_B = \sigma^{(0)} \geqq \sigma^{(1)} \geqq \sigma^{(2)} \cdots \geqq \sigma^{(r)} \cdots$ derart, daß die Reihe für $\sigma > \sigma^{(r)}$ summabel (C, r) ist, für $\sigma < \sigma^{(r)}$ dagegen nicht. Bezeichnet $\Omega = \lim\limits_{r \to \infty} \sigma^{(r)}$ die *Summabilitätsgrenzabszisse* der Reihe, so ergibt sich ferner, daß die „Summe“ der Reihe *in der ganzen Halbebene* $\sigma > \Omega$ *eine reguläre analytische Funktion* darstellt, so daß wir

82) *H. Bohr,* a) Sur la série de Dirichlet, Paris C. R. 148 (1909), p. 75—80; b) a. a. O. 36); c) Habilitationsschrift, a. a. O. 38); in dieser letzten Arbeit wurde eine zusammenfassende Darstellung der Theorie gegeben.

83) Für *Dirichlet*sche Reihen als Funktionen einer *reellen* Variablen s war die Summabilität schon früher von *G. H. Hardy,* Generalisation of a theorem in the theory of divergent series, London math. Soc. (2) 6 (1908), p. 255—264 untersucht.

also durch die *Cesàro*sche Summabilität die *analytische Fortsetzung* der durch die Reihe in ihrer Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_B$ bestimmten Funktion über die ganze Summabilitätshalbebene $\sigma > \Omega$ erhalten. Für die in Nr. **1** erwähnten speziellen Reihen (2), deren Koeffizienten den Bedingungen (4) genügen, findet man z. B. $\sigma^{(r)} = -r \, (r = 0, 1, 2 \ldots)$, also $\Omega = -\infty$; jede dieser Reihen ist also in der ganzen Ebene summabel und definiert somit (was übrigens auf anderem Wege schon bekannt war) eine ganze transzendente Funktion. *Bohr*[82c]) gab ferner explizite Ausdrücke der Summabilitätsabszissen $\sigma^{(r)}$ als Funktionen der Koeffizienten und zeigte, daß diese Abszissen den beiden folgenden Ungleichungen genügen

$$\sigma^{(r)} - \sigma^{(r+1)} \leqq 1, \quad \sigma^{(r)} - \sigma^{(r+1)} \leqq \sigma^{(r-1)} - \sigma^{(r)},$$

d. h. die Breite jedes Summabilitätsstreifens ist höchstens 1, und diese Breite kann mit wachsender Summabilitätsordnung r niemals zunehmen; diese beiden Ungleichungen sind ferner die für die Verteilung der Summabilitätsabszissen notwendigen und hinreichenden, in dem Sinne, daß es zu jeder monoton abnehmenden Zahlenfolge $\{\sigma^{(r)}\}$, die diesen Ungleichungen genügt, eine *Dirichlet*sche Reihe (2) gibt, die eben diese Zahlen $\sigma^{(r)}$ als Summabilitätsabszissen besitzt.[84])

M. Riesz[85]), der etwas später als *Bohr*, aber unabhängig von ihm,

---

84) In der bekannten Arbeit von *G. H. Hardy* u. *J. Littlewood*, Contributions to the arithmetic theory of series, London math. Soc. (2) 11 (1912), p. 411—478 wird u. a. die oben referierte Untersuchung über die Verteilung der Summabilitätsabszissen dadurch verfeinert, daß auch das Summabilitätsverhalten der Reihe in Punkten *auf* den Summabilitätsgeraden $\sigma = \sigma^{(r)}$ selbst betrachtet wird. Zur Charakterisierung der gewonnenen Resultate sei der Satz erwähnt, daß eine Reihe (2), falls sie in einem Punkte $s = \sigma_1$ summabel $(C, r+1)$ und in einem Punkte $s = \sigma_2$ summabel $(C, r-1)$ ist, im Mittelpunkte $s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ summabel (C, r) ist; in diesem Satze ist die obige Ungleichung $\sigma^{(r)} - \sigma^{(r+1)} \leqq \sigma^{(r-1)} - \sigma^{(r)}$ speziell enthalten. Ferner werden, unter gewissen spezielleren Annahmen über die Größenordnung der Koeffizienten, genauere Sätze über die Lage der Summabilitätsgeraden und das Verhalten der Reihe auf diesen Geraden bewiesen.

85) *M. Riesz*, a) Sur les séries de Dirichlet, Paris C. R. 148 (1909), p. 1658—1660; b) Sur la sommation des séries de Dirichlet, Paris C. R. 149 (1909), p. 18—21. Eine zusammenfassende Darstellung der *Riesz*schen Untersuchungen findet sich in dem a a. O. 1) zitierten Cambridge tract von *G. H. Hardy* und *M. Riesz.* Vgl. auch die Arbeiten von *P. Nalli,* a) Sulle serie di Dirichlet, Palermo Rend. 40 (1915), p. 44—70; b) Aggiunta alla memoria: „Sulle serie di Dirichlet", Palermo Rend. 40 (1915), p. 167—168, und *M. Kuniyeda,* a) Note on Perron's integral and summability-abscissae of Dirichlet's series, Quart. J. 47 (1916), p. 193—219; b) On the abscissa of summability of general Dirichlet's series, Tôhoku J. 9 (1916), p. 245—262, welche sich nahe an die *Riesz*schen Arbeiten anschließen.

die *Cesàro*-Summabilität der *Dirichlet*schen Reihen untersucht hat, beschränkt sich nicht auf Summabilität ganzzahliger Ordnung und — was wesentlicher ist — betrachtet sogleich die *allgemeinen Dirichlet*schen Reihen. *Riesz* mußte daher zunächst das *Cesàro*sche Summabilitätsverfahren so verallgemeinern, daß es auf diesen allgemeineren Reihentypus (1) angewendet werden konnte, und er wurde hierbei auf eine neue bedeutsame Summabilitätsmethode geführt, die von ihm „*Summation nach typischen Mitteln*" genannt wurde. Schon bei dem Multiplikationssatz in Nr. **12** haben wir gesehen, daß es bei den gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) zweckmäßig sein kann, ein Summabilitätsverfahren zu benutzen, dessen erste Stufe darin besteht, das „logarithmische" Mittel

$$\frac{C_1(\log 2 - \log 1) + \cdots + C_{n-1}(\log n - \log(n-1))}{\log n}$$

statt des arithmetischen Mittels

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n}$$

zu bilden. Indem *Riesz* diesen Gedanken ausführt und verallgemeinert, führt er, einer gegebenen *Dirichlet*schen Reihe (1) (oder vielmehr einer gegebenen Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$) entsprechend, *zwei* verschiedene Summationsmethoden ein, deren eine der logarithmischen, die andere der arithmetischen Mittelwertbildung analog ist. Es sei

$$e^{\lambda_n} = l_n, \quad a_n e^{-\lambda_n s} = a_n l_n^{-s} = c_n,$$

$$C_\lambda(\tau) = \sum_{\lambda_n < \tau} c_n, \quad C_l(t) = \sum_{l_n < t} c_n$$

und

$$C_\lambda^{(k)}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} (\omega - \lambda_n)^k c_n = k\int_0^\omega C_\lambda(\tau)(\omega - \tau)^{k-1} d\tau,$$

$$C_l^{(k)}(w) = \sum_{l_n < w} (w - l_n)^k c_n = k\int_0^w C_l(t)(w - t)^{k-1} dt,$$

wobei k eine beliebige positive (ganze oder nicht ganze) Zahl bedeutet. Die Ausdrücke

$$\frac{C_\lambda^{(k)}(\omega)}{\omega^k} \quad \text{und} \quad \frac{C_l^{(k)}(w)}{w^k}$$

heißen dann nach *Riesz* die typischen Mittelwerte der k-Ordnung von der ersten bzw. zweiten Art, welche zu der gegebenen Reihe (1) gehören. Wenn nun

$$\frac{C_\lambda^{(k)}(\omega)}{\omega^k} \to C \quad \text{bzw.} \quad \frac{C_l^{(k)}(w)}{w^k} \to C$$

für $\omega \to \infty$ bzw. $w \to \infty$, wird die Reihe (1) *summabel* (λ, k) *bzw.* (l, k) *mit der Summe* C genannt. Die „Kraft" der Summabilitätsmethode steigt mit wachsender Summabilitätsordnung k, d. h. wenn

eine Reihe summabel (λ, k) bzw. (l, k) ist, so ist sie a fortiori summabel (λ, k') bzw. (l, k') für $k' > k$.

Riesz zeigt nun für eine beliebige Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$, daß die Zahlenfolge $\{e^{-\lambda_n s}\}$ bei festem s mit $\sigma > 0$ eine summabilitätserhaltende Faktorenfolge ist, sowohl für die Summabilitätsmethode (λ, k) als für die Methode (l, k), woraus folgt, daß der Gültigkeitsbereich der (einen oder anderen) Summabilitätsmethode eine Halbebene ist. Über die Tragweite der beiden Methoden (λ, k) und (l, k) gegeneinander gilt der Satz: in jedem Punkte s, wo die Reihe (1) summabel (l, k) ist, ist sie gewiß auch summabel (λ, k), so daß (λ, k) die „kräftigere" Methode ist; die Methode (l, k) ist aber „beinahe" ebenso stark, d. h. wenn die Reihe (1) in einem Punkte $s_0 = \sigma_0 + it_0$ summabel (λ, k) ist, braucht sie wohl nicht im Punkte s_0 selbst summabel (l, k) zu sein, ist es aber in jedem Punkte $s = \sigma + it$ mit $\sigma > \sigma_0$.

Aus diesen Sätzen folgt, daß zu jeder *Dirichlet*schen Reihe (1) eine *Summabilitätsabszissenfunktion* $\sigma^{(k)}$ $(0 < k < \infty)$ derart existiert, daß die Reihe bei jedem $k > 0$ für $\sigma > \sigma^{(k)}$ summabel (λ, k) und (l, k) ist, während sie für $\sigma < \sigma^{(k)}$ weder summabel (λ, k) noch (l, k) ist.[86])

Für die *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihen (2) $(\lambda_n = \log n)$ ist die *Riesz*sche Summabilität (l, k) mit der *Cesaro*schen Summabilität (C, k) inhaltsmäßig identisch[87]), und es sind somit für diese Reihen (2), und ganzzahlige k, die hier definierte Summabilitätsabszissen $\sigma^{(k)}$ mit den früher besprochenen identisch. Die dort angegebenen Ungleichungen über die Verteilung der Summabilitätsabszissen werden, sogar für den Fall einer *beliebigen Dirichlet*schen Reihe (1), von *Riesz* dahin verallgemeinert, daß die Summabilitätsabszissenfunktion $\sigma^{(k)}$ eine *konvexe* Funktion von k ist.[88]) Ferner verallgemeinert *Riesz* die expliziten Ausdrücke für die Summabilitätsabszissen $\sigma^{(k)}$ als Funktionen der Koeffizienten und Exponenten auf beliebige *Dirichlet*sche Reihen (1) und beliebiges nicht ganzzahliges k.

---

86) In Punkten *auf* der Summabilitätsgeraden $\sigma = \sigma^{(k)}$ selbst kann es vorkommen (vgl. eine Bemerkung oben), daß die Reihe summabel (λ, k) aber *nicht* (l, k) ist. So ist nach *Riesz*, a. a. O. 85a) und 85b) die Zetareihe $\sum \frac{1}{n^s}$, für welche $\sigma^{(k)} = 1$ für alle k ist, bei keinem k summabel (l, k) in irgendeinem Punkte der Geraden $\sigma = 1$, während sie in jedem Punkte $s \neq 1$ dieser Geraden summabel $(\lambda, 1)$ ist. (Vgl. Note 81.)

87) *M. Riesz,* Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Paris C. R. 152 (1911), p. 1651—1654. Die von *Riesz* angegebene Formulierung der *Cesàro*schen Summationsmethode hat sich bei verschiedenen Anwendungen als wesentlich bequemer als die ursprüngliche Formulierung gezeigt.

88) Der Beweis dieses Satzes wird demnächst in den Acta Univ. hung. Francesco-Jos. erscheinen.

Über den Zusammenhang der Summabilitätseigenschaften einer Reihe (1) mit den analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion $f(s)$ gilt zunächst der folgende leicht beweisbare Satz: *Für* $\sigma > \sigma^{(k)} + \varepsilon$ *ist* $f(s) = O(|t|^{k+1})$. Die Frage nach der *Umkehrung* dieses Satzes ist (wie im Falle $k = 0$, d. h. Konvergenz) viel schwieriger; es zeigt sich, daß eine unmittelbare Umkehrung *nicht* gilt, dagegen eine solche, in welcher *der Exponent* $k+1$ *durch* k *ersetzt wird*, d.h. wenn die durch eine *Dirichlet*sche Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär und gleich $O(|t|^k)$ ist, so wird die Summabilitätsabszisse $\sigma^{(k)}$ gewiß $\leqq \sigma_0$ sein. Es geben diese *Riesz*schen Sätze einerseits notwendige und andererseits hinreichende Bedingungen für die Summabilität k^{ter} Ordnung, aber (ganz wie im Falle $k = 0$) keine Bedingungen, die zugleich notwendig und hinreichend sind. Betrachten wir aber den *Grenzwert* Ω der abnehmenden Funktion $\sigma^{(k)}$ (für $k \to \infty$), so können wir aus den obigen Sätzen den folgenden Hauptsatz über die funktionentheoretische Bestimmung dieser *Summabilitätsgrenzabszisse* Ω ableiten: Es ist die Reihe genau so weit summabel (von irgendeiner Ordnung) wie die dargestellte Funktion $f(s)$ regulär und von endlicher Ordnung in bezug auf t ist, d. h. *es ist* Ω *gleich der früher eingeführten Abszisse* σ_ε. Dieser Satz wurde, für die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2), zuerst von *Bohr*[36]) explizite aufgestellt, der ihn aus einigen, den *Riesz*schen ähnlichen, aber nicht so weitreichenden Sätzen herleitete.[89])

Bei einer näheren Untersuchung zeigt es sich, daß die Einführung der *Cesàro-Riesz*schen Summabilität für fast alle Probleme in der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen von wesentlicher Bedeutung ist, weil dadurch frühere Resultate aus der Konvergenztheorie sich in wichtiger Weise verallgemeinern lassen. Wegen der allgemeinen Durchführung solcher Untersuchungen und der dabei erhaltenen Resultate sei der Leser auf das *Hardy-Riesz*sche Buch verwiesen.[1]) Hier soll nur noch ein besonders interessantes Resultat über die *Multiplikation Dirichlet*scher Reihen erwähnt werden, welches den klassischen Satz von *Cesàro* über Multiplikation von Potenzreihen ($\lambda_n = n$) auf den allgemeinsten Typus *Dirichlet*scher Reihen (1) verallgemeinert, und so lautet[90]): *Wenn* $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ *im Punkte* $s = s_0$ *summabel* (λ, α) *mit*

89) Vgl. auch eine Arbeit von *W. Schnee,* Über den Zusammenhang zwischen den Summabilitätseigenschaften Dirichletscher Reihen und ihrem funktionentheoretischen Charakter. Acta Math. 35 (1912), p. 357—398, worin der *Landau-Schnee*sche Satz über das Konvergenzproblem (vgl. Nr. 6) von Konvergenz auf Summabilität verallgemeinert wird.

90) *Hardy-Riesz,* a. a. O. 1), p. 64.

der Summe A und $\sum b_n e^{-\mu_n s}$ *im selben Punkte* s_0 *summabel* (μ, β) *mit der Summe B ist, so ist die Produktreihe* $\sum c_n e^{-\nu_n s}$ *im Punkte* s_0 *summabel* $(\nu, \alpha + \beta + 1)$ *mit der Summe AB.* Im speziellen Fall $\alpha = \beta = 0$ erhalten wir den in Nr. 12 erwähnten Satz über die Multiplikation zweier *konvergenter Dirichlet*scher Reihen.

Außer den *Cesàro-Riesz*schen Methoden wurden auch *andere* Summationsmethoden auf die *Dirichlet*schen Reihen angewendet. So hat *Hardy*[91]) die Wirkung der *Borel*schen Summation auf die gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihen (2) geprüft. Auch bei dieser Summationsmethode ist die Zahlenfolge $\left\{\frac{1}{n^s}\right\}$ $(\sigma > 0)$ eine summabilitätserhaltende Faktorenfolge, und das Summabilitätsgebiet also eine *Halbebene* $\sigma > \sigma^{(B)}$. Diese Halbebene $\sigma > \sigma^{(B)}$ kann aber niemals über die *Cesàro-Riesz*sche Summabilitätshalbebne $\sigma > \Omega$ hinausreichen und braucht nicht immer so weit zu reichen. Anders verhält es sich mit einer anderen von *Hardy*[92]) untersuchten Summabilitätsmethode, der sogenannten *Abel*schen Methode, nach welcher eine Reihe $\sum a_n$ summabel mit der Summe A heißt, wenn die Potenzreihe $f(x) = \sum a_n x^n$ für $0 < x < 1$ konvergiert und die Bedingung $f(x) \to A$ für $x \to 1$ erfüllt. *Hardy* beweist, daß auch hier das Summabilitätsgebiet einer gewöhnlichen *Dirichlet*schen Reihe (2) eine *Halbebene* $\sigma > \sigma^{(A)}$ ist, und daß $\sigma^{(A)}$ einfach die untere Grenze aller Abszissen σ_0 ist, für welche die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ *regulär und gleich* $O(e^{k|t|})$ *mit* $k < \frac{\pi}{2}$ *ist.*[93])

Schließlich ist noch eine schöne Arbeit von *M. Riesz*[94]) zu erwähnen, in welcher es ihm gelungen ist, die bekannten *Mittag-Leffler*schen Resultate über die analytische Darstellung der durch eine

91) *G. H. Hardy,* a. a. O. 72). Vgl. auch *Fekete,* a. a. O. 72) und *G. H. Hardy-J. Littlewood,* The relations between Borel's and Cesàro's method of summation, Proc. London math. Soc. (2) 11 (1913), p. 1—16.

92) *G. H. Hardy,* a) Sur la sommation des séries de Dirichlet, Paris C. R. 162 (1916), p. 463—465; b) a. a. O. 51).

93) Einfache Beispiele *Dirichlet*scher Reihen, bei welchen erst die *Abel*sche Summabilität — also nicht die *Cesàro*sche — imstande ist, die durch die Reihe dargestellte Funktion über die Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_B$ hinaus analytisch fortzusetzen (weil die Funktion für $\sigma < \sigma_B$ stärker als $|t|^k$, aber nicht so stark wie $e^{\frac{\pi}{2}|t|}$ wächst), wurden von *G. H. Hardy,* a) a. a. O. 92) und b) Example to illustrate a point in the theory of Dirichlet's series, Tôhoku J. 8 (1915), p. 59—66, angegeben.

94) *M. Riesz,* Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet, Acta Math. 35 (1912), p. 253—270.

Potenzreihe ($\lambda_n = n$) definierten Funktion in ihrem Hauptstern auf den allgemeinen Reihentypus (1) zu übertragen. *Riesz* beweist u. a. den folgenden Satz: Es habe die *Dirichlet*sche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet, und es sei H der *Hauptstern* der durch die Reihe definierten Funktion $f(s)$, d. h. das Gebiet, welches aus der s-Ebene entsteht, wenn alle mit der negativen reellen Achse parallelen Halbgeraden, die von den singulären Punkten von $f(s)$ ausgehen, entfernt werden. Dann gilt *im ganzen Hauptstern die Darstellung* $f(s) = \lim_{\alpha \to 0} \varphi_\alpha(s)$, *wo* $\varphi_\alpha(s)$ *die (ganze transzendente) Funktion*

$$\varphi_\alpha(s) = \sum \frac{1}{\Gamma(\alpha\lambda_n + 1)} a_n e^{-\lambda_n s}$$

bezeichnet. Auch die von *Mittag-Leffler* benutzten *Integraldarstellungen* zur analytischen Fortsetzung einer durch eine gegebene Potenzreihe ($\lambda_n = n$) definierten Funktion wurden von *Riesz* auf die *Dirichlet*schen Reihen übertragen.

II. Die Riemannsche Zetafunktion.

14. Die Zetafunktion und ihre Funktionalgleichung. Die Zetafunktion wird (vgl. Nr. 1) durch die *Dirichlet*sche Reihe

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \tag{21}$$

definiert. Obwohl schon *Euler* diese Funktion betrachtet und ihre zahlentheoretische Bedeutung erkannt hat, wird sie doch gewöhnlich als die „*Riemann*sche" Zetafunktion bezeichnet, weil *Riemann* sie zuerst in seiner berühmten Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen [95]), welche auch für die Entwicklung der neueren Funktionentheorie von fundamentaler Bedeutung gewesen ist, einem tiefergehenden Studium unterworfen hat. Über die Bedeutung der Zetafunktion für das Primzahlproblem sei in diesem Kapitel, das sich ausschließlich mit den rein funktionentheoretischen Eigenschaften von $\zeta(s)$ beschäftigen soll, nur bemerkt, daß sie in der *Euler*schen *Identität*

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod \frac{1}{1 - p_m^{-s}}, \tag{22}$$

wo p_m die Primzahlen durchläuft, wurzelt; diese *Euler*sche Produktdarstellung spielt übrigens auch (vgl. z. B. Nr. 17) bei manchen funktionentheoretischen Untersuchungen von $\zeta(s)$ eine bedeutsame Rolle.

Die die Zetafunktion definierende Reihe (21) konvergiert nur in der Halbebene $\sigma > 1$, und auch das Produkt (22) ist für $\sigma < 1$ divergent und gibt somit keinen Aufschluß über die Möglichkeit analyti-

95) *B. Riemann,* Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Monatsber. Akad. Berlin 1859, p. 671—680 = Werke (2. Aufl.), p. 145—153.

scher Fortsetzung über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus. Anders verhält es sich mit der in Nr. **11** erwähnten Integraldarstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx;$$

in der Tat, es läßt sich dieses zunächst ebenfalls nur für $\sigma > 1$ brauchbare Integral als ein komplexes Kurvenintegral

$$(23) \qquad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}} \int_W \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = \frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi} \int_W \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

schreiben, wo der Integrationsweg W eine Schleife ist, die vom Punkte $x = +\infty$ ausgeht und nach einem einmaligen Umkreisen des Punktes $x = 0$ zum Punkte $x = +\infty$ zurückkehrt. Aus dieser Integraldarstellung, die offensichtlich für jedes s konvergiert, schloß *Riemann*, daß die Funktion $\zeta(s)\Gamma(s)\sin \pi s$ eine ganze Transzendente ist, und hieraus weiter, *daß $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene als eine eindeutige Funktion existiert, die überall regulär ist mit Ausnahme des einzigen Punktes $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung* (*mit dem Residuum* 1) *besitzt.*

Aus der Darstellung (23) leitete *Riemann* des weiteren durch eine Deformation des Integrationsweges und Anwendung des *Cauchy*schen Satzes eine fundamentale Eigenschaft der Zetafunktion ab, nämlich daß sie der *Funktionalgleichung*

$$(24) \qquad \zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2}\, \Gamma(s)\zeta(s)$$

genügt[96]), oder anders ausgedrückt, daß die Funktion

$$\eta(s) = \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$$

ungeändert bleibt, wenn die Variable s durch $1 - s$ ersetzt wird. Für die Funktionalgleichung in dieser letzten Form: $\eta(s) = \eta(1-s)$ und gleichzeitig auch für die Existenz von $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene[97])

96) Nach *E. Landau,* Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, Bibl. Math. (3) 7 (1906—7), p. 69—79 war diese Funktionalgleichung schon *Euler* bekannt.

97) Außer den beiden, von *Riemann* selbst herrührenden, Beweisen des Satzes, daß $\zeta(s)$ von der Definitionshalbebene $\sigma > 1$ aus in die ganze Ebene fortgesetzt werden kann, gibt es eine Menge anderer Beweise dieses Satzes. So hat z. B. *J. L. W. V. Jensen,* Interméd. math. 1 (1895), p. 346—347 verschiedene Integraldarstellungen für $\zeta(s)$ angegeben, aus welchen die Existenz von $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene unmittelbar ersichtlich ist; vgl. hierzu auch *E. Lindelöf,* Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions (Collection Borel), Paris 1905, p. 1—141. Ein anderer Beweis von *Jensen,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de

hat *Riemann*[95]) auch einen anderen Beweis gegeben, welcher sich bei der Anwendung auf mit der Zetafunktion verwandte Funktionen als sehr verallgemeinerungsfähig erwiesen hat. *Riemann* geht hierbei vom Integral

$$\frac{1}{n^s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}\,dx$$

aus und erhält durch Summation die Formel

$$(25) \qquad \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\,\omega(x)\,dx, \qquad (\sigma > 1)$$

wo $\omega(x)$ die Reihe

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}$$

bezeichnet. Nun ist aber, nach einer bekannten Formel aus der Theorie der elliptischen Thetafunktionen,

$$1 + 2\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + 2\omega\left(\frac{1}{x}\right)\right), \qquad (x > 0)$$

woraus sich durch Einsetzen in (25) und eine leichte Rechnung die Formel

$$(26) \qquad \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} - \frac{1}{s(s-1)} = \int_1^\infty \left(x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)\,dx$$

Riemann, Paris C. R. 104 (1887), p. 1156—1159 beruht auf einer Relation zwischen den unendlich vielen Gliedern der Folge $\zeta(s)$, $\zeta(s+1)$, $\zeta(s+2), \ldots$; ähnliche Relationen, welche überdies die Eigenschaft besitzen, in sich als Definitionsgleichungen der Zetafunktion gelten zu können, wurden später von *J. Hadamard,* Sur une propriété fonctionelle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Bull. Soc. math. France 37 (1909), p. 59—60, angegeben. *Ch. de la Vallée Poussin,* Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, Mém. Acad. Belgique 53 (1895—96), No. 6, p. 1—32, beweist den Satz durch Vergleich der Reihe $\sum \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ mit dem entsprechenden Integral $\int_1^\infty \frac{du}{u^s} = \frac{1}{s-1}$, indem er (durch partielle Integrationen) nachweist, daß die Differenz $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ eine ganze Transzendente ist; die Idee dieser Beweismethode ist von *H. Cramér,* Sur une classe de séries de Dirichlet, Diss. Upsala (Stockholm 1917), p. 1—51, zur Untersuchung beliebiger *Dirichlet*scher Reihen verallgemeinert. Setzt man die Theorie der *Cesàro*schen Summabilität *Dirichlet*scher Reihen (vgl. Nr. 13) als bekannt voraus, dürfte der einfachste Beweis für die Existenz von $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene wohl derjenige sein, daß man die Funktion $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ betrachtet, welche durch die in der ganzen Ebene summable Reihe $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ dargestellt wird und somit sich sofort als eine ganze Transzendente erweist.

ergibt, welche sofort erkennen läßt, daß die auf der linken Seite stehende Funktion eine ganze Transzendente ist, die ungeändert bleibt, wenn s durch $1 - s$ ersetzt wird.[98])

Die Funktionalgleichung (24) verbindet die Werte der Zetafunktion in zwei Punkten s und $1 - s$, welche in bezug auf den Punkt $\frac{1}{2}$ symmetrisch gelegen sind. Hieraus folgt, daß man das Studium der Zetafunktion wesentlich auf die Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ beschränken kann (übrigens sogar auf die Viertelebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $t \geqq 0$, da $\zeta(s)$ in konjugierten Punkten konjugierte Werte annimmt); denn die Funktionalgleichung erlaubt ja das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma < \frac{1}{2}$ aus dem Verhalten der Funktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ abzulesen. So können wir z. B. aus der aus der *Euler*schen Identität (22) unmittelbar folgenden Tatsache, daß $\zeta(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > 1$ *überall von* 0 *verschieden* ist, mittels der Funktionalgleichung (24) sofort die Nullstellen von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma < 0$ bestimmen; in der Tat, es folgt ja aus (24), daß diese Nullstellen mit den Nullstellen der Funktion $1 : \left\{\cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\right\}$ für $\sigma < 0$ übereinstimmen, d. h. daß $\zeta(s)$ *in der besprochenen Halbebene* $\sigma < 0$ *Nullstellen* (*einfache*) *in den Punkten* $s = -2, -4, -6, \ldots$ und nur in diesen Punkten besitzt. Es werden diese Nullstellen gewöhnlich als die „trivialen" Nullstellen von $\zeta(s)$ bezeichnet, im Gegensatze zu den (in Nr. **15** zu erwähnenden) „nichttrivialen" Nullstellen im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$. Diese letzten Nullstellen liegen übrigens alle im *Innern* des Streifens $0 < \sigma < 1$; denn wie *de la Vallée Poussin*[99]) und *Hadamard*[100]) unabhängig von ein-

---

98) *H. Hamburger*, a) Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 240—254; 11 (1922), p. 224—245; 13 (1922), p. 283—311; b) Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind, Math. Ann. 85 (1922), p. 129—140, beweist, daß $\zeta(s)$ bis auf einen konstanten Faktor *eindeutig* bestimmt ist durch die folgenden Eigenschaften: sie ist eine meromorphe Funktion mit nur endlich vielen Polen, die 1. der Funktionalgleichung (24) genügt, 2. für $|s| \to \infty$ gleich $O(e^{|s|^k})$ und 3. für $\sigma > 1$ durch eine absolut konvergente *Dirichlet*sche Reihe $\sum \frac{a_n}{n^s}$ darstellbar ist. Im Laufe des Beweises dieses Satzes [durch welchen eine Fragestellung von *J. Hadamard,* a. a. O. 60) behandelt wird] gibt *Hamburger* einen neuen Beweis der *Riemann*schen Funktionalgleichung. Vgl. auch *C. Siegel,* Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 86 (1922), p. 276—279.

99) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Ann. soc. sc. Bruxelles 20^2 (1896), p. 183—256 und p. 281—397.

100) *J. Hadamard,* Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 199—220.

ander durch sinnreiche Überlegungen bewiesen haben, ist *die Gerade* $\sigma = 1$ (*und daher auch die Gerade* $\sigma = 0$) *nullpunktsfrei.* In diesem Zusammenhange sei noch erwähnt, daß *Mertens*[101]) schon früher durch eine interessante Abschätzung bewiesen hatte, daß das *Euler*sche Produkt (22) in jedem Punkte $s \neq 1$ auf der Geraden $\sigma = 1$, in welchem $\zeta(s) \neq 0$ ist (also nach dem obigen Satze in den sämtlichen Punkten $s \neq 1$) noch konvergiert; mit Hilfe des in Nr. 5 besprochenen *Riesz*schen Konvergenzsatzes (auf $\log \zeta(s)$ verwendet) läßt sich dieses Resultat[102]), oder was damit gleichbedeutend ist, die Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{p_m^{1+it}}$ für alle $t \gtrless 0$, unmittelbar ohne jede spezielle Abschätzung aus dem Nichtverschwinden von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ ableiten.

15. Die Riemann-Hadamardsche Produktentwicklung. Betrachten wir mit *Riemann* die Funktion[103])

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s),$$

welche eine ganze Transzendente ist, deren Nullstellen mit den nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ übereinstimmen (indem die trivialen Nullstellen weggeschafft sind), und die der Gleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ genügt. Die durch diese Funktionalgleichung ausgedrückte Eigenschaft kann auch dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß die Funktion $\Xi(z)$, welche aus $\xi(s)$ durch die Transformation $s = \frac{1}{2} + iz$ entsteht, eine *gerade* Funktion von z ist, d. h. eine Funktion von z^2, die wir mit $g(z^2)$ bezeichnen werden, wo also $g(x)$ eine ganze Funktion von x ist. Jedem Nullstellenpaar $\pm\lambda$ von $\Xi(z)$, d. h. jedem Nullstellenpaar ϱ und $1-\varrho$ von $\zeta(s)$ entspricht also nur eine einzige Nullstelle $\mu = \lambda^2$ von $g(x)$. Über diese Funktion $g(x)$ behauptete *Riemann*[95]), daß sie unendlich viele Nullstellen μ_n hat — also daß die Zetafunktion unendlich viele nichttriviale Nullstellen besitzt — und ferner, daß sie durch das Produkt

$$g(x) = g(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\mu_n}\right) \tag{27}$$

---

101) *F. Mertens*, Über die Konvergenz einer aus Primzahlpotenzen gebildeten unendlichen Reihe, Gött. Nachr. 1887, p. 265—269.

102) Vgl. *E. Landau*, a. a. O. 21).

103) Die folgenden Bezeichnungen der Funktionen sind die von *E. Landau* benutzten (und jetzt üblichen), welche von den *Riemann*schen etwas abweichen. Die von *Riemann* mit ξ bezeichnete Funktion ist die unten erwähnte Funktion Ξ.

dargestellt werden kann. Die Richtigkeit dieser Behauptung wurde bekanntlich zuerst von *Hadamard*[104]) durch seine grundlegenden Untersuchungen über ganze transzendente Funktionen endlichen Geschlechtes bewiesen. Es ist nämlich, wie leicht zu zeigen,

$$g(x) = O\left(e^{|x|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right) \qquad (\varepsilon > 0)$$

und nach einem allgemeinen Satz der *Hadamard*schen Theorie folgt aus dieser Abschätzung sofort die Richtigkeit der obigen Behauptung.[105]) Wie oben erwähnt, entsprechen jeder Nullstelle μ_n von $g(x)$ zwei Nullstellen von $\zeta(s)$, nämlich $\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\mu_n}$, welche symmetrisch in bezug auf den Punkt $\frac{1}{2}$ liegen. Wird die Produktentwicklung (27) von $g(x)$ zu einer Produktentwicklung der Funktion $\zeta(s)$ selbst umgeschrieben, so findet man — indem der Bequemlichkeit halber Konvergenzfaktoren hinzugefügt werden, die das Produkt von der Reihenfolge der Faktoren (d. h. von dem paarweisen Zusammennehmen zweier „entsprechender" Nullstellen ϱ und $1-\varrho$) unabhängig machen — die grundlegende Formel

$$(28) \qquad (s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} e^{bs} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

wo ϱ die sämtlichen nichttrivialen Nullstellen durchläuft, und b eine Konstante ($b = \log 2\pi - 1 - \frac{1}{2}C$, wo C die *Euler*sche Konstante ist) bezeichnet. In der Primzahlentheorie kommt diese Formel (28) meistens in der Form

$$(29) \qquad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)$$

zur Anwendung.

Es sei schon hier erwähnt, daß *Riemann*[95]) des weiteren die Vermutung ausgesprochen hat — aber mit ausdrücklicher Hervorhebung, daß er diese Vermutung nicht beweisen konnte — daß die Nullstellen von $g(x)$ alle *reell* sind, d. h. *daß die nichttrivialen Nullstellen von* $\zeta(s)$ *alle auf der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$ *liegen.* Ob diese berühmte „*Riemann*sche Vermutung" richtig ist oder nicht, ist bekanntlich noch heute unentschieden, und man weiß auch nicht, durch welche Ar-

104) *J. Hadamard,* Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, J. de math. (4) 9 (1893), p. 171—215.

105) In dem ursprünglichen *Hadamard*schen Beweise wird übrigens nicht die Größenordnung der Funktion $g(x)$ selbst, sondern — was nach *Hadamard* auf genau dasselbe hinauskommt — die Größenordnung der Koeffizienten a_n der Potenzreihe $g(x) = \Sigma a_n x^n$ abgeschätzt.

gumente (abgesehen von der *symmetrischen Lage der Nullstellen in bezug auf die Gerade* $\sigma = \frac{1}{2}$) *Riemann* auf diese Vermutung geführt worden ist.

16. Die Riemann-v. Mangoldtsche Formel für die Anzahl der Nullstellen. Über die nähere Verteilung der Ordinaten der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ hat *Riemann*[95]) ohne Beweis eine Formel angegeben, die viel präziser ist als diejenigen Resultate, welche man aus der *Hadamard*schen Theorie direkt entnehmen kann, nämlich die Formel

$$(30)\qquad N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T),$$

wo $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Rechteck $0 < \sigma < 1$, $0 < t \leqq T$ bezeichnet. Es gelang erst *v. Mangoldt*[106]), diese Formel streng zu beweisen. Betreffs des Beweises sei nur erwähnt, daß man von dem Ausdruck $N(T) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$ ausgehend, wo das Integral längs des Randes eines Rechteckes mit den Eckpunkten 2, $2 + iT$, $-1 + iT$, -1 erstreckt ist, durch einfache Rechnungen (unter Benutzung der Funktionalgleichung der Zetafunktion und bekannter Eigenschaften der Gammafunktion) leicht findet, daß

$$(31)\qquad N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + R(T)$$

ist, wo das Restglied $R(T) = O(1) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2+iT}^{-1+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$, und daß die ganze, erst von *v. Mangoldt* überwundene Schwierigkeit darin liegt, dies letzte Integral, welches den „kritischen" Streifen $0 < \sigma < 1$ durchsetzt, abzuschätzen. Der *v. Mangoldt*sche Beweis der Ungleichung $R(T) = O(\log T)$, wie auch ein später vereinfachter von *Landau*[107]), stützt sich wesentlich auf die *Hadamard*schen Resultate, d. h. auf die Produktentwicklung von $\zeta(s)$. Vor einigen Jahren wurde ein sehr eleganter Beweis dieser Ungleichung von *Backlund*[108]) gefunden, der

106) *H. v. Mangoldt,* Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$, Math. Ann. 60 (1905), p. 1—19. Schon früher hatte *v. Mangoldt* [zu *Riemanns* Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe", Crelles J. 114 (1895), p. 255—305] die Formel (30) mit einem Restgliede $O(\log^2 T)$ (statt $O(\log T)$) bewiesen.

107) *E. Landau,* Über die Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und einer Klasse verwandter Funktionen, Math. Ann. 66 (1909), p. 419—445.

108) *R. Backlund,* a) Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 158 (1914), p. 1979—1981; b) Über die Nullstellen der Riemannschen Zeta-

nicht die Produktentwicklung (28), sondern nur eine ganz grobe Abschätzung von $\zeta(s)$ benutzt.

Ob die Abschätzung $R(T) = O(\log T)$ verbessert werden kann, weiß man nicht (vgl. jedoch Nr. 20, wo über Folgerungen der „*Riemann*schen Vermutung" berichtet wird); dagegen weiß man nach *Cramér*[109]), daß der *Mittelwert* $\frac{1}{T}\int_0^T R(t)\,dt$ beschränkt ist, sogar daß er für $T \to \infty$ einem bestimmten Grenzwert, nämlich dem Werte $\frac{7}{8}$, zustrebt.[110]) Verfeinerte Resultate dieser Art sind neulich von *Littlewood*[111]) angegeben.

17. Über die Werte von $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 (> \frac{1}{2})$. Betrachten wir zunächst die Halbebene $\sigma > 1$; da $\zeta(s)$ hier $\neq 0$ ist, ist es ein natürlicheres (und allgemeineres) Problem, nach den Werten von $\log \zeta(s)$, statt nach den Werten von $\zeta(s)$ selbst zu fragen, wo $\log \zeta(s)$ z. B. denjenigen (für $\sigma > 1$ regulären) Zweig des Logarithmus der Zetafunktion bezeichnet, der für reelles $s > 1$ reell ist. Dieser Zweig ist, nach der *Euler*schen Identität (22) durch

$$(32) \qquad \log \zeta(s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \log (1 - p_m^{-s}) \qquad (\sigma > 1)$$

gegeben, also (wenn $\log (1 - p_m^{-s})$ in eine Potenzreihe entwickelt wird) durch eine *Dirichlet*sche Reihe, in welcher die einzelnen Primzahlen separiert sind. Durch diesen Umstand wird es möglich, das in Nr. 7 angegebene Verfahren, welches auf der Theorie diophantischer Approximationen beruht, in einfacher Weise durchzuführen, indem die dort mit $M(\sigma_0)$ bezeichnete Wertmenge explizite bestimmt werden

---

funktion, Dissertation Helsingfors 1916, p. 1—24; c) Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Acta Math. 41 (1918), p. 345—375.

109) *H. Cramér*, Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 104—130.

110) Daß der Grenzwert gerade den Wert $\frac{7}{8}$ hat, hängt damit zusammen, daß $R(T)$ auf die Form $R(T) = \frac{7}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{\pi}\Delta \arg \zeta(s)$ gebracht werden kann (*Backlund,* a. a. O. 108c), wo die Konstante $\frac{7}{8}$ von der Gammafunktion und den anderen in der Funktionalgleichung eingehenden elementaren Funktionen herrührt, während $\Delta \arg \zeta(s)$ den Zuwachs von $\arg \zeta(s)$ angibt, wenn s den gebrochenen Linienzug 2, $2 + iT$, $\frac{1}{2} + iT$ durchläuft.

111) *J. E. Littlewood,* Researches in the theory of the Riemann ζ-function, Proc. London math. Soc. 20 (1922), (Records et cet. p. XXII—XXVIII). In dieser kurzen Mitteilung wird, ohne Beweise, eine Reihe sehr tiefgehender Sätze über $\zeta(s)$ angegeben.

kann. Es ergibt sich, daß diese Menge $M(\sigma_0)$ ein endliches Gebiet (in der komplexen Ebene) ist, das je nach der Lage der Abszisse $\sigma_0 (> 1)$ von einer oder von zwei konvexen Kurven begrenzt wird. Bei festem σ_0 läuft nun (nach Nr. 7) die von $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ $(-\infty < t < \infty)$ beschriebene Kurve im Gebiete $M(\sigma_0)$ überall dicht herum, und es ist die Menge der Werte, welche $\log \zeta(s)$ in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, mit $M(\sigma_0)$ identisch. Für σ_0 nahe an 1 ist $M(\sigma_0)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet (d. h. nur von einer Kurve begrenzt), das sich für $\sigma_0 \to 1$ nach und nach über die ganze Ebene ausbreitet[112]); hiermit ist speziell gefunden, daß $\log \zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert unendlich oft annimmt, also a fortiori, *daß* $\zeta(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > 1$ (übrigens sogar in jedem Streifen $1 < \sigma < 1 + \delta$) *sämtliche Werte außer* 0 *unendlich oft annimmt.*[113])

Wesentlich schwieriger ist die Bestimmung der Werte von $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$, welche im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$ liegt, weil das *Euler*sche Produkt, das ja die Quelle der obigen Untersuchung war, für $\sigma < 1$ divergiert (und für $\sigma = 1$, $t \neq 0$ nur bedingt konvergiert). Die auf der Theorie der diophantischen Approximationen beruhende Untersuchungsmethode läßt sich aber, obwohl in einer wesentlich modifizierten Form, auch hier verwenden[114]), und es ergibt sich, daß $\zeta(s)$ auf jeder festen Geraden $\sigma = \sigma_0$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$

---

112) *H. Bohr,* Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma > 1$, Paris C. R. 154 (1912), p. 1078—1081. Die genaue Ausführung der betreffenden geometrischen Überlegungen findet sich in der Abhandlung: Om Addition af uendelig mange konvekse Kurve, Overs. Vidensk. Selsk. Köbenhavn 1913, p. 326—366. Die entsprechende Untersuchung der (bei den zahlentheoretischen Anwendungen wichtigen) Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ findet sich bei *H. Bohr,* Über die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, Crelles J. 141 (1912), p. 217—234; die Untersuchung gestaltet sich hier wesentlich einfacher, weil die (konvexen) Begrenzungskurven der Gebiete $M(\sigma_0)$ einfach Kreise werden.

113) Über einen Beweis dieses letzteren (spezielleren) Resultates siehe *H. Bohr,* Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, Gött. Nachr. 1911, p. 409—428. Schon früher hatten *H. Bohr* und *E. Landau,* Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\varkappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$, Gött. Nachr. 1910, p. 303—330 mit Hilfe allgemeiner funktionentheoretischer Methoden den weniger aussagenden Satz bewiesen, daß $\zeta(s)$ in jedem Streifen $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$ alle Werte, höchstens mit einer einzigen Ausnahme, annimmt.

114) Hierbei spielt eine von *H. Weyl* (Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916), p. 313—352) herrührende Verschärfung des in Nr. 7 erwähnten *Kronecker*schen Satzes über diophantische Approximationen eine wesentliche Rolle.

Werte annimmt, die *in der ganzen Ebene überall dicht* liegen[115]), und ferner, daß die Menge der Werte von $\zeta(s)$ in unendlicher Nähe einer solchen Geraden gewiß *sämtliche Werte, höchstens mit Ausnahme des einen Wertes* 0, *enthält.*[116]) Bei der besonders wichtigen Frage, ob auch der „kritische" Wert 0 angenommen wird oder nicht — also ob die „*Riemann*sche Vermutung" falsch oder richtig ist — versagt aber die Methode, und sie vermag nur (weil sie im Grunde eine Wahrscheinlichkeitsmethode ist) zu zeigen, daß, falls 0 in einem Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ überhaupt angenommen wird, 0 jedenfalls „unendlich seltener" angenommen wird als jeder andere Wert a, d. h. wenn $N_0(T)$ und $N_a(T)$ die Anzahl von 0-Stellen bzw. a-Stellen im Rechteck $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$, $0 < t < T$ bezeichnen, so gilt für $T \to \infty$ die Gleichung $\lim N_0(T) : N_a(T) = 0$.[116])

18. Über die Größenordnung der Zetafunktion auf vertikalen Geraden. Man findet sehr leicht, daß $\zeta(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ von endlicher Größenordnung in bezug auf t ist, und es läßt sich daher im ganzen Intervalle $-\infty < \sigma < \infty$ eine endliche *Größenordnungsfunktion* $\mu(\sigma)$ definieren (vgl. Nr. 6) als die untere Grenze aller Zahlen α, für welche $\zeta(\sigma + it)$ bei festem σ gleich $O(|t|^\alpha)$ ist. Die Funktionalgleichung (24) liefert die Relation $\mu(\sigma) = \mu(1-\sigma) + \frac{1}{2} - \sigma$, und es genügt somit $\mu(\sigma)$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ zu untersuchen. Für $\sigma > 1$ ist $\mu(\sigma) = 0$ (es ist sogar $|\zeta(s)|$ und $\frac{1}{|\zeta(s)|}$ beschränkt auf jeder vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 > 1$). Die Schwierigkeit besteht darin, $\mu(\sigma)$ für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$ zu bestimmen. Nachdem zuerst *Mellin* und später *Landau* gewisse Abschätzungen der μ-Funktion gewonnen hatten[117]), gelang es

---

115) *H. Bohr* und *R. Courant,* Neue Anwendungen der Theorie der diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion, Crelles J. 144 (1914), p. 249–274.

116) *H. Bohr,* a) Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 158 (1914), p. 1986—1988; b) Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen, Acta Math. 40 (1915), p. 67—100.

Schon früher hatten *H. Bohr* und *E. Landau,* Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 74 (1913), p. 3—30 durch Überlegungen ganz anderer Art gezeigt, daß unter Annahme der Richtigkeit der „Riemannschen Vermutung" die Wertmenge von $\zeta(s)$ im Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ $(\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1)$ alle Werte außer 0 enthält.

117) *H. Mellin,* Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlechte, Acta Soc. Sc. Fenn. 29 (1900), No. 4, p. 1—50, bewies, daß $\mu(\sigma) \leqq 1 - \sigma$ für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$, und *E. Landau,* Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 229—241 verschärfte dieses Resultat zu $\mu(\sigma) \leqq \frac{3}{4}(1-\sigma)$ für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$.

Lindelöf[118]) durch allgemeine funktionentheoretische Betrachtungen zu beweisen (vgl Nr. **6**), *daß* $\mu(\sigma)$ *eine stetige konvexe Funktion von* σ *ist*, woraus sofort folgt, wegen $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma > 1$ und $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$ für $\sigma < 0$), daß die μ-Kurve für $0 \leqq \sigma \leqq 1$ im Dreieck mit den Endpunkten $(0, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, 0)$ $(1, 0)$ verläuft, also speziell, daß $\mu(\sigma) \leqq \frac{1}{2}(1 - \sigma)$ für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$. Ganz neuerdings ist es *Hardy* und *Littlewood*[119]) gelungen, über das *Lindelöf*sche Resultat hinauszukommen, und zwar u. a. zu beweisen, daß die μ-Kurve im Punkte $\sigma = 1$ die Abszissenachse berührt. Der genaue Verlauf der μ-Funktion für $0 < \sigma < 1$ ist noch heute unbekannt (vgl. jedoch Nr. **20**).

Ein besonderes Interesse bietet die Untersuchung der Größenverhältnisse von $\zeta(s)$ $\left(\text{und } \frac{1}{\zeta(s)}\right)$ *auf der Geraden* $\sigma = 1$, die den kritischen Streifen von der „trivialen" Halbebene $\sigma > 1$ trennt, und wo $\zeta(s)$ (nach Nr. **17**) „zum ersten Mal" Werte annimmt, die in der ganzen Ebene überall dicht liegen. Über das Resultat $\mu(1) = 0$, d. h. $\zeta(1 + it) = O(t^\varepsilon)$ hinaus, bewies *Mellin*[120]) das viel schärfere Resultat $\zeta(1 + it) = O(\log t)$, und mit Hilfe tiefgehender Untersuchungen über diophantische Approximationen haben später *Hardy-Littlewood*[121]) und *Weyl*[122]) die *Mellin*sche Abschätzung zu $\zeta(1 + it) = o(\log t)$ und *Weyl* sogar zu

$$\zeta(1 + it) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right) \tag{33}$$

verschärfen können. Andererseits haben *Bohr* und *Landau*[123]) ebenfalls mit Hilfe diophantischer Approximationen bewiesen, daß

$$\zeta(1 + it) \neq o(\log\log t) \tag{34}$$

ist. Die Frage nach der „wahren" Größenordnung von $\zeta(1 + it)$ ist aber hiermit noch lange nicht gelöst (vgl. jedoch Nr. **20**), denn es besteht ja noch eine beträchtliche Lücke zwischen (33) und (34). Die entsprechende Frage über $1 : \zeta(1 + it)$ ist noch weniger aufgeklärt. Nachdem es zuerst *Mertens*[124]), durch eine neue Beweisanordnung des

---

118) *E. Lindelöf,* Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$, Bull. Sc. math. (2) 32 I (1908), p. 341–356.

119) Vgl. *J. Littlewood,* a. a. O. 111).

120) *H. Mellin,* a. a. O. 117).

121) *G. H. Hardy* und *J. Littlewood,* Some problems of diophantine approximation, Internat. Congr. of math. Cambridge 1 (1912), p. 223—229.

122) *H. Weyl,* Zur Abschätzung von $\zeta(1 + it)$, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 88—100.

123) *H. Bohr* und *E. Landau,* a. a. O. 113).

124) *F. Mertens,* Über eine Eigenschaft der Riemannschen ζ-Funktion, Sitzungsber. Acad. Wien 107, IIª (1898), p. 1429—1434.

*Hadamard-de la Vallée Poussin*schen Satzes: $\zeta(1+it) \neq 0$, gelungen war, eine obere Grenze $\varphi(t)$ für $\frac{1}{|\zeta(1+it)|}$ explizite anzugeben, fand *Landau*[125]) die für seine zahlentheoretischen Zwecke wichtige Abschätzung $1:\zeta(1+it) = O\{(\log t)^c\}$, die von *Landau* selbst[29]) auf $O(\log t \cdot \log\log t)$, dann von *Gronwall*[126]) auf $1:\zeta(1+it) = O(\log t)$ und neuerdings von *Littlewood*[111]) auf

$$1:\zeta(1+it) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)$$

verschärft wurde; andererseits weiß man aber nur, nach *Bohr,* daß

$$1:\zeta(1+it) \neq O(1)$$

ist, also daß $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ beliebig kleine Werte annimmt[127])), ohne daß man bis jetzt imstande gewesen ist, irgendeine mit t ins Unendliche wachsende Funktion $\psi(t)$ explizite anzugeben, für die $1:\zeta(1+it) \neq O(\psi(t))$ ist.

Obwohl $\zeta(s)$ auf keiner Geraden $\sigma = \sigma_0 \leqq 1$ beschränkt bleibt, ist sie doch bei jedem σ_0 im Intervalle $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ *im Mittel* beschränkt, ja es ist sogar ihr Quadrat im Mittel beschränkt; denn aus dem *Schnee*schen Mittelwertsatze (Nr. 9) ergibt sich leicht[128]), daß

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2\,dt = \sum \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(2\sigma). \qquad (\tfrac{1}{2} < \sigma < 1)$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung, daß für $\sigma < \frac{1}{2}$ der Mittelwert $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2 dt$ sich asymptotisch wie

$$\tfrac{1}{2}(2\pi)^{2\sigma-1}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}\cdot T^{1-2\sigma}$$

verhält. Viel schwieriger ist das Problem des Verhaltens von $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2 dt$ für $\sigma = \frac{1}{2}$; dieses wurde von *Hardy* und *Little-*

---

125) *E. Landau,* Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, Math. Ann. 56 (1903), p. 645—670.

126) *T. Gronwall,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann au voisinage de $\sigma = 1$, Palermo Rend. 35 (1913), p. 95—102.

127) Ein direkter Beweis dieses Satzes (der ja als Spezialfall in dem in Nr. 17 erwähnten Resultate über $\zeta(1+it)$ enthalten ist) findet sich bei *H. Bohr,* Sur l'existence de valeurs arbitrairement petites de la fonction $\zeta(s) = \zeta(\sigma+it)$ de Riemann pour $\sigma > 1$, Oversigt. Vidensk. Selsk. Kóbenhavn 1911, p. 201—208. Vgl. auch *H. Bohr,* Note sur la fonction Zéta de Riemann $\zeta(s) = \zeta(\sigma+it)$ sur la droite $\sigma = 1$, Oversigt Vidensk. Selsk. Kóbenhavn 1913, p. 3—11.

128) Vgl. z. B. *E. Landau,* Handbuch, a. a. O. 1), § 228.

wood gelöst[31b]), und zwar mit dem Ergebnis

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 dt \sim \log T.$$

Neuerdings haben *Hardy* und *Littlewood*[129]) bewiesen, daß auch $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^4 dt$ bei festem σ im Intervalle $\frac{1}{2}<\sigma<1$ beschränkt bleibt und sogar für $T\to\infty$ einem bestimmten Grenzwerte zustrebt. Der Beweis basiert auf der von *Hardy* und *Littlewood*[129]) entdeckten sogenannten „*approximativen Funktionalgleichung*", welche besagt, daß für $|\sigma|<k$, $x>K$, $y>K$ und $2\pi xy=|t|$

$$\zeta(s)=\sum_{n<x}\frac{1}{n^s}+\chi\sum_{n<y}\frac{1}{n^{1-s}}+R,$$

wo $\chi=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)$ und $R=O(x^{-\sigma})+O(y^{\sigma-1}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma})$. Diese Formel, welche bei Abschätzungen der Zetafunktion im kritischen Streifen $0<\sigma<1$ von der größten Bedeutung ist, ist[129]) eine Art „Kompromiß zwischen der für $\sigma>1$ gültigen Formel $\zeta(s)=\sum\frac{1}{n^s}$ und der für $\sigma<0$ gültigen Formel $\zeta(s)=\chi\sum\frac{1}{n^{1-s}}$".

Die oben erwähnten Mittelwertsformeln und andere ähnliche, die sich durch Anwendung des *Schnee*schen Mittelwertsatzes auf mit der Zetareihe beschlechtete *Dirichlet*sche Reihen abgeleitet werden, spielen bei neueren Untersuchungen über die Zetafunktion eine immer wichtigere Rolle.

19. Näheres über die Nullstellen im kritischen Streifen. Aus dem Satze (Nr. **14**), daß keine Nullstelle von $\zeta(s)$ *auf* der Geraden $\sigma=1$ gelegen ist, folgt sofort, daß für eine mit $t\to\infty$ „hinreichend" schnell zu 0 abnehmende Funktion $\varphi(t)$ der asymptotisch unendlich schmale Streifen $1\geqq\sigma>1-\varphi(t)$ ebenfalls nullpunktsfrei ist. Mit Hilfe der *Hadamard*schen Produktentwicklung von $\zeta(s)$ gelang es *de la Vallée Poussin*[130]), und später durch elementarere Mittel *Landau*[125]), eine solche Funktion $\varphi(t)$ explizite anzugeben; das *de la Vallée Poussin*-

129) *G. H. Hardy* und *J. Littlewood*, The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz, Proc. London math. Soc. 21 (1922), p. 39—74.

130) *Ch. de la Vallée Poussin*, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, Mém. Acad. Belgique 59, No. 1 (1899—1900), p. 1—74.

sche Resultat, welches das genauere war, besagt, daß $\frac{k}{\log t}$ (bei passender Wahl von $k > 0$) eine zulässige Funktion $\varphi(t)$ ist. Ganz neuerdings hat *Littlewood*[111]) dieses dahin verschärft, daß $\varphi(t) \sim \frac{k \log\log t}{\log t}$ angenommen werden darf. Ob es aber eine Konstante $\sigma_0 < 1$ gibt mit der Eigenschaft, daß $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \sigma_0$, ist immer noch unentschieden.

Wie in Nr. **16** erwähnt, ist die Anzahl $N(T)$ von Nullstellen im Rechteck $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$ für $T \to \infty$ asymptotisch gleich $k \cdot T \log T$. Über die Verteilung dieser Nullstellen haben *Bohr* und *Landau*[65a]) bewiesen, daß *ihre Mehrzahl in nächster Nähe der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$ *gelegen ist*, d. h. bei jedem festen $\delta > 0$ ist die Anzahl $N_1(T)$ von Nullstellen, welche innerhalb des obigen Rechtecks, aber außerhalb des dünnen Streifens $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$ liegen, gleich $o(T \log T)$; dies folgt aus einem allgemeinen, in Nr. **10** erwähnten Satz über *Dirichlet*sche Reihen (auf die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen angewendet), nach welchem die besprochene Anzahl $N_1(T)$ sogar gleich $O(T)$ ist. Durch eine weitergehende Untersuchung wurde dieses Resultat zuerst[65b]) zur Gleichung $N_1(T) = o(T)$ und später von *Carlson*[131]) mit Hilfe seines in Nr. **10** erwähnten Satzes über *Dirichlet*sche Reihen zu

$$N_1(T) = O(T^{1 - 4\delta^2 + \varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0)$$

verschärft. Ferner gelang es *Littlewood*[111]) eine mit $t \to \infty$ zu 0 abnehmende Funktion $\varphi(t)$ explizite anzugeben mit der Eigenschaft, daß das Hauptresultat $N_1(T) = o(T \log T)$ noch gültig bleibt, wenn $N_1(T)$ die Anzahl der Nullstellen im Gebiete $\sigma > \frac{1}{2} + \varphi(t)$, $0 < t < T$ angibt.

Ein sehr bedeutsamer Fortschritt in den Untersuchungen über die Nullstellen von $\zeta(s)$ wurde von *G. H. Hardy*[132]) gemacht, dem es zuerst zu beweisen gelang, daß *auf der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$ *tatsächlich unendlich viele Nullstellen liegen.* Daß es überhaupt auf dieser „kritischen" Geraden Nullstellen gibt, war schon früher durch numerische Untersuchungen festgestellt.[133]) Der ursprüngliche *Hardy*sche Beweis

---

131) *F. Carlson,* a. a. O. 67). Vgl. auch eine frühere Arbeit von *S. Wennberg,* a. a. O. 33), worin die weniger genaue Relation $N_1(T) = O\left(T : (\log T)^{1-\delta}\right)^{\delta}$ bewiesen wird.

132) *G. H. Hardy,* Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 158 (1914), p. 1012—1014.

133) Vgl. *J. Gram,* a) Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Oversigt Vidensk. Selsk. Köbenhavn 1895, p. 303—308; b) Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Acta Math. 27 (1903), p. 289—304; *Ch. de la Vallée Poussin,* a. a. O. 130); *E. Lindelöf,* a) Quelques applications d'une formule som-

dieses Satzes nahm seinen Ausgangspunkt in der folgenden von *Mellin*[134]) herrührenden Integraldarstellung einer Thetareihe durch die Zetafunktion

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-n^2 y} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{y}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) y^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)\, ds, \quad (\Re(y) > 0)$$

welche zu den in Nr. **11** erwähnten Typen von Integraldarstellungen einer *Dirichlet*schen Reihe durch eine andere *Dirichlet*sche Reihe gehört. Wird unter dem Integralzeichen statt $\zeta(s)$ die in Nr. **14** erwähnte Funktion $\eta(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ eingeführt, und $\eta(\frac{1}{2} + it) = \varrho(t)$ gesetzt, so geht die *Mellin*sche Formel, wenn $y = \pi e^{2\alpha i}\left(-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ gewählt wird, in die Formel

$$(35) \quad \int_0^\infty (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})\,\varrho(t)\, dt = -4\pi \cos\frac{\alpha}{2} + 2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-n^2 \pi e^{2\alpha i}}$$

über, wobei noch benutzt ist, daß (wegen der Funktionalgleichung $\eta(s) = \eta(1-s)$) die Funktion $\varrho(t)$ eine gerade ist. Es handelt sich darum zu beweisen, daß $\varrho(t)$ unendlich viele *reelle* Nullstellen besitzt, also daß der Integrand in (35) in unendlich vielen Punkten des Integrationsintervalles $0 < t < \infty$ verschwindet. Der Beweis beruht nun darauf, daß die Funktion $\eta(s)$ (wie z. B. aus der *Riemann*schen Integraldarstellung (26) ersichtlich) auf der betrachteten Geraden $s = \frac{1}{2} + it$ *reell* ist, d. h. daß $\varrho(t)$ für reelles t reell ist, und daß daher, wenn $\varrho(t)$ nur *endlich viele* Nullstellen auf der reellen Achse besäße, für alle t von einer gewissen Stelle t_0 an durchweg die Gleichung $\varrho(t) = |\varrho(t)|$ oder durchweg die Gleichung $\varrho(t) = -|\varrho(t)|$ stattfände. Die ursprüng-

matoire générale, Acta soc. sc. Fenn. 31, No. 3 (1903), p. 1—46; b) Sur une formule sommatoire générale, Acta Math. 27 (1903), p. 305—311; *R. Backlund,* Einige numerische Rechnungen, die Nullpunkte der Riemann'schen ζ-Funktion betreffend, Öfversigt Finska Vetensk. Soc. (A) 54 (1911—12), No. 3, p. 1—7 und a. a. O. 108a), b). Das weitestgehende Resultat rührt von *Backlund* her, welcher in der letztzitierten Arbeit beweist, 1. daß auf der Strecke $\sigma = \frac{1}{2}$, $0 < t < 200$ genau 79 Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen, und 2. daß es außer diesen 79 Nullstellen keine einzige Nullstelle von $\zeta(s)$ im Rechtecke $0 < \sigma < 1$, $0 < t < 200$ gibt. Dies Resultat gehört zu den kräftigsten Argumenten für den Glauben an die Richtigkeit der „*Riemann*schen Vermutung".

134) *H. Mellin,* Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$, Acta soc. sc. Fenn. 24, No. 10 (1899), p. 1—50. Ein anderes Integral der Funktion $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, welches (nach *Hardy*) ebenfalls zum Beweis des *Hardy*schen Satzes verwendbar ist, ist von *S. Ramanujan,* New expressions for Riemann's functions $\xi(s)$ and $\Xi(t)$, Quart. J. 183 (1915), p. 253—261, angegeben.

liche Fassung des *Hardy*schen Beweises, daß diese Annahme mit der Gleichung (35) in Widerspruch steht, wurde bald von *Landau*[135]) etwas vereinfacht. In der vereinfachten Form kommt dieser Widerspruch einfach so heraus, daß einerseits aus (35), unter der (falschen) Annahme $\varrho(t) = |\varrho(t)|$ (oder $\varrho(t) = -|\varrho(t)|$), durch den Grenzübergang $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ (bei welchem die Thetareihe verschwindet) die Konvergenz des Integrales

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} |\varrho(t)|\, dt$$

geschlossen wird, woraus, bei Wiedereinführung der Zetafunktion selbst, die *Konvergenz* von

$$\int_1^\infty t^{-\frac{1}{4}} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|\, dt \tag{36}$$

sich ergibt, während andererseits mit Hilfe des *Cauchy*schen Satzes leicht gezeigt wird, daß für hinreichend große T das Integral $\left|\int_1^T \zeta(\frac{1}{2} + it)\, dt\right|$, und also um so mehr das Integral $\int_1^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|\, dt$, größer als kT ist, woraus durch eine grobe Abschätzung die Ungleichung

$$\int_1^T t^{-\frac{1}{4}} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|\, dt > kT^{\frac{3}{4}},$$

also gewiß die *Divergenz* von (36) erfolgt.

Der *Hardy*sche Beweis wurde bald so umgeformt, daß er nicht nur die Relation $M(T) \to \infty$, wo $M(T)$ die Anzahl der Nullstellen *auf* der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ mit Ordinaten zwischen 0 und T bezeichnet, sondern zugleich auch eine untere Abschätzung von $M(T)$ liefern konnte. Nachdem zuerst *Landau*[135]) die Ungleichung $M(T) > K \log\log T$ bewiesen hatte, wurden wesentlich weitergehende Abschätzungen von *de la Vallée Poussin*[136]) und unabhängig davon von *Hardy* und *Littlewood*[31b]) gegeben; die letzteren, welche die genaueren Resultate erhielten, bewiesen u. a., daß $M(T) > KT^{\frac{3}{4} - \varepsilon}$. In den Beweisen dieser weitergehenden Sätze wurden verschiedene wesentliche Änderungen der ursprünglichen *Hardy*schen Beweismethode vorgenommen (vor allem konnten *Hardy* und *Littlewood* in ihrem Beweis der Ungleichung $M(T) > K \cdot T^{\frac{3}{4} - \varepsilon}$ den Gebrauch der *Mellin*schen Formel (35) und da-

135) *E. Landau,* Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellem Teil $\frac{1}{2}$, Math. Ann 76 (1915), p. 212—243.

136) *Ch. de la Vallée Poussin,* Sur les zéros de $\zeta(s)$ de Riemann, Paris C. R. 163 (1916), p. 418—421 und p. 471—473.

durch die Einführung der elliptischen Thetafunktionen gänzlich vermeiden); die wesentliche Idee der Beweismethode ist aber immer dieselbe geblieben. Neuerdings ist es *Hardy* und *Littlewood*[137]) durch eine sehr verfeinerte Analyse gelungen, sogar die Abschätzung

$$M(T) > KT$$

zu beweisen, und damit festzustellen, daß die Anzahl $M(T)$ von Nullstellen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ jedenfalls „fast" von derselben Größenordnung ist als die Anzahl $N(T) \left(\sim \frac{1}{2\pi} T \log T\right)$ von Nullstellen im ganzen Streifen $0 < \sigma < 1$.

20. Folgerungen aus der „Riemannschen Vermutung". Es wird in dieser Nummer über einige Untersuchungen referiert, deren Resultate nicht auf gesicherte Wahrheit Anspruch erheben dürfen, weil sie auf der *Annahme* der Richtigkeit der *Riemann*schen Vermutung, daß alle nicht-trivialen Nullstellen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen, beruhen.[138]) Der Weg zu solchen Untersuchungen wurde von *Littlewood*[138]) geöffnet, der bei dem Problem der Bestimmung der μ-Funktion zuerst gezeigt hat, in welcher Weise die Annahme $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ für das funktionentheoretische Studium der Zetafunktion ausgenützt werden kann. Die *Littlewood*sche Methode, welche auf der Anwendung des sogenannten *Hadamard*schen Dreikreisensatzes (vgl. Art. II C 4, Nr. 62) auf die (unter Annahme der Richtigkeit der *Riemann*schen Vermutung) für $\sigma > \frac{1}{2}$, $t > 0$ *reguläre* Funktion $\log \zeta(s)$ beruht, lieferte die *genaue Bestimmung der μ-Funktion für alle σ*, und zwar mit dem Resultat $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, also (vgl. Nr. 18) $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$

---

137) *G. H. Hardy* und *J. Littlewood,* The zeros of Riemann's Zeta-Funktion on the critical line, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 283—317. Die Verfasser beweisen übrigens noch mehr, nämlich daß bei jedem $a > 0$ und $U = T^a$ die Ungleichung $M(T + U) - M(T) > KU$ für alle hinreichend großen T besteht. Der Beweis dieses letzten Satzes basiert auf der „approximativen Funktionalgleichung" (Nr. 18), welche in dieser Abhandlung zum ersten Mal (obwohl nicht in ihrer weitestgehenden Form) bewiesen wird.

138) Im Laufe der vielen (bisher mißglückten) Versuche, die „*Riemann*sche Vermutung" zu beweisen, haben verschiedene Forscher das Problem in mannigfacher Weise umgeformt. Vor allem hat *J. Littlewood,* Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$, Paris C. R. 154 (1912), p. 263—266, entdeckt, daß die *Riemann*sche Hypothese gleichwertig ist mit der Hypothese, daß die *Dirichlet*sche Reihe für $1 : \zeta(s)$ (siehe Nr. 22) die Konvergenzabszisse $\sigma_B = \frac{1}{2}$ besitze. Vgl. auch eine Arbeit von *M. Riesz,* Sur l'hypothèse de Riemann, Acta Math. 40 (1916), p. 185—190, in welcher die Umformung des Problems auf einer von *Riesz* gefundenen interessanten Integraldarstellung der Funktion $1 : \zeta(s)$ beruht.

für $\sigma \leqq \frac{1}{2}$.[139]) Über das Resultat $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ hinaus bewies *Littlewood*[138]), daß bei jedem σ des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ und jedes $a > 2$

$$(37) \qquad \log \zeta(s) = O((\log t)^{a(1-\sigma)}),$$

und er konnte ferner $\zeta(s)$ *auf der Geraden* $\sigma = 1$ viel genauer abschätzen, als es ohne Benutzung der „*Riemann*schen Vermutung" möglich gewesen war (vgl. Nr. 18). Neuerdings hat *Littlewood*[111]) seine Abschätzung von $\zeta(1 + it)$ noch verbessert, und zwar die Relation

$$\zeta(1 + it) = O(\log\log t)$$

bewiesen; hiermit ist das Problem, die Größenordnung von $\zeta(1 + it)$ zu bestimmen, zu einem gewissen Abschluß gebracht, weil ja andererseits bekannt ist (Nr. 18), daß $\zeta(1 + it) \neq o(\log\log t)$.

An die erste *Littlewood*sche Arbeit schloß sich eine Arbeit von *Bohr* und *Landau*[140]) an, worin (unter Annahme der *Riemann*schen Vermutung) die Relation

$$(38) \qquad \log \zeta(s) \neq O((\log t)^{b(1-\sigma)}) \qquad (\tfrac{1}{2} < \sigma < 1)$$

bei passender Wahl einer Konstanten $b > 0$ bewiesen wurde. Hiermit wurde (unter Berücksichtigung des *Littlewood*schen Resultates (37)) auch die Größenordnung von $\log \zeta(s)$ im kritischen Streifen einigermaßen genau bestimmt.

Mit der Frage nach der Größenordnung von $\zeta(s)$ eng verbunden ist die Frage nach der „feineren" Verteilung der Ordinaten der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$, d. h. die Frage nach dem Verhalten des Restgliedes $R(T)$ in der *Riemann-v. Mangoldt*schen Formel (31)[141]), und auch bei diesem Problem ist es möglich gewesen, unter Heranziehen der *Riemann*schen Hypothese recht genaue Aufschlüsse zu erhalten. Einerseits hat *Landau*[142]) bewiesen, daß $R(T) \neq O(1)$ (also daß $R(T)$ nicht beschränkt bleibt), und später haben *Bohr* und *Lan-*

---

139) Nach *R. Backlund*, Über die Beziehung zwischen Anwachsen und Nullstellen der Zetafunktion, Öfversigt Finska Vetensk. Soc. 61 (1918—19), No. 9, ist es, um den Beweis der Gleichung $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ zu führen, nicht nötig, die *Riemann*sche Vermutung in ihrem vollen Umfange zu benutzen. Vielmehr ist die Annahme: $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ mit der Annahme, das bei jedem festen $\delta > 0$ die Anzahl $A(T)$ von Nullstellen im Rechtecke $\frac{1}{2} + \delta < \sigma < 1$, $T < t < T + 1$ gleich $o(\log T)$ ist, gleichwertig. Sichergestellt (d. h. ohne irgendeine Annahme bewiesen) ist nur die Abschätzung $A(T) = O(\log T)$.

140) *H. Bohr* und *E. Landau*, Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 74 (1913), p. 3—30.

141) Der Zusammenhang dieser beiden Probleme ist neuerdings von *J. Littlewood*, a. a. O. 111) einem tiefgehenden Studium unterworfen worden.

142) *E. Landau*, Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion, Vierteljahrschr. Naturf. Ges. Zürich 56 (1911), p. 125—148.

dau[140]) aus der Ungleichung (38) gefolgert, daß sogar

$$R(T) \neq O((\log T)^c)$$

bei passender Wahl einer Konstanten $c > 0$. Andererseits verbesserte *Bohr*[143]) die *v. Mangoldt*sche Abschätzung $R(T) = O(\log T)$ zu $R(T) = o(\log T)$; dieses Resultat wurde dann von *Cramér*[144]), *Landau*[145]) und *Littlewood*[111]) noch etwas verschärft; letzterer bewies, daß

$$R(T) = O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

und außerdem (vgl. Nr. **16**), daß

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|R(t) - \tfrac{7}{8}\right| dt = O(\log\log T).$$

Schließlich sei noch ein interessanter Satz von *Littlewood*[143]) über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der unmittelbaren Nähe der kritischen Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ erwähnt, welcher (unter Annahme der *Riemann*schen Vermutung) das Resultat (vgl. Nr. **17** und **19**), daß $\zeta(s)$ in jedem Streifen $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$ sämtliche Werte unendlich oft annimmt, dahin verschärft, daß $\zeta(s)$ bei festem $K > 0$, $\delta > 0$ in jedem Kreise $|s - (\frac{1}{2} + i\tau)| < \delta$ $(\tau > \tau_0 = \tau_0(K, \delta))$ sämtliche Werte vom absoluten Betrage $< K$ annimmt.

21. Verallgemeinerte Zetafunktionen. An die *Riemann*sche Zetafunktion schließen sich mehrere Klassen anderer „Zetafunktionen" an, welche ebenfalls durch *Dirichlet*sche Reihen definiert werden und Eigenschaften besitzen, die in vielen Hinsichten mit denjenigen der *Riemann*schen Zetafunktion übereinstimmen. Die interessantesten Klassen solcher Funktionen werden, wegen des zahlentheorischen Charakters der Koeffizienten ihrer Reihenentwicklung, erst im zweiten Teil des Artikels besprochen, wo sie im Zusammenhange mit den zahlentheoretischen Problemen, für deren Behandlung sie erfunden sind, eingeführt werden. In diesem Paragraphen sollen nur von rein analytischem Gesichtspunkte aus gewisse „verallgemeinerte" Zetafunktionen

---

143) Vgl. *H. Bohr, E. Landau* und *J. Littlewood,* Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$, Bull. Acad. Belgique 15 (1913), p. 1144—1175.

144) *H. Cramér,* Über die Nullstellen der Zetafunktion, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 237—241. In dieser Abhandlung wird u. a. bewiesen, daß zur Herleitung der Abschätzung $R(T) = o(\log T)$ nicht die volle „*Riemann*sche Vermutung" nötig ist, sondern nur die (vgl. Note 139) weniger aussagende sogenannte „*Lindelöf*sche Vermutung" $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

145) *E. Landau,* Über die Nullstellen der Zetafunktion, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 151—154. Vgl. hierzu auch *H. Cramér,* Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn E. Landau, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 155—157.

kurz besprochen werden, deren Definitionen kein zahlentheoretisches Moment enthalten.

Betrachten wir zunächst die Reihe

(39) $$\zeta(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s}$$ [146])

oder allgemeiner die von *Lipschitz*[147]) und *Lerch*[148]) untersuchte Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(w+n)^s},$$

wo x eine komplexe Zahl bedeutet, deren reeller Teil $\Re(x)$ etwa dem Intervalle $0 \leq x < 1$ angehört, während ihr imaginärer Teil $\Im(x) \geq 0$ ist. Diese Reihe, als Funktion von s betrachtet, ist offenbar im Falle $\Im(x) > 0$ in der ganzen s-Ebene konvergent und stellt eine ganze Transzendente dar; für $\Im(x) = 0$ ist sie, abgesehen vom Fall $x = 0$, in der Halbebene $\sigma > 0$ konvergent, definiert aber auch hier eine ganze Transzendente, und im speziellen Falle $x = 0$ (d. h. im Falle der Reihe (39)) konvergiert sie für $\sigma > 1$ und stellt, wie die Zetareihe selbst, eine meromorphe Funktion dar, die überall regulär ist mit Ausnahme des einzigen Punktes $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung besitzt. Dies ersieht man in ganz ähnlicher Weise, wie *Riemann* die Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ bewies, d. h. es wird die Reihe zunächst

---

146) Diese Funktion ist besonders von *H. Mellin*, Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$, Acta soc. sc. Fenn. 24, No. 10 (1899), im Zusammenhange mit seinen Studien über Umkehrformeln (vgl. Note 70) näher untersucht. Vgl. auch *A. Piltz*, Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmethischen Progressionen und über verwandte Gesetze, Habilitationsschrift, Jena 1884, p. 1—48; *E. Lindelöf*, a. a. O. 97) und *E. W. Barnes*, a) The theory of the Gamma function, Mess. of Math. (2) 29 (1899), p. 64—128; b) The theory of the double Gamma function, London Phil. Trans. (A) 196 (1901), p. 265—387; c) On the theory of the multiple Gamma function, Cambridge Phil. Trans. 19 (1904), p. 374—425; *Barnes* untersucht auch Reihen der Form

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_p=0}^{\infty} \frac{1}{(w + n_1\omega_1 + \cdots n_p\omega_p)^s}.$$

147) *R. Lipschitz*, a) Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe, Crelles J. 54 (1857), p. 313—328; b) Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, Crelles J. 105 (1889), p. 127—156.

148) *M. Lerch*, Note sur la fonction $K(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}$, Acta Math. 11 (1887), p. 19—24.

durch ein einfaches bestimmtes Integral dargestellt und dieses wieder in ein komplexes Kurvenintegral umgeformt. Aus dieser letzten Integraldarstellung folgt weiter, wie bei *Riemann*, durch Deformation des Integrationsweges und Anwendung des *Cauchy*schen Satzes[149]), daß unsere Funktion einer der *Riemann*schen ähnlichen *Funktionalgleichung* genügt, welche in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(w+n)^s} = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi i)^{1-s}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i w (m-x)}}{(-x+m)^{1-s}}$$

geschrieben werden kann.

Eine wesentlich weitergehende Verallgemeinerung der *Riemann*schen Zetafunktion ist von *Epstein*[150]) gegeben, dessen Untersuchungen an den zweiten *Riemann*schen Beweis der Funktionalgleichung von $\zeta(s)$, d. h. an die Darstellung der Zetafunktion durch ein bestimmtes Integral mit Hilfe elliptischer Thetafunktionen anknüpfen. *Epstein* betrachtet Reihen der Form

$$(40) \qquad \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} m_\mu x_\mu}}{\{\varphi(y+m)\}^{\frac{s}{2}}},$$

wo $x_1, \dots x_p, y_1, \dots y_p$ Konstanten sind und $\varphi(\alpha+\beta)$ ein symbolischer Ausdruck für die quadratische Form $\sum_\mu \sum_\nu (\alpha_\mu + \beta_\mu)(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ der $2p$ Variabeln $\alpha_1, \dots \beta_p$ ist; die durch eine solche Reihe (40) definierte Funktion wird eine *Zetafunktion* p^{ter} *Ordnung* genannt. *Epstein* zeigt nun, daß die Reihe (40) durch ein bestimmtes Integral mit Hilfe allgemeiner Thetafunktionen dargestellt werden kann, und durch Anwendung von Transformationsformeln dieser Thetafunktionen beweist er, daß auch diese allgemeine Zetafunktion einer Funktionalgleichung von ähnlichem Charakter wie die *Riemann*sche für $\zeta(s)$ genügt.

---

149) Vgl. *M. Lerch*, a. a. O. 148); die Funktionalgleichung wurde zuerst von *R. Lipschitz*, a. a. O. 147a), gefunden, welcher sie mit Hilfe der Theorie der *Fourier*schen Integrale herleitete.

150) *P. Epstein*, a) Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen, Math. Ann. 56 (1903), p. 615—644; b) Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen II, Math. Ann. 63 (1907), p. 205—216.

Zweiter Teil.

22. Einleitung. Bezeichnungen. Dieser Teil handelt von den zahlentheoretischen Anwendungen der im Vorhergehenden entwickelten Theorien. Die *gewöhnlichen Dirichlet*schen Reihen $\sum a_n n^{-s}$ sind als Hilfsmittel für analytisch-zahlentheoretische Untersuchungen besonders wertvoll; einen „Grund" hierfür kann man in ihrer Multiplikationsregel (vgl. Nr. **12**) sehen, wonach bei der Koeffizientenbildung die „multiplikativen" Eigenschaften der Zahlen zur Geltung kommen. Die wichtigsten zahlentheoretischen Funktionen treten als Koeffizienten gewisser *Dirichlet*scher Reihen auf, die mit der *Riemann*schen Zetafunktion in einfacher Weise zusammenhängen. Indem man auf diese Reihen die Sätze über Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer *Dirichlet*schen Reihe und der von der Reihe dargestellten Funktion (vgl. Nr. **4** und **5**) anwendet, gelangt man mit Hilfe der Theorie der Zetafunktion zu neuen Ergebnissen über die Natur der zahlentheoretischen Funktionen. Manche Probleme erfordern die Einführung neuer erzeugender Funktionen, die alle der *Riemann*schen $\zeta(s)$ mehr oder weniger ähnlich sind. Verschiedene Probleme lassen sich auch durch Methoden angreifen, die von der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen gänzlich unabhängig sind.

Es dürfte zweckmäßig sein, einige der im folgenden gebrauchten Bezeichnungen hier zusammenzustellen; die unten gegebenen Definitionen werden also im Texte nicht wiederkehren.

A. Die folgenden zahlentheoretischen Funktionen seien für ganze $n \geqq 1$ definiert:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{für } n = p^m \ (p \text{ Primzahl, } m \geqq 1 \text{ ganz}), \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^\nu & \text{für } n = p_1 p_2 \cdots p_\nu \ (\text{die } p_i \text{ verschiedene Primzahlen}), \\ 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\lambda(n) = \begin{cases} (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_\nu} & \text{für } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\nu^{\alpha_\nu}, \\ 1 & \text{für } n = 1; \end{cases}$$

$d(n)$ = Anzahl der Teiler von n;

$\sigma(n)$ = Summe der Teiler von n;

$\varphi(n)$ = Anzahl der zu n teilerfremden positiven ganzen Zahlen $\leqq n$.

Diese Funktionen sind alle mit $\zeta(s)$ nahe verbunden; es gilt in der Tat für hinreichend große σ

$$\sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s), \qquad \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{\log n \cdot n^s} = \log \zeta(s),$$

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \qquad \sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},$$

$$\sum_1^\infty \frac{d(n)}{n^s} = (\zeta(s))^2, \qquad \sum_1^\infty \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1),$$

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

B. Die folgenden summatorischen Funktionen der obigen und einiger verwandten *Dirichlet*schen Reihen seien für jeden positiven Wert von x definiert:

$$\pi(x) = \text{Anzahl der Primzahlen} \leq x$$

$$= \sum_{p \leq x} 1,$$

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} \quad (p \text{ durchläuft die Primzahlen, } m \text{ die ganzen positiven Zahlen})$$

$$= \sum_{n=1}^x \frac{\Lambda(n)}{\log n}$$

$$= \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots,$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$

$$= \sum_{n=1}^x \Lambda(n),$$

$$= \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots,$$

$$M(x) = \sum_{n=1}^x \mu(n), \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^x \varphi(n),$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^x d(n), \qquad S(x) = \sum_{n=1}^x \sigma(n).$$

C. Es sei $g(x)$ irgendeine der unter B. eingeführten summatorischen Funktionen. Aus $g(x)$ werde die Funktion $\bar{g}(x)$ dadurch ab-

geleitet, daß für alle $x > 0$

$$\bar{g}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(x+\varepsilon) + g(x-\varepsilon)}{2}$$

gesetzt wird. $\bar{g}(x)$ ist also nur in den Unstetigkeitspunkten (d. h. für gewisse ganzzahlige x) von $g(x)$ verschieden.

III. Die Verteilung der Primzahlen.

23. Der Primzahlsatz. Ältere Vermutungen und Beweisversuche. Schon früh entstand das Problem, die Anzahl der Primzahlen zwischen zwei gegebenen Grenzen zu bestimmen, also insbesondere für die Funktion $\pi(x)$ einen (angenäherten oder exakten) Ausdruck aufzustellen. Bei dem höchst unregelmäßigen Verlauf dieser Funktion schien es von vornherein unmöglich, sie durch eine einfache analytische Funktion genau darzustellen; man mußte also zunächst darauf ausgehen, ein *asymptotisches* Resultat, etwa von der Form $\pi(x) \sim f(x)$, zu erhalten. Hierdurch ist schon die Fragestellung angebahnt, die zu dem berühmten *Primzahlsatz*[151]) führte: es gilt für unendlich wachsendes x:

$$\pi(x) \sim Li(x), \tag{41}$$

wo

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{du}{\log u} \right)$$

gesetzt ist. — Dieser Satz kann wohl als das wichtigste Ergebnis der analytischen Zahlentheorie bezeichnet werden; durch die Anstrengungen, ihn zu beweisen, wurden ihre feinsten Methoden geschaffen und ausgebildet.

In (41) kann man, ohne den Sinn der Formel zu verändern, $Li(x)$ durch jede der Bedingung $f(x) \sim Li(x)$ genügende Funktion, z. B. durch $\frac{x}{\log x}$, ersetzen. Eine zu (41) äquivalente Behauptung wurde zuerst von *Legendre*[152]) ohne Beweis ausgesprochen: es werde $\pi(x)$ angenähert durch die Funktion $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$ dargestellt. Schon vor *Legendre* war *Gauß*[153]), wie aus einem viel später geschriebenen Briefe ersichtlich ist, auf die Vermutung $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{du}{\log u}$ gekommen. Von

151) Die Benennung rührt von *H. v. Schaper* her: Über die Theorie der *Hadamard*schen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen, Diss. Göttingen 1898.

152) *A. M. Legendre,* a) Essai sur la théorie des nombres (2. Aufl.), Paris 1808, p. 394; b) Théorie des nombres (3. Aufl.), Paris 1830, Bd. 2, p. 65.

153) *C. F. Gauß,* Werke 2, 2. Aufl., p. 444—447.

Dirichlet[154]) wurde gelegentlich behauptet, $\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\log n}$ sei eine bessere Vergleichsfunktion als diejenige von *Legendre*.

Einen präzisen Sinn erhielten diese Andeutungen erst durch die Arbeiten von *Tschebyschef*.[155]) In moderner Ausdrucksweise können seine wichtigsten Resultate etwa folgendermaßen zusammengefaßt werden: Er betrachtet die Funktionen $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$; zwischen ihnen besteht ein Zusammenhang, der durch die Beziehungen[156])

$$(42)\qquad \begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(u)}{u \log^2 u}\, du \\ \vartheta(x) &= \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(u)}{u}\, du \\ \psi(x) &= \vartheta(x) + O(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

ausgedrückt wird (in den beiden ersten Gleichungen kann man übrigens π bzw. ϑ durch Π bzw. ψ ersetzen). Hieraus läßt sich unmittelbar ablesen, daß für unendlich wachsendes x alle drei Quotienten

$$(43)\qquad \frac{\pi(x)}{Li(x)},\quad \frac{\vartheta(x)}{x},\quad \frac{\psi(x)}{x}$$

dieselben oberen bzw. unteren Unbestimmtheitsgrenzen haben. Werden diese durch l (lim inf) und L (lim sup) bezeichnet, so findet *Tschebyschef*

$$a \leqq l \leqq 1 \leqq L \leqq \tfrac{6}{5} a,$$

mit $a = 0{,}92129$.

Insbesondere folgt hieraus[157]): existiert für irgendeinen der Quotienten (43) ein Grenzwert, so haben alle drei Quotienten den Grenzwert 1. Außer durch (41) läßt sich also der Primzahlsatz durch irgendeine der Gleichungen

$$(44)\qquad \vartheta(x) \sim x$$

$$(45)\qquad \psi(x) \sim x$$

ausdrücken.

154) Vgl. *G. Lejeune-Dirichlet*, Werke 1, p. 372, Fußnote 2).

155) *P. Tschebyschef*, a) Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, Mém. présentés Acad. Pétersb. 6 (1851), p. 141—157; J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 341—365; Œuvres 1, St. Pétersbourg 1899, p. 27—48; b) Mémoire sur les nombres premiers, J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 366—390; Mém. présentés Acad. Pétersb. 7 (1854), p. 15—33; Œuvres 1, p. 49—70.

156) Die beiden ersten Gleichungen werden einfach durch partielle Summation aus den Definitionsgleichungen für $\pi(x)$ und $\vartheta(x)$ abgeleitet.

157) Das kann jetzt unmittelbar aus elementaren Sätzen über *Dirichlet*sche Reihen gefolgert werden. Vgl. Nr. 5, insbesondere die Fußnoten 27) und 28), vgl. auch *E. Landau*, Handbuch, § 31.

Die *Tschebyschef*schen Resultate wurden teils durch Betrachtung der Funktionen $\zeta(s)$ und $\log \zeta(s)$ für reelle, gegen 1 abnehmende Werte von s, teils durch elementare Summenabschätzungen mit Hilfe der Identität[158])

$$\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots = \log([x]!)$$

abgeleitet. Die Schranken für l und L wurden später von anderen[159]) mit analogen Methoden verengert; es ist jedoch bisher niemand gelungen, auf diesem Wege die Existenz eines Grenzwertes, d. h. den Primzahlsatz, zu beweisen.

24. Die Beweise von Hadamard und de la Vallée Poussin. Der Weg, der zu einem strengen Beweis des Primzahlsatzes führen konnte, wurde erst geöffnet durch die Erscheinung der grundlegenden *Riemann*schen Arbeit[95]) vom Jahre 1859, wo zum ersten Male die komplexe Funktionentheorie auf das Problem angewandt und die Zetafunktion völlig allgemein untersucht wurde. Das Endziel dieser Arbeit war allerdings nicht der Beweis des Primzahlsatzes, doch findet man hier schon die Integralformel für die Koeffizientensumme einer *Dirichlet*schen Reihe (vgl. Nr. 4), auf

$$\log \zeta(s) = \sum_{p,\,m} \frac{1}{m p^{ms}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n \cdot n^s}$$

angewandt. *Halphen*[160]) und *Cahen*[161]) versuchten, diesen *Riemann*schen Ansatz für den Beweis des Primzahlsatzes zu benutzen, ein vollständiger Beweis wurde jedoch erst im Jahre 1896 gegeben, und zwar fast gleichzeitig von *Hadamard*[162]) und *de la Vallée Poussin.*[163])

Die früheren Versuche waren hauptsächlich an den folgenden zwei Schwierigkeiten gescheitert: 1. die Eigenschaften der komplexen Null-

---

158) Diese Identität wurde unabhängig von *Tschebyschef*[155]) und *de Polignac,* Recherches nouvelles sur les nombres premiers, Paris 1851, entdeckt.

159) Betreffs der an *Tschebyschef* in dieser Richtung anschließenden Arbeiten sei auf *G. Torelli,* Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato, Neapel 1901 (Atti Accad. sc. fis. mat. (2) 11 No. 1), Cap. 4—5 verwiesen. In dieser Monographie wird die Geschichte des Gegenstandes ausführlich dargestellt.

160) *G. H. Halphen,* Sur l'approximation des sommes de fonctions numériques, Paris C. R. 96 (1883), p. 634—637. Auch *T. J. Stieltjes* gibt an, einen Beweis gefunden zu haben: Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris 1905, verschiedene Stellen, vgl. z. B. Lettre 314.

161) *E. Cahen,* Sur la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x, Paris C. R. 116 (1893), p. 85—88.

162) *J. Hadamard,* Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bull. soc. math. France 24 (1896), p. 199—220.

163) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Première partie, Ann. soc. sc. Bruxelles 20:2 (1896), p. 183—256.

stellen von $\zeta(s)$ waren noch nicht hinreichend bekannt; 2. die Integrale

$$(46)\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds$$

und

$$(47)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s}\log\zeta(s)\,ds,$$

die für $a > 1$ die Funktionen $\bar{\psi}(x)$ bzw. $\bar{\Pi}(x)$ darstellen (vgl. Nr. **4**; in einem Unstetigkeitspunkt muß man nach den dortigen Ausführungen die Hauptwerte der Integrale nehmen), sind nur bedingt konvergent.

Die erste Schwierigkeit wurde von *Hadamard* und *de la Vallée Poussin* dadurch überwunden, daß sie zeigten: jede Nullstelle von $\zeta(s)$ liegt links von der Geraden $\sigma = 1$ (vgl. Nr. **14**). Dieser Satz wird bei allen bisher bekannten Beweisen des Primzahlsatzes als wesentliche Grundlage benutzt. — Um unbedingt konvergente Ausdrücke zu erhalten, benutzen die beiden Verfasser an der Stelle von (46) und (47) Integralausdrücke für gewisse mit $\bar{\psi}$ und $\bar{\Pi}$ zusammenhängende Funktionen.

Hadamard betrachtet das für $\mu > 1$ unbedingt konvergente Integral (vgl. (12) Nr. **4**).

$$(48)\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s^\mu}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{n=1}^{x}\Lambda(n)\log^{\mu-1}\frac{x}{n}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu-1)}\int\limits_2^x\frac{\psi(t)}{t}\log^{\mu-2}\frac{x}{t}\,dt.$$

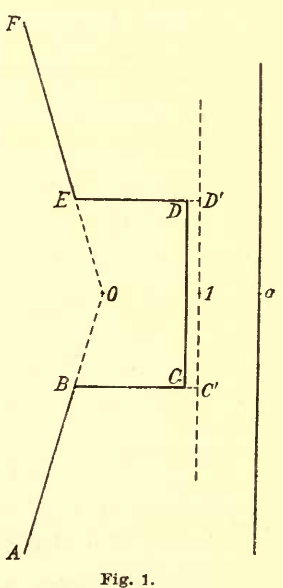


Fig. 1.

Durch eine Verschiebung des Integrationsweges folgert er, unter Benutzung der Tatsache, daß die ganze Funktion $(s-1)\zeta(s)$ vom Geschlechte 1 ist (vgl. Nr. **15**),

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-1)}\int\limits_2^x\frac{\psi(t)}{t}\log^{\mu-2}\frac{x}{t}\,dt$$

$$= x - \sum_{\varrho}{}'\frac{x^\varrho}{\varrho^\mu} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCDEF}\frac{x^s}{s^\mu}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds.$$

Rechts durchläuft ϱ in Σ' nur die oberhalb $D'E$ oder unterhalb BC' gelegenen Nullstellen von $\zeta(s)$; da auf $\sigma = 1$ keine Nullstellen liegen, kann DD' so klein gewählt werden, daß auch noch das Rechteck $CDD'C'$ nullstellenfrei wird (vgl. Figur 1).

Da der neue Integrationsweg ganz in der Halbebene $\sigma < 1$ verläuft, schließt man hieraus

$$(49) \qquad \frac{1}{\Gamma(\mu-1)}\int_2^x \frac{\psi(t)}{t} \log^{\mu-2}\frac{x}{t}\,dt \sim x$$

und speziell für $\mu = 2$

$$(50) \qquad \int_2^x \frac{\psi(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{x} \Lambda(n) \log\frac{x}{n} \sim x.$$

Hadamard zeigt, daß hieraus unmittelbar zu (44) oder (45) übergegangen werden kann (vgl. auch Nr. **25**), womit der Primzahlsatz bewiesen ist.

Auch *de la Vallée Poussin* nimmt als Ausgangspunkt ein unbedingt konvergentes Integral, nämlich

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(s-u)(s-v)} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds.$$

Durch Anwendung der Gleichung (29), Nr. **15**, erhält er, da $\Re(\varrho) < 1$ ist,

$$(51) \qquad \int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt = \sum_{n=1}^{x} \Lambda(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \log x + K - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho-1}}{\varrho(\varrho-1)} + \frac{a}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = \log x + K + o(1),$$

und zeigt, wie man hieraus zu (50) und (45) übergehen kann.

25. Die Beweismethoden von Landau. Bei den ersten Beweisen des Primzahlsatzes traten als wichtige Hilfsmittel Sätze auf, die durch die Anwendung der *Hadamard*schen Theorie der ganzen Funktionen auf $(s-1)\zeta(s)$ gefunden wurden und also die Existenz der Zetafunktion in der ganzen Ebene und gewisse Eigenschaften ihrer Nullstellen voraussetzen.

Landau hat aber gezeigt, daß der Beweis in weitgehendem Maße von diesen Voraussetzungen befreit werden kann, was für die Anwendung der Methode auf allgemeinere Fälle wichtig ist (vgl. Nr. **42**).

Durch Benutzung der elementar nachweisbaren Ungleichung

$$(52) \qquad \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < K(\log t)^A \quad \text{für} \quad \sigma > 1 - \frac{1}{(\log t)^B}, \quad t > t_0,$$

mit konstanten A, B, K, t_0, gelang es ihm[164]) den Primzahlsatz zu beweisen, indem er mit dem *Hadamard*schen Integral (48) für $\mu = 2$ und mit einem in jenem Gebiete verlaufenden Integrationsweg arbeitete.

164) *E. Landau,* a. a. O. 125) und Handbuch, § 51—54.

Später[165]) zeigte er, daß man die Voraussetzungen sogar noch mehr verringern kann: für den Beweis des Primzahlsatzes ist in der Tat nur wesentlich, daß $\frac{\zeta'}{\zeta}$ auf der Geraden $\sigma = 1$ (abgesehen vom Pole $s = 1$) regulär ist und für $\sigma \geqq 1$, $|t| \to \infty$ gleichmäßig von der Form $O(|t|^k)$ ist. Der am Ende von Nr. 5 genannte Satz von *Landau*[29]) über *Dirichlet*sche Reihen mit positiven Koeffizienten ist nämlich unmittelbar auf $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum \Lambda(n) n^{-s}$ anwendbar und liefert gerade die Beziehung (45). Für den Beweis dieses Satzes werden gewisse allgemeine Grenzwertsätze herangezogen, die speziell den Übergang von (50) oder (51) zu (45) ermöglichen (vgl. auch Nr. **33**). Wenn beispielsweise die Funktion $f(t)$ für $t > a$ nirgends abnimmt, so kann man von

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\, dt \sim x$$

auf die asymptotische Gleichheit der Ableitungen schließen: $f(x) \sim x$.

Durch Benutzung des Integranden $\frac{x^s}{s^2} \log \zeta(s)$ anstatt $\frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ kann man, wie *Landau*[166]) zeigt, den Satz (41) über $\pi(x)$ direkt, d. h. ohne den Umweg üher $\psi(x)$ oder $\vartheta(x)$, beweisen; auch gelingt es ihm[167]) mit Hilfe des nur bedingt konvergenten Integrals (46) direkt zu (45) — und sogar zur Gleichung (53) von Nr. **27** — ohne den Umweg über (50) zu gelangen.

26. Andere Beweise. Der Beweis von *H. v. Koch*[168]) weicht von den vorhergehenden dadurch ab, daß er gar nicht mit Integralen von der Form $\int \frac{x^s}{s^\mu} f(s)\, ds$ arbeitet. Er gibt für die summatorischen Funktionen der *Dirichlet*schen Reihen für $\frac{\zeta'}{\zeta}$ und $\log \zeta$ unter Benutzung gewisser Diskontinuitätsfaktoren Ausdrücke, die in der folgenden Darstellungsformel für die Koeffizientensumme einer beliebigen *Dirichlet*schen Reihe $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ (mit absolutem Konvergenzbereich) zu-

165) *E. Landau,* a. a. O. 29) und 21) sowie Zwei neue Herleitungen für die asymptotische Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, Sitzungsber. Akad. Berlin 1908, p. 746—764 und Handbuch, § 66.

166) *E. Landau,* a. a. O. 165) (Zwei neue Herleitungen . . .) und Handbuch, § 64.

167) *E. Landau,* Über den Gebrauch bedingt konvergenter Integrale in der Primzahltheorie, Math. Ann. 71 (1912), p. 368—379.

168) *H. v. Koch,* Sur la distribution des nombres premiers, Acta Math. 24 (1901), p. 159—182.

sammengefaßt werden können[169]):

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n = \lim_{c\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} e^{c\nu x} f(c\nu), \qquad (x \neq \lambda_n).$$

Diese Formel erscheint dadurch bemerkenswert, daß $f(s)$ darin nur mit einem reellen und positiven Argument auftritt.

Hardy und *Littlewood*[170]) beweisen, wie schon in Nr. **5** erwähnt wurde, mit Hilfe des „*Cahen-Mellin*schen Integrals" (vgl. Nr. **11**) einen Satz über *Dirichlet*sche Reihen, der den *Landau*schen, in Nr. **5** und **25** erwähnten, Satz — und damit den Primzahlsatz — als Spezialfall enthält.

Steffensen[171]) zeigt, daß eine von ihm und schon früher von *Mellin*[172]) gefundene Integraldarstellung für die Koeffizientensumme einer *Dirichlet*schen Reihe zum Beweis des Primzahlsatzes benutzt werden kann.

27. Die Restabschätzung. Schon durch die Resultate von *Tschebyschef*[155]) wurde die Vermutung nahe gelegt, daß unter allen asymptotisch gleichwertigen Funktionen, die man als Vergleichsfunktionen für $\pi(x)$ benutzt hatte, dem Integrallogarithmus eine besonders ausgezeichnete Stellung zukommt. Streng entschieden wurde diese Frage erst durch *de la Vallée Poussin*[173]), der aus seiner Gleichung (51) mit Hilfe seines Satzes (vgl. Nr. **19**)

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma > 1 - \frac{k}{\log t}, \quad t > t_0$$

die Folgerung

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \tag{53}$$

für jedes $\alpha < \sqrt{k}$ zog. Gleichzeitig folgt, daß auch die Differenzen

$$\Pi(x) - Li(x), \quad \vartheta(x) - x, \quad \psi(x) - x$$

alle drei von der Größenordnung $O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$ sind. Der Integral-

169) Vgl. auch *Hj. Mellin,* Die Dirichletschen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht, Acta Math. 28 (1904), p. 37—64.

170) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* a. a. O. 31).

171) *J. F. Steffensen,* Analytiske studier med anvendelser paa taltheorien, Diss. Kopenhagen 1912; Über eine Klasse von ganzen Funktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, Acta Math. 37 (1914), p. 75—112; vgl. auch: Über Potenzreihen, im besonderen solche, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind, Palermo Rend. 38 (1914), p. 376—386.

172) a. a. O. 169).

173) *Ch. de la Vallée Poussin,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique 59 (1899—1900), No. 1.

logarithmus stellt demnach $\pi(x)$ in einem ganz präzisen Sinne *besser* dar als $\frac{x}{\log x}$ oder irgendeine der Funktionen

$$f_q(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \cdots \frac{(q-1)!\,x}{\log^q x} = Li(x) + O\left(\frac{x}{\log^{q+1} x}\right),$$

die bei der asymptotischen Entwicklung von $Li(x)$ auftreten.[174] Nach (53) gilt nämlich für $q = 1, 2, \ldots$

(54) $$\pi(x) - f_q(x) \sim \frac{q!\,x}{\log^{q+1} x},$$

aber

(55) $$\pi(x) - Li(x) = o\left(\frac{x}{\log^{q+1} x}\right).$$

Bei *Landau*[164]) wird mit Hilfe von (52), also ohne Benutzung der Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ oder der Existenz ihrer Nullstellen, die Abschätzung

(56) $$\pi(x) = Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[13]{\log x}}\right)$$

bewiesen; diese ist weniger scharf als (53), reicht aber doch für die Folgerungen (54) und (55) aus. *Landau*[175]) hat übrigens auch den Beweis von (53) wesentlich vereinfacht; diese Gleichung, mit dem von ihm angegebenen Werte von α, stellt die schärfste bisher mit Sicherheit bekannte Abschätzung von $\pi(x)$ dar.[176])

Nimmt man dagegen an, die Riemannsche Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion sei richtig (vgl. Nr. **20**), so erhält man noch schärfere Resultate, nämlich

(57) $$\left.\begin{matrix}\pi(x) - Li(x)\\ \Pi(x) - Li(x)\end{matrix}\right\} = O(\sqrt{x}\log x),$$

(58) $$\left.\begin{matrix}\vartheta(x) - x\\ \psi(x) - x\end{matrix}\right\} = O(\sqrt{x}\log^2 x).$$

---

174) Hieraus folgt die Richtigkeit einer von *Lionnet*, Question 1075, Nouv. ann. math. (2) 11 (1872), p. 190, ausgesprochenen Vermutung, daß für große x mehr Primzahlen im Intervalle $(1, x)$ als in $(x, 2x)$ liegen. Es gilt nämlich $2\pi(x) - \pi(2x) \sim 2\log 2\,\frac{x}{\log^2 x}$; vgl. *E. Landau*, Solutions de questions proposées, 1075, Nouv. ann. math. (4) 1 (1901), p. 281—282.

175) *E. Landau*, a) a. a. O. 29); b) Neue Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, Palermo Rend. 27 (1909), p. 46—58; c) Handbuch § 81; *Landau* zeigt, daß (53) für alle $\alpha < \frac{1}{\sqrt{18{,}53}}$, also z. B. für $\alpha = \frac{1}{5}$, gilt.

176) Der von *Littlewood*, a. a. O. 111) ohne Beweis ausgesprochene Satz $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1 - \frac{c \log\log t}{\log t}$ würde eine Verbesserung von (53) zulassen, indem er ein Restglied von der Form $O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x \log\log x}}\right)$ liefern würde.

Diese Gleichungen sind zuerst von *v. Koch*[168]) mit seiner in der vorigen Nummer erwähnten Methode bewiesen; sie können auch aus der *de la Vallée Poussin*schen Gleichung (51) erhalten werden, durch ein Verfahren, das von *Holmgren*[177]) und in einem analogen Fall von *Landau*[178]) benutzt wurde. *Landau*[179]) hat diese Abschätzungen auch auf anderem Wege bewiesen; die etwas unschärfere Abschätzung $O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ folgt nach den *Littlewood*schen Ergebnissen über die μ-Funktion (vgl. Nr. 20) direkt aus dem Konvergenzsatz von *Landau-Schnee* (vgl. Nr. 6).

Bezeichnet man allgemein durch Θ die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$, wobei also $\frac{1}{2} \leqq \Theta \leqq 1$ ist, so bleiben (57) und (58) jedenfalls richtig, wenn $\sqrt{x}$ durch x^{Θ} ersetzt wird.[179]) (Im Falle $\Theta = 1$ ist dies natürlich trivial.) Die *Dirichlet*sche Reihe

$$(59) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n^s} = -\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \zeta(s)\right)$$

konvergiert also für $\sigma > \Theta$. Aus (53) folgt, daß sie jedenfalls auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$ konvergiert.

Auch wenn die *Riemann*sche Vermutung bewiesen wird, kann man nicht hoffen, die durch (57) und (58) gegebenen Abschätzungen wesentlich zu verbessern. Jedenfalls kann für kein $\eta < \Theta$ z. B.

$$\psi(x) - x = O(x^{\eta})$$

sein[180]), denn daraus würde die Konvergenz der linken Seite von (59) — und also die Regularität der rechten Seite — für $\sigma > \eta$ folgen. Weitere Sätze in dieser Richtung gaben *Phragmén*[181]), *Schmidt*[182]) und *Landau*[183]), der die Frage in Beziehung zu seinem Satze über *Dirichlet*-

177) *E. Holmgren,* Om primtalens fördelning, Öfvers. af Kgl. Vetensk. Förh. 59, Stockholm 1902—1903, p. 221—225.

178) *E. Landau,* Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, Math. Ztschr. 1 (1918), p. 1—24.

179) *E. Landau,* a. a. O. 175b) und Handbuch, § 93—94.

180) Dies wurde schon von *A. Piltz* behauptet: Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze, Habilitationsschrift, Jena 1884. Vgl. auch *T. J. Stieltjes,* a. a. O. 160), Lettre 299.

181) *E. Phragmén,* Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de *Riemann,* Öfvers. af Kgl. Vetensk. Förh. Stockholm 48 (1891—1892), p. 599—616 und Sur une loi de symétrie relative à certaines formules asymptotiques, ibid. 58 (1901—1902), p. 189—202.

182) *E. Schmidt,* Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze, Math. Ann. 57 (1903), p. 195—204.

183) *E. Landau,* Über einen Satz von *Tschebyschef,* Math. Ann. 61 (1905), p. 527—550, und Handbuch, § 201—204.

sche Reihen mit positiven Koeffizienten (vgl. Nr. 6) setzte. Ein bedeutender Fortschritt wurde von *Littlewood*[184]) gemacht; durch eine Methode, auf die wir in der nächsten Nummer zurückkommen, bewies er die Existenz einer positiven Konstanten K derart, daß alle vier Ungleichungen

$$(60)\qquad \begin{cases} \pi(x) - Li(x) > K \dfrac{\sqrt{x}}{\log x} \operatorname{logloglog} x \\ \pi(x) - Li(x) < -K \dfrac{\sqrt{x}}{\log x} \operatorname{logloglog} x \\ \vartheta(x) - x > K \sqrt{x} \operatorname{logloglog} x \\ \vartheta(x) - x < -K \sqrt{x} \operatorname{logloglog} x \end{cases}$$

beliebig große Lösungen besitzen. Das gleiche gilt für die entsprechenden Ungleichungen mit Π an der Stelle von π und ψ an der Stelle von ϑ. Dies ist das beste bisher bekannte Resultat über die wirklich stattfindenden Unregelmäßigkeiten der Primzahlfunktionen; wäre es aber gelungen, die *Falschheit* der *Riemann*schen Vermutung (d. h. $\Theta > \frac{1}{2}$) zu beweisen, so könnte nach *Schmidt*[182]) der Faktor von K in (60) sogar durch $x^{\Theta - \varepsilon}$ ersetzt werden. — Das Resultat von *Littlewood* ist besonders darum bemerkenswert, weil man früher die Beziehung

$$(61)\qquad \pi(x) < Li(x)$$

als höchst wahrscheinlich betrachtet hat[185]); diese Beziehung gilt insbesondere für alle $x < 10.000.000$. Nach (60) kann sie aber nicht allgemein gelten.

Nach (60) ist z. B. die Funktion $\dfrac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}}$ sicher nicht beschränkt. Wenn die *Riemann*sche Vermutung richtig ist, so hat sie trotzdem, wie *Cramér*[186]) zeigt, einen beschränkten quadratischen Mittelwert, d. h.

$$\frac{1}{x}\int\limits_2^x \left(\frac{\psi(t) - t}{\sqrt{t}}\right)^2 dt$$

ist beschränkt, strebt aber für $x \to \infty$ keinem bestimmten Grenzwert

---

184) *J. E. Littlewood,* Sur la distribution des nombres premiers, Paris C. R. 158 (1914), p. 1869—1872; *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* a. a. O. 31 b).

185) Vgl. *Gauß,* a. a. O. 153), Bemerkung von *E. Schering* in *Gauß'* Werke 2, p. 520; *Phragmén,* a. a. O. 189); *Lehmer,* List of prime numbers from 1 to 10.006.721, Washington 1914.

186) *H. Cramér,* Some theorems concerning prime numbers, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys 15 (1920), No. 5.

zu, was dagegen von

$$\frac{1}{\log x}\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt$$

gilt.[187])

28. Die Riemannsche Primzahlformel. Das Hauptziel der *Riemann*schen Primzahlarbeit[95]) war die Aufstellung eines *exakten* Ausdrucks für die Funktion $\Pi(x)$; durch die Betrachtung des Integrals (47) wurde *Riemann* nämlich auf die Formel

$$(62)\quad \Pi(x) = Li(x) - \sum_{\gamma>0} \left(Li(x^{\varrho}) + Li(x^{1-\varrho})\right) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t^2-1)t\log t} - \log 2$$

geführt. (Ein unwesentlicher Schreib- oder Rechenfehler im letzten, konstanten Gliede wurde von *Genocchi*[188]) berichtigt.) Die Summe ist hier über alle Nullstellen $\varrho = \beta + \gamma i$ von $\zeta(s)$ zu erstrecken, die der oberen Halbebene angehören, und es ist

$$Li(x^{a+bi}) = \int_{-\infty+bi\log x}^{(a+bi)\log x} \frac{e^z}{z}\,dz \pm \pi i$$

gesetzt, je nachdem $b \log x \gtrless 0$ gilt.[189]) Über seinen Beweis der Konvergenz dieser Reihe gab *Riemann* nur eine unbestimmte Andeutung, und auch aus anderen Gründen war die Formel als nur heuristisch begründet anzusehen. Wegen der äußerst verwickelten Natur der auftretenden Funktionen wurde sogar an der Möglichkeit gezweifelt, die Formel überhaupt beweisen oder jedenfalls daraus irgendwelche Schlüsse ziehen zu können.[190]) Es hat auch lange gedauert, bis ein vollständiger Beweis gegeben wurde; nach verschiedenen Versuchen[191]) gelang dies zuerst *v. Mangoldt*[192]), der eine entsprechende Formel für die

187) *H. Cramér,* Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 147—153; vgl. auch Sur un problème de *M. Phragmén,* Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), No. 27.

188) *A. Genocchi,* Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite, Ann. Mat. pura appl. (1) 3 (1860), p. 52—59.

189) Über den Sinn der Formel und ihre Verwendung für numerische Rechnungen vgl. *E. Phragmén,* Über die Berechnung der einzelnen Glieder der *Riemann*schen Primzahlformel, Öfvers. af Kgl. Vetensk. Förh. 48, Stockholm 1891—1892, p. 721—744.

190) Vgl. z. B. *Ch. de la Vallée Poussin,* a. a. O. 163), p. 252—256.

191) Vgl. z. B. *A. Piltz,* a. a. O. 180); *J. P. Gram,* Undersøgelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og math. Afd. (6) 2 (1881—1886), p. 183—308.

192) *H. v. Mangoldt,* a. a. O. 16) und Zu *Riemanns* Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe", Crelles J. 114 (1895), p. 255—305.

Funktion

$$F(x, r) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\Lambda(n)}{n^r} - \frac{\Lambda(x)}{2x^r} \quad \text{(für nicht ganze } x \text{ bedeutet } \Lambda(x) \text{ Null)}$$

aufstellte, um dann durch Integration nach dem Parameter r zur *Riemann*schen Formel überzugehen.[193] $F(x, 0)$ ist mit $\psi(x)$ identisch, und in diesem Falle lautet die Formel

$$(63) \qquad \bar{\psi}(x) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho} - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \log 2\pi,$$

wo jetzt die Summe über alle komplexen ϱ, nach absolut wachsenden Ordinaten geordnet, erstreckt wird. Diese Formel, deren einzelne Glieder elementare Funktionen sind, ist für die spätere Entwicklung sogar wichtiger als (62) geworden. Formal kommt sie bei der Betrachtung des Integrals (46) unmittelbar heraus, da rechts die Summe der Residuen des Integranden links vom Integrationswege steht.

Da $\psi(x)$ in den Punkten $x = p^m$ unstetig ist, kann $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$ dort nicht gleichmäßig konvergieren. *Landau*[194]), der den *v. Mangoldt*schen Beweis vereinfacht und auch (62) direkt aus (47) abgeleitet hat, zeigt aber, daß die Reihe in jedem Intervall, das rechts von $x = 1$ liegt und von den $x = p^m$ frei ist, gleichmäßig konvergiert. Er dehnt seine Untersuchungen auch auf die allgemeinere Reihe

$$(64) \qquad \sum_{\gamma > 0} \frac{x^\varrho}{\varrho^k} \qquad (0 < k \leqq 1)$$

aus[195]), welche analoge Konvergenzeigenschaften besitzt[196]), die auf das Verhalten der endlichen Summe $\sum_{0 < \gamma \leqq T} x^\varrho$ zurückgeführt werden können. *Cramér*[197]) betrachtet diese Reihen auch für komplexe Werte der

193) Zu diesem Übergang vgl. *H. Cramér,* Über die Herleitung der *Riemann*schen Primzahlformel, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 13 (1918), No. 24.

194) *E. Landau,* Neuer Beweis der Riemannschen Primzahlformel, Sitzungsber. Akad. Berlin 1908, p. 737—745; Nouvelle démonstration pour la formule de Riemann sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, et démonstration d'une formule plus générale pour le cas des nombres premiers d'une progression arithmétique, Ann. Éc. Norm. (3) 25 (1908), p. 399—442.

195) *E. Landau,* Über die Nullstellen der Zetafunktion, Math. Ann. 71 (1912), p. 548—564.

196) In den Unstetigkeitspunkten $x = p^m$ ist jedoch (64) divergent, während $\sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho}$ für alle $x > 0$ konvergiert.

197) *H. Cramér,* Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 104—130.

Veränderlichen, indem er insbesondere die Funktion

$$V(z) = \sum_{\gamma > 0} e^{\varrho z}$$

untersucht. Wird die z-Ebene längs der negativen imaginären Achse aufgeschnitten, so ist $V(z)$ im Innern der aufgeschnittenen Ebene meromorph und hat nur die singulären Stellen $z = \pm \log p^m$, welche Pole erster Ordnung sind. Hierdurch wird es möglich, auf die Reihe (64) den Konvergenzsatz von *M. Riesz* anzuwenden (vgl. Nr. 5). — Alle diese Erscheinungen deuten auf irgendeinen arithmetischen Zusammenhang zwischen den Nullstellen ϱ und den Primzahlen p hin.

Die Formeln (62) und (63) setzen die Hauptglieder der Funktionen $\Pi(x)$ bzw. $\psi(x)$ in Evidenz; wegen der nur bedingten Konvergenz der auftretenden Reihen läßt sich aus ihnen jedoch nicht einmal der Primzahlsatz *unmittelbar* erschließen. Zwar ist z. B. in $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$ jedes Glied von der Form $o(x)$ — wenn die *Riemann*sche Vermutung wahr ist, sogar von der Form $O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ — wegen der Divergenz von $\sum \left|\frac{x^\varrho}{\varrho}\right|$ ist es aber nicht zulässig, unmittelbar hieraus $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho} = o(x)$ zu folgern.[198]) *v. Koch*[199]) hat diese Formeln dadurch für asymptotische Zwecke verwerten können, daß er in die unendlichen Reihen konvergenzerzeugende Faktoren einführt und die Reihen dann durch endliche Summen ersetzt. Auf diese Weise ist es ihm gelungen, $\Pi(x)$ als Summe einer absolut konvergenten Reihe und eines beschränkten Fehlergliedes darzustellen, für $\psi(x)$ erhält er z. B. den Ausdruck

$$(65) \qquad \psi(x) = x - \sum_{|\varrho| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho \log x}{3\sqrt{x}}\right) + O(\sqrt{x} \log^2 x).$$

Landau[200]) zeigt, daß diese Gleichung auch dann richtig bleibt, wenn

198) Die Ausführungen von *H. v. Mangoldt*, Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, Crelles J. 119 (1898), p. 65—71, enthalten nur einen Übergang von (45) zu (41).

199) *H. v. Koch*, Über die Riemannsche Primzahlfunction, Math. Ann. 55 (1902), p. 441—464; Contribution à la théorie des nombres premiers, Acta Math. 33 (1910), p. 293—320.

200) *E. Landau*, Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion abhängen, Acta Math. 35 (1911), p. 271—294. Vgl. auch *A. Hammerstein*, Zwei Beiträge zur Zahlentheorie, Diss., Göttingen 1919. — *Littlewood*, a. a. O. 111) hat sogar (ohne Beweis) die Formel

$$\psi(x) = x - \sum_{|\varrho| \leqq y} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(\sqrt{x} \log x),$$

man den Γ-Faktor wegläßt. *Cramér*[186]) gibt die Formel

$$(66)\qquad \psi(x) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} e^{-\frac{|\gamma|}{x^3}} + O(\log^2 x),$$

wo die Reihe absolut konvergiert.

Wenn die Riemannsche Vermutung richtig ist, so kann aus (65), der entsprechenden *Landau*schen Formel, oder (66) sofort (58) erhalten werden. Unter derselben Voraussetzung folgt aus der *v. Mangoldt*schen Formel (63)

$$\psi(x) = x - 2\sqrt{x} \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin(\gamma \log x)}{\gamma} + O(\sqrt{x}).$$

Die hier auftretende Reihe stellt den „kritischen Teil" von $\psi(x)$ dar; wird jedes Glied mit dem entsprechenden $e^{-\gamma\sigma}$ multipliziert und $\log x = t$ gesetzt, so erhält man den imaginären Teil der Funktion von $s = \sigma + it$

$$\sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma s}.$$

Durch Betrachtung dieser Funktion beweist *Littlewood*[184]) unter Benutzung eines Satzes über diophantische Approximationen sein oben erwähntes, durch (60) ausgedrücktes Resultat.

Aus (62) erhält man mit Hilfe der Beziehung (vgl. Nr. 32)

$$(67)\qquad \bar{\pi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

eine explizite Formel für $\pi(x)$. Diese Formel hat früher die theoretische Stütze der (falschen) Vermutung (61) geliefert[201]), es läßt sich jedoch zur Zeit daraus nicht wesentlich mehr über $\bar{\pi}(x)$ folgern, als schon aus der einfacheren Beziehung

$$\bar{\pi}(x) = \Pi(x) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

folgt.

29. Theorie der L-Funktionen. Es sei $k > 1$ eine gegebene ganze Zahl; dann muß jede Primzahl, mit Ausnahme der endlich vielen in k aufgehenden, irgendeiner der $\varphi(k)$ zu k teilerfremden Restklassen

---

gleichmäßig für $y \geq \sqrt{x}$, angegeben, deren Gültigkeit aber nur unter Voraussetzung der *Riemann*schen Vermutung behauptet wird.

201) *Riemann* (a. a. O. 95) sagt z. B. bei der Besprechung der Formel (67): „Die bekannte Näherungsformel $F(x) = Li(x)$ (sein $F(x)$ ist unser $\bar{\pi}(x)$) ist also nur bis auf Größen von der Ordnung $x^{\frac{1}{2}}$ richtig und gibt einen etwas zu großen Wert."

modulo k angehören. Schon von *Legendre*[202]) wurde (mit falschem Beweis) die Behauptung ausgesprochen, daß jede dieser Restklassen unendlich viele Primzahlen — und sogar asymptotisch gleich viele wie jede andere — enthält. Für die erste Behauptung gab *Dirichlet*[203]) einen strengen Beweis, die zweite aber wurde erst von *Hadamard*[162]) und *de la Vallée Poussin*[204]) bewiesen. Bei diesen Untersuchungen treten als Hilfsmittel gewisse Funktionen auf, die auch bei verschiedenen anderen Fragen der analytischen Zahlentheorie eine Rolle spielen (vgl. Nr. **35**, **40**, **41**), und die deshalb jetzt besprochen werden müssen.

Die obengenannten $\varphi(k)$ Restklassen bilden in bezug auf die gewöhnliche Multiplikation eine *Abel*sche Gruppe. Es sei $X(K)$ irgendeiner der $\varphi(k)$ Charaktere der Gruppe (vgl. I A 6, Nr. **20**); diese Funktion nimmt für jede der fraglichen Restklassen K einen bestimmten Wert an, der übrigens immer eine $\varphi(k)$-te Einheitswurzel ist. Es sei nun die zahlentheoretische Funktion $\chi(n)$ für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ folgendermaßen erklärt: für jedes n einer mit k gemeinteiligen Restklasse sei $\chi(n) = 0$; für jedes n einer zu k teilerfremden Restklasse K sei $\chi(n) = X(K)$. Unter den so eingeführten $\varphi(k)$ verschiedenen *Charakteren modulo* k zeichnet sich besonders der *Hauptcharakter* aus, der für jedes zu k teilerfremde n den Wert 1 hat. Um die verschiedenen Charaktere zu unterscheiden, bezeichnet man sie durch $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots \chi_{\varphi(k)}(n)$, wobei $\chi_1(n)$ immer der Hauptcharakter ist. Die Charaktere besitzen die folgenden vier Fundamentaleigenschaften:

$$\text{a)}\quad \chi(n) = \chi(n') \quad \text{für} \quad n \equiv n' \pmod{k},$$

$$\text{b)}\quad \chi(n) \cdot \chi(n') = \chi(nn'),$$

$$\text{c)}\quad \sum_{n=1}^{k} \chi_\nu(n) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{für} \quad \nu = 1, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \quad {}^{205}),$$

202) *A.-M. Legendre,* a. a. O. 152a) p. 404; 152b) p. 77 und 99. Vgl. auch *A. Dupré*, Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres, Paris 1859; *C. Moreau,* Extrait d'une lettre, Nouv. Ann. math. (2) 12 (1873), p. 322—324; *A. Piltz,* a. a. O. 180).

203) *G. Lejeune-Dirichlet,* Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, Abh. Akad. Berlin 1837, math. Abhandl., p. 45—71 und Werke 1, p. 313—342.

204) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Deuxième partie, Ann. soc. sc. Bruxelles 20: 2 (1896), p. 281—362.

205) Hieraus folgt speziell, daß $\left|\sum_{1}^{N} \chi(n)\right|$ für jeden Nicht-Hauptcharakter

d) $\sum_{\nu=1}^{\varphi(k)} \chi_\nu(n) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{für} \quad n \equiv 1 \pmod{k}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Die *Dirichlet*sche[203]) Reihe

$$L_\nu(s) = L(s, \chi_\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\nu(n)}{n^s} \tag{68}$$

ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent; wegen b) gilt auch dort

$$L_\nu(s) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_\nu(p)}{p^s}\right)^{-1}. \tag{69}$$

Diese L-Funktionen können als Verallgemeinerungen von $\zeta(s)$ — die dem Falle $k = 1$ entspricht — angesehen werden und besitzen auch durchaus analoge Eigenschaften.[206]) Für den Fall des Hauptcharakters folgt unmittelbar

$$L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{70}$$

($p|k$ bedeutet: p geht in k auf.) Die Funktion $L_1(s)$ läßt sich somit direkt auf $\zeta(s)$ zurückführen; sie besitzt wie diese in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung und ist sonst überall im Endlichen regulär. Für $\nu > 1$ folgt dagegen aus c), daß (68) für $\sigma > 0$ konvergiert und sogar für jeden Wert von s durch die *Cesàro*sche Methode summabel ist (vgl. Nr. **13**); für jedes vom Hauptcharakter verschiedene χ ist also $L(s)$ eine ganze transzendente Funktion.[207])

Dirichlet untersuchte die L-Funktionen nur für reelle s; verschiedene andere Verfasser[208]) haben dann auch komplexe s berücksichtigt und

---

unter einer nur von k abhängenden Schranke liegt. In der Tat gilt sogar $\left|\sum_1^N \chi(n)\right| < c\sqrt{k}\log k$, wo c eine absolute Konstante bedeutet. Vgl. *G. Pólya,* Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, Göttinger Nachr. 1918, p. 21—29; *J. Schur,* Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn G. Pólya, Gött. Nachr. 1918, p. 30—36; *E. Landau,* Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen, Gött. Nachr. 1918, p. 79—97.

206) Eine ausführliche Darstellung der Theorie gibt *E. Landau,* Handbuch, § 95—140.

207) Dies folgt auch aus der Identität

$$L(s) = \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+nk)^s} = k^{-s} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m)\, \zeta\left(\frac{m}{k}, s\right)$$

und den in Nr. **21** erwähnten Untersuchungen über $\zeta(w, s)$.

208) Vgl. *C. J. Malmstén,* Specimen analyticum etc., Diss., Upsala 1842 und De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis, Crelles J. 38 (1849), p. 1—39; *R. Lipschitz,* a. a. O. 147); *H. Kinkelin,* Allgemeine Theorie der har-

die L-Funktionen auf die verallgemeinerten Zetafunktionen von Nr. **21** zurückgeführt. Aus diesen Untersuchungen geht vor allem hervor, daß jede L-Funktion eine Funktionalgleichung besitzt, die derjenigen von $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **14**) analog gebaut ist. Wenn $\chi(n)$ einem sog. eigentlichen Charakter[209]) entspricht, so gilt in der Tat

$$(71)\qquad L(s) = \Theta \frac{\sqrt{k}}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^s \sin\frac{\pi(s+\alpha)}{2}\,\Gamma(1-s)\,\bar{L}(1-s),$$

wo $\bar{L}(s)$ mit dem konjugiert komplexen Charakter $\bar{\chi}(n)$ gebildet ist, Θ eine Konstante vom absoluten Betrage 1 und $\alpha = 0$ oder 1 ist.[210]) Dies wird z. B. dadurch bewiesen, daß $L(s)$ durch die Funktion $\sum \chi(n) e^{-n^2 z}$ (für $\alpha = 0$) oder durch $\sum \chi(n) n e^{-n^2 z}$ für ($\alpha = 1$) analog wie bei $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **14**) ausgedrückt wird[211]), wonach die Funktionalgleichung aus der Transformationstheorie der Thetafunktionen folgt. — Gehört $L(s)$ dagegen zu einem uneigentlichen Charakter, so lassen sich immer ein echter Teiler k' von k und ein eigentlicher Charakter $\chi'(n)$ modulo k' derart angeben, daß für $\sigma > 1$

$$(72)\qquad L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi'(n)}{n^s} \cdot \prod_{p \mid k}\left(1 - \frac{\chi'(p)}{p^s}\right)$$

gilt.

In diesem Falle unterscheidet sich $L(s)$ also nur um einen trivialen Faktor von einer zu einem eigentlichen Charakter gehörigen L-Funktion (modulo k'); (70) stellt offenbar einen Spezialfall hiervon dar.

Jetzt können die Eigenschaften von $L(s)$ genau wie bei $\zeta(s)$ abgeleitet werden. In der Halbebene $\sigma > 1$ ist $L(s) \neq 0$, für $\sigma < 0$ gibt es nur die vom Faktor $\sin\frac{\pi(s+\alpha)}{2}$ in (71) herrührenden „tri-

monischen Reihen, mit Anwendung auf die Zahlentheorie, Progr. d. Gewerbeschule, Basel 1862; *A. Piltz,* a. a. O. 180); *A. Hurwitz,* Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen auftreten; *M. Lerch,* a. a. O. 148). Bei *Hadamard,* a. a. O. 162) und *de la Vallée Poussin,* a. a. O. 204), werden die früheren Resultate zusammengestellt und die Hilfsmittel der modernen Funktionentheorie zum erstenmal auf die L-Funktionen angewandt.

209) Ein Charakter $\chi(n)$ modulo k heißt *uneigentlich,* wenn es einen echten Teiler k' von k und einen Charakter $\chi'(n)$ modulo k' gibt, so daß für jedes n entweder $\chi(n) = 0$ oder $\chi(n) = \chi'(n)$ gilt. Sonst heißt $\chi(n)$ *eigentlich.* Der Hauptcharakter ist für $k > 1$ immer uneigentlich. Vgl. z. B. *Landau,* Handbuch, Bd. 1, p. 478.

210) Nämlich $\alpha = 0$ im Falle $\chi(-1) = 1$, $\alpha = 1$ im Falle $\chi(-1) = -1$.

211) *de la Vallée Poussin,* a. a. O. 204). Seine Darstellung wurde von *Landau,* a. a. O. 206) vereinfacht.

vialen" Nullstellen, auch der Punkt $s = 0$ kann unter Umständen Nullstelle sein. Im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ liegen unendlich viele von Null verschiedene Nullstellen $\varrho = \beta + \gamma i$, und die Anzahl $N(T)$ der ϱ, deren Ordinaten dem Intervall $0 < \gamma \leqq T$ angehören, ist gleich

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - cT + O(\log T),$$

wo c von k und χ abhängt.[212]) (Vgl. Nr. **16**.) Für jeden Nicht-Hauptcharakter gibt es eine Produktentwicklung[211])

$$(73) \qquad L(s) = a s^{\mu} e^{bs} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

wo μ ganz und $\geqq 0$ ist; beim Hauptcharakter muß auf der linken Seite das Produkt $(s-1)L(s)$ stehen (vgl. Nr. **15**).

Der für die Primzahltheorie besonders wichtige Satz, daß der Punkt $s = 1$ bei keiner L-Funktion eine Nullstelle ist, wurde schon von *Dirichlet*[203]) gefunden. Der Beweis ist ganz verschieden, je nachdem der Charakter ein *reeller* (d. h. ein für alle n reeller) oder ein *komplexer* (d. h. ein für wenigstens ein n nicht-reeller) ist. Im letzteren Falle wäre gleichzeitig mit $L(1)$ auch $\bar{L}(1)$ gleich Null, und die Funktionen $L(s)$ und $\bar{L}(s)$ wären nicht identisch. Dies wäre aber nicht mit der Identität

$$\prod_{\nu=1}^{\varphi(k)} L_\nu(s) = e^{\varphi(k) \sum_{p^m \equiv 1 \pmod{k}} \frac{1}{m p^{ms}}}, \qquad (\sigma > 1)$$

verträglich, da die linke Seite für $s = 1$ eine Nullstelle hätte, während die rechte Seite für reelle $s > 1$ immer $\geqq 1$ ist. Für jeden komplexen Charakter gilt sogar[213])

$$\frac{1}{|L(1)|} < M \log k \, (\log \log k)^{\frac{3}{8}}$$

---

212) *E. Landau*, a. a. O. 107).

213) Vgl. *H. Gronwall*, Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes, Palermo Rend. 35 (1913), p. 145—159; *E. Landau*, a) Über das Nichtverschwinden der Dirichletschen Reihen, welche komplexen Charakteren entsprechen, Math. Ann. 70 (1911), p. 69—78; b) Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Gött. Nachr. 1918, p. 285—295; c) Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 152—162. Bei diesen Abschätzungen von $\frac{1}{L(1)}$ als Funktion von k zeigt sich eine eigenartige Analogie mit der Abschätzung von $\zeta(1 + ti)$ als Funktion von t (vgl. Nr. **18**). Für die reellen Charaktere wird das entsprechende Ergebnis (mit $\frac{1}{2}$ statt $\frac{3}{8}$) nur unter einer gewissen unbewiesenen Voraussetzung erhalten (vgl. Nr. **40**).

mit absolut konstantem M. — Bei den *reellen* Charakteren war der Beweis viel schwieriger; es war eben die Hauptleistung von *Dirichlet*[203]), $L(1)$ als Produkt von einer positiven Konstanten und einer gewissen Klassenzahl quadratischer Formen darzustellen (vgl. Nr. **40**); eo ipso war $L(1) \neq 0$. Vereinfachte Beweisanordnungen gaben *Mertens*[214]), *de la Vallée Poussin*[215]), *Teege*[216]) und *Landau*[217]), die den Beweis durch reihen- oder funktionentheoretische Überlegungen, ohne Benutzung der Theorie der quadratischen Formen, führten.[218])

Für jeden von $s = 1$ verschiedenen Punkt der Geraden $\sigma = 1$ läßt sich wie bei $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **14**) $L(s) \neq 0$ nachweisen.[219]) Auch die entsprechenden schärferen Sätze gelten hier, es gibt z. B. eine absolute Konstante $a > 0$ derart, daß im Gebiete $\sigma > 1 - \frac{a}{\log|t|}$, $|t| > t_0$ keine Nullstellen von $L(s)$ liegen (vgl. Nr. **19**).[220]) Das Gegenstück der *Riemann*schen Vermutung wurde für die L-Funktionen von *Piltz*[180]) ausgesprochen. Da man im allgemeinen nicht weiß, ob Nullstellen auf der Strecke $0 < s < 1$ der reellen Achse liegen, und

214) *F. Mertens,* Über Dirichletsche Reihen, Sitzungsber. Akad. Wien 104 Abt. 2a (1895), p. 1093—1153; Über das Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen mit reellen Gliedern, ebenda 104 Abt. 2a, p. 1158—1166; Über Multiplikation und Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen, Crelles J. 117 (1897), p. 169—184; Über Dirichlets Beweis usw. Sitzungsber. Akad. Wien 106 Abt. 2a (1897), p. 254—286; Eine asymptotische Aufgabe, ebenda 108, Abt. 2a (1899), p. 32—37.

215) *Ch. de la Vallée Poussin,* a. a. O. 204) und Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique 53 (1895—1896), No. 6.

216) *H. Teege,* Beweis, daß die unendliche Reihe $\sum' \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n}$ einen positiven von Null verschiedenen Wert hat, Mitt. math. Ges. Hamburg 4 (1901), p. 1—11.

217) *E. Landau,* a. a. O. 29) und Über das Nichtverschwinden einer Dirichletschen Reihe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1906, p. 314—320.

218) Vgl. auch eine Bemerkung von *Remak* bei *E. Landau,* Über imaginärquadratische Zahlkörper mit gleicher Klassenzahl, Gött. Nachr. 1918, p. 277—284.

219) Hiermit hängt zusammen, daß die Reihe $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ und das Produkt in (69) auch noch für $\sigma = 1$ konvergieren (beim Hauptcharakter jedoch nur für $t \neq 0$) und daß (69) auch hier richtig bleibt (vgl. Nr. **14**). Ob diese Ausdrücke in der Halbebene $\sigma < 1$ einen einzigen Konvergenzpunkt besitzen, ist noch nicht entschieden. Vgl. *E. Landau,* a) Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression, Sitzungsber. Akad. Wien 112, Abt. 2a (1903), p. 493—535; b) Über einen Satz von Tschebyschef, Math. Ann. 61 (1905), p. 527—550, wo eine Reihe früherer Arbeiten über den Gegenstand kritisiert werden; c) a. a. O. 178).

220) *E. Landau,* Handbuch, § 131, wo frühere Resultate desselben Verfassers verschärft werden.

da ferner nach (72) die imaginäre Achse unter Umständen unendlich viele Nullstellen enthalten kann, muß die Vermutung etwa so ausgesprochen werden: „für $\sigma > \frac{1}{2}$ ist $L(s) \neq 0$."[221]) Die Sätze von der Existenz unendlich vieler Nullstellen[222]) auf $\sigma = \frac{1}{2}$ und von der Häufung der Nullstellen in der Nähe dieser Geraden[223]) (vgl. Nr. **19**) gelten auch für die L-Funktionen.

Das Produkt zweier L-Reihen ist, sofern keine von ihnen einem Hauptcharakter entspricht, nach dem Satze von *Stieltjes* (vgl. Nr. **12**) für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergent. *Landau*[224]) beweist den folgenden Satz, der als Spezialfall eine Verschärfung hiervon enthält: Es seien $\chi_1(n)$ und $\chi_2(n)$ zwei beliebige[225]) Charaktere modulo k_1 bzw. k_2. Dann gibt es zwei Konstanten A und B, so daß die *Dirichlet*sche Reihe

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \sum \frac{\chi_1(n)}{n^s} \cdot \sum \frac{\chi_2(n)}{n^s} + A \sum \frac{\log n}{n^s} + B \sum \frac{1}{n^s}$$
$$= L_1(s)\, L_2(s) - A\zeta'(s) + B\zeta(s)$$

für $\sigma > \frac{1}{3}$ konvergiert. Hierbei ist $A = B = 0$, wenn weder χ_1 noch χ_2 Hauptcharakter ist, und $A = 0$, wenn nur einer von den beiden Hauptcharakter ist. Dieser Satz hat wichtige Anwendungen auf verschiedene zahlentheoretische Probleme (vgl. Nr. **34** und **35**).

30. Die Verteilung der Primzahlen einer arithmetischen Reihe. Nach (69) gilt für $\sigma > 1$

$$(74)\quad \begin{cases} \log L(s) = \sum\limits_{p,\, m} \dfrac{\chi(p^m)}{m\, p^{ms}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)\Lambda(n)}{\log n \cdot n^s} \\ -\dfrac{L'}{L}(s) = \sum\limits_{p,\, m} \dfrac{\chi(p^m) \log p}{p^{ms}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}. \end{cases}$$

Hieraus folgt nach den Eigenschaften b) und d) der Charaktere, wenn

221) Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Wahrheit dieser Vermutung gab neuerdings *H. Bohr* mit Hilfe des von ihm eingeführten Begriffes „Quasiperiodizität einer *Dirichlet*schen Reihe": Über eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen, Math. Ann. 85 (1922), p. 115—122. — *J. Großmann* hat die Vermutung durch numerische Untersuchungen gestützt: Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen, Diss., Göttingen 1913.

222) *E. Landau,* a. a. O. 135).

223) *H. Bohr* und *E. Landau,* a. a. O. 65).

224) *E. Landau,* Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Gött. Nachr. 1912, p. 687—771.

225) Hier soll also $\chi_1(n)$ nicht wie oben notwendig den Hauptcharakter bezeichnen.

l eine beliebige zu k teilerfremde ganze Zahl bedeutet,

$$(75)\quad \begin{cases} \sum\limits_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \dfrac{\Lambda(n)}{\log n \cdot n^s} = \dfrac{1}{\varphi(k)} \sum\limits_{\nu=1}^{\varphi(k)} \dfrac{1}{\chi_\nu(l)} \log L_\nu(s) \\ \sum\limits_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \dfrac{\Lambda(n)}{n^s} = -\dfrac{1}{\varphi(k)} \sum\limits_{\nu=1}^{\varphi(k)} \dfrac{1}{\chi_\nu(l)} \cdot \dfrac{L_\nu'}{L_\nu}(s). \end{cases}$$

In beiden Gleichungen (75) wird die rechte Seite bei Annäherung an $s = 1$ unendlich, da dieser Punkt für $L_1(s)$ ein Pol, für die übrigen $L_\nu(s)$ dagegen weder Pol noch Nullstelle ist. Daraus schloß *Dirichlet*[203]), daß in der arithmetischen Reihe $l, l + k, l + 2k, \ldots$ unendlich viele Primzahlen vorkommen; sonst würden ja in der Tat die linken Seiten von (75) für alle s endlich bleiben.[226])

Mit Hilfe der tieferen Eigenschaften der L-Funktionen konnten *Hadamard*[162]) und *de la Vallée Poussin*[204]) die dem Primzahlsatz entsprechenden Sätze

$$(76)\quad \begin{cases} \pi_{k,l}(x) = \sum\limits_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} 1 \sim \dfrac{1}{\varphi(k)} Li(x), \\ \psi_{k,l}(x) = \sum\limits_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n) \sim \dfrac{1}{\varphi(k)} x \end{cases}$$

beweisen. Das Hauptargument beim Beweise bildet der in der vorigen Nummer erwähnte Satz: $L_\nu(1 + ti) \neq 0$ für alle ν und alle reellen t. Von *Landau*[227]) wurden die Beweise vereinfacht und die Resultate verschärft, so daß das beste mit Sicherheit bekannte Resultat[228]) so lautet:

$$(77)\quad \begin{cases} \pi_{k,l}(x) = \dfrac{1}{\varphi(k)} Li(x) + O\left(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}\right) \\ \psi_{k,l}(x) = \dfrac{1}{\varphi(k)} x + O\left(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}\right) \end{cases}$$

mit absolut konstantem, d. h. von k und l unabhängigen, α. Die

226) In mehreren speziellen Fällen läßt sich der *Dirichlet*sche Satz elementar beweisen. Vgl. z. B. *L. E. Dickson*, History of the theory of numbers, Bd. 1, Washington 1919, p. 419.

227) *E. Landau*, Über die Primzahlen in einer arithmetischen Progression und die Primideale in einer Idealklasse, Sitzungsber. Akad. Wien 117, Abt. 2a (1908), p. 1095—1107; a. a. O. 219a); a. a. O. 107); Handbuch, § 119—121, § 131—132.

228) Wäre die verallgemeinerte *Riemann*sche Vermutung für die L-Funktionen bewiesen, so würden natürlich für die Primzahlen einer arithmetischen Reihe zu (57) und (58) analoge Beziehungen gelten. Vgl. *E. Landau*, Handbuch, § 239 und a. a. O. 178).

Hauptglieder rühren natürlich von den Singularitäten von $\log L_1(s)$ bzw. $\frac{L_1'}{L_1}(s)$ in $s = 1$ her. Aus (76) folgt speziell, wenn l_1 und l_2 beide zu k teilerfremd sind,

$$\pi_{k,l_1}(x) \sim \pi_{k,l_2}(x),$$

d. h. die zweite in der vorigen Nummer genannte *Legendre*sche Behauptung. — Die *Riemann-v. Mangoldt*sche Primzahlformel (vgl. Nr. 28) läßt sich auch für die Primzahlen einer arithmetischen Reihe verallgemeinern.[229]) Zunächst gilt für einen beliebigen Charakter $\chi_\nu(n)$ (vgl. (73))[230])

$$\sum_{n \leqq x} \chi_\nu(n)\,\Lambda(n) - \frac{1}{2}\chi_\nu(x)\,\Lambda(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s}\cdot\frac{L_\nu'}{L_\nu}(s)\,ds \tag{78}$$

$$= \varepsilon_\nu x - \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha-2n}}{\alpha-2n} + a_0 + a_1 \log x,$$

wo a_0 und a_1 von x unabhängig sind. ε_ν bedeutet Eins für $\nu = 1$, sonst Null. Aus (75) kann man jetzt, nach dem Eindeutigkeitssatz der *Dirichlet*schen Reihen, (vgl. Nr. 3) eine explizite Formel für die Funktion

$$\bar{\psi}_{k,l}(x) = \tfrac{1}{2}(\psi_{k,l}(x+0) + \psi_{k,l}(x-0))$$

erhalten.

Die bisher erwähnten Resultate laufen alle darauf hinaus, daß die Primzahlen auf die $\varphi(k)$ zu k teilerfremden Restklassen *gleichmäßig* verteilt sind. Schon *Tschebyschef*[231]) behauptete — freilich nur für den Fall $k = 4$ — dies könne nur bis zu einer bestimmten Grenze gelten, indem die Reihe $4n + 3$ „viel mehr" Primzahlen als die Reihe $4n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ enthalte. Er sprach (ohne Beweis) den Satz aus: es gibt eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ mit $x_\nu \to \infty$, derart, daß für wachsendes ν

$$\pi_{4,3}(x_\nu) - \pi_{4,1}(x_\nu) \sim \frac{\sqrt{x_\nu}}{\log x_\nu} \tag{79}$$

gilt. Dies wurde zuerst von *Phragmén*[181]) und dann einfacher von

229) Vgl. *A. Piltz,* a. a. O. 180) und *G. Torelli,* a. a. O. 159), Nuove formole per calcolare la totalità dei numeri primi etc., Rend. Accad. sc. fis. mat. Napoli (3) 10 (1904), p. 350—362 und (3) 11 (1905), p. 101—109. Vollständig ausgeführt wurde der Beweis erst von *E. Landau*, a. a. O. 194) und Handbuch, § 133—138.

230) Für nicht ganze x bedeuten $\chi(x)$ und $\Lambda(x)$ Null.

231) *P. Tschebyschef,* Lettre à M. Fuss, Bull. cl. phys.-math. Acad. St. Petersburg 11 (1853), p. 208 und Œuvres 1, p. 697—698; Sur une transformation de séries numériques, Nouv. corr. math. 4 (1878), p. 305—308 und Œuvres 2, p. 705—707.

Landau[183]) bewiesen; aus den Untersuchungen von *Littlewood*[184]) folgt aber, daß die obige Differenz, bei zweckmäßiger Wahl von K, für beliebig große Werte von x sowohl $> K\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x$ als auch $< -K\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x$ wird. Der Zusammenhang wird gewissermaßen durch die aus (78) folgenden Gleichungen

$$\vartheta_{4,1}(x) = \frac{1}{2}x - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}}{\varrho} + \sum_{\varrho'}\frac{x^{\varrho'}}{\varrho'}\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\vartheta_{4,3}(x) = \frac{1}{2}x \qquad - \frac{1}{2}\left(\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \sum_{\varrho'}\frac{x^{\varrho'}}{\varrho'}\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$

aufgeklärt. (Es ist $\vartheta_{k,l} = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l \pmod{k}}} \log p$ gesetzt; ϱ durchläuft die komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ und ϱ' diejenigen von

$$L(s) = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \sum_{1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

wo $\chi(n)$ den Nicht-Hauptcharakter modulo 4 bezeichnet.) Die oszillierenden Glieder sind hier zwar von höherer Größenordnung als $x^{\frac{1}{2}}$, in der ersten Gleichung tritt aber ein Glied $-x^{\frac{1}{2}}$ *von konstantem Vorzeichen* auf, was wiederum daraus folgt, daß alle *Primzahlquadrate* ($2^2 = 4$ ausgenommen) von der Form $4n + 1$ sind.

Tschebyschef[231]) behauptete auch: „wenn c gegen Null abnimmt, so gilt

(80) $$e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - \cdots = -\sum_{p}\chi(p)e^{-pc} \to \infty.\text{“}$$

Von *Hardy-Littlewood*[232]) und *Landau*[233]) wurde gezeigt, daß dieser Satz mit dem folgenden (unbewiesenen) Analogon der *Riemann*schen Vermutung äquivalent ist: „Die zum Nicht-Hauptcharakter modulo 4 gehörige L-Funktion ist für $\sigma > \frac{1}{2}$ von Null verschieden.“

Die allgemeine *Tschebyschef*sche Aussage: „es gibt viel mehr Primzahlen von der Form $4n + 3$ als von der Form $4n + 1$“ kann also jedenfalls nur in ziemlich beschränktem Maße wahr sein[234]) und

232) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* a. a. O. 31 b). (Aus $L(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ folgt (80)).

233) *E. Landau,* a. a. O. 178). (Aus (80) folgt $L(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$) und Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, zweite Abhandl., Math. Ztschr. 1 (1918), p. 213—219.

234) *E. Landau,* a. a. O. 178), p. 6, bemerkt, daß aus der Behauptung (80) von *Tschebyschef,* $\pi_{4,3}(x) - \pi_{4,1}(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\right)$ folgt. Die Differenz $\pi_{4,3} - \pi_{4,1}$

ist z. B. in der Fassung (80), die wenigstens wahr sein *könnte*, noch nicht bewiesen.

Die Resultate von *Phragmén* und *Landau* betreffend die *Tschebyschef*sche Behauptung (79) wurden von *Landau*[235]) für beliebige Moduln k (an der Stelle von 4) verallgemeinert.

31. Andere Primzahlprobleme. *Summen über Primzahlen.* Daß unter den n ersten ganzen Zahlen annäherungsweise $Li(n)$ Primzahlen vorkommen, kann wegen

$$Li(n) = \sum_{2}^{n} \frac{1}{\log n} + O(1)$$

in ungenauer Weise so ausgedrückt werden: „die Wahrscheinlichkeit, daß die beliebig gewählte Zahl n Primzahl ist, ist gleich $\frac{1}{\log n}$." Man wird hiernach vermuten, daß die beiden Reihen

$$(81) \qquad \sum_{p} F(p) \quad \text{und} \quad \sum_{n} \frac{F(n)}{\log n}$$

sich mehr oder weniger ähnlich verhalten müssen. In der Tat besagt ja der Primzahlsatz

$$\sum_{p \leqq x} 1 \sim \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n}, \qquad (F(t) = 1)$$

bzw.

$$\sum_{p \leqq x} \log p \sim \sum_{n=2}^{x} 1, \qquad (F(t) = \log t).$$

Nach *Tschebyschef*[236]) sind die Reihen (81) gleichzeitig konvergent oder divergent, sobald $\frac{F(n)}{\log n}$ für hinreichend große n positiv und nie zunehmend ist. *Mertens*[237]) beweist

$$(82) \quad \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{n} + O(1) = \log x + O(1) \quad \text{und}$$

$$(83) \quad \sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} = \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{n \log n} + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right) = \log\log x + B + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

wäre also nach (80) absolut genommen kleiner, als bisher bekannt war — nämlich $O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$ — eine Folgerung, die ja in der entgegengesetzten Richtung von *Tschebyschefs* Interpretation seiner Behauptung liegt.

235) *E. Landau*, Handbuch, § 200.

236) *P. Tschebyschef*, a. a. O. 155 b).

237) *F. Mertens*, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Crelles J. 78 (1874), p. 46—62.

mit konstantem A und B. Von *de la Vallée Poussin*[173]) wurde (82) zu

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x - C - \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)} + O\left(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

verschärft, wo C die *Euler*sche Konstante bezeichnet. Die Abschätzung des Restgliedes in (83) kann in ähnlicher Weise verschärft werden. Hieraus folgt speziell

$$\lim_{x \to \infty} \left(\log x - \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p-1}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log x\right) = C$$

und (vgl. (59))
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n} = -2C.$$

Landau[238]) gibt verschiedene Sätze über Summen der Gestalt $\sum\limits_{p \leqq x} F(p)$ und $\sum\limits_{p \leqq x} F(p, x)$ und bespricht insbesondere die Möglichkeit, von einer Formel elementar zu den andern zu gelangen, ohne jedes Mal die Theorie der Zetafunktion zu benutzen (vgl. hierzu Nr. **33**). *Mertens*[237]) hat (82) und (83) auch für die Primzahlen einer arithmetischen Reihe verallgemeinert.

Die Konvergenz von $\sum p^{-s}$ und $\sum \chi(p) p^{-s}$ auf der Geraden $\sigma = 1$ wurde schon oben besprochen (vgl. Nr. **14** und Nr. **29**, Fußnote 219). Diese Reihen stellen für $\sigma > 1$ die Funktionen dar

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(ns) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log L(ns, \chi^n),$$

die über $\sigma = 1$ hinaus bis zu $\sigma = 0$, aber nicht weiter, analytisch fortgesetzt werden können.[239]) — Die Funktion

$$F(z) = \sum_{p} \frac{z^p}{p}$$

wird bei Annäherung an einen „rationalen" Punkt $z = e^{\frac{2m\pi i}{n}}$ des Einheitskreises unendlich groß, sofern n eine quadratfreie Zahl ist.

---

238) *E. Landau*, Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers, Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 25—38; Handbuch § 55—56 (vgl. auch p. 889).

239) *E. Landau* und *A. Walfisz*, Über die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierter Funktionen, Palermo Rend. 44 (1920), p. 82—86.

Vgl. auch *J. C. Kluyver*, Benaderingsformules betreffende de priemgetallen beneden eene gegeven grens, Akad. Wetensk. Amsterdam, Verslagen 8 (1900), p. 672—682 und *E. Landau*, a. a. O. 78).

Fatou[240]) schließt hieraus, daß $F(z)$ und

$$zF'(z) = \sum_p z^p$$

nicht über den Einheitskreis fortgesetzt werden können. Nach einer Bemerkung von *Landau*[241]) folgt dies auch direkt aus neueren Sätzen über die *Taylor*sche Reihe.

Die n^{te} Primzahl und die Differenz $p_{n+1} - p_n$. Wenn p_n die n^{te} Primzahl bezeichnet, so folgt aus der Gleichung

$$n = \pi(p_n) = Li(p_n) + O\left(p_n e^{-\alpha\sqrt{\log p_n}}\right)$$

durch Inversion

$$p_n = Li^{-1}(n) + O\left(n \log^2 n\, e^{-\alpha\sqrt{\log n}}\right),$$

wo $Li^{-1}(x)$ die zu $Li(x)$ inverse Funktion bedeutet. Insbesondere ist[242]) also

$$p_n \sim n \log n.$$

Tschebyschef[236]) bewies den früher von *Bertrand*[243]) vermuteten und empirisch bestätigten Satz, daß von einer gewissen Stelle an zwischen x und $2x$ wenigstens eine Primzahl liegt, d. h. daß für große n immer $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 2$ ist. Der Primzahlsatz gibt sogar[244])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$$

oder

$$p_{n+1} - p_n = o(p_n).$$

Aus der genauen Restabschätzung (53) zum Primzahlsatz folgt[245])

$$p_{n+1} - p_n = O\left(p_n e^{-\alpha\sqrt{\log p_n}}\right),$$

240) *P. Fatou*, Sur les séries entières à coefficients entiers, Paris C. R. 138 (1904), p. 342—344.

241) *E. Landau*, a. a. O. 78). Dieselbe Bemerkung hat auch *F. Carlson* gemacht: Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 1—13.

242) Mit der asymptotischen Darstellung von p_n beschäftigten sich u. a. *M. Perwuschin*, Formule pour la détermination approximative des nombres premiers etc., Verhandl. Math.-Kongr. Zürich 1897, Leipzig 1898, p. 166—167; *E. Cesàro*, Sur une formule empirique de M. Pervouchine, Paris C. R. 119 (1894), p. 848—849; *M. Cipolla*, La determinazione assintotica dell' n^{imo} numero primo, Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli (3) 8 (1902), p. 132—166. Vgl. auch *E. Landau*, Handbuch, § 57.

243) *J. Bertrand*, Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu' elle renferme, J. Éc. Polyt. 18 (1845), p. 123—140.

244) Ein direkter Beweis dieser Tatsache, der nicht zugleich den Primzahlsatz liefert, scheint nicht bekannt zu sein. Vgl. *E. Landau*, Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion, Proc. Fifth. Intern. Congr. Math., Cambridge 1913, 1 p. 93—108.

245) Vgl. *Ch. de la Vallée Poussin*, a. a. O. 173), p. 55.

was die beste mit Sicherheit bekannte Abschätzung darstellt. Wenn die *Riemann*sche Vermutung vorausgesetzt wird, folgt aus (57)

$$p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n} \log^2 p_n),$$

wo nach *Cramér*[246]) $\log^2 p_n$ durch $\log p_n$ ersetzt werden kann. Es gibt demnach, wenn die *Riemann*sche Vermutung richtig ist, eine Zahl c, so daß für $n = 2, 3, \ldots$ zwischen n^2 und $(n + c \log n)^2$ immer wenigstens eine Primzahl liegt. *Oppermann*[247]) behauptete, daß dasselbe von dem Intervall $(n^2, (n+1)^2)$ gilt; das ist aber bisher nicht entschieden. *Piltz*[248]) hat sogar die Behauptung

$$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$, ausgesprochen; in dieser Hinsicht ist nur bekannt[249]), daß die Anzahl der $p_n \leqq x$, die der Ungleichung

$$p_{n+1} - p_n > p_n^k, \qquad (0 < k \leqq \tfrac{1}{2})$$

genügen, unter Voraussetzung der *Riemann*schen Vermutung von der Form $O\left(x^{1-\frac{3}{2}k+\varepsilon}\right)$ ist. — Im Mittel muß die Differenz $\delta_n = p_{n+1} - p_n$ von der Ordnung $\log p_n$ sein, denn es gilt

$$\frac{1}{n}(\delta_1 + \delta_2 + \cdots \delta_n) = \frac{1}{n}(p_{n+1} - 2) \sim \log p_n.$$

Nach unten ist keine bessere Abschätzung als die triviale $\delta_n \geqq 2$ für $n > 1$ bekannt; verschiedene Verfasser[250]) vermuten, daß in der Tat

$$p_{n+1} - p_n = 2 \tag{84}$$

246) *H. Cramér,* a. a. O. 186).

247) *L. Oppermann,* Om vor Kundskab om Primtallenes Mœngde mellem givne Grœnser, Overs. Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1882, p. 169—179.

248) *A. Piltz,* a. a. O. 180), p. 46.

249) *H. Cramér,* On the distribution of primes, Proc. Cambr. Phil. Soc. 20 (1921), p. 272—280.

250) Vgl. *J. J. Sylvester,* On the partition of an even number into two primes, Proc. London math. Soc. (1) 4 (1871), p. 4—6 und Collected Math. Pap. 2, p. 709—711; On the Goldbach-Euler Theorem regarding prime numbers, Nature 55 (1896—1897), p. 196—197, 269 und Pap. 4. p. 734—737; *P. Stäckel,* Über Goldbachs empirisches Theorem etc., Gött. Nachr. 1896, p. 292—299; Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen, Sitzungsber. Akad. Heidelberg 1916; Die Lückenzahlen r^{ter} Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen. I—III, Sitzungsber. Akad. Heidelberg 1917—1918; *J. Merlin,* Un travail sur les nombres premiers, Bull. sc. math. (2) 39 (1915), p. 121—136; *V. Brun,* Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Arch. for. Math. og Naturv., Kristiania 34, Nr. 8 (1915); Sur les nombres premiers de la forme $ap + b$, ebenda 34, Nr. 14 (1917), *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* Note on Messrs Shah and Wilson's paper entitled: On an empirical formula connected with Goldbach's

für unendlich viele n gilt, und sogar daß

$$h(x) \sim a \frac{x}{\log^2 x}$$

mit konstantem a ist, wenn $h(x)$ die Anzahl der $p_n \leqq x$ bedeutet, die (84) genügen. *Brun* [251]) beweist

$$h(x) = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Der Satz von Goldbach und verwandte Fragen. Goldbach [252]) sprach im Jahre 1742 den bis jetzt unbewiesenen Satz aus: „Jede gerade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.“ Verschiedene Verfasser [250]) vermuteten, daß die Anzahl $G(n)$ solcher Darstellungen einer geraden Zahl n sogar mit n ins Unendliche wächst, und zwar so, daß für alle geraden n

$$G(n) > b \frac{n}{\log^2 n}$$

mit konstantem b gilt. [253]) *Hardy* und *Littlewood* [250]) verallgemeinern das Problem und greifen es zuerst mit analytischen Mitteln an, indem sie in der Potenzreihe

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} z^n = \left(\sum_p \log p\, z^p\right)^k,$$

(die über den Einheitskreis nicht fortsetzbar ist) ein beliebiges $a_n^{(k)}$ durch das Integral

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r < 1} \frac{f_k(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

ausdrücken, um dann das Verhalten von $a_n^{(k)}$ für große n zu untersuchen. (Auf diese Methode kommen wir in Nr. **38** zurück.) Die Be-

---

theorem, Proc. Cambr. Phil. Soc. 19 (1919), p. 245—254; Some problems of Partitio Numerorum; III: On the expression of a number as a sum of primes, Acta math. 44 (1922), p. 1—70.

251) *V. Brun,* Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, Vidensk. selsk. Skrifter, Mat-naturv. Kl. Kristiania 1920, Nr. 3 und Paris C. R. 168 (1919), p. 544—546. Vgl. auch: La série $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$ où les dénominateurs sont „nombres premiers jumeaux“ est convergente ou finie, Bull. sc. Math. (2) 43 (1919), p. 1—9.

252) Vgl. Briefwechsel zwischen *Euler* und *Goldbach* bei *P. H. Fuss,* Correspondance math. phys. 1, St. Petersbourg 1843, p. 127, 135. Vgl. in bezug auf die ältere Geschichte des Satzes *L. E. Dickson,* a. a. O. 226), p. 421—425. Über die numerische Prüfung des Satzes vgl. z. B. *P. Stäckel,* a. a. O. 250). — Für $n = 2$ kann der Satz offenbar nur richtig sein, wenn 1 als Primzahl mitgezählt wird.

253) *E. Landau,* Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz, Gött. Nachr. 1900, p. 177—186, zeigt, daß $G(2) + \cdots G(n) \sim \frac{n^2}{2 \log^2 n}$ ist. Hieraus folgt, daß eine früher von *Stäckel,* a. a. O. 250), vorgeschlagene Formel falsch ist.

hauptung von *Goldbach*, $a_n^{(2)} > 0$ für alle geraden $n > 2$, läßt sich zwar nicht beweisen, es wird aber die Formel[254])

$$G(n) \sim c \frac{n}{\log^2 n} \prod_q \frac{q-1}{q-2}, \qquad (n \text{ gerade})$$

als wahrscheinlich hingestellt. Hierin ist c konstant, und q durchläuft die ungeraden Primteiler von n. Wenn die (unbewiesene) Annahme gemacht wird, daß *die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von* $\zeta(s)$ *und von allen L-Funktionen kleiner als* $\frac{3}{4}$ *ist*, so läßt sich der folgende Satz beweisen: „Jede hinreichend große *ungerade* Zahl kann als Summe von *drei* Primzahlen dargestellt werden." — *Brun*[251]) beweist durch Anwendung einer Modifikation des sog. Siebverfahrens von *Eratosthenes* den Satz: „Jede hinreichend große gerade Zahl kann als Summe von zwei ganzen Zahlen dargestellt werden, die höchstens je neun Primfaktoren enthalten." Die beiden letztgenannten Sätze sind offenbar direkte Folgerungen aus dem *Goldbach*schen.

Das Problem, die Bedingungen für die Lösbarkeit einer unbestimmten Gleichung $ax + by + c = 0$ mittelst zweier Primzahlen x und y zu finden, ist eine Verallgemeinerung des *Goldbach*schen; es wurde auch von den oben erwähnten Verfassern behandelt. Mit der *Hardy-Littlewood*schen Methode lassen sich endlich auch verschiedene Probleme der Art: „Gibt es unendlich viele Primzahlen von der Form $n^2 + 1$, von der Form $n'^3 + n''^3 + n'''^3$," usw., angreifen. Auch hier läßt sich nichts beweisen, die Methode führt aber auf gewisse asymptotische Formeln, die in mehreren Fällen mit gutem Erfolg numerisch geprüft wurden.

IV. Weitere zahlentheoretische Funktionen.[255])

32. Die Funktionen $\mu(n)$, $\lambda(n)$ und $\varphi(n)$. Für $\sigma > 1$ gilt (vgl. Nr. 22)

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}. \tag{85}$$

Die für $\sigma > 1$ unbedingt konvergente Reihe $\sum \mu(n) n^{-s}$ stellt also eine für $\sigma \geqq 1$ reguläre Funktion dar; daß die Reihe auch noch für

254) Mehr oder weniger ähnliche Formeln waren von den oben erwähnten Verfassern schon früher vorgeschlagen worden. Die *Hardy-Littlewood*sche Formel wurde von *N. M. Shah* und *B. M. Wilson* numerisch geprüft: On an empirical formula connected with Goldbach's theorem, Proc. Cambr. Phil. Soc. 19 (1919), p. 238—244.

255) Betreffs älterer Untersuchungen zu diesem Kapitel sei auf I C 3 verwiesen.

$s = 1$ konvergiert, hat schon *Euler*[256]) vermutet. Dies wurde von *v. Mangoldt*[257]) unter Benutzung der *Hadamard*schen Sätze über die Produktzerlegung von $(s-1)\zeta(s)$ (vgl. Nr. 15) bewiesen; nach (85) ist dann

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} = 0, \quad \text{d. h.} \quad g(x) = \sum_1^x \frac{\mu(n)}{n} = o(1).$$

Landau[258]) zeigt, daß dieses Resultat auch elementar aus dem Primzahlsatz abgeleitet werden kann (vgl. Nr. 33). Eine unmittelbare Folgerung ist

$$M(x) = \sum_1^x \mu(n) = o(x),$$

und man kann nun nach dem Konvergenzsatz von *M. Riesz* (vgl. Nr. 5) schließen, daß (85) auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$ gültig bleibt.[259]) *Landau*[260]) hat sogar die Konvergenz von

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)(\log n)^q}{n^{1+ti}}$$

für beliebige reelle q und t festgestellt. Er[261]) gab — mit seiner bei dem Primzahlsatz angewandten Methode — die Abschätzungen

$$(86) \qquad \begin{cases} M(x) = O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \\ g(x) = O\left(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \\ \sum_1^x \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1 + O\left(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) \end{cases}$$

256) *L. Euler,* Introductio in analysin infinitorum, 1, Lausanne 1748, p. 229.

257) *H. v. Mangoldt,* Beweis der Gleichung $\sum_1^\infty \frac{\mu(k)}{k} = 0$, Sitzungsber. Akad. Berlin 1897, p. 835—852.

258) *E. Landau,* Neuer Beweis der Gleichung $\sum_1^\infty \frac{\mu(k)}{k} = 0$, Diss. Berlin 1899.

259) Vgl. *Landau,* a. a. O. 21). Das war natürlich nicht der erste Beweis dieses Satzes.

260) *E. Landau,* Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$, Sitzungsber. Akad. Wien 112, Abt. 2a (1903), p. 537—570. Die Konvergenz von $\sum \frac{\mu(n)\log n}{n}$ wurde schon von *A. F. Möbius* vermutet: Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen, Crelles J. 9 (1832), p. 105—123 und Werke 4 (1887), p. 589—612.

261) *E. Landau,* a. a. O. 29) und Handbuch, § 163—164. *Ch. de la Vallée Poussin,* a. a. O. 173), hatte eine unschärfere Abschätzung gegeben.

und verallgemeinerte[262]) alle diese Resultate für den Fall, daß n nur die Zahlen einer arithmetischen Reihe durchläuft.

Wie bei dem Primzahlsatz, so ist bei den Gleichungen (86) die Frage nach der möglichen Verschärfung der Abschätzungen eng mit der *Riemann*schen Vermutung verbunden. Von *Stieltjes*[263]) und *Mertens*[264]) wurde

$$M(x) = O(\sqrt{x}) \tag{87}$$

vermutet; *Stieltjes* behauptete in der Tat auf diesem Wege die *Riemann*sche Vermutung bewiesen zu haben, denn aus (87) würde (vgl. Nr. 2) die Konvergenz von $\sum_1^\infty \mu(n) n^{-s}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, und damit die *Riemann*sche Vermutung, folgen. — Daß auch umgekehrt aus der *Riemann*schen Vermutung die Konvergenz von $\sum_1^\infty \mu(n) n^{-s}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ folgt, wurde zuerst von *Littlewood*[138]) im Laufe seiner in Nr. **20** besprochenen Untersuchungen über die Zetafunktion bewiesen. Demnach ist die *Riemann*sche Vermutung mit der Behauptung

$$M(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0 \tag{88}$$

vollständig äquivalent.[265]) Die weitere Vermutung von *Stieltjes*[263]) daß $\sum_1^\infty \mu(n) n^{-s}$ auch noch für $s = \frac{1}{2}$ konvergiert, ist aber nach *Landau*[178]) sicher nicht richtig. A fortiori kann also (88) für kein negatives ε gelten.

Aus (85) folgt $\sum_1^\infty n^{-s} \cdot \sum_1^\infty \mu(n) n^{-s} = 1$ und hieraus für jedes ganze $n > 1$

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0,$$

262) Vgl. *J. C. Kluyver*, Reeksen, afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$, Akad. Wetensk. Amsterdam, Verslagen 12 (1904), p. 432—439, und *E. Landau*, Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn Kluyver etc., ebenda 13 (1905), p. 71—83, Handbuch, § 169—175.

263) *T. J. Stieltjes*, a. a. O. 160), Lettre 79 und Sur une fonction uniforme, Paris C. R. 101 (1885), p. 153—154.

264) *F. Mertens*, Über eine zahlentheoretische Funktion, Sitzungsber. Akad. Wien 106, Abt. 2a (1897), p. 761—830. Über die numerische Prüfung dieser Vermutung vgl. etwa *R. D. v. Sterneck*, Sitzungsber. Akad. Wien 110, Abt. 2a (1901), p. 1053—1102.

265) Aus (87) würde dagegen mehr als die *Riemann*sche Vermutung folgen, z. B. daß alle Wurzeln von $\zeta(s)$ einfach sind. Vgl. auch *H. Cramér* und *E. Landau*, Über die Zetafunktion auf der Mittellinie des kritischen Streifens, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 15 (1921), Nr. 28.

sowie für jedes $x \geqq 1$

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] = 1.$$

Auf diesen Eigenschaften von $\mu(n)$ beruhen die sog. zahlentheoretischen Umkehrungsformeln. Es läßt sich z. B. die Gleichung (67), Nr. 28, leicht aus ihnen ableiten.

Die Funktion $\lambda(n)$ ist durch

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad (\sigma > 1)$$

definiert; es folgt hieraus

$$\sum_{1}^{x} \lambda(n) = \sum_{1}^{\sqrt{x}} M\left(\frac{x}{n^2}\right).$$

und mit Hilfe dieser Identität lassen sich alle obigen Ergebnisse für $\lambda(n)$ verallgemeinern.[266]) Insbesondere zeigt es sich, daß es unter den N ersten ganzen Zahlen asymptotisch ebenso viele gibt, die aus einer geraden, als solche, die aus einer ungeraden Anzahl von Primfaktoren bestehen.[267])

Für die *Euler*sche Funktion $\varphi(n)$ gilt offenbar immer $\varphi(n) \leqq n - 1$, und sobald n eine Primzahl ist, muß hier das Gleichheitszeichen benutzt werden. Andererseits beweist *Landau*[268])

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\varphi(n) \log \log n}{n} = e^{-C}.$$

Daß die summatorische Funktion $\Phi(x)$ asymptotisch gleich $\frac{3}{\pi^2} x^2$ ist, war schon *Dirichlet*[269]) bekannt; nach *Mertens*[270]) gilt sogar

$$\Phi(x) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x),$$

was völlig elementar bewiesen werden kann. Merkwürdigerweise ist es bisher nicht gelungen, aus der Beziehung $\sum_{1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ mit analytischen Mitteln eine bessere Abschätzung des Restgliedes zu

266) *E. Landau*, Handbuch, § 166—167, 169—172.

267) *E. Landau*, Handbuch, p. 571.

268) *E. Landau*, Über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(x)$, Arch. Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 86—91.

269) *P. G. Lejeune-Dirichlet*, Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie, Abhandl. Akad. Berlin 1849, math. Abhandl. p. 69—83 (Werke 2, p. 49—66).

270) *F. Mertens*, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Crelles J. 77 (1874), p. 289—338.

erhalten.[271]) — Nach *Landau*[272]) gilt

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} \sim \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \log x.$$

Landau[273]) beweist mit Hilfe der Theorie der Multiplikation *Dirichlet*scher Reihen (vgl. Nr. **12**) die Konvergenz verschiedener hierhergehöriger Reihen, z. B.

$$\sum_1^\infty \frac{\chi(n)\,\mu(n)}{n}, \quad \sum_1^\infty \frac{\chi(n)\,\lambda(n)}{n}, \quad \sum_1^\infty \frac{\chi(n)\,\varphi(n)}{n^2},$$

wo $\chi(n)$ ein beliebiger Charakter (bei der letztgenannten Reihe jedoch nicht der Hauptcharakter) nach einem beliebigen Modul ist.

33. Zusammenhangssätze. Die im vorhergehenden erwähnten tieferen Ergebnisse der analytischen Zahlentheorie waren alle mit Hilfe der Theorie der Zetafunktion, bzw. deren Verallgemeinerungen, erreicht. Für die systematische Darstellung der Theorie erscheint es wichtig, die verschiedenen Hauptresultate in bezug auf ihre „Tiefe“ zu vergleichen und insbesondere die Möglichkeit zu untersuchen, aus einem von ihnen die anderen *elementar* abzuleiten, ohne nochmals die transzendenten Methoden zu benutzen.

Die wichtigsten in dieser Richtung durch *Landau*[274]) und *Axer*[275]) bekannten Tatsachen lassen sich dahin zusammenfassen, daß die vier Gleichungen

$$\psi(x) = \sum_1^x \Lambda(n) = x + o(x), \tag{89}$$

$$\sum_1^\infty \frac{\Lambda(n) - 1}{n} = -2C, \tag{90}$$

$$M(x) = \sum_1^x \mu(n) = o(x), \tag{91}$$

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} = 0, \tag{92}$$

---

271) Da $\Phi(x)$ unendlich viele Sprünge von der Größenordnung x macht, kann das Restglied jedenfalls nicht von niedrigerer Größenordnung als $O(x)$ sein.

272) *E. Landau,* a. a. O. 253).

273) *E. Landau*, a. a. O. 78) und Handbuch, § 184—195.

274) *E. Landau,* a. a. O. 258) und 21), sowie Über die Äquivalenz zweier Hauptsätze der analytischen Zahlentheorie, Sitzungsber. Akad. Wien 120, Abt. 2a (1911), p. 973—988.

275) *A. Axer,* Beitrag zur Kenntnis der zahlentheoretischen Funktionen $\mu(n)$ und $\lambda(n)$, Prace Mat. Fiz. 21 (1910), p. 65—95.

alle in dem Sinne äquivalent sind, daß aus irgendeiner von ihnen die drei übrigen *elementar* folgen. [Nach den Ergebnissen von Nr. 23 können natürlich auch die (89) entsprechenden Formeln mit $\Pi(x)$, $\pi(x)$ und $\vartheta(x)$ hinzugesetzt werden.] In (90) und (92) ist nur die *Konvergenz* der betreffenden Reihe wesentlich, ist diese einmal festgestellt, so folgt die Wertbestimmung aus einfachen Stetigkeitsbetrachtungen. — Etwas tiefer liegt der Satz

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1,$$

der mit einer schärferen Form von (92), nämlich mit

$$\sum_{1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} = o\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

äquivalent ist.[276]) — Der Übergang (durch partielle Summation) von (90) zu (89), bzw. von (92) zu (91), ist trivial; die anderen Übergänge folgen aus gewissen allgemeinen Grenzwertsätzen. *Landau*[277]) gibt einen Satz, aus dem alle jene Übergänge durch Spezialisierung folgen. *Hardy* und *Littlewood*[278]) zeigen, daß die Übergänge auch mit Hilfe von „*Tauber*schen" Sätzen (vgl. Nr. 5) über die „*Lambert*schen Reihen"

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{ns} - 1}$$

ausgeführt werden können.

34. Teilerprobleme. Die Funktionen $d(n)$ und $\sigma(n)$, die Anzahl und die Summe der Teiler von n, sind vielfach untersucht worden. Über die Größenordnung dieser Funktionen ist zunächst trivial, daß immer

$$d(n) \geqq 2, \quad \sigma(n) \geqq n + 1$$

ist, sowie daß in beiden Beziehungen unendlich oft (nämlich für alle Primzahlen) das Gleichheitszeichen gilt. Andererseits beweisen *Wigert*[279]) und *Gronwall*[280])

276) *A. Axer,* Über einige Grenzwertsätze, Sitzungsber. Akad. Wien 120, Abt. 2 a (1911), p. 1253—1298.

277) *E. Landau,* Über einige neuere Grenzwertsätze, Palermo Rend. 34 (1912), p. 121—131.

278) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* On a Tauberian theorem for Lambert's series and some fundamental theorems in the analytic theory of numbers, Proc. London math. Soc. (2) 19 (1919), p. 21—29.

279) *S. Wigert,* a) Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier, Arkiv för Mat., Astr och Fys. 3 (1906—1907), No. 18; b) Sur quelques fonctions arithmétiques, Acta Math. 37 (1914), p. 113—140.

280) *H. Gronwall,* Some asymptotic expressions in the theory of numbers, Trans. Amer. math. Soc. 14 (1913), p. 113—122.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log d(n)\cdot \log\log n}{\log n} = \log 2,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} = e^C.$$

Gronwall gibt auch entsprechende Beziehungen für $\sigma_\alpha(n)$, die Summe der α^{ten} Potenzen der Teiler von n. *Ramanujan*[281]) beweist viele ins einzelne gehende Sätze über den Verlauf der Funktion $d(n)$. Er zeigt insbesondere, daß $d(n)$, wenn die *Riemann*sche Vermutung richtig ist, die „maximale Größenordnung“

$$2^{Li(\log n) + O(\log^\alpha n)} \qquad (\alpha < 1)$$

hat. Er nennt eine Zahl n „highly composite“, wenn $d(n) > d(\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots n-1$ ist, und zeigt, wie man mit elementaren Mitteln erstaunend genaue Resultate über die Reihe der Exponenten in der Darstellung einer solchen Zahl als Produkt von Primzahlpotenzen ableiten kann. Er findet auch bemerkenswerte Beziehungen zwischen der Funktion $\sigma_\alpha(n)$ und gewissen trigonometrischen Summen; ein spezieller Fall hiervon lautet

$$\sigma(n) = \frac{\pi^2 n}{6} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(n)}{\nu^2},$$

wo $c_\nu(n) = \sum_\mu \cos \frac{2\pi\mu n}{\nu}$ ist, und μ die $\varphi(\nu)$ zu ν teilerfremden ganzen positiven Zahlen $\leqq \nu$ durchläuft.

Die summatorische Funktion $D(x)$ gibt offenbar die Anzahl der *Gitterpunkte* (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) an, die in der (u, v)-Ebene dem Gebiet

$$u > 0, \quad v > 0, \quad uv \leqq x \tag{93}$$

angehören; hieraus folgt leicht

$$D(x) = \sum_{n=1}^{x} \left[\frac{x}{n}\right] = 2\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]^2,$$

woraus die von *Dirichlet*[269]) gegebene Formel

$$D(x) = x(\log x + 2C - 1) + O(\sqrt{x})$$

281) *S. Ramanujan*, Highly composite numbers, Proc. London math. Soc. (2) 14 (1915), p. 347—409; On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers, Trans. Cambr. Phil. Soc. 22 (1918), p. 259—276. Vgl. auch: On certain arithmetical functions, Trans. Cambr. Phil. Soc. 22 (1916), p. 159—184, wo gewisse, die Funktion $\sigma_\alpha(n)$ enthaltende Summen untersucht werden.

gefolgert werden kann. Dieses Resultat wurde erst von *Voronoï*[282]) verschärft; er zieht in zweckmäßig gewählten Punkten der Hyperbel $uv = x$ die Tangenten, zerlegt dadurch das Gebiet (93) in mehrere Teilgebiete, schätzt die Anzahl der Gitterpunkte in jedem Teilgebiet ab und erhält

$$D(x) = x(\log x + 2C - 1) + O\left(x^{\frac{1}{3}} \log x\right). \tag{94}$$

Neuerdings ist es *van der Corput*[306]) gelungen, die Abschätzung des Restgliedes sogar zu $O(x^M)$ zu verbessern, wo $M < \frac{33}{100}$ ist.

Schon vor *Voronoï* hatte *Pfeiffer*[283]) einen vermeintlichen Beweis von (94) — mit $O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$ anstatt $O\left(x^{\frac{1}{3}} \log x\right)$ — veröffentlicht; seine Methode war freilich nicht einwandfrei, wurde aber von *Landau*[284]) umgearbeitet und u. a. zum Beweis von (94) benutzt. Diese „*Pfeiffer*sche Methode", auf die wir in Nr. **36** zurückkommen, beruht auf „reell-analytischer" Grundlage. Andererseits ist[285]) (vgl. Nr. **4** und **22**)

$$\bar{D}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s} (\zeta(s))^2 \, ds; \tag{95}$$

dieser für die Primzahltheorie grundlegende „komplex-analytische" Ansatz schien lange auf das Teilerproblem nicht anwendbar zu sein, es gelang jedoch *Landau*[286]) ihn zum Beweis von (94) zu benutzen. In (95) tritt die Zetafunktion nicht im Nenner auf; die Schwierigkeiten rühren daher nicht wie bei den Primzahlproblemen von den komplexen ζ-Nullstellen her, sie sind hier von ganz anderer Natur und sind hauptsächlich mit dem Aufsuchen einer oberen Grenze für das Integral

$$\int_{-\varepsilon-Ti}^{-\varepsilon+Ti} \frac{x^s}{s} (\zeta(s))^2 \, ds \qquad (\varepsilon > 0)$$

verbunden, wobei T eine Funktion von x ist. *Landau*[286]) zeigt, daß

---

282) *G. Voronoï,* Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques, Crelles J. 126 (1903), p. 241—282.

283) *E. Pfeiffer,* Über die Periodizität in der Teilbarkeit der Zahlen und über die Verteilung der Klassen positiver quadratischer Formen auf ihre Determinanten, Jahresber. d. Pfeifferschen Lehr- und Erzieh.-Anstalt. Jena 1886, p. 1—21.

284) *E. Landau,* Die Bedeutung der Pfeifferschen Methode für die analytische Zahlentheorie, Sitzungsb. Akad. Wien 121, Abt. 2a (1912), p. 2195—2332.

285) Für ganzzahlige x muß wie oben der Hauptwert des Integrals genommen werden.

286) *E. Landau,* a) a. a. O. 224); b) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, zweite Abhandl., Gött. Nachr. 1915, p. 209—243; c) Über Dirichlets Teilerproblem, Sitzungsb. Akad. München 1915, p. 317—328.

diese Schwierigkeit bei einer ausgedehnten Klasse von Problemen überwunden werden kann, wo an der Stelle von $(\zeta(s))^2$ eine Funktion steht, die eine Funktionalgleichung vom Typus der *Riemann*schen besitzt und gewissen anderen Bedingungen genügt. Mit dieser Methode wurde z. B. der in Nr. 29 erwähnte Satz über die Multiplikation zweier *L*-Reihen bewiesen, der übrigens (94) — mit der Fehlerabschätzung $O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$ — als Spezialfall enthält, da die Konvergenz von

$$(96) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{d(n) - \log n - 2C}{n^s} = (\zeta(s))^2 + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)$$

für $\sigma > \frac{1}{3}$ daraus folgt.[287])

Das Problem, die untere Grenze γ derjenigen α zu bestimmen, für welche $\Delta(x) = D(x) - x(\log x + 2C - 1) = O(x^\alpha)$ gilt (γ ist also die Konvergenzabszisse von (96)), wird als „*Dirichlet*s Teilerproblem" bezeichnet. Nach dem Obigen ist jedenfalls $\gamma < \frac{33}{100}$. Eine nicht triviale *untere* Abschätzung von γ hat *Hardy*[288]) gegeben, er beweist nämlich $\gamma \geqq \frac{1}{4}$. Er untersucht die Funktion

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} d(n) e^{-s\sqrt{n}} = \frac{1}{\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(2z) s^{-2z} \zeta^2(z)\, dz,$$

die in allen Punkten $s = \pm 4\pi i\sqrt{q}$ $(q = 1, 2, \ldots)$ algebraische Unendlichkeitsstellen von der Ordnung $\frac{3}{2}$ aufweist, während

$$f(s) + \frac{4(\log s - 1)}{s^2}$$

für $s = 0$ regulär ist. Hieraus folgt nach *Hardy* $\gamma \geqq \frac{1}{4}$ und sogar der schärfere Satz, daß bei zweckmäßiger Wahl einer positiven Konstanten K die Ungleichungen

$$(97) \qquad \begin{cases} \Delta(x) > Kx^{\frac{1}{4}} \\ \Delta(x) < -Kx^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

beide beliebig große Lösungen besitzen. *Hardy* deutet auch an, wie man durch die Anwendung der von *Littlewood* (vgl. Nr. 27 und 28) für die entsprechenden Probleme der Primzahltheorie geschaffenen

287) *Landau* gibt auch einen Beweis von (94) mit einer arithmetischen Methode, deren Grundgedanke von *Piltz* herrührt: Über Dirichlets Teilerproblem, Gött. Nachr. 1920, p. 13—32. Er hat auch (94) für den Fall verallgemeinert, daß nur solche Teiler, die einer gegebenen arithmetischen Reihe angehören, mitgezählt werden; vgl. a. a. O. 224) und 284).

288) *G. H. Hardy,* On Dirichlets Divisor Problem, Proc. London math. Soc. (2) 15 (1916), p. 1—25.

Methode in (97) sogar $x^{\frac{1}{4}}$ durch $(x \log x)^{\frac{1}{4}} \log\log x$ ersetzen kann. *Landau*[289]) beweist mit der vorhin erwähnten komplex-analytischen Methode einen allgemeinen Satz, der insbesondere $\gamma \geqq \frac{1}{4}$ ergibt.

Über γ ist also bis jetzt nur $\frac{1}{4} \leqq \gamma < \frac{33}{100}$ bekannt. *Im Mittel* ist aber $|\Delta(x)|$ von der Ordnung $x^{\frac{1}{4}}$; *Cramér*[290]) beweist nämlich (in Verschärfung früherer Resultate von *Hardy*[291]))

$$(98) \qquad \int_1^x (\Delta(t))^2\, dt = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} \sum_1^\infty \left(\frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^2 + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right)$$

und folgert hieraus

$$(99) \qquad \frac{1}{x}\int_1^x |\Delta(t)|\, dt = O\left(x^{\frac{1}{4}}\right).$$

Schließlich kennt man auch eine *explizite Formel* für die Funktion $\overline{D}(x)$; nach *Voronoï*[292]) gilt nämlich[293])

$$(100) \qquad \overline{D}(x) = x(\log x + 2C - 1) + \tfrac{1}{4} + \sqrt{x} \sum_1^\infty \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \left(Y_1(4\pi\sqrt{nx}) - H_1(4\pi\sqrt{nx})\right),$$

289) *E. Landau,* a) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, dritte Abhandl., Gött. Nachr. 1917, p. 96—101; vgl. auch: b) Über die Heckesche Funktionalgleichung, ebenda 1917, p. 102—111.

290) *H. Cramér,* Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy, Math. Ztschr. 15 (1922), p. 201—210.

291) *G. H. Hardy,* The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. London math. Soc. (2) 15 (1916), p. 192—213; Additional note on two problems in the analytic theory of numbers, ebenda (2) 18 (1918), p. 201—204.

292) *G. Voronoï,* Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries, Ann. Éc. Norm. (3) 21 (1904), p. 207—268, 459—534.

293) In der folgenden Nummer machen wir über Formeln dieser Art einige allgemeine Bemerkungen. Eine Formel, die im wesentlichen mit (101) übereinstimmt, wurde schon 1891 — mit ungenügendem Beweis — von *L. Lorenz* gegeben: Analytiske Undersøgelser over Primtalmœngderne, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og math. Afd. (6) 5 (1889—1891), p. 427—450. Er entwickelt diese und sogar die entsprechenden Formeln für das *Piltz*sche Teilerproblem (s. u.) nach einer Methode, die im Grunde mit der — unstreng angewandten — *Pfeiffer*schen Methode identisch ist. Später wurde (100) von *Hardy* a. a. O. 288) unabhängig wiedergefunden. Einen Beweis von (100) mit der *Pfeiffer*schen Methode gab *W. Rogosinski,* Neue Anwendung der Pfeifferschen Methode bei Dirichlets Teilerproblem, Diss. Göttingen 1922. Vgl. auch *E. Landau,* Über Dirichlets Teilerproblem, zweite Mtlg., Gött. Nachr. 1922, p. 8—16 und *A. Walfisz,* a. a. O. 297).

wo $Y_1(v)$ die gewöhnliche „zweite Lösung“ der *Bessel*schen Differentialgleichung bezeichnet und

$$H_1(v) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{te^{-vt}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt \qquad (= O(e^{-v}))$$

eine *Hankel*sche Zylinderfunktion ist. Nach der bekannten asymptotischen Entwicklung von Y_1 hat man

$$(101) \quad \overline{D}(x) = x(\log x + 2C - 1)$$
$$+ \frac{x^{\frac14}}{\pi\sqrt{2}}\sum_1^\infty \frac{d(n)}{n^{\frac34}}\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \tfrac14\pi\right) + \tfrac14 + O\left(x^{-\frac14}\right),$$

wo das Glied $O\left(x^{-\frac14}\right)$ eine für $x \geqq 1$ stetige Funktion ist. Die Sprünge der Funktion $\overline{D}(x)$ rühren also von der in (101) auftretenden unendlichen Reihe her, die das „kritische Glied“ von $\overline{D}(x)$ darstellt. *Voronoï*[292]) gibt auch analoge Formeln für $\sum_1^x d(n)(x-n)^k$, $k = 1, 2, \ldots$[294])

Wigert[295]) untersucht die summatorischen Funktionen $S(x)$ und $\sum_1^x \frac{\sigma(n)}{n}$; er beweist

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + x\Theta_1(x),$$

$$\sum_1^x \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}x - \frac12\log x + \Theta_2(x),$$

wo für $\nu = 1, 2$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\Theta_\nu(x)}{\log x} \leqq \frac14$$

aber jedenfalls *nicht*

$$\Theta_\nu(x) = o(\log\log x)$$

---

294) *S. Wigert,* Sur la série de Lambert et son application à la théorie des nombres, Acta Math. 41 (1917), p. 197—218, und *E. Landau,* Gött. gel. Anz. 1915, p. 377—414, gaben einfachere Beweise für einen Teil der *Voronoï*schen Resultate. *Wigert* benutzt hierfür eine von ihm gefundene *asymptotische Funktionalgleichung* für die *Lambert*sche Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{e^{ns}-1} = \sum_1^\infty d(n)e^{-ns}$, für welche *Landau* einen vereinfachten Beweis gibt: Über die Wigertsche asymptotische Funktionalgleichung für die Lambertsche Reihe, Arch. Math. Phys. (3) 27 (1918), p. 144—146. Vgl. auch *S. Wigert,* Sur une équation fonctionnelle et ses conséquences arithmétiques, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 13 (1918), Nr. 16.

295) *S. Wigert,* a. a. O. 279 b).

gilt. Für die Funktion

$$\sum_{1}^{x} \frac{\sigma(n)}{n}(x-n)^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

gibt er erstens entsprechende asymptotische Formeln, die zum Teil von *Landau*[296]) verschärft wurden, und zweitens explizite Formeln, welche unendliche Reihen mit *Bessel*schen Funktionen enthalten. *Walfisz*[297]) zeigt, daß eine solche Formel auch für den Fall $k = 0$ aufgestellt werden kann, und gibt für $\bar{S}(x)$ die entsprechende Entwicklung[298])

$$\bar{S}(x) = \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24} - x\sum_{1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n}J_2(4\pi\sqrt{nx})$$

$$= \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\pi\sqrt{2}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \tfrac{1}{4}\pi\right) + O\left(x^{\frac{2}{5}}\right),$$

wobei jedoch die unendlichen Reihen mit *Cesàro*schen Mitteln von der ersten Ordnung summiert werden müssen, da ihre Konvergenz bisher nicht bewiesen werden konnte.

Ramanujan[299]) findet die Beziehung

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(d(n))^2}{n^s} = \frac{(\zeta(s))^4}{\zeta(2s)}$$

und schließt daraus $\displaystyle\sum_{1}^{x}(d(n))^2 \sim \frac{1}{\pi^2}x\log^3 x.$

Piltz[300]) verallgemeinert das *Dirichlet*sche Teilerproblem, indem er für $k = 2, 3, \ldots$ die Funktion

$$D_k(x) = \sum_{1}^{x} d_k(n)$$

296) *E. Landau,* Gött. gel. Anz. 1915, p. 377—414.

297) *A. Walfisz,* Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Diss. Göttingen 1922

298) Die zweite Zeile der Formel ergibt sich durch Zusammenstellung der Ergebnisse von *Walfisz* mit denjenigen von *Wigert* a. a. O. 279 b) und *Landau,* a. a. O. 296).

299) *S. Ramanujan,* Some formulae in the analytic theory of numbers, Mess. of Math. 45 (1916), p. 81—84. Vgl. auch *B. M. Wilson,* Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan, Proc. London math. Soc. (2) 21 (1922), p. 235—255.

300) *A. Piltz,* Über das Gesetz, nach welchem die mittlere Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Produkte einer gegebenen Anzahl Faktoren mit der Größe der Zahlen wächst, Diss. Berlin 1881. Vgl. auch *E. Landau,* Über eine idealtheoretische Funktion, Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 1—21.

betrachtet, wobei
$$\sum_1^\infty \frac{d_k(n)}{n^s} = (\zeta(s))^k$$
gilt und $d_k(n)$ also die Anzahl der Zerlegungen von n in k Faktoren bezeichnet; insbesondere ist $d_2(n) = d(n)$. Er zeigte, daß — analog wie bei $k = 2$ — die Hauptglieder von $D_k(x)$ von dem Pol $s = 1$ der Funktion $\frac{x^s}{s}(\zeta(s))^k$ herrühren. Wird das dortige Residuum durch $xp_{k-1}(\log x)$ bezeichnet, wobei also p_{k-1} ein Polynom $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, und wird
$$D_k(x) = xp_{k-1}(\log x) + \Delta_k(x)$$
gesetzt, so weiß man nach *Hardy* und *Littlewood*[301]), daß
$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{k-2}{k}+\varepsilon}\right)$$
für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $k \geqq 4$ ist. Für $k = 3$ wurde das schärfste Resultat von *Landau*[286]) gegeben, indem er
$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} x\right)$$
für alle $k \geqq 2$ beweist.[302]) — *Hardy*[288]) hat die durch (97) ausgedrückte Eigenschaft von $\Delta_2(x)$ für beliebige k verallgemeinert, wobei der Exponent $\frac{1}{4}$ durch $\frac{k-1}{2k}$ zu ersetzen ist. Die expliziten Formeln (100) und (101) wurden von *Walfisz*[297]) und *Cramér*[303]) verallgemeinert; das „kritische Glied" von (101) wird durch
$$\frac{x^{\frac{k-1}{2k}}}{\pi\sqrt{k}} \sum_1^\infty \frac{d_k(n)}{n^{\frac{k+1}{2k}}} \cos\left(2k\pi\sqrt[k]{nx} + \frac{k-3}{4}\pi\right)$$
ersetzt, wo von der unendlichen Reihe nur bekannt ist, daß sie durch *Cesàro*sche Mittel von der Ordnung $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ summierbar ist. Der Fall $k = 2$ ist somit der einzige, wo die Konvergenz der auftretenden Reihen festgestellt ist.

---

301) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, a. a. O. 129).

302) *Landau*, a. a. O. 224), bemerkt, daß aus der *Riemann*schen Vermutung $\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$ folgen würde. Die Behauptung $\frac{1}{x}\int_1^x |\Delta_k(t)|\,dt = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ für $k = 2, 3, \ldots$ ist nach *Hardy* und *Littlewood*, a. a. O. 301), der „*Lindelöf*schen Vermutung" $\zeta(\frac{1}{2}+it) = O(t^\varepsilon)$ äquivalent.

303) *H. Cramér*, Über das Teilerproblem von Piltz, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), No. 21.

35. Ellipsoidprobleme. Wenn $r(n)$ für $n \geqq 0$ die Anzahl der additiven Zerlegungen von n in zwei Quadrate bedeutet, gibt die summatorische Funktion $R(x) = \sum_0^x r(n)$ die Anzahl der Gitterpunkte (u, v) an, die der Kreisfläche $u^2 + v^2 \leqq x$ angehören. *Gauß*[304]) bewies durch eine einfache geometrische Überlegung

$$R(x) = \pi x + O(\sqrt{x});$$

der Flächeninhalt des Kreises stellt somit einen Annäherungswert für $R(x)$ dar. Die folgenden Hauptsätze über $R(x)$ entsprechen genau denjenigen über $D(x)$ und werden auch durch analoge Methoden bewiesen:

1. Nach *Sierpiński*[305]), der die *Voronoï*sche[282]) Methode benutzte, gilt

$$R(x) = \pi x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right); \tag{102}$$

diese Abschätzung wurde neuerdings von *van der Corput*[306]) zu $O(x^M)$ mit $M < \frac{1}{3}$ verschärft.

2. Nach *Hardy*[307]) und *Landau*[308]) kann das Restglied für kein $h < \frac{1}{4}$ von der Form $O(x^h)$ sein.

3. *Im Mittel* ist das Restglied von der Größenordnung $x^{\frac{1}{4}}$; für die Funktion $R(x) - \pi x$ gelten nämlich Formeln, die zu (98) und (99) analog sind.

4. Die explizite Formel für $\bar{R}(x) = \frac{1}{2}(R(x+0) + R(x-0))$

---

304) *C. F. Gauss*, De nexu inter multitudinem classium etc., Werke 2 (1863), p. 269—291.

305) *W. Sierpiński*, O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcyj asymptotycznych, Prace Mat.-Fiz. 17 (1906), p. 77—118. Vgl. auch *E. Landau*, a. a. O. 224), 286b), 284), Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate, Ann. Mat. pura ed appl. (3) 20 (1913), p. 1—28; Über einen Satz des Herrn Sierpiński, Giorn. di Mat. di Battaglini 51 (1913), p. 73—81; Über die Gitterpunkte in einem Kreise, erste Mtlg., Gött. Nachr. 1915, p. 148—160; Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 319—320; *S. Wigert*, Über das Problem der Gitterpunkte in einem Kreise, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 310—318.

306) *J. G. van der Corput*, a) Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem, Math. Ann. 87 (1922), p. 39—65; b) Sur quelques approximations nouvelles, Paris C. R. 175 (1922), p. 856—859.

307) *G. H. Hardy*, On the expression of a number as the sum of two squares, Quart. J. 46 (1915), p. 263—283.

308) *E. Landau*, Über die Gitterpunkte in einem Kreise, zweite Mtlg., Gött. Nachr. 1915, p. 161—171; Neue Untersuchungen über die *Pfeiffer*sche Methode zur Abschätzung von Gitterpunktanzahlen, Sitzungsb. Akad. Wien 124, Abt. 2a (1915), p. 469—505.

lautet[309]) nach *Hardy*[307])

$$(103)\quad \begin{aligned} \bar{R}(x) &= \pi x + \sqrt{x}\sum_1^\infty \frac{r(n)}{\sqrt{n}} J_1(2\pi\sqrt{nx}) \\ &= \pi x + \frac{x^{\frac14}}{\pi}\sum_1^\infty \frac{r(n)}{n^{\frac34}} \sin\left(2\pi\sqrt{nx} - \tfrac14\pi\right) + O\left(x^{-\frac14}\right). \end{aligned}$$

Für $n \geqq 1$ ist bekanntlich $r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$, (vgl. I C 2, c), wo $d_\nu(n)$ die Anzahl der Divisoren von n von der Form $4k + \nu$ bedeutet[310]); hieraus folgt für $\sigma > 1$

$$\sum_1^\infty \frac{r(n)}{n^s} = 4\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} = 4\zeta(s)\,L(s),$$

wenn $\chi(n)$ der Nicht-Hauptcharakter modulo 4 ist. Der Satz von *Landau* (vgl. Nr. 29) ergibt die Konvergenz von

$$\sum_1^\infty \frac{r(n) - \pi}{n^s} = 4\zeta(s)\,L(s) - \pi\zeta(s)$$

für $\sigma > \frac13$; nach *van der Corput*[306]) ist diese Reihe sogar über $\sigma = \frac13$ hinaus konvergent, für $\sigma < \frac14$ ist sie aber jedenfalls divergent.

Das obige „Problem der Gitterpunkte in einem Kreise“ ist als Spezialfall in dem Problem enthalten, die Anzahl der Gitterpunkte in dem k-dimensionalen ($k \geqq 2$) Ellipsoid

$$F(u_1, u_2, \ldots u_k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \leqq x \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

abzuschätzen, wenn F eine positiv-definite quadratische Form ist. Diese Anzahl ist nach *Landau*[311]) gleich

309) Einen Beweis dieser Formel mit der *Pfeiffer*schen Methode gab *E. Landau,* Über die Gitterpunkte in einem Kreise, dritte Mtlg., Gött. Nachr. 1920, p. 109—134. Vgl. auch *G. Voronoï,* Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$ où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers, Verhandl. des dritten intern. Math.-Kongr. Heidelberg 1904, p. 241—245.

310) Hieraus folgt insbesondere $r(n) \leqq 4d(n)$ und somit nach der vorigen Nummer eine obere Abschätzung für $r(n)$.

311) *E. Landau,* a. a. O. 224), 286b), Zur analytischen Zahlentheorie der quadratischen Formen, (über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid) Sitzungsb. Akad. Berlin 1915, p. 458—476; Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen, Sitzungsb. Akad. Wien, 124 Abt. 2a (1915), p. 445—468. Vgl. auch *J. G. van der Corput*, Over definiete kwadratische vormen, Nieuw Arch. voor Wisk. 13 (1919), p. 125—140. — Bei diesen Untersuchungen wird teils die *Pfeiffer*sche Methode benutzt, teils analytische Methoden, wobei die verallgemeinerten Zetafunktionen von *Epstein* (vgl. Nr. 21) zur Anwendung gelangen.

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k(k-1)}{2(k+1)}}\right),$$

wo Δ die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$

bezeichnet. Insbesondere ergibt sich für die dreidimensionale Kugel $u^2 + v^2 + w^2 \leqq x$ als Anzahl der Gitterpunkte

$$\tfrac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}}\right),$$

was schon von *Cauer*[312]) gefunden war. *Landau*[311]) verallgemeinert seine Sätze nach verschiedenen Richtungen und gibt auch[313]) Verallgemeinerungen der Eigenschaft 2. von $R(x)$. Die *Hardy*sche Formel (103) wird von *Walfisz*[297]) für ein k-dimensionales Ellipsoid (mit ganzen $a_{\mu\nu}$) verallgemeinert[314]); für $k > 2$ kann hierbei nur Summabilität, nicht Konvergenz der auftretenden Reihen bewiesen werden.

Die „expliziten Formeln", die in dieser und der vorhergehenden Nummer erwähnt sind, besitzen alle Eigenschaften, die denjenigen der *Riemann*schen Primzahlformel (vgl. Nr. 28) entsprechen. Da die auftretenden Reihen unstetige Funktionen darstellen, können sie jedenfalls nicht für alle x gleichmäßig konvergieren (bzw. summierbar sein); in jedem Intervall, das von Unstetigkeitspunkten frei ist, sind sie zwar gleichmäßig konvergent (bzw. summierbar), in keinem Falle jedoch unbedingt konvergent. In einigen Fällen ist es gelungen, derartige Formeln mit der „*Pfeiffer*schen Methode" zu beweisen[315]); im allgemeinen war es jedoch notwendig, die komplexe Funktionentheorie zu benutzen. Durch formale gliedweise Integration[316]) erhält man zunächst Formeln, die unbedingt konvergente Reihen enthalten und deshalb leicht bewiesen werden können. Es gilt z. B.[317])

$$(104) \qquad \int_0^x \bar{R}(t)\,dt = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{x}{\pi}\sum_1^\infty \frac{r(n)}{n} J_2(2\pi\sqrt{nx});$$

312) *D. Cauer,* Neue Anwendungen der Pfeifferschen Methode zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen, Diss. Göttingen 1914.

313) *E. Landau,* a. a. O. 289) und 308).

314) *Hardy* hatte schon früher die Formel für eine Ellipse aufgestellt (a. a. O. 307)); vgl. auch *G. Voronoï* a. a. O. 309).

315) Vgl. 293) und 309).

316) Die in jedem Falle hinreichend oft auszuführen ist.

317) *E. Landau,* Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 319—320.

die Zulässigkeit der gliedweisen Differentiation, die auf (103) führt, folgt nun aus dem Konvergenzsatz von *M. Riesz* (vgl. Nr. **5**), der hier auf die *Dirichlet*sche Reihe $\sum_1^\infty \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} e^{-s\sqrt{n}}$ anzuwenden ist. Die zahlentheoretischen Funktionen erscheinen hierbei gewissermaßen als Randwerte von analytischen Funktionen. *Steffensen*[171]) entwickelt eine ganz verschiedene Auffassungsweise; wenn eine zahlentheoretische Funktion $f(n)$ gegeben ist, interpoliert er nämlich die Folge $f(1)$, $f(2), \ldots$ durch eine ganze Funktion $f(z)$. Es sei z. B. $\varphi(s) = \sum f(n) n^{-s}$ für $\sigma \geqq 2$ unbedingt konvergent; dann definiert

$$f(z) = -\frac{\sin 2\pi z}{2\pi} \sum_1^\infty \varphi(n+1) z^n$$

für $|z| < 1$ eine ganze Funktion der gewünschten Art. *Steffensen* gibt verschiedene in der ganzen Ebene geltenden Darstellungen der Interpolationsfunktionen und wendet sie zur asymptotischen Untersuchung der zahlentheoretischen Funktionen an (vgl. Nr. **26**).

Aus (104) ergibt sich leicht ein Beweis von (102), indem man $\int_x^{x+h} \overline{R}(t)\, dt$ bildet und dabei $h = x^{\frac{1}{3}}$ nimmt.[317]) Diese Differenzenbildung stellt einen sehr allgemein verwendbaren Kunstgriff dar.

36. Allgemeinere Gitterpunktprobleme. In den beiden vorhergehenden Nummern wurden verschiedene Spezialfälle der folgenden Aufgabe behandelt: Ein Gebiet G in der (u, v)-Ebene ist gegeben; man soll die Anzahl der in G oder auf der Begrenzung liegenden Gitterpunkte bestimmen. In allen jenen Spezialfällen konnte eine Annäherung an die gesuchte Anzahl sowie eine grobe Abschätzung des Fehlers durch triviale Mittel erhalten werden, und diese Abschätzung konnte durch neuere Methoden verschärft werden; die Aufgabe, die beste mögliche Abschätzung zu finden, war aber noch nicht gelöst. — Es gelingt nun, entsprechende Resultate auch bei viel allgemeineren Gebieten zu erhalten, und zwar gibt es hierfür mehrere verschiedene Methoden.

Die erste Methode, die auf solche allgemeinere Gebiete angewandt wurde, war die sog. *Pfeiffer*sche, die von *Landau* (vgl. Nr. **34**) streng gemacht wurde. Wenn kein Gitterpunkt auf dem Rande von G liegt, und wenn außerdem gewisse Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Randes gemacht werden, so kann die gesuchte Gitterpunktanzahl, wie *Landau* zeigt, durch

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_G \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv$$

ausgedrückt werden, wo

$$\varphi_m(u)=\sum_{-m}^{m}\cos 2n\pi u$$

gesetzt ist. *Landau*[318]), *Cauer*[319]) und *Hammerstein*[320]) benutzten diesen Ansatz, um bei verschiedenen speziellen Gebieten, von denen die wichtigsten in den vorhergehenden Nummern erwähnt wurden, die Gitterpunktanzahl abzuschätzen. *Van der Corput*[321]) faßt alle diese Ergebnisse in einem allgemeinen Satz zusammen, bei dem über den Rand von G nur sehr allgemeine Voraussetzungen gemacht werden. Er beweist diesen Satz auch mit der geometrischen *Voronoï*schen Methode (vgl. Nr. 34). *Landau* und *van der Corput*[322]) geben verschiedene analoge Sätze und Vereinfachungen der Beweise, wobei u. a. die arithmetische „*Piltz*sche Methode"[287]) zum Beweis von allgemeinen Gitterpunktsabschätzungen benutzt wird.

37. Verteilung von Zahlen, deren Primfaktoren vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Es sei

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_\nu^{\alpha_\nu} \tag{105}$$

die Darstellung von n als Produkt von Primzahlpotenzen. Die α sollen stets positiv und die p alle verschieden sein; p_μ soll *nicht* notwendig die μ^{te} Primzahl bezeichnen. Es liegt nahe, nach der Verteilung derjenigen Zahlen n zu fragen, deren Exponenten $\alpha_1 \ldots \alpha_\nu$ gegebenen Bedingungen genügen. Soll z. B. stets $\nu=1$, $\alpha_1=1$ sein, so deckt sich diese Aufgabe offenbar mit derjenigen, die Verteilung der Primzahlen zu untersuchen. Als Verallgemeinerung hiervon kann das Problem aufgefaßt werden, die Verteilung der h Primfaktoren enthaltenden Zahlen zu bestimmen. Dies kann wiederum auf drei verschiedene Weisen aufgefaßt werden, die zu den folgenden Bedingungen führen:

---

318) *E. Landau,* a. a. O. 284), 293), 305), 308), 309).

319) *D. Cauer,* a. a. O. 312) und Über die Pfeiffersche Methode, Math. Abhandl., H. A. Schwarz zu seinem fünfzigjähr. Doktorjubiläum gewidmet, Berlin 1914, p. 432—447.

320) *A. Hammerstein,* a. a. O. 200).

321) *J. G. van der Corput,* Over roosterpunten in het platte vlak (De beteekenis van de methoden van Voronoï en Pfeiffer), Diss. Leiden 1919; Über Gitterpunkte in der Ebene, Math. Ann. 81 (1920), p. 1—20.

322) *E. Landau* und *J. G. van der Corput,* Über Gitterpunkte in ebenen Bereichen, Gött. Nachr. 1920, p. 135—171; *J. G. van der Corput,* Zahlentheoretische Abschätzungen nach der Piltzschen Methode, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 105—120; Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Ann. 84 (1921), p. 53—79.

$$1)\quad \nu = h,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_h = 1,$$
$$2)\quad \nu = h,$$
$$3)\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_\nu = h.$$

Landau[323]) zeigt, daß die Anzahl der diesen Bedingungen genügenden Zahlen unterhalb x in jedem der drei Fälle asymptotisch gleich

$$\frac{1}{(h-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{h-1}}{\log x}$$

ist; für den Fall 1. war dies schon von *Gauß*[324]) vermutet worden. *Landau* gibt auch genauere Ausdrücke für jene Anzahlen. *Van der Corput*[325]) untersucht verschiedene allgemeinere Probleme dieser Art.

Läßt man ν unbestimmt, schreibt aber $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = 1$ vor, so bekommt man die sog. quadratfreien Zahlen. Bedeutet $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leqq x$, so beweist man leicht[326])

$$Q(x) \sim \frac{6}{\pi^2} x.$$

Für $\sigma > 1$ gilt offenbar (wenn auch 1 als quadratfreie Zahl mitgerechnet wird)

$$\sum_1^\infty \frac{Q(n) - Q(n-1)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^{2s}},$$

und die aus der Primzahltheorie geläufigen Methoden geben hier[327])

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O\left(\sqrt{x}\, e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

mit konstantem α. Wenn unter den $Q(x)$ quadratfreien Zahlen $\leqq x$ $Q_1(x)$ aus einer ungeraden, $Q_2(x)$ aus einer geraden Anzahl von Primfaktoren besteht, so folgt aus (86)

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = 1 + O\left(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right).$$

Hardy und *Ramanujan*[328]) lassen in (105) p_μ die μ^{te} Primzahl be-

---

323) *E. Landau,* Über die Verteilung der Zahlen, welche aus ν Primfaktoren zusammengesetzt sind, Gött. Nachr. 1911, p. 362—381; vgl. auch a. a. O. 238).

324) Vgl. *F. Klein,* Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken, neunter Bericht, Gött. Nachr. 1911, Geschäftl. Mitt., p. 26—32.

325) *J. G. van der Corput,* On an arithmetical function connected with the decomposition of the positive integers into prime factors, Proceed. Akad. Amsterdam 19 (1916), p. 826—855.

326) *L. Gegenbauer,* Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Denkschriften Akad. Wien, 49 : 1 (1885), p. 37—80. Es werden hier auch analoge Beziehungen für „h^{te} potenzfreie Zahlen" bewiesen.

327) *A. Axer,* a. a. O. 276).

328) *G. H. Hardy* und *S. Ramanujan*, Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types, Proc. London math. Soc. (2) 16 (1917),

zeichnen und führen die Bedingung $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \cdots$ ein. Für die Anzahl $A(x)$ der $n \leqq x$, die dieser Bedingung genügen, wird

$$\log A(x) \sim 2\pi \sqrt{\frac{\log x}{3 \log \log x}}$$

bewiesen.

Werden λ verschiedene zu k teilerfremde Restklassen mod. k gegeben, und wird vorgeschrieben, daß in (105) jedes p_μ einer von diesen Restklassen angehören muß, so ist nach *Landau*[329]) die Anzahl der $n \leqq x$ asymptotisch gleich

$$ax\,(\log x)^{\frac{\lambda}{\varphi(k)}-1}, \quad (a > 0).$$

Die Summe $\sum 2^{\nu}$, über dieselben $n \leqq x$ erstreckt, ist dagegen asymptotisch gleich

$$bx\,(\log x)^{\frac{2\lambda}{\varphi(k)}-1}, \quad (b > 0),$$

was schon *Lehmer*[330]) in einem speziellen Fall bewiesen hatte. Ein ähnlicher Satz von *Landau*[329]) enthält insbesondere das Resultat[331]): es gibt unterhalb x asymptotisch

$$c\frac{x}{\sqrt{\log x}}, \quad (c > 0),$$

ganze Zahlen, die als Summen von zwei Quadraten darstellbar sind. Hieraus folgt, wenn $B_\mu(x)$ die Anzahl der ganzen Zahlen $\leqq x$ bezeichnet, zu deren additiven Darstellung *genau* μ Quadrate erforderlich sind (bekanntlich ist $B_\mu(x) = 0$ für $\mu > 4$):

$$B_1(x) \sim \sqrt{x}, \quad B_2(x) \sim c\frac{x}{\sqrt{\log x}}, \quad B_3(x) \sim \frac{5}{6}x, \quad B_4(x) \sim \frac{1}{6}x.$$

38. Neuere Methoden der additiven Zahlentheorie. Als der Abschnitt über additive Zahlentheorie in I C 3 geschrieben wurde, war vor allem das große „*Waring*sche Problem" noch ungelöst. *Waring*[332]) vermutete 1782, daß jede ganze Zahl $n \geqq 0$ als Summe

p. 112—132. In der Abhandlung: The normal number of prime factors of n, Quart. J. 48 (1917), p. 76—92, beschäftigen sich die beiden Verfasser mit Problemen, die zu den in dieser Nummer behandelten Fragestellungen in einer gewissen Beziehung stehen.

329) *E. Landau*, a. a. O. 78); Bemerkungen zu Herrn D. N. Lehmers Abhandlung in Bd. 22 dieses Journals, Amer. J. of math. 26 (1904), p. 209—222; Lösung des Lehmerschen Problems, ebenda 31 (1909), p. 86—102.

330) *D. N. Lehmer*, Asymptotic Evaluation of certain Totient Sums, Amer. J. of math. 22 (1900), p. 293—335.

331) *E. Landau*, Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate, Arch. Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 305—312.

332) *E. Waring*, Meditationes Algebraicae, 3. Aufl. Cambridge 1782, p. 349—350.

einer festen (d. h. nur von k, nicht von n, abhängenden) Anzahl von positiven k^{ten} Potenzen dargestellt werden konnte, und zwar für $k = 1, 2, \ldots$. Bis 1909 war dies nur für einige spezielle Werte von k bewiesen; es gelang aber *Hilbert*[333]) einen allgemeinen Beweis zu finden. Dieser Beweis benutzt zwar die Hilfsmittel der Integralrechnung; durch spätere Vereinfachungen[334]) ist aber gezeigt worden, daß dies gänzlich vermieden werden kann, so daß die Methode im Grunde eine rein algebraische ist und deshalb hier nicht eingehender besprochen werden soll.

Rein analytisch ist dagegen die Methode, welche neuerdings von *Hardy* und *Littlewood*[335]) auf das Problem angewandt worden ist. Es sei $k > 2$, und es werde für $|x| < 1$

333) *D. Hilbert*, Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n^{ter} Potenzen (Waringsches Problem), Gött. Nachr. 1909, p. 17—36 und Math. Ann. 67 (1909), p. 281—300.

334) Vgl. z. B. *F. Hausdorff*, Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems, Math. Ann. 67 (1909), p. 301—305; *E. Stridsberg*, Sur la démonstration de M. Hilbert du théorème de Waring, Math. Ann. 72 (1912), p. 145—152; Några elementära undersökningar rörande fakulteter och deras aritmetiska egenskaper, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 11 (1917), No. 25; *R. Remak*, Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems, Math. Ann. 72 (1912), p. 153—156. Für die ältere Literatur zum *Waring*schen Problem vgl. die Göttinger Dissertationen von *A. J. Kempner*, Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen, 1912, und *W. S. Baer*, Beiträge zum Waringschen Problem, 1913.

335) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, A new solution of Waring's problem, Quart. J. 48 (1919), p. 272—293; Some problems of Partitio numerorum, I: A new solution of Waring's problem, Gött. Nachr. 1920, p. 33—54, II: Proof that any large number is the sum of at most 21 biquadrates, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 14—27, (III: a. a. O. 250)), IV: The singular series in Waring's problem and the value of the number $G(k)$, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 161—188; *G. H. Hardy*, Some famous problems of the Theory of Numbers, and in particular Waring's problem, Inaugural lecture, Oxford 1920. Vgl. auch *E. Landau*, a) Zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems, Gött. Nachr. 1921, p. 88—92; b) Zum Waringschen Problem, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 219—247; c) Über die Hardy-Littlewoodschen Arbeiten zur additiven Zahlentheorie, Jahresb. d. deutschen Math.-Ver. 30 (1921), p. 179—185; *H. Weyl*, Bemerkungen über die Hardy-Littlewoodschen Untersuchungen zum Waringschen Problem, Gött. Nachr. 1921, p. 189—192; *A. Ostrowski*, Bemerkungen zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 28—34. *E. Landau* (b.) berücksichtigt auch gewisse Verallgemeinerungen, die zuerst von *Kamke* mit der *Hilbert*schen Methode behandelt wurden: Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes, Math. Ann. 83 (1921), p. 85—112. — Die im Texte gewählte Bezeichnungsweise weicht etwas von der *Hardy-Littlewood*schen ab und schließt sich an *Landau* (b.) an.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^k}, \quad f^s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) x^n$$

gesetzt, wo also $r(n)$ von s und k abhängt. Um die *Waring*sche Vermutung, $r(n) > 0$ für $s > s_0 = s_0(k)$, zu beweisen, setzen *Hardy* und *Littlewood*

$$r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x| = 1 - \frac{1}{n}} \frac{f^s(x)}{x^{n+1}} \, dx.$$

Bei dem Versuch, aus dieser Integraldarstellung ein asymptotisches Ergebnis über $r(n)$ zu gewinnen, stößt man auf ungeheure Schwierigkeiten, da die Funktion unter dem Integralzeichen nicht über den Einheitskreis fortgesetzt werden kann. *Hardy* und *Littlewood* bemerken nun, daß die Einheitswurzeln $\varrho = e^{\frac{2p\pi i}{q}}$ gewissermaßen die „schwersten" Singularitäten von $f(x)$ sind; bei radialer Annäherung an den Punkt $x = \varrho$ wird $f^s(x)$ asymptotisch gleich einer Hilfsfunktion, die durch eine Potenzreihe von der einfachen Form[336]) $\sum \nu^\alpha \left(\frac{x}{\varrho}\right)^\nu$, mit einer Konstanten multipliziert, dargestellt wird. Der Hauptgedanke der Methode ist nun, $f^s(x)$ durch eine Summe solcher Hilfsfunktionen, d. h. $r(n)$ durch die entsprechende Summe der Koeffizienten von x^n, zu approximieren. Die Durchführung dieses Ansatzes gelingt natürlich nur durch ziemlich verwickelte Überlegungen, wobei die Untersuchungen von *Weyl*[114]) über Diophantische Approximationen eine wichtige Rolle spielen. Das folgende Hauptresultat wird erhalten: Für alle $s \geqq s_0(k)$ ist bei unendlich wachsendem n

$$(106) \qquad r(n) \sim \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} n^{\frac{s}{k} - 1} S,$$

wo S die sog. „singuläre Reihe"

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ (p,q)=1}}^{q-1} \left(\frac{S_{pq}}{q}\right)^s e^{-\frac{2\pi i n p}{q}},$$

mit

$$S_{pq} = \sum_{h=1}^{q} e^{\frac{2\pi i h^k p}{q}}$$

bezeichnet. Die Reihe S ist für $s \geqq s_0(k)$ konvergent und $> \sigma$, wo $\sigma = \sigma(k, s)$ nicht von n abhängt. Für s_0 ist insbesondere die Zahl $s_0 = (k-2)2^{k-1} + 5$ wählbar.

---

336) *Landau*, a. a. O. 335b), zeigt, daß man sogar eine noch einfachere, durch eine Binomialreihe dargestellte Hilfsfunktion benutzen kann.

Die *Hardy-Littlewood*sche Methode ergibt also wesentlich mehr als die *Hilbert*sche, welche nur einen Existenzsatz lieferte. Insbesondere folgt, daß es zu jedem k eine *kleinste* Zahl $G(k)$ gibt, so daß alle *hinreichend großen* n als Summen von höchstens je $G(k)$ k^{ten} Potenzen darstellbar sind, und daß $G(k) \leqq (k-2)2^{k-1} + 5$ ist. Jede hinreichend große Zahl ist also die Summe von höchstens 21 Biquadraten; für den Fall $k = 3$ liefert der Satz aber nur $G(k) \leqq 9$, während schon früher durch *Landau*[337]) bekannt war, daß jede hinreichend große Zahl die Summe von höchstens 8 Kuben ist. Andererseits ist bekannt[338]), daß immer $G(k) \geqq k + 1$, und im Falle $k = 2^m$ sogar $G(k) \geqq 4k$ ist.

Im Falle $k = 2$ wird die erzeugende Funktion $f(x)$ durch eine Thetareihe ausgedrückt:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} x^{n^2} - 1\right),$$

und die Transformationstheorie der Thetafunktionen gestattet nun, viel genauere Resultate als im allgemeinen Falle zu erhalten.[339]) Die asymptotische Gleichung (106) bleibt auch hier für $s \geqq 4$ richtig; es kann sogar für $3 \leqq s \leqq 8$ in (106) das Zeichen $\sim$ durch $=$ ersetzt werden. Im Falle $s = 3$ ist $S = 0$ für unendlich viele n (nämlich für $n = 4^a(8b + 7)$). Durch Umformung der so erhaltenen Ausdrücke erhält man neue Beweise der klassischen Formeln für die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von Quadraten. Besonders wichtig für diese Untersuchungen waren einige neuere Arbeiten von *Mordell*[340]), der die Darstellung von Zahlen durch Quadratsummen mit Hilfe der Theorie der Modulfunktionen systematisch untersuchte.

---

337) *E. Landau*, Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie, Math. Ann. 66 (1909), p. 102—105. Bei dem Beweis wird ein Satz über Primzahlen in arithmetischen Reihen benutzt. Nach *Wieferich* ist *jede* Zahl die Summe von höchstens 9 Kuben; es gibt auch tatsächlich Zahlen (23, 239), die 9 Kuben erfordern: Math. Ann. 66 (1909), p. 95—101.

338) Außerdem kennt man z. B. $G(6) \geqq 9$. Eine Zusammenstellung der bekannten Resultate geben *Hardy* und *Littlewood*, Partitio numerorum IV (a. a. O. 335). Auf die Funktion $g(k)$, die man erhält, wenn man in der Definition von $G(k)$ die Wörter „hinreichend große" ausläßt, gehen wir hier nicht ein; es sei nur bemerkt, daß aus der Existenz von $G(k)$ unmittelbar die Existenz von $g(k)$ folgt.

339) *G. H. Hardy*, On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five, Trans. Amer. math. Soc. 21 (1920), p. 255—284. Vgl. hierzu *S. Ramanujan*, On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers, Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1919), p. 259—276.

340) *L. J. Mordell*, On the representations of numbers as a sum of $2r$

Über die Anwendung der Methode auf den „*Goldbach*schen Satz" und verwandte Primzahlprobleme wurde schon in Nr. **31** berichtet. — Zum ersten Male wurde die Methode nicht auf *Warings* Satz angewendet, sondern auf das Problem der Abschätzung der Funktion $p(n)$, welche die Anzahl der „unbeschränkten Partitionen" von n, d. h. die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen von

$$n = x + 2y + 3z + 4u + \cdots,$$

angibt. Als erzeugende Funktion tritt hier

$$f(x) = 1 + \sum_1^\infty p(n)x^n = \prod_1^\infty \frac{1}{1-x^n}$$

auf. *Hardy* und *Ramanujan*[341]) beweisen über $p(n)$ sehr genaue asymptotische Sätze, aus denen insbesondere

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{6n}} \tag{107}$$

folgt. Der Hauptgedanke ist wieder derselbe: die nicht fortsetzbare Funktion $f(x)$ wird durch eine Summe fortsetzbarer Funktionen approximiert, die in je einer Einheitswurzel singulär sind. Die rechte Seite in (107) rührt übrigens von der „schwersten" Singularität $x = 1$ her.

39. Diophantische Approximationen. Durch die in den Nummern **7** und **17** besprochenen Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen wurde ein lebhaftes Interesse für diese Theorie erweckt. Jene Anwendungen gingen von dem grundlegenden *Kronecker*schen[342]) Satze aus, der in moderner Ausdrucksweise so lautet: Es seien $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ *linear unabhängige* Zahlen, und es sei

$$(x) = x - [x]$$

gesetzt; dann liegen die Punkte mit den Koordinaten

$$x_1 = (n\alpha_1),\ x_2 = (n\alpha_2),\ \ldots\ x_k = (n\alpha_k), \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{108}$$

im k-dimensionalen Einheitswürfel überall dicht. *Weyl*[114]) gibt eine

---

squares, Quart. J. 48 (1917), p. 93—104; On the representations of numbers as the sum of an odd number of squares, Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1919), p. 361—372.

341) *G. H. Hardy* und *S. Ramanujan*, Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n, Paris C. R. 164 (1917), p. 35—38; Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London math. Soc. (2) 17 (1918), p. 75—115.

342) *L. Kronecker*, Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variabeln, Sitzungsb. Akad. Berlin 1884, p. 31—46, Werke 3 : 1, p. 1071—1080; Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, Sitzungsb. Akad. Berlin 1884, p. 1179—1193, Werke 3 : 1, p. 47—110.

für die genannten Anwendungen wesentliche Vertiefung dieses Satzes, indem er zeigt, daß jene Punkte sogar in jedem Teile des Einheitswürfels *asymptotisch gleich dicht* liegen. Die Anzahl derjenigen unter den N ersten Punkten (108), die einem Teilgebiet vom Inhalt δ angehören, ist also asymptotisch gleich δN. *Weyl* beweist dies durch systematische Benutzung der „analytischen Invariante der Zahlklassen mod. 1", der Funktion $e^{2\pi i z}$.

Hardy-Littlewood[343]) und *Weyl*[114]) geben auch wichtige Verallgemeinerungen auf den Fall, wo in (108) n durch n^q oder durch ein Polynom ersetzt wird; die hierbei von *Weyl* eingeführten, eleganten Methoden zur Transformation und Abschätzung von Summen mit dem allgemeinen Gliede $e^{2\pi i p(n)}$ (p ein Polynom) waren für die in der vorhergehenden Nummer besprochenen Untersuchungen über *Warings* Problem von grundlegender Bedeutung und haben auch zu neuen Resultaten über die Größenordnung von $\zeta(s)$ auf vertikalen Geraden geführt (vgl. Nr. 18). *Hardy* und *Littlewood* haben insbesondere Summen der Gestalt

$$\sum_1^n e^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 \alpha\pi i}, \quad \sum_1^n e^{\nu^2\alpha\pi i}, \quad \sum_1^n (-1)^{\nu-1} e^{\nu^2\alpha\pi i}$$

untersucht, die mit dem Verhalten der Thetareihen bei Annäherung an die Konvergenzgrenze zusammenhängen. Wenn α irrational ist, sind alle drei Summen von der Form $o(n)$. Auch über die Verteilung der Zahlen $(\lambda_n\alpha)$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine unbegrenzt und monoton wachsende Zahlfolge ist, gibt es Sätze, die den vorhergehenden entsprechen.[344]) Für $\lambda_n = a^n$ hängen diese Sätze mit der Verteilung der Ziffern in (verallgemeinerten) Dezimalbrüchen zusammen.[345])

Für die Summe $\sum(\nu\alpha)$ gilt bei irrationalem α immer

$$\sum_1^n (\nu\alpha) = \tfrac{1}{2}n + o(n).$$

Wird in dieser Formel das Restglied durch ein „besseres" ersetzt, so

343) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* Some problems of diophantine approximation, Intern. Congr. of math. Cambridge 1912, p. 223—229; Acta Math. 37 (1914), p. 155—238. Vgl. auch *J. G. van der Corput,* Über Summen, die mit den elliptischen Θ-Funktionen zusammenhängen, Math. Ann. 87 (1922), p. 66—77.

344) Vgl. hierzu auch *R. H. Fowler,* On the distribution of the set of points $(\lambda_n\Theta)$, Proc. London math. Soc. (2) 14 (1914), p. 189—206.

345) *E. Borel,* Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Palermo Rend. 27 (1909), p. 247—271 (vgl. auch Leçons sur la théorie des fonctions, deuxième éd., Paris 1914). Weitergehende Sätze geben *Hardy* und *Littlewood,* a. a. O. 343).

kann die neue Formel nicht für *alle* irrationalen α gelten; beschränkt man sich dagegen auf spezielle Klassen von Irrationalitäten, so kann die Abschätzung erheblich verschärft werden. Es gilt z. B. für ein α, bei dessen Entwicklung in einen gewöhnlichen Kettenbruch die auftretenden Nenner beschränkt sind[346])

$$\sum_1^n (\nu\alpha) = \tfrac{1}{2}n + O(\log n)$$

Ostrowski[346]) zeigt, daß bei *keinem* irrationalen α hier das O gegen o vertauscht werden kann. *Hardy* und *Littlewood*[346]) zeigen, daß das Problem der Abschätzung von $\sum(\nu\alpha)$ mit der Bestimmung der Gitterpunktanzahl in einem gewissen rechtwinkligen Dreieck nahe verbunden ist. *Hecke*[347]) hat jene Summen für quadratisch irrationale α näher untersucht. Ist insbesondere $\alpha = \sqrt{D}$, wo $4D$ eine positive Fundamentaldiskriminante ist (vgl. Nr. **40**), so konvergiert die *Dirichlet*sche Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{(n\alpha) - \frac{1}{2}}{n^s}$$

für $\sigma > 0$ und stellt eine überall meromorphe Funktion dar, die in der Halbebene $\sigma \leqq 0$ unendlich viele Pole besitzt.

Es sei
$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

die gewöhnliche Kettenbruchentwicklung einer irrationalen Zahl α; hinsichtlich der Größenordnung der a_n sind u. a. folgende Sätze bekannt:[348])

1. Die Menge der α, für die von einer gewissen Stelle an $a_n > 1$ gilt, hat das Maß Null.

2. Es seien $d_1, d_2, \ldots$ und $k_1, k_2, \ldots$ monoton wachsende Folgen positiver Zahlen, und es sei $\sum \frac{1}{d_n}$ divergent, $\sum \frac{1}{k_n}$ konvergent. „Fast überall" ist dann von einer gewissen Stelle an $a_n < k_n$, und „fast überall" ist $a_n > d_n$ für unendlich viele n.

346) *M. Lerch,* L'interméd. des Math. 11 (1904), p. 145; *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* Some Problems of diophantine approximation: the lattice-points of a right-angled triangle, Proc. London math. Soc. (2) 20 (1921), p. 15—36; *A. Ostrowski,* Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Abh. Math. Seminar Hamburg 1 (1921), p. 77—98.

347) *E. Hecke,* Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins, Abh. Math. Seminar Hamburg 1 (1921), p. 54—76.

348) *E. Borel,* a. a. O. 345); *F. Bernstein,* Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem, Math. Ann. 71 (1911), p. 417—439.

Hiermit hängen die Fragen nach der Approximation irrationaler Zahlen durch rationale nahe zusammen.[349]) Zu jedem irrationalen α gibt es unendlich viele rationale $\frac{p}{q}$, so daß

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$$

gilt. Wenn k_n die obige Bedeutung hat, so bilden diejenigen α, die sich durch unendlich viele $\frac{p}{q}$ mit der Genauigkeit

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q k_q}$$

approximieren lassen, eine Menge vom Maß Null. Wenn α eine algebraische Zahl vom Grade n ist, so gilt nach einem wichtigen Satze von *Siegel*[350]) für jedes rationale $\frac{p}{q}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\gamma}{q^{2\sqrt{n}}},$$

wo γ nur von α abhängt.

V. Algebraische Zahlen und Formen.

40. Quadratische Formen und Körper.[351]) Die nach *Dirichlet* benannten Reihen wurden von ihm gebraucht, um die Anzahl der verschiedenen Klassen binärer quadratischer Formen einer gegebenen Diskriminante zu berechnen;[352]) die Lösung dieser Aufgabe setzte ihn in den Stand, seinen Satz über die Primzahlen einer arithmetischen Reihe zu beweisen (vgl. Nr. 30). Über die Berechnung jener Klassenanzahl und ihre Beziehung zu den *Gauß*schen Summen ist in I C 3, Nr. 2, über die analogen Probleme bei Formen mit mehr als zwei Veränderlichen in I C 2, d und e, berichtet worden; es seien hier nur einige Ergänzungen für die binären Formen gegeben.

---

349) Vgl. *A. Hurwitz,* Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche, Math. Ann. 39 (1891), p. 279—284; *E. Borel,* Contribution à l'analyse arithmétique du continu, J. math. pures appl. (5) 9 (1903), p. 329—375; *O. Perron,* Irrationalzahlen, Berlin und Leipzig (Ver. wiss. Verleger) 1921.

350) *C. Siegel,* Approximation algebraischer Zahlen, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 173—213.

351) Was sich unmittelbar durch Spezialisierung ($n = 2$) aus Formeln der beiden folgenden Nummern ergibt, wird hier nicht erwähnt.

352) *G. Lejeune-Dirichlet,* Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Crelles J. 19 (1839), p. 324—369 und 21 (1840), p. 1—12, 134—155, Werke 1, p. 411—496.

Die quadratische Form werde in *Kronecker*scher Bezeichnungsweise[353])

$$f(xy) = ax^2 + bxy + cy^2 = (a, b, c)$$

geschrieben, ihre Diskriminante sei

$$b^2 - 4ac = D = Q^2 D_0,$$

wo D_0 eine sog. *Fundamentaldiskriminante*[354]) ist. Es sei

$$(a_1, b_1, c_1), \ldots (a_h, b_h, c_h)$$

ein Repräsentantensystem der *primitiven* — und im Falle $D < 0$ *positiven* — zu D gehörigen Klassen; die Koeffizienten a können dabei immer positiv und die b negativ vorausgesetzt werden. Dann ist für $\sigma > 1$

$$(109) \quad \sum_{\nu=1}^{h} \sum_{x,y} (a_\nu x^2 + b_\nu xy + c_\nu y^2)^{-s} = \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n}{}' \frac{1}{n^s},$$

wo links x und y alle die zugehörige quadratische Form zu Q teilerfremd machenden Paare ganzer Zahlen exkl. (0, 0) durchlaufen; im Falle $D > 0$ tritt jedoch die Beschränkung

$$0 \leqq y < \frac{2 a_\nu U}{T - b_\nu U} x$$

hinzu, wo (T, U) die „Fundamentallösung" der Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$ bezeichnet (vgl. I C 2 c, 2). Rechts durchläuft n in $\sum'$ alle zu Q teilerfremden positiven ganzen Zahlen, und es ist

$$\tau = \begin{cases} 2 & \text{für } D < -4 \\ 4 & \text{„} \;\; D = -4 \\ 6 & \text{„} \;\; D = -3 \\ 1 & \text{„} \;\; D > 0. \end{cases}$$

Das *Kronecker*sche Symbol $\left(\frac{D}{n}\right)$ ist für $n > 0$ ein reeller Charakter mod. $|D|$, und die Reihe $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s}$ ist deshalb eine von den in Nr. 29 untersuchten L-Reihen. Jede der h Doppelsummen auf der linken Seite von (109) hat für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit einem von ν unabhängigen Residuum, und man findet durch Ver-

353) *L. Kronecker,* Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Sitzungsb. Akad. Berlin 1885, p. 770; vgl. auch die ausführliche Darstellung von *J. de Séguier*, Formes quadratiques et multiplication complexe, Berlin 1894.

354) Wenn m eine quadratfreie Zahl bedeutet, so ist *entweder* $D_0 = m$, $m \equiv 1$ (mod. 4), *oder* $D_0 = 4m$, $m \equiv 2$ oder 3 (mod. 4). Es wird immer $D_0 \neq 1$ vorausgesetzt, so daß D keine Quadratzahl ist.

gleichung der Residuen

$$(110)\qquad h = \begin{cases} \tau \dfrac{\sqrt{-D}}{2\pi} L(1) & \text{für} \quad D < 0 \\ \dfrac{\sqrt{D}}{\log \dfrac{T + U\sqrt{D}}{2}} L(1) & \text{für} \quad D > 0. \end{cases}$$

Die Summierung der unendlichen Reihen gestaltet sich am einfachsten, wenn D eine Fundamentaldiskriminante und daher $Q = 1$ ist; der allgemeine Fall läßt sich hierauf zurückführen. Für diesen Fall gilt

$$(111)\qquad h = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2D} \displaystyle\sum_{n=1}^{|D|-1} \left(\frac{D}{n}\right) n & \text{für} \quad D < 0 \\ \dfrac{1}{\log \dfrac{T + U\sqrt{D}}{2}} \displaystyle\sum_{n=1}^{D-1} \left(\frac{D}{n}\right) \log \sin \frac{n\pi}{D} & \text{für} \quad D > 0. \end{cases}$$

Jede Fundamentaldiskriminante D ist die Grundzahl des durch $\sqrt{D}$ erzeugten quadratischen Zahlkörpers (vgl. I C 4a), und den Klassen quadratischer Formen der Diskriminante D entsprechen umkehrbar eindeutig die Idealklassen des Körpers $k(\sqrt{D})$.[355]) Die Anzahl der Idealklassen wird also auch durch (111) gegeben; diese Anzahl hängt nach I C 4a, Nr. 9 mit dem Residuum im Punkte $s = 1$ der zum Körper gehörigen Zetafunktion $\zeta_k(s)$ zusammen. In der Tat ist $\zeta_k(s)$ gleich der rechten Seite von (109), dividiert durch τ,

$$\zeta_k(s) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \zeta(s) = L(s)\,\zeta(s),$$

so daß $\zeta_k(s)$ mit der Theorie von $\zeta(s)$ und den L-Funktionen schon erledigt ist.

Die Ausdrücke (111) können auch nach einer weniger analytischen Methode abgeleitet werden, wobei die *Dirichlet*schen Reihen nicht auftreten.[356]) Verschiedene Transformationen von (111), sowie andere Ausdrücke für Klassenzahlen sind von *Lerch*[357]) gegeben. Er gibt

355) Hierbei sind jedoch zwei Ideale nur dann zur selben Klasse gehörig, wenn ihr Quotient eine Zahl *positiver Norm* ist. Die Anzahl der so definierten Klassen ist entweder gleich der gewöhnlichen Klassenzahl (vgl. I C 4a, Nr. 8) oder doppelt so groß.

356) Vgl. z. B. *Ch. Hermite,* Paris C. R. 55 (1862), p. 684, Oeuvres 2, p. 255.

357) *M. Lerch,* Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers, Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 33 (1906), No. 2; Paris C. R. 135 (1902), p. 1314—1315; Acta Math. 29 (1905), p. 333; 30 (1906), p. 203—293; Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental, J. math. pures appl. (5) 9 (1903), p. 377—401.

insbesondere Formeln, welche für numerische Berechnung geeignet sind, z. B.

$$h = 2 \operatorname{sgn} D_2 \cdot \sum_{\mu=1}^{\frac{1}{2}|D_1|} \left(\frac{D_1}{\mu}\right) \sum_{\nu=1}^{\mu\left|\frac{D_2}{D_1}\right|} \left(\frac{D_2}{\nu}\right),$$

wo D_1 und D_2 Fundamentaldiskriminanten bedeuten, $D_1 D_2 < 0$ und h die Klassenzahl für die Diskriminante $D_1 D_2$ ist.

Für beliebige Diskriminanten gilt[358])

$$h = O(\sqrt{|D|}\log|D|)$$

und für $D > 0$ sogar $\qquad h = O(\sqrt{D})$.

Es gibt unendlich viele positive Diskriminanten mit gleicher Klassenzahl[359]), für negative D ist dies dagegen wahrscheinlich nicht der Fall — in der Tat gilt[360]) für negative Fundamentaldiskriminanten, wenn über die Nullstellen der obigen Funktion $\zeta_k(s)$ eine gewisse unbewiesene Annahme (die insbesondere aus der Richtigkeit der „verallgemeinerten *Riemann*schen Vermutung“ für die L-Funktionen folgen würde) gemacht wird,

$$h > c\frac{\sqrt{|D|}}{\log|D|}.$$

Über die „mittlere Anzahl“ der Klassen gab schon *Gauß*[361]) (ohne Beweis) einige Sätze; es gilt z. B. nach *Landau*[362]), wenn h_n die Klassenanzahl primitiver positiv-definiter Formen der Diskriminante $-n$ bedeutet,

$$\sum_1^x h_n = \frac{\pi}{18\zeta(3)} x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2\pi^2} x + O\left(x^{\frac{5}{6}} \log x\right).$$

Die Klassenzahl für negative Diskriminanten, insbesondere die Lehre von den sog. Klassenzahlrelationen, steht zu der Theorie der elliptischen Funktionen und deren komplexer Multiplikation in naher Beziehung[363]), darauf kann hier jedoch nicht eingegangen werden.

---

358) Vgl. *G. Pólya, J. Schur* und *E. Landau,* a. a. O. 205). *E. Landau* gibt auch analoge Resultate für beliebige algebraische Zahlkörper.

359) *G. Lejeune-Dirichlet,* Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante, Ber. Verhandl. Akad. Berlin 1855, p. 493—495; Werke 2, p. 185—187.

360) *E. Landau,* Über imaginär-quadratische Zahlkörper mit gleicher Klassenzahl; Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Gött. Nachr. 1918, p. 277—295. Vgl. auch *T. Nagel,* Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 1 (1922), p. 140—150.

361) *C. F. Gauss,* Disquisitiones arithmeticae, Art. 302—304.

362) *E. Landau,* a. a. O. 284). Vgl. auch *F. Mertens,* a. a. O. 270).

363) Vgl. I C 6, Nr. **12** sowie II B 3, Nr. **75**. Eine Darstellung der Lehre

Dirichlet[364]) stellte den Satz auf, daß durch jede primitive — und im Falle $D < 0$ positive — binäre quadratische Form einer nicht-quadratischen Diskriminante unendlich viele Primzahlen dargestellt werden können. Er gab auch Andeutungen für den Beweis, der später von *Schering*[365]) und *Weber*[366]) vollständig ausgeführt wurde. *Mertens*[367]), *de la Vallée Poussin*[368]), *Bernays*[369]) und *Landau*[370]) gaben für die Anzahl der darstellbaren Primzahlen $\leqq x$ und für gewisse damit zusammenhängende Summen asymptotische Ausdrücke, die als Spezialfälle in den Sätzen von *Landau*[370]) über Primideale in Idealklassen (vgl. Nr. 42) enthalten sind. Jene Anzahl ergibt sich gleich

$$\frac{1}{h_0} Li(x) + O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

mit konstantem α, wobei $h_0 = 2h$ oder $= h$ ist, je nachdem die betreffende Form einer zweiseitigen Klasse angehört oder nicht. Bei dem Beweis wird die Lehre von der Komposition der Klassen (vgl. I C 2c, 11) benutzt. Diese liefert bekanntlich eine *Abel*sche Gruppe, und indem man die Charaktere dieser Gruppe auf der linken Seite von (109) einführt, gewinnt man neue Funktionen, die den L-Funktionen (vgl. Nr. 29) entsprechen. Der Beweis verläuft dann ähnlich wie bei den Primzahlen in einer arithmetischen Reihe. Die hierbei auftretenden Summen

$$\sum_{x,y} (ax^2 + bxy + cy^2)^{-s},$$

von den Klassenzahlrelationen gab neuerdings *L. J. Mordell,* On class relation formulae, Messenger of Math. 46 (1916), p. 113—135.

364) *G. Lejeune-Dirichlet,* Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen, Ber. Verhandl. Akad. Berlin 1840, p. 49—52; Werke 1, p. 497—502.

365) *E. Schering,* Beweis des Dirichletschen Satzes etc., Ges. math. Werke 2, p. 357—365.

366) *H. Weber,* Beweis des Satzes etc., Math. Ann. 20 (1882), p. 301—329; Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern, Math. Ann. 48 (1897), p. 433—473; 49 (1897), p. 83—100; 50 (1898), p. 1—26.

367) a. a. O. 270).

368) *Ch. de la Vallée Poussin,* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Troisième partie, Ann. soc. sc. Bruxelles 20 : 2 (1896), p. 363—397; Quatrième partie, ibid. 21 : 2 (1897), p. 251—342.

369) *P. Bernays,* Über die Darstellung von positiven, ganzen Zahlen durch die primitiven, binären quadratischen Formen einer nicht-quadratischen Diskriminante, Diss. Göttingen 1912.

370) *E. Landau,* a) Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. 63 (1907), p. 145—204; b) Über die Primzahlen in definiten quadratischen Formen und die Zetafunktion reiner kubischer Körper, Math. Abhandl., H. Schwarz . . . gewidmet, Berlin (Springer) 1914, p. 244—273.

mit verschiedenen Bedingungen für die Summationsvariablen x und y, definieren in der ganzen Ebene eindeutige Funktionen, die nur für $s = 1$ einen Pol haben.[371]) Der Beweis dieses Satzes für positive Diskriminanten, der von *de la Vallée Poussin*[368]) gefunden wurde, war sehr kompliziert und wurde später von *Landau*[372]) vereinfacht. *Dirichlet*[373]) hat auch behauptet, daß unter den durch eine quadratische Form dargestellten Primzahlen unendlich viele vorkommen, die einer gegebenen arithmetischen Reihe angehören, vorausgesetzt, daß die Form überhaupt fähig ist, Zahlen von dieser Reihe darzustellen. *Meyer*[374]) hat diesen Satz bewiesen, *de la Vallée Poussin*[375]) und *Landau*[370]) haben ihn durch Angabe asymptotischer Formeln verschärft.

Aus den neueren Untersuchungen von *Hecke*[376]) geht hervor, daß die Form $ax^2 + bxy + cy^2$, wenn D Fundamentaldiskriminante ist, auch noch dann unendlich viele Primzahlen darstellt, wenn man die ganzzahligen Veränderlichen x und y auf einen beliebigen Winkelraum einschränkt.

Bernays[369]) zeigt, daß die Anzahl der ganzen Zahlen $n \leqq x$, die durch eine quadratische Form darstellbar sind, asymptotisch gleich

$$A \frac{x}{\sqrt{\log x}}$$

mit konstantem A ist (vgl. Nr. 37, am Ende).

---

371) Vgl. Nr. 21. Vgl. ferner *M. Lerch*, Základové theorie Malmsténovskych řad, Rozpravy české akad., 2. Kl., 1 (1892), Nr. 27; Studie v oboru Malmsténovskych řad a invariantu forem kvadratickych, ibid. 2 (1893), Nr. 4; *G. Herglotz*, Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen, Math. Ann. 61 (1905), p. 551—560.

372) *E. Landau*, Neuer Beweis eines analytischen Satzes des Herrn de la Vallée Poussin, Jahresb. d. deutschen Math.-Ver. 24 (1915), p. 250—278.

373) *G. Lejeune-Dirichlet*, Extrait d'une lettre etc., Paris C. R. 10 (1840), p. 285—288; J. Math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 72—74; Sur la théorie des nombres, Werke 1, p. 619—623.

374) *A. Meyer*, Über einen Satz von Dirichlet, Crelles J. 103 (1888), p. 98 bis 117. Vgl. auch *P. Bachmann*, Die analytische Zahlentheorie, Leipzig (Teubner) 1894, insbes. Abschn. 10.

375) *Ch. de la Vallée Poussin*, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers; Cinquième partie, Ann. Soc. sc. Bruxelles 21: 2 (1897), p. 343 bis 368.

376) *E. Hecke*, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, Math. Ztschr. 1 (1918), p. 357—376; 6 (1920), p. 11—51.

41. Die Zetafunktionen von Dedekind und Hecke.[377]) *Dedekind*[378]) hat die *Riemann*sche Zetafunktion für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper k vom Grade n verallgemeinert. Er setzt[379]) (vgl. I C 4a, Nr. 9)

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^s},$$

wo $\mathfrak{a}$ die Ideale, $\mathfrak{p}$ die Primideale von k durchläuft und $F(m)$ die Anzahl der Darstellungen von m als Norm eines Ideals von k bedeutet. Alle drei Ausdrücke sind für $\sigma > 1$ absolut konvergent; $\zeta_k(s)$ ist demnach in dieser Halbebene regulär und $\neq 0$. Für den Körper der rationalen Zahlen ist $\zeta_k(s)$ mit $\zeta(s)$ identisch. Mit Hilfe einer *Weber*schen[380]) Verschärfung der *Dedekind*schen[378]) Abschätzung der Anzahl aller Ideale von k mit Norm $\leq x$ zeigt *Landau*[381]), daß $\zeta_k(s)$ auch noch für $\sigma > 1 - \frac{1}{n}$ regulär ist, mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung mit dem schon von *Dedekind*[378]) angegebenen Residuum

$$\frac{2^{r_1 + r_2} \pi^{r_2} R h}{w \sqrt{|d|}}$$

besitzt. Hier bedeutet (vgl. I C 4a) d die Grundzahl, R den Regulator, w die Anzahl der Einheitswurzeln und h die Anzahl der Idealklassen[382]) von k. Ferner bezeichnet r_1 die Anzahl der reellen und $2r_2 = n - r_1$ die Anzahl der nicht-reellen Wurzeln der irreduziblen Gleichung, die von einer den Körper k erzeugenden Zahl befriedigt wird.

Kann nun das Residuum von $\zeta_k(s)$ anderweitig bestimmt werden, so erhält man offenbar einen Ausdruck für die Klassenzahl h. (Im Falle eines quadratischen Körpers ist dieses Verfahren im wesent-

---

377) Vgl. hierzu II B 7, Nr. 129, wo die Beziehungen zu der allgemeinen Theorie der Thetafunktionen behandelt werden.

378) *G. Lejeune-Dirichlet,* Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. und m. Zusätzen versehen von *R. Dedekind,* 4. Aufl. 1894, p. 610.

379) Die kleinen deutschen Buchstaben bezeichnen Ideale, $N\mathfrak{a}$ ist die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$, $N\mathfrak{a}^s$ bedeutet $(N\mathfrak{a})^s$.

380) *H. Weber,* Über einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung, Gött. Nachr. 1896, p. 275—281; Lehrbuch der Algebra 2, 2. Aufl. 1899, p. 672—678, 712.

381) *E. Landau,* a. a. O. 28).

382) Wo nichts anderes gesagt wird, ist der Begriff „Idealklasse" im „weitesten Sinne" genommen, d. h. zwei Ideale sind zur gleichen Klasse gehörig, sobald ihr Quotient eine Körperzahl ist.

lichen mit dem *Dirichlet*schen — vgl. Nr. 40 — identisch.) Dies läßt sich aber nur in wenigen Fällen durchführen[383]), und zwar:

a) Für die Kreiskörper und deren Unterkörper (vgl. I C 4b[384])). Im Körper der ν^{ten} Einheitswurzeln ist

$$\zeta_k(s) = L_1(s)\, L_2(s) \ldots L_{\varphi(\nu)}(s) \cdot \prod_{p \mid \nu} (1 - p^{-fs})^{-q},$$

wo alle $\varphi(\nu)$ L-Funktionen mod. ν (vgl. Nr. 29) multipliziert werden, und f und q gewisse von ν und p abhängige positive ganze Zahlen sind. Die Formel für die Klassenzahl gibt hier also einen neuen Beweis für das Nichtverschwinden sämtlicher Reihen $L(1)$.[385])

b) Für die Klassenkörper der komplexen Multiplikation[386]).

c) Für solche Körper 4. Grades, die durch eine Zahl von der Form $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ mit rationalen a, b, c, sowie $c > 0$, $a \pm b\sqrt{c} < 0$ erzeugt werden. *Hecke*[387]) beweist unter Anwendung der von ihm untersuchten *Gauß*schen Summen in algebraischen Zahlkörpern einen Satz über gewisse Relativklassenzahlen, aus dem insbesondere ein Ausdruck für die Klassenzahl der genannten Körper folgt. Es zeigen sich hierbei eigentümliche Zusammenhänge mit tiefliegenden Fragen aus der Theorie der Thetafunktionen.

Die analytische Fortsetzung von $\zeta_k(s)$ über $\sigma = 1 - \frac{1}{n}$ hinaus konnte lange nur bei speziellen Körpern ausgeführt werden. Ein sehr bedeutender Fortschritt wurde nun von *Hecke*[388]) gemacht, indem es

383) *E. Landau*, Über eine Darstellung der Anzahl der Idealklassen eines algebraischen Körpers durch eine unendliche Reihe, Crelles J. 127 (1904), p. 167 bis 174 (vgl. auch a. a. O. 78)), zeigt, daß die *Dirichlet*sche Reihe für $\zeta_k(s) \cdot \frac{1}{\zeta(s)}$ im Punkte $s = 1$ konvergiert, so daß die Klassenzahl immer durch eine konvergente unendliche Reihe dargestellt werden kann.

384) Vgl. auch die neuere Darstellung von *R. Fueter*, Synthetische Zahlentheorie, Berlin u. Leipzig (Göschen) 1917.

385) *Dirichlet-Dedekind*, a. a. O. 378), p. 625.

386) Jedes Eingehen auf die Theorie der Klassenkörper mußte aus diesem Bericht ausgeschlossen werden. Vgl. hierzu I C 6.

387) *E. Hecke*, Bestimmung der Klassenzahl einer neuen Reihe von algebraischen Zahlkörpern, Gött. Nachr. 1921, p. 1—23; Reziprozitätsgesetz und Gaußsche Summen in quadratischen Zahlkörpern, ibid. 1919, p. 265—278. Vgl. auch *L. J. Mordell*, On the reciprocity formula for the Gauss's sums in the quadratic field, Proc. London math. Soc. (2) 20 (1920), p. 289—296; *K. Reidemeister*. Über die Relativklassenzahl gewisser relativquadratischer Zahlkörper, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 1 (1922), p. 27—48.

388) *E. Hecke*, Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper, Gött. Nachr. 1917, p. 77—89; eine Anwendung der Entdeckung auf die Theorie der Klassenkörper gibt die Arbeit: Über eine neue Anwendung der Zetafunktionen auf die Arithmetik der Zahlkörper, Gött. Nachr. 1917, p. 90—95.

ihm gelang, den zweiten *Riemann*schen Beweis für $\zeta(s)$ (vgl. Nr. **14**) zu verallgemeinern und dadurch nicht nur die Existenz von $\zeta_k(s)$ in der ganzen Ebene nachzuweisen, sondern auch eine der *Riemann*schen analoge Funktionalgleichung für $\zeta_k(s)$ aufzustellen und mit ihrer Hilfe die *Hadamard*schen Sätze über das Geschlecht und die Produktentwicklung der ganzen Funktion $(s-1)\zeta(s)$ (vgl. Nr. **15**) zu verallgemeinern.[389]) Es läßt sich nämlich, wenn das Ideal $\mathfrak{a}$ gegeben ist, die Summe[390])

$$\zeta(s, \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{j} \sim 1} \frac{1}{N\mathfrak{j}^s}, \tag{112}$$

die über alle Ideale $\mathfrak{j}$ der Klasse $\mathfrak{a}^{-1}$ erstreckt ist, durch eine Thetareihe

$$\vartheta(\tau_1, \ldots \tau_n; \mathfrak{a}) = \sum_{\mu \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}} e^{-\frac{\pi}{\sqrt[n]{N\mathfrak{a}^2 |d|}} \sum_{p=1}^{n} \tau_p |\mu^{(p)}|^2} \tag{113}$$

ausdrücken, wobei μ alle Zahlen von $\mathfrak{a}$ durchläuft, $\mu^{(1)}, \ldots \mu^{(n)}$ die konjugierten Zahlen (inkl. μ selbst), in bestimmter Reihenfolge wie in I C 4a, Nr. 7, geordnet, und diejenigen τ_p, welche konjugiert imaginären Körpern entsprechen, einander gleich sind. *Hecke* findet in der Tat durch sinnreiche Überlegungen

$$\Phi(s, \mathfrak{a}) = A^s \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1} (\Gamma(s))^{r_2} \zeta(s, \mathfrak{a}) \tag{114}$$

$$= \frac{2^{r_1 - 1} n R}{w} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 \ldots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_r \int_0^\infty u^{\frac{ns}{2} - 1} (\vartheta(\tau_1, \ldots \tau_n; \mathfrak{a}) - 1)\, du,$$

wo

$$A = 2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|d|},$$

$$\tau_p = u\, e^{2 \sum_{q=1}^{r} x_q \log |\varepsilon_q^{(p)}|}$$

gesetzt ist und $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten des Körpers bezeichnet. (Wie üblich ist $r = r_1 + r_2 - 1$.) Die Thetareihe (113) genügt aber der Funktionalgleichung

$$\vartheta(\tau_1, \ldots \tau_n; \mathfrak{a}) = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n}} \vartheta\left(\frac{1}{\tau_1} \cdots \frac{1}{\tau_n}; \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{d}^{-1}\right),$$

389) Neuerdings wurde der *erste Riemann*sche Beweis von *C. Siegel* für $\zeta_k(s)$ verallgemeinert: Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion, Math. Ann. 85 (1922), p. 123—128.

390) Die Ausdrücke (112), (113) und (114) sind nicht von dem Ideal $\mathfrak{a}$ selbst, sondern nur von der Klasse von $\mathfrak{a}$ abhängig.

wo $\mathfrak{d}$ das Grundideal von k ist (vgl I C 4a, Nr. 5); hieraus folgt

$$\Phi(s, \mathfrak{a}) - \frac{2^{r_1} R}{w\, s\,(s-1)} =$$

$$= \frac{2^{r_1 - 1} n R}{w} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 \ldots \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_r \int\limits_{1}^{\infty} \Big[u^{\frac{ns}{2}} (\vartheta(\tau_1 \ldots \tau_n;\, \mathfrak{a}) - 1) +$$

$$+ u^{\frac{n(1-s)}{2}} (\vartheta(\tau_1 \ldots \tau_n;\, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}) - 1) \Big] \frac{du}{u},$$

was der Gleichung (26) von Nr. **14** entspricht. Da $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ gleichzeitig mit $\mathfrak{a}$ alle h Idealklassen durchläuft, folgt weiter:

$$Z(s) = s\,(1-s)\, A^s \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1} (\Gamma(s))^{r_2} \zeta_k(s)$$

ist eine ganze Funktion, die sich bei Vertauschung von s mit $1-s$ nicht ändert. $\zeta_k(s)$ ist also, bis auf den Pol bei $s = 1$, in der ganzen Ebene regulär und besitzt die Funktionalgleichung

$$\zeta_k(1-s) = \left(\frac{2}{(2\pi)^s}\right)^n |d|^{s-\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{s\pi}{2}\right)^{r_1+r_2} \left(\sin\frac{s\pi}{2}\right)^{r_1} \left(\Gamma(s)\right)^n \zeta_k(s).$$

(Vgl. [24] Nr. **14**.) Der Punkt $s = 0$ ist Nullstelle r^{ter} Ordnung, $s = -2, -4, \ldots$ Nullstellen $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, $s = -1, -3, \ldots$ Nullstellen $r_2{}^{\text{ter}}$ Ordnung; außerdem gibt es unendlich viele Nullstellen ϱ, die sämtlich dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehören, und es kann wie bei $\zeta(s)$ die Produktentwicklung

$$(s-1)\,\zeta_k(s) = a e^{bs} \frac{1}{s\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1} \left(\Gamma(s)\right)^{r_2}} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}$$

(vgl. [28], Nr. **15**) abgeleitet werden.

Landau[391]) gibt eine Zusammenfassung der Theorie von $\zeta_k(s)$ und zeigt dabei, daß alle ϱ dem *Innern* des „kritischen Streifens" angehören[392]), und daß sogar das Gebiet (vgl. Nr. **19**)

$$\sigma > 1 - \frac{k}{\log t}, \quad t > t_0$$

---

391) *E. Landau,* Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig u. Berlin (Teubner) 1918.

392) *Landau,* a. a. O. 28), hat schon vor *Hecke*s Entdeckung gezeigt, daß keine Nullstelle auf $\sigma = 1$ liegt, und sogar daß $\left|\frac{\zeta_k'}{\zeta_k}\right| < c \log^9 t$ im Gebiete $\sigma > 1 - \frac{k}{\log^7 t}$, $t > t_0$ gilt, was für die Verallgemeinerung des Primzahlsatzes wichtig war (vgl. Nr. **42**). Vgl. hierzu auch *Landau,* Über die Wurzeln der Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. 79 (1919), p. 388—401.

bei passender Wahl von k und t_0 von Nullstellen frei ist. Die Anzahl der ϱ im Rechteck $0 < \sigma < 1$, $0 < t \leqq T$ ist nach *Landau*[391])

$$N(T) = \frac{n}{2\pi} T \log T + \frac{\log |d| - n - n \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T).^{393)}$$

(Vgl. [30], Nr. **16**.) Ob bei der allgemeinen $\zeta_k(s)$ unendlich viele ϱ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen (vgl. Nr. **19**), ist bisher nicht entschieden.

Die Sätze über die Werte von $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden[394]) und über die Größenordnung von $\zeta(s)$ wurden zum Teil auch für $\zeta_k(s)$ verallgemeinert. Insbesondere ist über die μ-Funktion von $\zeta_k(s)$ (vgl. Nr. **18**) bekannt, daß $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma > 1$ und $\mu(\sigma) = n\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)$ für $\sigma < 0$ ist[391]), während für $0 < \sigma < 1$ die μ-Kurve im Dreieck mit den Eckpunkten $\left(0, \frac{n}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(1, 0)$ verläuft.

Bei Untersuchungen über die Verteilung der Primideale in den verschiedenen Idealklassen des Körpers, bzw. in den Idealklassen mod. $\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}$ ein ganzes Ideal), treten gewisse Funktionen auf, die den L-Funktionen des rationalen Körpers entsprechen (vgl. Nr. **29** und für den quadratischen Körper Nr. **40**). Sie werden für $\sigma > 1$ durch die Gleichung

$$\zeta_k(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}$$

definiert, wobei die idealtheoretische Funktion $\chi(\mathfrak{a})$ durch einen Charakter der betreffenden *Abel*schen Gruppe von Idealklassen in analoger Weise wie die zahlentheoretische Funktion $\chi(n)$ bei den L-Funktionen (vgl. Nr. **29**) bestimmt ist. Die analytische Fortsetzung wurde von *Landau*[370a]) bis zu $\sigma = 1 - \frac{1}{n}$, von *Hecke*[395]) über die ganze Ebene ausgeführt und die entsprechenden Funktionalgleichungen wurden von *Hecke*[395]) und *Landau*[396]) aufgestellt. Bei jedem vom Hauptcharakter verschiedenen χ ist $\zeta_k(s, \chi)$, bei dem Hauptcharakter aber $(s - 1) \cdot \zeta_k(s, \chi)$, eine ganze Funktion von Geschlechte Eins, die im Streifen

393) Einen Satz über den Mittelwert des Restgliedes in dieser Formel gibt *H. Cramér,* a. a. O. 186).

394) Vgl. *H. Bohr* und *E. Landau,* a. a. O. 113).

395) *E. Hecke,* Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, Gött. Nachr. 1917, p. 299—318.

396) *E. Landau,* Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 52—154. Es werden hier auch andere Äquivalenzbegriffe, d. h. andere Definitionen des Begriffs „Idealklasse" berücksichtigt.

$0 < \sigma < 1$ unendlich viele Nullstellen besitzt[397]), aber für $\sigma \geqq 1$ durchweg von Null verschieden ist.[398])

Um ein genaueres Studium der Verteilung der Primideale von k zu ermöglichen, führt *Hecke*[376]) eine Klasse *verallgemeinerter Zetafunktionen*

$$\zeta(s, \lambda) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\lambda(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\lambda(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}$$

ein, wo die $\lambda(\mathfrak{a})$ gewisse der Multiplikationsregel $\lambda(\mathfrak{a})\,\lambda(\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ genügende „Größencharaktere" von $\mathfrak{a}$ sind, die von $n - 1$ „Grundcharakteren" abhängen. Durch die Angabe der Grundcharaktere und der Norm ist das Ideal $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt. Diese $\zeta(s, \lambda)$ lassen sich wie $\zeta_k(s)$ durch Thetareihen ausdrücken und besitzen auch ähnliche Funktionalgleichungen. Durch Kombination dieser Resultate mit einem Satz von *Weyl* (vgl. Nr. 39) über diophantische Approximationen erhält *Hecke* neue Sätze über die Verteilung der Primideale und der Primzahlen in gewissen zerlegbaren Formen (vgl. Nr. 40). — Endlich sei auch noch erwähnt, daß *Hecke*[399]) neuerdings verschiedene einem Zahlkörper zugeordnete analytische Funktionen *mehrerer* Variablen eingeführt hat, wobei die $\zeta(s, \lambda)$ als Hilfsmittel dienen.

42. Die Verteilung der Ideale und der Primideale. Es war für die Verallgemeinerung des Primzahlsatzes wesentlich, daß die von *Landau* eingeführten Methoden (vgl. Nr. 25) nur das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Nähe von $\sigma = 1$ benutzten. Ohne die Existenz der *Dedekind*schen $\zeta_k(s)$ in der ganzen Ebene — die damals nicht bekannt war — vorauszusetzen, gelang es ihm nämlich, den sog. *Primidealsatz*[400]) zu beweisen: Für jeden Körper k vom Grade n ist die Anzahl $\pi_k(x)$ der Primideale mit Norm $\leqq x$ asymptotisch gleich $Li(x)$. Unter Benutzung der Gleichung

$$\log \zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{1}{m\, N\mathfrak{p}^{ms}} \qquad (\sigma > 1)$$

397) Außerdem gibt es nur „triviale" Nullstellen bei $s = 0$ und auf der negativen reellen Achse sowie — im Falle eines uneigentlichen Charakters — auf der imaginären Achse.

398) Vgl. *E. Hecke,* a. a. O. 395); *E. Landau,* a. a. O. 370a) und 396), Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 152—162.

399) *E. Hecke*, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen, I. Teil Abhandl. Math. Seminar Hamburg 1 (1922), p. 102—126.

400) *E. Landau,* Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, Math. Ann. 56 (1903), p. 645—670.

ergibt sich dies genau wie bei dem Primzahlsatz. Es gilt sogar nach *Landau*[401])

$$\pi_k(x) = Li(x) + O\left(x e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right)$$

$$\vartheta_k(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p} = x + O\left(x e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right)$$

mit absolut konstantem α, was jedoch erst nach der Entdeckung der Fortsetzbarkeit von $\zeta_k(s)$ bewiesen werden konnte. Hierin ist als Spezialfall die Abschätzung von $\pi(x)$ (vgl. Nr. 27) enthalten. Für die Primideale einer Idealklasse (bzw. einer Idealklasse mod. $\mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{f}$ ein ganzes Ideal ist) gelten entsprechende Gleichungen[402]), und zwar gilt dies auch bei engerer Auffassung des Klassenbegriffs. Dies enthält wiederum als Spezialfall *Dirichlets* Satz von der arithmetischen Reihe (vgl. Nr. 30). Die *Littlewood*schen Beziehungen (60) von Nr. 27 wurden von *Landau*[396]) für einen beliebigen Körper k und für eine beliebige Idealklasse von k verallgemeinert. Insbesondere ist also

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\pi_k(x) - Li(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log\log\log x} < 0 < \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi_k(x) - Li(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log\log\log x}.$$

Bei dem Beweis dieses Satzes dient als Hilfsmittel die Verallgemeinerung der *Riemann-v. Mangoldt*schen Primzahlformel[403]); über die Konvergenzeigenschaften von $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$ gibt es auch hier ähnliche Sätze wie bei $\zeta(s)$ (vgl. Nr. 28).

Wird das Residuum von $\zeta_k(s)$ für $s = 1$ durch $h\lambda$ bezeichnet, so gilt nach *Landau*[404]) für die Anzahl $H(x, K)$ der Ideale mit Norm $\leqq x$, die einer Klasse K von k angehören,

$$H(x, K) = \lambda x + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}}\right)$$

und für die Anzahl $H(x)$ aller Ideale des Körpers mit Norm $\leqq x$

$$H(x) = h\lambda x + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}}\right).$$

401) *E. Landau,* a. a. O. 391). Die in der vorigen Fußnote erwähnte Arbeit gibt eine weniger gute Abschätzung.

402) *E. Hecke,* a. a. O. 395); *E. Landau,* a. a. O. 227), 370a und 396).

403) *E. Landau,* a. a. O. 391) und 396). Für einige Anwendungen einer analogen Formel vgl. *H. Cramér,* a. a. O. 186).

404) *E. Landau,* a. a. O. 289b), 391) und 396).

Andererseits zeigt *Walfisz*[297]), der die von *Hardy* bei den Teilerproblemen (vgl. Nr. **34**) angewandte Methode benutzt,

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{H(x) - h\lambda x}{x^{\frac{n-1}{2n}}} < 0 < \limsup_{x \to \infty} \frac{H(x) - h\lambda x}{x^{\frac{n-1}{2n}}}.$$

In diesen Beziehungen sind als Spezialfälle verschiedene der in Nr. **35** erwähnten Resultate bei den Kreis- und Ellipsoidproblemen enthalten.[405]) *Walfisz*[297]) hat auch eine explizite Formel für $H(x)$ aufgestellt, die als Spezialfälle die entsprechenden Formeln bei jenen Problemen enthält.

Setzt man, analog wie bei $\zeta(s)$, für $\sigma > 1$

$$\frac{1}{\zeta_k(s)} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

so läßt sich über die idealtheoretische Funktion $\mu(\mathfrak{a})$ z. B.

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \mu(\mathfrak{a}) = o(x), \qquad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = 0,$$

mit entsprechenden schärferen Abschätzungen, beweisen.[406]) Auch die Zusammenhangssätze der rationalen Zahlentheorie (vgl. Nr. **33**) lassen sich für einen beliebigen Körper k verallgemeinern[407]), sowie auch verschiedene andere der in den Nummern **32**—**37** erwähnten Sätze über zahlentheoretische Funktionen.[408])

---

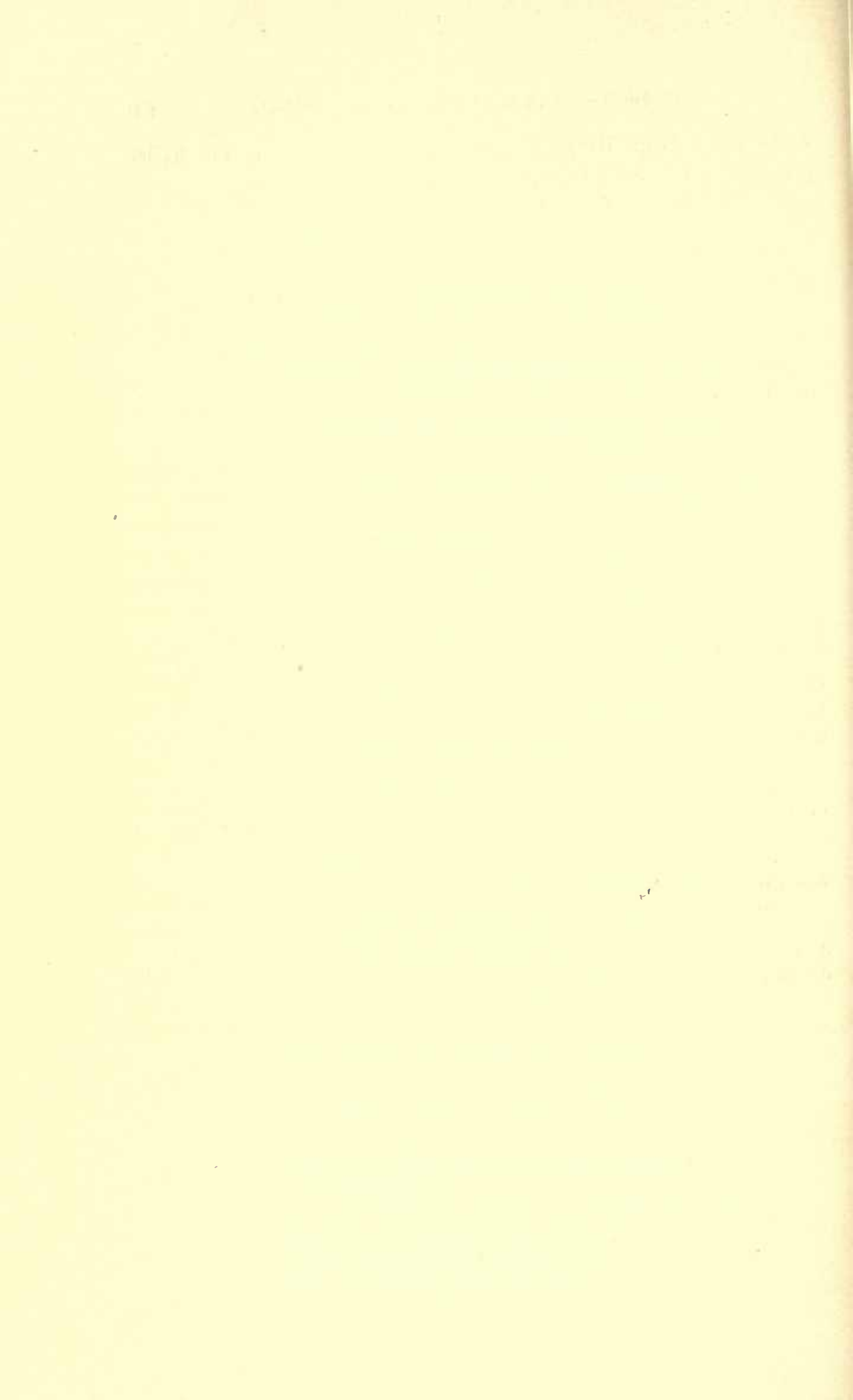
405) Die entsprechenden oberen Abschätzungen waren überhaupt für quadratische Körper schon früher bekannt. Vgl. z. B. *E. Landau*, a. a. O. 284); *A. Hammerstein*, a. a. O. 200).

406) *E. Landau*, Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$, Sitzungsber. Akad. Wien **112** (1903), Abt. 2a, p. 537—570.

407) *E. Landau*, a. a. O. 21); *A. Axer*, a. a. O. 275).

408) Vgl. z. B. *E. Landau*, a. a. O. 300) und 370a); *A. Axer*, Przyczynek do charakterystyki funkcyi idealowej $\varphi(\mathfrak{x})$ [Sur la fonction $\varphi(\mathfrak{x})$ dans la théorie des idéaux], Prace Math.-Fiz. 21 (1910), p. 37—41.

(Abgeschlossen im Mai 1922.)



II C 9. NEUERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER FUNKTIONEN REELLER VERÄNDERLICHEN.

NACH DEN UNTER DER LEITUNG VON **E. BOREL** IN PARIS
REDIGIERTEN FRANZÖSISCHEN REFERATEN
BEARBEITET VON **A. ROSENTHAL** IN HEIDELBERG.*)

Die unter der Leitung von Herrn *E. Borel* entstandenen französischen Artikel der Herren *L. Zoretti, P. Montel* und *M. Fréchet* sind bereits im Jahre 1912 in der französischen Ausgabe der Encyklopädie erschienen. Ursprünglich ist für die deutsche Ausgabe der Encyklopädie nur eine *Übersetzung* dieser Artikel beabsichtigt gewesen. Mit dieser ist durch die Redaktion (*H. Burkhardt* †) zuerst Herr *L. Berwald* (damals München, jetzt Prag) und, als dieser durch Krankheit an der Fortführung gehindert war, der Unterzeichnete betraut worden. Dabei stellten sich jedoch eine Reihe von Unvollständigkeiten und Mängel der französischen Referate heraus, so daß es als wünschenswert erschien, statt einer bloßen Übersetzung eine *Bearbeitung* dieser Encyklopädie-Artikel vorzunehmen. Nach entsprechender Darlegung unserer Gründe gab Herr *E. Borel* (Brief vom 7. Nov. 1913) sein Einverständnis mit einer Bearbeitung, unter der Bedingung, daß die Zusätze des Bearbeiters durch $_*$ * gekennzeichnet werden, entsprechend dem Gebrauch in der französischen Ausgabe der Encyklopädie. Diese Bearbeitung hat der Unterzeichnete im Auftrage der Redaktion ausgeführt, — eine Arbeit, die allerdings durch den Krieg, insbesondere während der Jahre, in denen der Bearbeiter im Felde stand, eine längere Unterbrechung erfahren mußte.

Die Abänderungen und Erweiterungen der französischen Originalartikel sind sehr beträchtlich, was schon rein äußerlich in dem Anwachsen des Umfangs der Artikel auf etwa das Zweieinhalbfache zum Ausdruck kommt, so daß die vorliegende Bearbeitung in vielen Teilen beinahe den Eindruck eines neuen Artikels erwecken wird. Immerhin, der Rahmen, in den alles gepreßt werden mußte, sowie größtenteils die Anordnung, in der die Dinge vorgebracht werden sollten, und die verschieden starke Betonung der einzelnen Teile waren vorgegeben und konnten nicht mehr geändert werden [so daß es auch z. B. nicht möglich war, von vornherein *allgemeine* Räume zugrunde zu legen und damit die axiomatischen Gesichtspunkte durchgehend zur Geltung zu bringen]. Dazu kam

---

*) Die von *A. Rosenthal* herrührenden Zusätze zu dem Text der französischen Autoren sind durch $_*$. . .* gekennzeichnet.

noch, daß s. Z. die „Übersetzung“ auf Anordnung der damaligen Redaktion vorzeitig in den Druck gegeben worden ist, — ein Grund mehr, um nachher bei der Bearbeitung möglichst viel beizubehalten.

Die zweite Hälfte des Artikels von *M. Fréchet,* welche die trigonometrischen Reihen behandelt, ist in der vorliegenden Bearbeitung auf Veranlassung der jetzigen Redaktion völlig in Wegfall gekommen, da ein besonderer Artikel über trigonometrische Reihen von *E. Hilb* und *M. Riesz* erscheint und es natürlich vermieden werden mußte (nachdem über die trigonometrischen Reihen bis etwa 1850 bereits der Artikel von *H. Burkhardt* vorliegt), denselben Gegenstand an drei verschiedenen Stellen der Encyklopädie zur Darstellung zu bringen.

Schließlich soll nicht versäumt werden, den Herren *L. E. J. Brouwer, C. Carathéodory, F. Hausdorff, A. Schoenflies, O. Szász, H. Tietze,* die ganz oder stückweise die Fahnenkorrekturen gelesen haben, hierfür und für einige beachtenswerte Bemerkungen verbindlichst zu danken. **A. Rosenthal.**

Inhaltsübersicht.

II C 9a. DIE PUNKTMENGEN.

Nach dem französischen Artikel von **L. ZORETTI** in Caen bearbeitet von **A. ROSENTHAL** in Heidelberg.

Allgemeines.

1. Einleitung.
2. Die Anwendungen der Mengenlehre.

Grundlegende Eigenschaften der Punktmengen.

3. Lineare Mengen. Definitionen.
4. Die Ableitungen einer Punktmenge.
5. Der *Cantor-Bendixson*sche Satz.
6. Nicht abgeschlossene Mengen.
7. Mächtigkeit der Punktmengen.
8. Die abgeschlossenen und die offenen Mengen.
9. Der *Borel*sche Überdeckungssatz und seine Verallgemeinerungen.
9a. *Die Mengen erster und zweiter Kategorie.*
9b. *Die *Borel*schen Mengen.*

Die Struktur der abgeschlossenen Mengen.

10. Einteilung der abgeschlossenen Mengen.
10a. *Die Struktur der allgemeinsten abgeschlossenen Mengen.*
11. Flächenhafte Kontinua.
12. Linienhafte Kontinua.
13. Die Begrenzung eines ebenen Gebietes.
13a. *Die Begrenzung eines n-dimensionalen Gebietes.*
14. Punkthafte Mengen.
15. Mengen, die von einem Parameter abhängen.

Korrespondenzen zwischen Bereichen von m und n Dimensionen.

16. Die Mächtigkeit des n-dimensionalen Kontinuums. *Peano*kurven.
17. Die Invarianz der Dimensionszahl bei umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen.
17a. *Die übrigen Invarianten der umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen.*
17b. *Sonstige Untersuchungen über umkehrbar eindeutige und stetige Transformationen.*

Der Inhalt der Punktmengen.

18. Die *Cantor*sche Inhaltsdefinition.
19. Der *Jordan*sche Inhalt.
20. Das *Borel*sche und das *Lebesgue*sche Maß.
20a. *Spezielle Sätze über Inhalt und Maß.*
20b. **Carathéodorys* Meßbarkeitstheorie.*
20c. *Das m-dimensionale Maß im n-dimensionalen Raum.*

Anwendungen der Mengenlehre.

21. Anwendungen auf die allgemeine Funktionenlehre.
22. Anwendungen auf die Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen.
23. Anwendungen auf die Theorie der Funktionen komplexer Veränderlichen.
24. Anwendungen auf die Analysis Situs.

Verallgemeinerungen.

25. Die Geradenmengen.
26. Die Funktionalrechnung. Allgemeine Räume.
26a. *Raum von unendlich vielen Dimensionen, Funktionenraum und andere spezielle Räume.*

II C 9b. INTEGRATION UND DIFFERENTIATION.

Nach dem französischen Artikel von **P. MONTEL** in Paris
bearbeitet von **A. ROSENTHAL** in Heidelberg.

Bestimmtes Integral der beschränkten Funktionen einer Veränderlichen.

27. Das Integral nach *Cauchy*.
28. Das *Riemann*sche Integral.
29. Das obere und untere Integral nach *Darboux*.
30. Das *Lebesgue*sche Integral.
31. Geometrische Definition des Integrals.

Bestimmtes Integral nicht beschränkter Funktionen.

32. Uneigentliche Integrale.
33. Das *Lebesgue*sche Integral für nicht beschränkte Funktionen.
34. Eigenschaften des *Lebesgue*schen Integrals.
35. Andere Verallgemeinerungen des Integralbegriffs.
35a. Integraldefinitionen von *W. H. Young*, **J. Pierpont* und *F. Riesz*.*
35b. Das *Borel*sche Integral.
35c. *Das *Denjoy*sche Integral.*
35d. Das *Stieltjes*sche Integral.
35e. *Die *Hellinger*schen Integrale.*
35f. *Das *Perron*sche Integral.*

Integration von Reihen.

36. Integrierbarkeit der Grenzfunktionen.
37. Gliedweise Integrierbarkeit.

Ableitungen und primitive Funktionen.

38. Eigenschaften der vier Derivierten.
39. Eigenschaften der Ableitungen.
40. Existenz der Ableitungen.
40 a. *Beziehungen zwischen den vier Derivierten.*
41. Integrierbarkeit der Ableitungen und der vier Derivierten.
42. Bestimmung einer Funktion mit Hilfe ihrer Ableitung oder einer ihrer vier Derivierten.
43. Wirkliche Aufsuchung der primitiven Funktion einer gegebenen Derivierten oder einer gegebenen Ableitung.
44. Funktionen, die unbestimmte Integrale sind.
44 a. *Allgemeinere Auffassung des unbestimmten Integrals.*
44 b. *Die approximativen Ableitungen.*

Integrale und Ableitungen der Funktionen mehrerer Veränderlichen.

45. Meßbare Funktionen. Summierbare Funktionen. Mehrfache *Lebesgue*sche Integrale.
46. Partielle Ableitungen und totales Differential.
47. Die unbestimmten Integrale und ihre Differentiation.
48. Integration partieller Differentialgleichungen.

II C 9c. FUNKTIONENFOLGEN.

Nach dem französischen Artikel von **M. FRÉCHET** in Poitiers (jetzt in Straßburg) bearbeitet von **A. ROSENTHAL** in Heidelberg.

Reihen und Folgen von Funktionen einer Veränderlichen.

49. Gleichmäßig konvergente Reihen von stetigen Funktionen.
49 a. *Die Verteilung der Stellen gleichmäßiger und ungleichmäßiger Konvergenz.*
49 b. *Gleichgradig stetige Funktionenmengen.*
50. Der *Weierstraß*sche Satz.
51. Interpolation. Beste Approximation.
52. Quasi-gleichmäßige Konvergenz.
53. Grenzfunktionen stetiger Funktionen.
54. Die *Baire*schen Funktionenklassen.
54 a. *Klassifikation der *Borel*schen Mengen und ihre Beziehungen zu den *Baire*schen Funktionen.*
55. Die analytisch darstellbaren Funktionen.
56. Konvergenzcharakter von Folgen meßbarer Funktionen.
57. Konvergenz im Mittel.
57 a. *Allgemeine Beziehungen zwischen meßbaren Funktionen und *Baire*schen Klassen.*

Reihen und Folgen von Funktionen mehrerer Veränderlichen.

58. Funktionen mehrerer Veränderlichen.

II C 9a. DIE PUNKTMENGEN.

Nach dem französischen Artikel von **L. ZORETTI** in Caen
bearbeitet von **A. ROSENTHAL** in Heidelberg.

*Literatur.

(Zusammenfassende Darstellungen.)

R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905.

E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898; 2. éd. Paris 1914.

— Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, Paris 1905.

L. E. J. Brouwer, Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten; 1. Teil: Allgemeine Mengenlehre; 2. Teil: Theorie der Punktmengen; Verhandelingen Akad. Amsterdam (1. Sectie) 12, Nr. 5 (1918) und Nr. 7 (1919).

C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig u. Berlin 1918 [abgekürzt: *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen].

H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, I. Bd., Berlin 1921 [abgekürzt: *H. Hahn,* Reelle Funktionen I].

F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914 [abgekürzt: *F. Hausdorff,* Mengenlehre].

E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambridge 1907 [abgekürzt: *E. W. Hobson,* Theory].†)

C. Jordan, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, I. Bd.; 2. éd. Paris 1893, 3. éd. [nur sehr wenig verändert] Paris 1909.

J. Pierpont, Lectures on the theory of functions of real variables, Boston; Bd. 1, 1905; Bd. 2, 1912.

A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Bericht, erstattet der Deutsch. Math.-Ver.); I. Teil, Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900) [abgekürzt: *A. Schoenflies,* Bericht I 1900].

— II. Teil, Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., II. Ergänzungsband, 1908 [abgekürzt: *A. Schoenflies,* Bericht II 1908].

A. Schoenflies und *H. Hahn,* Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen (Umarbeitung des im VIII. Bande d. Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. erstatteten Berichts); Erste Hälfte: Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen von *A. Schoenflies,* Leipzig und Berlin 1913 [abgekürzt: *A. Schoenflies,* Bericht I 1913].

Ch.-J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, Louvain-Paris; I. Bd., 2. éd. 1909, 3. éd. 1914; II. Bd., 2. éd. 1912.

W. H. Young and *G. Chisholm Young,* The theory of sets of points, Cambridge 1906 [abgekürzt: *W. H.* u. *G. Ch. Young,* Theory].*

---

†) *Hiervon ist 1921 der erste Band einer (zwei Teile umfassenden) zweiten Auflage erschienen, aber mir nicht zugänglich gewesen.*

Allgemeines.

1. Einleitung. Der Teil der Mathematik, den man unter dem Namen *Mengenlehre* zusammenzufassen pflegt, gliedert sich in zwei Theorien wesentlich verschiedenen Inhaltes: die Untersuchung der *abstrakten* Mengen, wobei man keine Rücksicht auf die Natur der Elemente nimmt, welche die Menge bilden, und die der *konkreten* Mengen, wobei die Natur der betrachteten Objekte die Existenz besonderer Eigenschaften zur Folge hat. [Vgl. auch den Artikel I A 5 (*A. Schoenflies*).]

Unter den konkreten Mengen spielen diejenigen, deren Elemente *Zahlen* sind, in den Anwendungen eine besonders wichtige Rolle. Jedes Element kann entweder von einer einzigen Zahl gebildet werden oder von mehreren, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind.

Stellt man, wie es üblich ist, die reellen Zahlen durch die Punkte auf einer Achse dar, die komplexen Zahlen oder die Systeme von zwei Zahlen durch die Punkte einer Ebene, so werden aus den Mengen dieser Zahlen *Punktmengen.* Um eine vollkommen allgemeine und bequeme geometrische *Ausdrucksweise* zu haben, pflegt man zu sagen, daß ein System von n reellen Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

einen *Punkt* im n-dimensionalen Raum R_n darstellt. (Begriff des *arithmetischen* Raumes von n Dimensionen.[1]) In diesem Sinne sind die Mengen, von denen hier die Rede sein soll, Punktmengen.

Charakteristisch für die Mengen ist die *gleichzeitige* Betrachtung unendlich vieler Elemente. Zur Zeit *A. L. Cauchy*s betrachtete man fast nur ihre *Aufeinanderfolge.* Dagegen beschäftigten sich *K. Weierstraß* und *H. A. Schwarz*[2]) mit der *Gesamtheit* der Werte einer Funktion in einem Intervall; *R. Dedekind*[3]) definierte die irrationalen Zahlen, indem er die *Gesamtheit* aller rationalen Zahlen betrachtete. Aber bis zu den Arbeiten von *P. du Bois-Reymond*[4]) und vor allem von *G. Cantor*[5]) ist keine allgemeinere systematische Untersuchung angestellt worden.

1) *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 574; Acta math. 2 (1883), p. 404.

2) J. f. Math. 72 (1870), p. 141 = *H. A. Schwarz,* Math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 341.

3) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872; 4. Aufl., Braunschweig 1912, p. 12.

4) Die allgemeine Functionentheorie I, Tübingen 1882.

5) Insbesondere: Acta math. 2 (1883), p. 305/408; dies ist eine französische Übersetzung der folgenden deutsch erschienenen Arbeiten: J. f. Math. 77 (1874), p. 258; 84 (1878), p. 242; Math. Ann. 4 (1871), p. 139; 5 (1872), p. 123; 15 (1879),

P. du Bois-Reymond hatte nur die Anwendungen auf die allgemeine Funktionenlehre im Auge. Dagegen befreite sich *G. Cantor*, obwohl zu Beginn seiner Untersuchungen von den gleichen Absichten geleitet, bald von der Rücksicht auf die Anwendungen und machte sich die Ausarbeitung einer allgemeinen Theorie der Mengen zur Aufgabe. In den 50 Jahren ihres Bestehens hat diese Theorie sich sehr entwickelt und zahlreiche Anwendungen erfahren. Da im folgenden die geschichtliche Reihenfolge nicht eingehalten wird, erscheint es notwendig, wenigstens in dieser Einleitung einen kurzen Blick auf die Entwicklung zu werfen.

E. Borel[6]) unterscheidet drei Stadien: in der ersten Periode wird die Theorie geschaffen, in der zweiten entwickelt sie sich vollkommen selbständig, in der dritten ist sie im wesentlichen nur noch ein Zweig der Funktionenlehre, eine Hilfsdisziplin, und kehrt so zu ihrem Ursprung, zu dem, was ihr anfänglich die Existenzberechtigung gegeben hatte, zurück.

E. Borel gibt zu, daß diese Einteilung ein wenig künstlich ist, und in der Tat hat es zu allen Zeiten Autoren gegeben, die niemals die Mengen „an und für sich" studiert haben, sondern nur mit Rücksicht auf ihre Anwendungen, wie es andererseits auch heute Autoren gibt, die sich nicht von der Rücksicht auf die Anwendungen leiten lassen.

2. Die Anwendungen der Mengenlehre. Die Anwendungen der Mengenlehre werden von Tag zu Tag zahlreicher und erstrecken sich auf die verschiedenartigsten Zweige der Mathematik. Die wichtigsten Anwendungen findet sie in der Funktionenlehre: Theorie der Integration, Untersuchung der Funktionen reeller oder komplexer Veränderlichen, Entwicklungen in trigonometrische Reihen.

Andererseits hat man das arithmetische und das geometrische Kontinuum in Übereinstimmung zu bringen gesucht. Man hat so den Eigenschaften des geometrischen Kontinuums und damit der ganzen Geometrie (insbesondere dem *Analysis situs* genannten Teil der Geometrie) eine arithmetische Grundlage geben können. Die paradox erscheinenden Eigentümlichkeiten, welche die Mengenlehre aufgedeckt hat, haben uns vorsichtiger gemacht und unserer Raumvorstellung mißtrauen gelehrt; deshalb ist man heutzutage bestrebt, alles aus dem Zahlbegriff abzuleiten.

---

p. 1; 17 (1880), p. 355; 20 (1882), p. 113; 21 (1883), p. 51, 545. *Die Abhandlung Math. Ann. 21 (1883), p. 545 ist auch separat erschienen unter dem Titel: Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, Leipzig 1883.*

6) Revue gén. sc. 20 (1909), p. 315.

Wir werden einige dieser Anwendungen der Mengenlehre hier nur kurz berühren, da sie ausführlicher in anderen Teilen der Encyklopädie entwickelt werden.

Es sei noch erwähnt, daß die Schöpfer der Mengenlehre, *G. Cantor* und *P. du Bois-Reymond*, übereinstimmend Anwendungen auf die mathematische Physik vorausgesagt haben. *G. Cantor*[7]) entwickelt diesen Gedanken ausführlich; *P. du Bois-Reymond*[8]) spricht, wenn auch nur ganz kurz, in ähnlichem Sinne davon[9]). Diese von beiden Autoren geäußerten Vermutungen, die sich auf die Möglichkeit einer Umwandlung physikalischer Grundanschauungen durch die Mengenlehre bezogen, haben sich, wenigstens bisher, kaum bestätigt. *Dagegen sind neuerdings in ganz anderer Weise wirklich Anwendungen der Punktmengenlehre auf Fragen der mathematischen Physik gemacht worden, indem mengentheoretische Schlüsse zum Beweis physikalischer Sätze verwendet wurden.[10])*

Weiter haben *P. du Bois-Reymond* und *G. Cantor* auf das philosophische Interesse dieser Fragen hingewiesen.[11])

---

7) Siehe Math. Ann. 20 (1882), p. 120/1; Acta math. 2 (1883), p. 370/1; *ferner Acta math. 7 (1885), p. 122/24. Vgl. auch [160]).*

8) Functionenth.[4]), p. 211/12.

9) Siehe auch *E. Borel*, Thèse, Paris 1894, p. 40/42 = Ann. Éc. Norm. (3) 12 (1895), p. 48/50.

10) **A. Rosenthal,* Ann. d. Phys. 42 (1913), p. 796; *M. Plancherel,* ib. p. 1061; dies sind zwei Beweise der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme. Ferner die mengentheoretische Behandlung einer astronomischen Frage: *F. Bernstein,* Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem, Math. Ann. 71 (1911), p. 417; vgl. auch die sich hieran anschließende Diskussion: *P. Bohl,* Math. Ann. 72 (1912), p. 295; *E. Borel,* ib. p. 578; *F. Bernstein,* ib. p. 585. — Übrigens war wohl *H. Poincaré* der erste, der in der Physik und Astronomie [bei der Untersuchung der „Stabilité à la Poisson"] Betrachtungen angewendet hat, die der Mengenlehre nahe stehen, siehe Acta math. 13 (1890), p. 67/73, und Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Bd. III, Paris 1899, p. 142/155. Siehe dazu auch *C. Carathéodory,* Über den Wiederkehrsatz von *Poincaré,* Sitzgsber. Akad. Wiss. Berlin 33 (1919), p. 580/4, wo eine Präzisierung des Beweises dieses Satzes mit Hilfe der *Lebesgue*schen Maßtheorie gegeben wird.

Vgl. ferner die zusammenfassende Darstellung: *E. B. Van Vleck,* The rôle of the point-set theory in geometry and dynamics, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 21 (1915), p. 321/41.*

11) *Vgl. außer *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 545/91; Acta math. 2 (1883), p. 381/408, vor allem: *G. Cantor,* Zur Lehre vom Transfiniten, Halle 1890; dies ist ein Abdruck von Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 88 (1886), p. 224/233; 91 (1887), p. 81/125 u. 252/270; 92 (1888), p. 240/265.*

Obgleich übrigens hier nur wenig von den Anwendungen die Rede sein soll, werden sie doch niemals ganz aus dem Auge gelassen, in dem Sinne, daß hauptsächlich diejenigen Resultate betrachtet werden sollen, die bereits Anwendungen erfahren haben oder wenigstens solcher fähig scheinen, während gewisse Zweige der Mengenlehre, die zwar an und für sich nicht ohne Wichtigkeit sind, aber bisher keine Anwendungen gefunden haben, etwas mehr in den Hintergrund gestellt werden.

Grundlegende Eigenschaften der Punktmengen.

3. Lineare Mengen. Definitionen. Die Mengen, mit denen man sich zuerst beschäftigt hat, sind die Mengen von reellen Zahlen oder Punkten auf einer Geraden: die *linearen* Mengen.

Eine solche Menge nennt man *beschränkt* (borné)[12]), wenn alle Zahlen der Menge ihrem absoluten Betrag nach kleiner sind als eine angebbare Zahl. Dann existieren unendlich viele Zahlen, die von keiner Zahl der Menge übertroffen werden; und ebenso unendlich viele Zahlen, die keine Zahl der Menge übertreffen. Unter den ersten gibt es eine Zahl, die kleiner als alle anderen, und unter den letzten eine, die größer als alle anderen ist.[13])

Geometrisch ausgedrückt: man kann unendlich viele Punkte finden, die keinen Punkt der Menge rechts lassen, und unendlich viele Punkte, die keinen Punkt der Menge links lassen. Unter jenen gibt es einen, der am weitesten links, unter diesen einen, der am weitesten rechts liegt.

Diese beiden Zahlenwerte oder Punkte heißen die *obere Grenze* und die *untere Grenze* der Menge.[14]) Keine Zahl der Menge überschreitet die obere Grenze oder bleibt unterhalb der unteren Grenze; ferner gehört die Grenze entweder der Menge an, oder sie gehört ihr nicht an; im zweiten Falle gibt es jedoch immer Zahlen der Menge, die der Grenze beliebig nahe kommen. Daß die obere Grenze der Menge angehört, ist gleichbedeutend damit, daß es in der Menge eine Zahl gibt, die größer ist als alle anderen.

So ist die Menge der Zahlen $\frac{1}{n}$, wo n eine beliebige ganze

---

12) *C. Jordan*, Cours d'Analyse (2e éd.) 1, Paris 1893, p. 22; (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 22. **A. Schoenflies* pflegt anstatt „beschränkt" in gleicher Bedeutung das Wort *„geschränkt"* zu gebrauchen.*

13) **B. Bolzano,* Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Prag 1817, p. 41 = Ostwalds Klassiker Nr. 153, p. 25.*

14) *Vgl. I A 3, Nr. 16, insbesondere Note 122 (*A. Pringsheim*); in Frankreich sagt man jetzt ziemlich allgemein: *borne supérieure* bzw. *inférieure.**

positive Zahl bezeichnet, beschränkt. Ihre obere Grenze, $+1$, ist eine Zahl der Menge; ihre untere Grenze 0 dagegen nicht.

Die Menge aller Zahlen, die zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b liegen, wird *Intervall* (a, b) genannt; a und b heißen die Endpunkte des Intervalls. *Im Anschluß an *G. Kowalewski*[14a]) bezeichnet man jetzt vielfach mit (a, b) das Intervall ohne die Endpunkte, mit $\langle a, b\rangle$ das Intervall einschließlich der Endpunkte, mit $\langle a, b)$ bzw. $(a, b\rangle$ das Intervall einschließlich nur des linken bzw. rechten Endpunkts. Neuerdings hat *H. Hahn*[14b]) diese Bezeichnungsweise noch dadurch ein wenig modifiziert, daß er statt $\langle$ oder $\rangle$ schreibt: [bzw.]; die vorhin genannten Intervalle schreibt er also der Reihe nach: (a, b); $[a, b]$; $[a, b)$ bzw. $(a, b]$. Wir werden diese bequeme Schreibweise im folgenden stets verwenden. — (a, b) bzw. $[a, b]$ werden häufig *offene* bzw. *abgeschlossene Intervalle* genannt, $[a, b)$ und $(a, b]$ als *halboffene* Intervalle bezeichnet.* Gehört eine Zahl einem Intervall unter Ausschluß der Endpunkte an, so sagt man, sie sei *im Innern* oder *innerhalb des Intervalles* gelegen, oder auch, das Intervall umgebe die Zahl.[14c])

Wenn nun ein Punkt x_0 die Eigenschaft besitzt, daß jedes ihn umgebende Intervall mindestens einen (von x_0 verschiedenen) Punkt einer gegebenen Menge enthält, so heißt der Punkt x_0 *Grenzpunkt* oder *Häufungspunkt*[15]) der Menge. Die Nullstellen der Funktion

$$\sin \frac{1}{x}$$

z. B. bilden eine Menge, deren Häufungspunkt der Punkt $x = 0$ ist.

Eine Punktmenge kann mehrere Häufungspunkte haben, sogar unendlich viele; diese Häufungspunkte bilden also eine neue Menge, die *G. Cantor*[16]) die *Ableitung* der gegebenen nennt. Ist die vor-

---

14a) **G. Kowalewski,* Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig u. Berlin 1909, p. 11.*

14b) **H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 28/29.*

14c) Im Französischen bezeichnet man eine Zahl des Intervalls als „*intérieur au sens large*" bzw. „*intérieur au sens étroit* (oder *strict*)", je nachdem sie mit einem der Endpunkte zusammenfallen kann oder nicht.

15) Nur ganz selten ist hierfür die Bezeichnung „Verdichtungspunkt" benutzt worden. *Jedenfalls wird jetzt allgemein im Anschluß an *E. Lindelöf* der Ausdruck *Verdichtungspunkt* oder *Kondensationspunkt* (*point de condensation*) in einem *anderen* engeren Sinn gebraucht. Siehe Nr. 5. — Zwischen *Grenzpunkt* und *Häufungspunkt* wird meist kein Unterschied gemacht. Neuerdings benutzt allerdings *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 56 u. 58, diese beiden Worte in verschiedener Weise, indem er das Wort „Grenzpunkt" für den speziellen Fall konvergenter Punktfolgen reserviert; analog auch: *M. Fréchet,* Ann. Éc. Norm. (3) 38 (1921), p. 341.*

16) *G. Cantor,* Math. Ann. 5 (1872), p. 129; Acta math. 2 (1883), p. 343.

gelegte Menge mit E bezeichnet, so bezeichnet man ihre Ableitung mit E'.

Die obere Grenze der Ableitung heißt der *obere Limes* oder die *obere Unbestimmtheitsgrenze*[17]) der ursprünglichen Menge.

4. Die Ableitungen einer Punktmenge. Die meisten der vorstehenden Definitionen lassen sich ohne weiteres auf die Punktmengen in einem n-dimensionalen Raume R_n übertragen.

*Sehr bequem ist hierbei ein von *H. Lebesgue*[17a]) eingeführter Sprachgebrauch (der seitdem viel verwendet wird). Man bezeichnet als *n-dimensionales Intervall* die Gesamtheit der Punkte, für welche

$$a_k < x_k < b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

ist, wenn x_k die Koordinaten und a_k, b_k feste Zahlen sind. Die Zahlen $|b_k - a_k|$ sind die „Kantenlängen" des Intervalls. Der Deutlichkeit halber wird man hier auch sagen: „*offenes* n-dimensionales Intervall", während man als „*abgeschlossenes n-dimensionales Intervall*" die Punktmenge bezeichnet, die entsteht, wenn man hier überall $<$ durch $\leqq$ ersetzt.

Verwendet man in diesem Sinn das Wort „Intervall" auch im n-dimensionalen Fall, so hat man eine von der Dimensionszahl unabhängige Ausdrucksweise und kann vieles ohne Änderung des Wortlauts vom linearen auf den mehrdimensionalen Fall übertragen.[17b])*

Man definiert also genau wie im linearen Fall:

Eine Menge des n-dimensionalen Raumes R_n heißt *beschränkt*, wenn man im R_n ein (n-dimensionales) Intervall angeben kann, welches die Punkte der Menge enthält.

Grenzpunkt oder *Häufungspunkt* einer Menge E heißt ein Punkt von der Eigenschaft, daß in jedem n-dimensionalen Intervall, das diesen Punkt zum Mittelpunkt hat, mindestens ein von ihm selbst verschiedener Punkt der Menge E existiert. Die Menge aller Häufungspunkte von E ist die *Ableitung* von E; sie wird wieder mit E' bezeichnet.

Es ist klar, daß es in der Umgebung[17c]) eines Häufungspunktes

---

17) Vgl. I A 3, Nr. 15 und Note 122 (*A. Pringsheim*).

17a) **H. Lebesgue*, J. de math. (6) 1 (1905), p. 143.*

17b) *Im übrigen kann man hier statt dieser „Intervalle" [bei Zugrundelegung der elementaren Entfernungsdefinition] auch „n-dimensionale Kugeln" benutzen. Für $n = 2$ sind darunter die Kreise, für $n = 1$ die linearen Intervalle zu verstehen.*

17c) *Im n-dimensionalen Raum heißt ein (beliebig kleines) n-dimensionales Intervall [oder auch eine n-dimensionale Kugel] mit Punkt p als Mittelpunkt eine *Umgebung* dieses Punktes p.*

nicht nur einen Punkt der Menge gibt, sondern unendlich viele. Eine Menge, die von einer endlichen Zahl von Punkten gebildet wird, hat also keine Häufungspunkte. Dagegen existieren Häufungspunkte, sowie die (als beschränkt vorausgesetzte) Menge unendlich ist. Das ergibt sich aus dem folgenden Satz, der unter dem Namen *Bolzano-Weierstraß*scher Satz bekannt ist: *Zu jeder beschränkten Menge, die von unendlich vielen Punkten gebildet wird, gibt es mindestens einen Häufungspunkt.*

Man kann den Satz noch präziser aussprechen: *Wenn eine Punktmenge in einem abgeschlossenen Intervall I*[18]) *des Raumes R_n unendlich viele Punkte hat, so gibt es in I mindestens einen Häufungspunkt der Menge.*

Man beweist diesen Satz mittels einer sehr allgemeinen Methode, die darin besteht, daß man I in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegt, in deren einem es unendlich viele Punkte geben muß; dieses Teilintervall zerlegt man fortgesetzt und läßt dabei seine Kantenlängen gegen Null abnehmen; es ist dann leicht, daraus die gewünschte Schlußfolgerung zu ziehen.

Umfaßt die Ableitung E' einer Menge E selbst unendlich viele Punkte, so besitzt auch E' eine Ableitung, welche *G. Cantor*[16]) die *zweite Ableitung* der Menge E nennt und mit E'' bezeichnet.

Die Ableitung von E'' ist die dritte Ableitung von E und wird mit E''' bezeichnet, usw. Man gelangt so für jede Anzahl n zu dem Begriff einer n^{ten} Ableitung oder Ableitung n^{ter} Ordnung $E^{(n)}$, wie groß auch n sei.

Es ist jedoch wichtig, an Beispielen zu zeigen, daß alle diese Punktmengen auch wirklich existieren können.

Die Menge E der Punkte

$$x = \frac{1}{n}$$

(wo n eine ganze, positive Zahl ist) hat zur Ableitung den Punkt $x = 0$. Konstruieren wir auf jeder Strecke

$$\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]$$

eine zu E ähnliche Punktmenge (so daß $x = \frac{1}{n+1}$ Häufungspunkt wird); die Menge der so erhaltenen Punktmengen hat dann E zur ersten und $x = 0$ zur zweiten Ableitung.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens bildet man eine Menge, deren p^{te} Ableitung $x = 0$ und deren $(p-1)^{\text{te}}$ Ableitung E ist.[19])

18) *Oder allgemeiner: in einem beschränkten „Bereich" (in der in Nr. 10 definierten Bedeutung).*

19) Andere Beispiele gibt *P. du Bois-Reymond,* *J. f. Math. 79 (1874), p. 36;*

Sei endlich die Menge aller positiven rationalen Zahlen, die kleiner als 1 sind, vorgelegt. Ihre Ableitung umfaßt alle Punkte der Strecke [0, 1]; die folgenden Ableitungen sind mit der ersten identisch. Die n^{te} Ableitung existiert, wie groß auch n sei.

Bisher hat uns die Frage, ob ein Häufungspunkt der Menge angehört oder nicht, noch nicht beschäftigt. Die Untersuchung der verschiedenen Möglichkeiten führt nach *G. Cantor* zu den folgenden Definitionen.

Gehören alle Häufungspunkte einer Menge zu ihr, so heißt sie *abgeschlossen.*[20] Sie enthält dann ihre Ableitung. Im allgemeinen enthält sie auch noch andere Punkte als die ihrer Ableitung. Solche Punkte einer Menge, die keine Häufungspunkte sind, werden als *isolierte* Punkte bezeichnet. *Besteht eine Menge nur aus isolierten Punkten, so heißt sie eine *isolierte* Menge.[21]* Eine Menge, deren sämtliche Punkte Häufungspunkte sind, heißt *in sich dicht.*[22] Sie ist ein Teil ihrer Ableitung. Eine abgeschlossene, in sich dichte Menge ist mit ihrer Ableitung identisch und wird eine *perfekte* Menge genannt.[23] *Die Ableitung einer in sich dichten Menge ist perfekt.*[24]

Functionenth.[4]), p. 186. Er betrachtet die Menge der Nullstellen der Funktionen

$$\sin\frac{1}{\sin ax},\quad \sin\frac{1}{\sin\frac{1}{\sin ax}},\ \cdots \text{ usw.}$$

Er gelangt schon zu dem Begriff des Grenzpunktes unendlich hoher Ordnung [Math. Ann. 16 (1880), p. 128]. Er nannte die Punkte der n^{ten} Ableitung *Verdichtungspunkte n^{ter} Ordnung* [eine heute veraltete Ausdrucksweise].

20) **G. Cantor*, Math. Ann. 23 (1884), p. 470. — Aus der Definition folgt, daß z. B. auch die sämtlichen Punkte einer Geraden oder einer Ebene eine abgeschlossene Menge bilden.*

21) **G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 51; Acta math. 2 (1883), p. 373.*

22) *G. Cantor*, Math. Ann. 23 (1884), p. 471.

23) *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 575; Acta math. 2 (1883), p. 405. *C. Jordan,* [Cours d'Analyse[12]) 1, p. 19] nennt die *abgeschlossenen* Mengen *ensembles parfaits. E. Borel* sagte ursprünglich [Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, p. 36] ensembles *relativement* bzw. *absolument* parfaits für die abgeschlossenen bzw. die perfekten Mengen. *Gegenwärtig [seit *E. Borel,* Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris 1905, (siehe p. 3)] ist auch in Frankreich die *Cantor*sche Terminologie durchgedrungen (*ensemble fermé* oder *clos* für: abgeschlossene Menge; *e. parfait* für: perfekte M.; *e. dense en lui-même* oder *e. dense en soi* für: in sich dichte M.; *e. dense* [*E. Borel,* Leçons 1898, p. 38] oder *e. partout dense,* seltener *e. condensé* [*G. Cantor*[16])] für: überall dicht).*

24) *Gelegentlich ist bei linearen Mengen die Unterscheidung gemacht worden, ob die Annäherung an einen Grenzpunkt von links, von rechts oder von beiden Seiten erfolgt (*linksseitiger, rechtsseitiger* bez. *beiderseitiger* Häufungspunkt). Dem entsprechend sind, insbesondere von *W. H. Young* [z. B. Proc. London Math.

Z. B. ist die Menge der singulären Punkte einer eindeutigen analytischen Funktion eine abgeschlossene Menge.

Die Menge aller Punkte einer Kreisfläche (einschließlich Rand) ist perfekt.

Die Menge aller Punkte einer geradlinigen Strecke, die rationale Abszissen haben, ist in sich dicht, aber nicht abgeschlossen.

Ein anderer wichtiger Begriff ist der einer Menge, die in einem Bereich B_n des n-dimensionalen Raumes R_n[25]) (auf einer geradlinigen Strecke, in einem Flächenstück, in einem Raumteil ...) *überall dicht* ist. *G. Cantor*[26]) gibt diesen Namen einer Menge von solcher Beschaffenheit, daß in jedem beliebigen Teilbereich von B_n Punkte der Menge vorhanden sind. Jeder Punkt von B_n ist also ein Häufungspunkt der Menge. Ihre Ableitung enthält daher den ganzen Bereich B_n.[27]) Eine abgeschlossene, in einem Bereich B_n überall dichte Menge enthält diesen Bereich.

Ebenso heißt eine Menge, die in keinem noch so kleinen Bereich [oder Intervall] von R_n überall dicht ist, *nirgends dicht*[28]) in R_n.

*Alle diese Begriffe, die für Teilmengen eines Raumes R_n gebildet sind, lassen sich auch übertragen auf Punktmengen P, die als Teilmengen irgend einer ganz beliebigen Punktmenge Q betrachtet werden; und zwar vor allem dadurch, daß man nur diejenigen Häufungspunkte von P in Betracht zieht, die zugleich auch Punkte von Q sind.[29]) Z. B. heißt P *in* (oder *in bezug auf*) Q *abgeschlossen* (relativ abgeschlossen), wenn alle Häufungspunkte von P, die in Q enthalten sind, der Menge P angehören.

Besonders bemerkenswert ist die betreffende Verallgemeinerung

---

Soc. (1) 34 (1901/2), p. 286; Quart. J. of math. 39 (1907), p. 67 ff.; 40 (1909), p. 376], Begriffe gebildet worden wie z. B.: *„linksseitig abgeschlossen"* (wenn jeder linksseitige und beiderseitige Häufungspunkt der Menge angehört) oder *„beiderseitig in sich dicht"* (wenn jeder Punkt der Menge ein beiderseitiger Häufungspunkt ist) usw.*

25) *Über die genaue Bedeutung des Wortes „Bereich" siehe Nr. 10.*

26) *G. Cantor*, Math. Ann. 15 (1879), p. 2; Acta math. 2 (1883), p. 351. *P. du Bois-Reymond* [*Math. Ann. 15 (1879), p. 287;* Functionenth.[4]), p. 182/3] hat die überall dichten Mengen *pantachisch* genannt [eine heute nicht mehr gebräuchliche Bezeichnungsweise].

27) *R. Baire* [Pariser Thèse 1899 = Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 29] benutzte diese Eigenschaft als Definition.

28) **P. du Bois-Reymond* [Functh.[4]), p. 183] hat eine solche Menge *apantachisch* genannt [eine heute nicht mehr benutzte Bezeichnung].*

29) *Vgl. *A. Schoenflies*, Bericht I 1913, p. 261/2 u. 264 [gegenüber Bericht I 1900, p. 79/80 in einigen Punkten abgeändert] sowie *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 240 ff.*

für die Begriffe „überall dicht" und „nirgends dicht": P heißt *überall dicht* (oder *dicht*) *in* (oder *in bezug auf*) Q, wenn jedes Intervall von R_n, das einen Punkt von Q enthält, auch (mindestens) einen Punkt von P enthält.[30]) [Also jeder Punkt von Q ist entweder Punkt oder Häufungspunkt von P.] P heißt *nirgends dicht in* Q, wenn es kein Intervall von R_n gibt, in dem P überall dicht in bezug auf Q ist.

Durch Bildung solcher *Relativbegriffe* läßt sich eine ganze Relativtheorie entwickeln.[31])*

Die *Komplementärmenge* einer gegebenen Menge E ist die Menge aller Punkte, welche nicht zu E gehören. Man kann auch die Komplementärmenge von E in bezug auf einen E enthaltenden Teil von R_n definieren, oder in bezug auf eine andere Menge F, die alle Punkte von E enthält: diese Komplementärmenge, die man auch als *Differenz* $(F - E)$ bezeichnet, ist die Menge aller Punkte von F, die nicht Punkte von E sind.

Kehren wir zu der Reihe der Ableitungen einer Punktmenge zurück. Sie besitzt die beiden folgenden Eigenschaften:

Jede Ableitung einer Punktmenge ist eine abgeschlossene Menge.

Jede Ableitung enthält alle folgenden Ableitungen.

Die erste Ableitung kann also mehr Punkte besitzen als die ursprüngliche Menge, aber die Wiederholung des Ableitungsprozesses kann nur die Ausscheidung von Punkten bewirken.

*In dieser Beziehung wird eine noch etwas größere Einheitlichkeit erzielt, wenn man, gewissermaßen als Ausgangspunkt, der ersten Ableitung eine *„0te Ableitung E^0"* von E voranstellt, nämlich die Vereinigung der Menge E und ihrer Häufungspunkte.[31a]) Diese viel benutzte Menge E^0 wird neuerdings[31b]) sehr ausdrucksvoll *abgeschlossene Hülle* von E genannt und mit $\overline{E}$ bezeichnet.*

30) *Vgl. *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 264 [eine frühere abweichende Definition (Bericht I 1900, p. 80; Bericht II 1908, p. 304) ist damit aufgegeben]. Ein derartiger Begriff tritt (für perfekte Mengen Q) zuerst bei *R. Baire*[27]) auf.

Die im obigen Text gegebene Definition gilt auch, wenn P nicht als Teilmenge von Q vorausgesetzt wird.

F. Hausdorff, Mengenlehre, p. 249 ff., sagt hierfür: „P ist *zu Q dicht*"; wogegen er sich die Bezeichnungsweise: „P ist *in Q dicht*" für den Spezialfall vorbehält, wo P Teilmenge von Q ist. Analog für den Begriff „nirgends dicht". *F. Hausdorff* bildet a. a. O. noch die Begriffe: „P zu Q *undicht*", wenn P zu Q nicht dicht ist, und „P zu Q *total undicht*", wenn P zu keiner Teilmenge von Q dicht ist.*

31) *Dies ist in besonders systematischer Weise bei *F. Hausdorff*[29]) geschehen.*

31a) *Vgl. *R. Baire,* Acta math. 30 (1906), p. 9.*

31b) *Nach *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 57. — Eine ähnliche

5. Der Cantor-Bendixsonsche Satz. Bildet man die Reihe der Ableitungen einer gegebenen beschränkten Menge E, so können zwei Fälle eintreten.

1. Entweder es existiert eine Zahl n derart, daß die n^{te} Ableitung $E^{(n)}$ aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht.[32]) Dann existieren die folgenden Ableitungen nicht; man pflegt in diesem Falle zu schreiben:

$$E^{(n+1)} = 0, \quad E^{(n+2)} = 0, \ldots$$

2. Oder es besteht, wie groß auch n sei, die n^{te} Ableitung stets aus unendlich vielen Punkten. In diesem Fall beweist man nach *G. Cantor*[33]), *daß eine Punktmenge existiert, deren Punkte allen Ableitungen angehören, und daß diese gemeinsame Menge abgeschlossen ist.*[34])

G. Cantor bezeichnet mit:

$$\mathfrak{D}(P, Q)$$

die Menge der P und Q gemeinsamen Punkte, den sogenannten *„Durchschnitt"* von P und Q,[35]) und mit

$$\mathfrak{D}(P, Q, R)$$

Benennung bereits bei *J. Pierpont,* Lectures on the theory of functions of real variables 1, Boston 1905, p. 522 („completed aggregate of E").

Eine Spezialuntersuchung über die abgeschlossenen Hüllen bei *C. Kuratowski,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 182/99.*

32) *In diesem Falle hat *G. Cantor*[16])[26]) die Menge E als *Menge erster Gattung und n^{ter} Art* bezeichnet, dagegen als *Menge zweiter Gattung,* wenn unendlich viele Ableitungen existieren. Doch sind diese Bezeichnungen jetzt ziemlich außer Gebrauch gekommen.*

33) *G. Cantor,* Math. Ann. 17 (1880), p. 357; Acta math. 2 (1883), p. 359.

34) Allgemeiner gilt der Satz: Enthält von abzählbar unendlich vielen beschränkten abgeschlossenen Mengen $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ jede die folgende, so existiert die gemeinsame Menge und ist ebenfalls abgeschlossen.

35) **G. Cantor* nennt diese Menge den *„größten, gemeinsamen Divisor"* von P und Q. [Math. Ann. 17 (1880), p. 355.] Jetzt ist jedoch hierfür die Bezeichnung *„Durchschnitt"* oder *„gemeinsamer Durchschnitt"* von P und Q allgemein üblich. *Ch.-J. de la Vallée Poussin* [Cours d'Analyse infinitésimale 1, 2. éd. (Louvain-Paris 1909), p. 245; 3. éd. (1914), p. 63] und mit ihm viele andere schreiben sehr zweckmäßig den Durchschnitt einfach als Produkt $P \cdot Q$, — eine Schreibweise, die immer größere Verbreitung findet.

Haben die beiden Mengen P und Q kein Element gemeinsam (in Zeichen: $P \cdot Q = 0$), so werden sie in unmittelbar verständlicher Weise *„elementenfremd"* genannt [nach *E. Zermelo,* Math. Ann. 65 (1908), p. 262/3].

In einer gewissen gegensätzlichen Beziehung zur Bildung des Durchschnitts mehrerer Mengen steht die Bildung der sog. *Vereinigungsmenge* mehrerer Mengen. Man nennt *„Vereinigungsmenge"* (oder auch *„Summe"*) der Mengen $P, Q, R \ldots$ diejenige Menge, welche aus allen in $P, Q, R \ldots$ enthaltenen Elementen besteht, und man pflegt diese Vereinigungsmenge mit

$$\mathfrak{S}(P, Q, R \ldots)$$

die Menge der P, Q, R gemeinsamen Punkte usw. Bezeichnet man mit $E^{(\omega)}$ die allen Ableitungen gemeinsame Menge, so wird man demnach schreiben:

$$E^{(\omega)} = \mathfrak{D}(E', E'', \ldots, E^{(n)}, \ldots).$$

Jetzt hindert nichts, den Ableitungsprozeß *über das Unendliche hinaus* fortzusetzen, indem man die Ableitung $E^{(\omega+1)}$ von $E^{(\omega)}$, die Ableitung $E^{(\omega+2)}$ von $E^{(\omega+1)}$, usw. bildet.

Die ω^{te} Ableitung von $E^{(\omega)}$ ist dann $E^{(\omega\cdot 2)}$;[35a]) die

$$E^{(\omega)}, E^{(\omega\cdot 2)}, E^{(\omega\cdot 3)}, \ldots$$

gemeinsame Menge ist $E^{(\omega^2)}$, und man definiert so jede Ableitung, deren Ordnung ein Polynom in ω mit ganzen Koeffizienten ist.

$E^{(\omega^\omega)}$ ist sodann die Menge, welche den Mengen

$$E^{(\omega)}, E^{(\omega^2)}, E^{(\omega^3)}, \ldots$$

gemeinsam ist.

In dieser Weise hat übrigens *G. Cantor* zuerst die transfiniten Zahlen eingeführt. *[Über *transfinite Zahlen* und den Begriff der Zahlen der *ersten* und *zweiten Zahlenklasse* vgl. I A 5, Nr. 3, 7, 8 (*A. Schoenflies*)].*

*Unmittelbar ergibt sich hier die Zerlegungsformel[36]):

$$E' = \sum_{\gamma=1,2\cdots<\beta} (E^{(\gamma)} - E^{(\gamma+1)}) + E^{(\beta)},$$

wobei β irgend eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist, sofern nur die Ableitung $E^{(\beta)}$ nicht Null ist, und wobei jeder Summand eine (beim Übergang von einer Ableitung zur nächsten) abgespaltene iso-

---

oder häufig mit $$P + Q + R + \cdots$$
zu bezeichnen. *G. Cantor* (a. a. O.) hatte dagegen hierfür den jetzt kaum mehr gebrauchten Ausdruck *„kleinstes gemeinsames Multiplum“* von $P, Q, R \ldots$ und das Zeichen

$$\mathfrak{M}(P, Q, R \ldots)$$

verwendet.

Neuerdings benutzt *C. Carathéodory* [Reelle Funktionen, p. 23] für die „Vereinigungsmenge“ die Schreibweise

$$P \dotplus Q \dotplus R \dotplus \cdots,$$

während er (wie vor ihm auch andere) die Bezeichnung *„Summe“* und die Schreibweise

$$P + Q + R + \cdots$$

auf den speziellen Fall beschränkt, wo die Mengen $P, Q, R \ldots$ paarweise elementenfremd sind.

Bezüglich des Operierens mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$ siehe *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 11/2 u. 15, sowie *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 5 ff., und *C. Carathéodory,* a. a. O., p. 22 ff.*

35a) *Ursprünglich von *G. Cantor* $E^{(2\omega)}$ geschrieben.*

36) **G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 52; Acta math. 2 (1883), p. 373, 412.*

lierte Menge darstellt.* Jede isolierte Menge ist aber, wie *G. Cantor*[37]) ferner zeigt, abzählbar[37a]) [und deshalb ist auch jede Menge, deren Ableitung abzählbar ist, selbst abzählbar].

Von hier aus ist der erste Beweis des wichtigen sogenannten *Cantor-Bendixson*schen Satzes abgeleitet worden.[38]) Dieser Satz enthält folgende Aussagen über die Ableitungen einer ganz beliebigen Menge E (die nicht mehr, wie zuerst, als beschränkt vorausgesetzt werde):

*1. *Ist die Ableitung E' einer Punktmenge E abzählbar, so gelangt man nach endlich oder abzählbar unendlich vielen Schritten zu einer ersten Ableitung $E^{(\alpha)}$, welche Null ist; d. h. es gibt eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlenklasse, derart daß $E^{(\alpha)} = 0$ ist.**

2. *Ist die Ableitung E' einer Punktmenge E nicht abzählbar, so existiert eine Menge E^{Ω} von Punkten, die allen Ableitungen von endlicher oder transfiniter Ordnung gemeinsam sind.*

3. *Diese Menge E^{Ω} ist perfekt.*

4. *Die Menge $R = (E' - E^{\Omega})$ ist abzählbar.*[39])

5. **Es gibt eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlenklasse, derart daß $E^{(\alpha)} \equiv E^{\Omega}$ ist.*

6. *Es ist $\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) = 0$.*[40])*

Bemerkt man, daß E' eine *beliebige* abgeschlossene Menge ist, so kann man an Stelle der vorstehenden Sätze den folgenden setzen, der ihnen gleichwertig ist, wenn man von einer genaueren Charakterisierung der einzelnen Mengenbestandteile absieht:

Jede abgeschlossene Menge ist die Summe einer perfekten und einer abzählbaren Menge, wobei aber einer dieser beiden Bestandteile eventuell völlig fehlen kann.[41])

37) Math. Ann. 21 (1883), p. 51; Acta math. 2 (1883), p. 372; *vgl. auch daselbst, p. 409 u. 412, sowie Math. Ann. 23 (1884), p. 461.*

37a) *Eine Menge heißt (nach *G. Cantor*) *abzählbar*, wenn sich ihre Elemente umkehrbar eindeutig auf die ganzen positiven Zahlen oder auf einen Teil derselben abbilden lassen; siehe I A 5, Nr. 2 (*A. Schoenflies*).*

38) **G. Cantor*, Math. Ann. 21 (1883), p. 575; Acta math. 2 (1883), p. 405, 409/14; Math. Ann. 23 (1884), p. 459/69;* *I. Bendixson*, Acta math. 2 (1883), p. 415/27. — *A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 73, bezeichnet den in Rede stehenden Satz als das „*Haupttheorem*". — *Vgl. auch Nr. **10a**.*

39) *Einen sehr einfachen Beweis für diesen Teilsatz 4. hat *E. Phragmén*, Acta math. 5 (1884), p. 47 angegeben.*

40) *Diese 6. Bemerkung rührt von *I. Bendixson*[38]) her, der damit eine frühere irrige Angabe von *G. Cantor* berichtigt hat.*

41) *Über die Nichtabzählbarkeit der perfekten Mengen (die vielmehr die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen) siehe Nr. 7. Daß die Zerlegung einer abgeschlossenen Menge in eine abzählbare und eine perfekte Menge *eindeutig* ist, hat *G. Vivanti*, Rendic. Circ. mat. Palermo 13 (1899), p. 86, bewiesen und zwar mit Hilfe des Satzes: Zerfällt eine perfekte Menge in zwei Teilmengen, von denen

*Der perfekte Bestandteil wird häufig als der „*perfekte Kern*" der abgeschlossenen Menge bezeichnet.*

*Eine Menge E, von der eine Ableitung $E^{(\alpha)} = 0$ ist [was nach dem vorstehenden dann und nur dann eintritt, wenn E' abzählbar ist], wird nach *G. Cantor*[42]) *reduktibel* oder häufiger *reduzibel* genannt.[43])*

*Das Beweisverfahren von *Cantor* und *Bendixson* benutzt transfinite Zahlen nicht nur der zweiten Zahlenklasse, sondern auch die transfinite Zahl Ω der dritten Zahlenklasse (oder, was dasselbe ist, die Gesamtheit *aller* Zahlen der zweiten Zahlenklasse). Da aber, wie aus den Teilsätzen 1. und 5. hervorgeht, das Verfahren der sukzessiven Ableitungen immer nach höchstens abzählbar vielen Schritten, d. h. bei einer bestimmten Ordnungszahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse, zu Ende geht, so sieht man, daß zum vollständigen Ausspruch des Satzes nur Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse nötig sind. Dementsprechend sind später von verschiedenen Seiten auch Beweise gegeben worden, die den Gebrauch einer Zahl der dritten Zahlenklasse (und der *Gesamtheit* der Zahlen der zweiten Zahlenklasse) wirklich vermeiden.[44])

Ferner enthält der wesentlichste Teil des *Cantor-Bendixson*schen Satzes, die Zerlegung der abgeschlossenen Mengen in ihren abzählbaren und perfekten Bestandteil, in seiner Formulierung überhaupt nichts mehr von transfiniten Zahlen. Und tatsächlich konnte *E. Lindelöf*[45]) [für lineare Mengen gleichzeitig auch *W. H. Young*[46])] diese Zerlegung

die eine abgeschlossen ist, so ist die andere in sich dicht und von Mächtigkeit des Kontinuums.*

42) **G. Cantor*, Math. Ann. 21 (1883), p. 575. Daselbst ist der Sinn der Definition nicht eindeutig; dieser ist erst aus Math. Ann. 23 (1884), p. 471 und 478 erkennbar. Vgl. auch I A 5, Nr. 12 (*A. Schoenflies*).*

43) *Gelegentlich ist „reduzibel" auch in abweichender Bedeutung verwendet worden, nämlich als Bezeichnung für die abzählbare Menge, die übrig bleibt, wenn man aus einer abgeschlossenen Menge den perfekten Bestandteil abspaltet; siehe z. B. *A. Schoenflies*, Bericht I 1913, p. 274. In ganz anderem, viel weiterem Sinn wird „reduzibel" neuerdings bei *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 281, gebraucht.*

44) *Für lineare Mengen: *A. Schoenflies*, Bericht I 1900, p. 80/1 = Bericht I 1913, p. 290/1; Gött. Nachr. 1903, p. 21/31; *W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1903), p. 238/40; ferner Quart. J. of math. 35 (1903), p. 103/7 = Theory, p. 53/7, dazu p. 284/6 [hier werden zwar die transfiniten Zahlen der zweiten Zahlenklasse nicht explizit benutzt, aber sie sind implizit in der Wohlordnung der Menge $(K(E))$ der Ableitungen enthalten]. Für n-dimensionale Mengen: *L. E. J. Brouwer*, Verslag Amsterdam Ak. 18_2 (1910), p. 834/5.*

45) **E. Lindelöf*, Paris C. R. 137 (1903), p. 697; Acta math. 29 (1905), p. 183 u. 187.*

46) **W. H. Young*, Quart. J. of math. 35 (1903), p. 103/5 [Theorem 1—5] = Theory, p. 53/5 *

der abgeschlossenen Mengen beweisen, ohne überhaupt von transfiniten Zahlen Gebrauch zu machen. [Vgl. auch [58a]).] Eine wesentliche Rolle spielt bei diesen Beweisen der folgende von *G. Cantor*[53]) herrührende Begriff[47]).*

Als *Mächtigkeit* (*Mächtigkeitsgrad*) einer Menge *in der Umgebung* eines ihrer Punkte wird die Mächtigkeit derjenigen Teilmenge bezeichnet, die in einer (den Punkt als Mittelpunkt besitzenden) Kugel[47a]) von so kleinem Radius gelegen ist, daß in jeder solchen Kugel von noch kleinerem Radius eine Teilmenge der gleichen Mächtigkeit enthalten ist.[48]) Es ist eine wesentliche Voraussetzung für die Möglichkeit dieser Definition, daß die Mächtigkeiten eine wohlgeordnete Menge [vgl. I A 5, Nr. 6 (*A. Schoenflies*)] bilden. *Diese Voraussetzung ist jedoch unnötig, wenn man hier nur zwischen abzählbarer und nichtabzählbarer Mächtigkeit unterscheidet.*

*Gerade auf diese (natürlich auch schon von *G. Cantor* ins Auge gefaßte) Unterscheidung zwischen abzählbarer und nicht-abzählbarer Mächtigkeit in der Umgebung eines Punktes der Menge kommt es bei *E. Lindelöf* und bei *W. H. Young* an. Ein Häufungspunkt der Menge, in dessen Umgebung es nicht-abzählbar unendlich viele Punkte der Menge gibt, wird im Anschluß an *E. Lindelöf* *Kondensationspunkt* oder *Verdichtungspunkt* („*point de condensation*") genannt; vielfach wird hierfür die Bezeichnung (*Häufungs*)*punkt von nicht abzählbarer Ordnung*[49]) gebraucht.

E. Lindelöf hat nun für die Zerlegung einer abgeschlossenen Menge A in einen abzählbaren und einen perfekten Bestandteil zwei verschiedene, überaus einfache Beweise gegeben, die jedoch auf demselben Grundgedanken beruhen.[50]) Faßt man in C alle Punkte der Menge A zusammen, die von nicht abzählbarer Ordnung sind, und in R alle übrigen Punkte der Menge, d. h. alle Punkte der Menge von (höchstens) abzählbarer Ordnung, so hat man

$$A = R + C;$$

dabei ist der Bestandteil C sicher vorhanden, wenn A nicht abzählbar

47) *Den *G. Cantor* für die Zwecke der in der nächsten Nummer besprochenen Untersuchungen gebildet hatte.*

47a) *Natürlich kann man statt der Kugeln auch „Intervalle" benutzen.*

48) Über den hierbei auftretenden Begriff der *Mächtigkeit* einer Menge siehe I A 5, Nr. 4 (*A. Schoenflies*).

49) *A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 75; Bericht I 1913, p. 233. *W. H. Young*[46]) benutzt die analoge Bezeichnung „point of more than countable degree". Vgl. auch [15]).*

50) *Der gleiche Gedanke liegt auch der *W. H. Young*schen Überlegung zu Grunde.*

ist. Man kann nun zeigen, daß R abzählbar ist, und sodann, daß C perfekt ist. Die beiden Beweise von *E. Lindelöf* unterscheiden sich im wesentlichen nur durch die Art, wie die Abzählbarkeit von R nachgewiesen wird; in seinem zweiten Beweis[51]) geschieht dies ganz besonders einfach durch die Anwendung einer Verallgemeinerung des *Borel*schen Überdeckungssatzes [s. hierüber Nr. 9, Schluß].*

**R. Baire*[52]) hat den *Cantor-Bendixson*schen Satz in folgender Weise verallgemeinert:

Ist eine Reihe von beschränkten abgeschlossenen Mengen vorgelegt, die entsprechend den Zahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse geordnet sind,

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots,$$

wobei jede dieser Mengen in allen vorangehenden enthalten ist, so gibt es eine kleinste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlenklasse, derart, daß von da ab alle Mengen identisch sind: $P_\alpha = P_{\alpha+1} = \cdots$

Ist noch die Bedingung beigefügt, daß die isolierten Punkte einer Menge in der folgenden Menge nicht vorkommen, dann ist P_α entweder Null oder perfekt.*

6. Nicht abgeschlossene Mengen. *G. Cantor*[53]) suchte die Zerlegung, welche sich für die abgeschlossenen Mengen aus dem in der vorigen Nr. besprochenen Satze ergibt, für eine beliebige Menge zu verallgemeinern.

In einer beliebigen Menge E unterscheidet man zwei Arten von Punkten: die isolierten Punkte und die Häufungspunkte. Ist Ea die Menge der isolierten Punkte von E, und Ec die Menge der in E enthaltenen Häufungspunkte, so hat man

$$E = Ea + Ec.$$

Die beiden Mengen Ea und Ec haben keinen Punkt gemeinsam. Ec ist ein Teil der Ableitung E'; Ec fällt mit E' zusammen, wenn E abgeschlossen ist. Ea ist eine *isolierte* Menge, d. h. eine Menge, die keinen ihrer Häufungspunkte enthält. Ec enthält jeden in sich dichten Teil von E.

---

51) *a. a. O.[45]): Paris C. R. und Acta, p. 187. Wegen einer weiteren Verallgemeinerung siehe *W. Sierpiński,* Bull. sc. math. (2) 41_1 [$= 52_1$] (1917), p. 290/2.*

52) **R. Baire,* Pariser Thèse 1899 = Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 51; Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905, p. 92 u. 103; siehe auch *A. Schoenflies*[44]) sowie *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 275/84; ferner *C. Kuratowski,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 42/3 Fußn.; *Z. Zalcwasser,* ib., p. 44/5; *W. Sierpiński,* ib., p. 46/9.*

53) *G. Cantor,* Acta math. 7 (1885), p. 110.

G. Cantor nennt Ea die erste *Adhärenz*, Ec die erste *Kohärenz* von E.

Man kann ebenso Ec in seine Adhärenz und seine Kohärenz zerlegen und schreibt:

$$Ec = Eca + Ec^2,$$

so daß

$$E = Ea + Eca + Ec^2$$

ist, usw.

Im allgemein kommt man so zu einer Zerlegung, die durch das folgende Symbol ausgedrückt ist:

$$E = Ea + Eca + Ec^2a + \cdots + Ec^{n-1}a + Ec^n;$$

Ec^n ist die n^{te} Kohärenz; n kann endlich oder transfinit sein; man wird z. B. Ec^ω definieren durch

$$Ec^\omega = \mathfrak{D}(\cdots Ec^n \cdots) \qquad n < \omega,$$

indem man bemerkt, daß jedes Ec^n die folgenden enthält.

G. Cantor nennt eine Menge, die keinen *in sich dichten* Bestandteil enthält, eine *separierte* Menge[53a]) und beweist sodann die folgenden Sätze:

Ist E eine separierte Menge, so existiert eine Zahl α der ersten oder zweiten Klasse, so daß $Ec^\alpha = 0$ ist.

Ist E eine nicht separierte Menge, so kann man eine solche Zahl α finden derart, daß Ec^α in sich dicht ist.

Jede Menge von höherer Mächtigkeit als der ersten enthält eine in sich dichte Teilmenge.

Jede separierte Menge ist also abzählbar.

**W. H. Young*[54]) hat noch den Satz hinzugefügt: Jede Adhärenz besteht ausschließlich aus Punkten, welche Häufungspunkte jeder im Konstruktionsmodus vorangehenden Adhärenz sind.*

*Den in einer (nicht separierten) Menge E enthaltenen in sich dichten Bestandteil nennt *G. Cantor*[55]) die *totale Inhärenz* von E und bezeichnet sie mit Ei. Die von E abgespaltene separierte Menge $(E - Ei)$ nennt er den *Rest* oder das *Residuum*[56]) von E und wählt

53a) *Neuerdings bezeichnen *A. Denjoy* [siehe etwa Paris C. R. 160 (1915), p. 765] und mit ihm andere französisch schreibende Autoren eine solche Menge als *„clairsemé"*.*

54) **W. H. Young*, Quart. J. of math. 35 (1903), p. 115. Der Beweis ist nicht korrekt [vgl. *L. E. J. Brouwer*[118])], kann aber in Ordnung gebracht werden.*

55) **G. Cantor*[53]), p. 117. Vgl. auch [58]).*

56) *Dieser Ausdruck wird von *L. E. J. Brouwer*[44]) und von *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 281, in anderen Bedeutungen gebraucht.*

dafür die Bezeichnung Er. *W. H. Young*[57]) gebraucht für die totale Inhärenz den Ausdruck *ultimate coherence.*

G. Cantor suchte die in sich dichten Mengen noch weiter in sogenannte *homogene* Bestandteile zu zerlegen.*

Eine in sich dichte Menge bezeichnet er als *homogen*, wenn die Mächtigkeit in der Umgebung [s. Nr. 5] aller ihrer Punkte die gleiche ist. Ist diese Mächtigkeit in der Umgebung aller Punkte die ν^{te}, so heißt die Menge homogen von der ν^{ten} Ordnung, und sie besitzt dann selbst gerade die ν^{te} Mächtigkeit. So ist die abzählbare Menge der Zahlen mit rationalen Abszissen homogen von der ersten Ordnung.

*Die totale Inhärenz einer Menge E denkt sich nun *G. Cantor* in ihre homogenen Bestandteile zerlegt und er bezeichnet einen solchen homogenen Bestandteil ν^{ter} Ordnung als ν^{te} *Inhärenz* oder als *Inhärenz* ν^{ter} *Ordnung* von E.[57a]) Wenn hier nur der homogene Bestandteil erster Ordnung aus der totalen Inhärenz abgesondert wird, so erhält man die folgende Zerlegung einer beliebigen Menge E:

$$E = Er + Ei = Er + U + C,$$

wobei U eine *abzählbare* homogene, in sich dichte Menge ist und C eine in sich dichte Menge, die in der Umgebung jedes ihrer Punkte von *nichtabzählbarer* Mächtigkeit ist. Diese Teilmenge C [die also genau dem entspricht, was am Schluß der vorigen Nummer mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet worden ist] wird von *W. H. Young*[46]) der *Nucleus* (*Kern*)[58]) von E genannt. Da der Ausdruck „Kern" auch in anderen Verbindungen benutzt wird, wollen wir hierfür deutlicher *„nicht-abzählbarer Kern"* sagen.

Jede nicht-abzählbare Menge E enthält einen solchen nicht-abzählbaren Kern C.

Für abgeschlossene Mengen ist $U = 0$; also fallen dann der nicht-abzählbare Kern und die totale Inhärenz zusammen (perfekter Bestandteil).

Die für abgeschlossene Mengen A von *E. Lindelöf* (s. Nr. 5) ohne Benutzung transfiniter Zahlen erzielte Zerlegung $A = R + C$ läßt sich in genau gleicher Weise auch für eine nicht abgeschlossene Menge E

57) *W. H. Young*[54]), p. 113.*

57a) *Einen wirklichen Beweis für diese Zerlegung hat erst *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 1 (1920), p. 28/34 gegeben; und zwar läßt sich, wie er zeigt, Ei in höchstens abzählbar unendlich viele, homogene Bestandteile zerlegen.*

58) *Abweichend hiervon bezeichnet *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 226, mit „Kern" die totale Inhärenz, während *H. Hahn,* Reelle Funktionen, p. 76, hierfür die ausführlichere und daher deutlichere Bezeichnung *„in sich dichter Kern"* benutzt.*

ausführen. Durch das gleiche Beweisverfahren ergibt sich dann, daß R wieder abzählbar ist, und daß C, welches nicht mehr abgeschlossen zu sein braucht, in sich dicht ist.[58a]) So kann auch ohne Benutzung transfiniter Zahlen der nicht-abzählbare Kern (dagegen nicht die totale Inhärenz) aus E abgespalten werden.*

*Wir haben soeben gesehen, daß jede nicht-abzählbare Menge einen in sich dichten, nicht-abzählbaren Kern besitzt; speziell für nicht-abzählbare abgeschlossene Mengen hatte sich aber in der vorigen Nummer noch mehr ergeben, nämlich daß sie einen perfekten Bestandteil enthalten. Es ist nun schon vor längerer Zeit[59]) die Frage gestellt worden, ob diese Eigenschaft der nicht-abzählbaren abgeschlossenen Mengen für jede nicht-abzählbare Menge gilt oder nicht, d. h. die Frage nach der Existenz nicht-abzählbarer Mengen ohne perfekten Bestandteil. Diese Frage ist von *F. Bernstein*[60]) beantwortet worden, indem er [auf Grund der Theorie der wohlgeordneten Mengen[60a])] die Existenz von nicht-abzählbaren Mengen ohne perfekten Bestandteil bewiesen hat. Diese Mengen werden von ihm *total imperfekte* Mengen genannt.[61])*

7. Mächtigkeit der Punktmengen. Die vorstehenden allgemeinen Untersuchungen hat *G. Cantor* unternommen, um zu einem allgemeinen Satze über die Mächtigkeit der Punktmengen zu gelangen.[62])

*Schon frühzeitig ist *G. Cantor*[63]) auf die wichtige Unterscheidung zwischen abzählbaren[37a]) und nicht-abzählbaren Mengen aufmerksam geworden und hat insbesondere die *Nichtabzählbarkeit* des *linearen Kontinuums* (d. h. der Menge aller Punkte eines Intervalls) bewiesen.[64])*

Während er nun für die *abstrakten* Mengen die Existenz immer

---

58a) *Vgl. dazu auch *W. Sierpiński*, Fundamenta math. 1 (1920), p. 1/6 [der den Beweis unter Vermeidung des Auswahlaxioms[106]) führt]; sowie *C. Kuratowski*, ib. 3 (1922), p. 91/5.*

59) *Wohl zuerst von *L. Scheeffer*, Acta math. 5 (1884), p. 287.*

60) **F. Bernstein*, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 60 (1908), p. 329/30.*

60a) *Hierüber siehe I A 5, Nr. 4—8 (*A. Schoenflies*) und *A. Schoenflies*, Bericht I 1913, p. 88 ff.*

61) *Siehe hierzu ferner: *P. Mahlo*, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 61 (1909), p. 123/4, und Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916), p. 201/8.*

62) *Über den Begriff der *Mächtigkeit* siehe I A 5, Nr. 4 (*A. Schoenflies*); ferner *A. Schoenflies*, Bericht I 1900, p. 3 ff.; Bericht I 1913, p. 4 ff.*

63) *J. f. Math. 77 (1874), p. 258/62.*

64) **G. Cantor*, J. f. Math. 77 (1874), p. 260/1; Math. Ann. 15 (1879), p. 5/7; Acta math. 2 (1883), p. 308 u. 353/6. Einen anderen noch einfacheren Beweis für die Nichtabzählbarkeit des linearen Kontinuums (mit Hilfe des sogenannten Diagonalverfahrens) gab er später: Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 1 (1892), p. 75/6.*

höherer Mächtigkeiten[65]) aufzeigen konnte[66]), liegt die Sache für die Punktmengen ganz anders. Eine Menge von Punkten, die in einem Raume von n Dimensionen oder selbst in einem Raume von abzählbar unendlich vielen Dimensionen enthalten sind, kann tatsächlich, wie wir weiter unten [Nr. 16] noch genauer sehen werden, nicht eine höhere Mächtigkeit haben als diejenige des *linearen Kontinuums*. Andererseits ist, bei Beschränkung auf Mengen von unendlich vielen Punkten, ihre Mächtigkeit mindestens diejenige, welche *G. Cantor* die *erste* nennt, d. h. die einer abzählbar unendlichen Menge.[67])

Infolgedessen entsteht die Frage: besitzt jede Punktmenge notwendig eine der beiden eben genannten Mächtigkeiten, oder gibt es im Gegenteil Mengen, deren Mächtigkeit *zwischen* der Mächtigkeit einer abzählbaren Menge und der des Kontinuums liegt? Auf diese Frage (das sogenannte „*Kontinuumproblem*") kann man heute noch keine Antwort geben. Manche bezweifeln sogar, daß die gestellte Frage einen Sinn habe. Wir wollen nicht auf die Einzelheiten dieser Frage[68]) eingehen und uns hier auf den wichtigsten Fall beschränken, den der *abgeschlossenen* Mengen, für den diese Frage gelöst ist.[69]) Man kann daraus nichts für den allgemeinen Fall schließen, da die Ableitung einer Menge uns in keiner Weise über die Mächtigkeit der Menge unterrichtet. (Z. B. haben die Menge der rationalen Zahlen und die der irrationalen Zahlen dieselbe Ableitung, aber nicht dieselbe Mächtigkeit.)

Jede abgeschlossene Menge ist, wie wir oben [Nr. 5] gesehen haben, die Summe einer abzählbaren und einer perfekten Menge[70])

---

65) Siehe *G. Cantor*, *Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 1 (1892), p. 77;* die Schlußweise ist wiedergegeben bei *E. Borel*, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, p. 107; *vgl. auch *G. Hessenberg*, Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906, p. 40/2 = Abhandl. d. Friesschen Schule (Neue Folge) 1 (1906), p. 526/8.*

66) *Z. B. ist die *Mächtigkeit* $\mathfrak{f}$ *der Menge aller eindeutigen reellen Funktionen einer Veränderlichen* größer als die Mächtigkeit des Kontinuums; $\mathfrak{f}$ ist zugleich die Mächtigkeit aller (etwa linearen) Punktmengen. Vgl. dazu I A 5, Nr. 9 (*A. Schoenflies*).*

67) *Die Mächtigkeit einer abzählbar unendlichen Menge bzw. des linearen Kontinuums wird gewöhnlich mit $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{c}$ bezeichnet.*

68) *Man sehe hierüber *A. Schoenflies*, Bericht I 1913, p. 219/224, sowie auch daselbst das von dem Wohlordnungssatz handelnde Kap. X (p. 170/84), und ferner die *L. E. J. Brouwer*sche Besprechung dieses Buches im Jahresb. d Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 78/83.*

69) *Für eine noch umfassendere Klasse von Punktmengen, nämlich für die sogenannten *Borelschen Mengen*, ist die Frage nach der Mächtigkeit völlig entschieden; siehe hierüber Nr. 9b.*

70) *Wobei einer der beiden Bestandteile auch fehlen kann.*

(letztere ist die den Ableitungen endlicher oder transfiniter Ordnung gemeinsame Menge). Da ferner *G. Cantor* nachgewiesen hat, daß eine perfekte Menge nicht abzählbar ist[71]), so folgt daraus, daß die Ableitung einer gegebenen Menge dann und nur dann abzählbar ist, wenn jener perfekte Bestandteil Null ist. Man sieht demnach, daß das Studium der Mächtigkeit einer abgeschlossenen Menge sich auf das der Mächtigkeit einer perfekten Menge zurückführen läßt.

Nun aber hat *G. Cantor*[72]) bewiesen, daß jede eindimensionale perfekte Menge die Mächtigkeit des linearen Kontinuums besitzt.[72a]) Andererseits hatte er schon früher[73]) bewiesen, daß das n-dimensionale Kontinuum und das lineare Kontinuum hinsichtlich ihrer Mächtigkeit äquivalent sind [vgl. Nr. **16**]. Man leitet hieraus ohne Schwierigkeit den Satz ab, daß jede perfekte Menge in einem n-dimensionalen Raume die Mächtigkeit des *linearen* Kontinuums hat.

Kehren wir jetzt zu der Korrespondenz einer eindimensionalen perfekten Menge und des linearen Kontinuums zurück.

Wenn die perfekte Menge überall dicht ist, so fällt sie mit einer geradlinigen Strecke zusammen, und der Satz braucht daher nur für eine *nirgends dichte* perfekte Menge oder für die nirgends dichten Teile einer perfekten Menge bewiesen zu werden; das führt *G. Cantor* aus. Ohne hier seinen Beweis[74]) zu geben, dürfte es doch nützlich sein, an einem Beispiel[75]) zu zeigen, daß es tatsächlich nirgends dichte perfekte Mengen gibt.

Teilen wir eine geradlinige Strecke, z. B. [0, 1], in drei gleiche Teile und schließen wir aus der Strecke die *innerhalb* des mittleren

---

71) **G. Cantor,* Acta math. 2 (1883), p. 409/12; Math. Ann. 23 (1884), p. 459/61. Mit wesentlich derselben Methode hatte er schon früher die Nichtabzählbarkeit des linearen Kontinuums bewiesen.[64])*

72) Acta math. 4 (1884), p. 381; *Math. Ann. 23 (1884), p. 480/7. Gleichzeitig auch *I. Bendixson,* Bihang Svensk. Vet.-Akad. Handl. 9 (1884), Nr. 6, wo der Satz auch für n-dimensionale perfekte Mengen bewiesen ist. (Weitere Beweise für den n-dimensionalen Fall bei *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 296/8 [darunter ein besonders einfacher von *L. E. J. Brouwer*], und *W. H. Young,* Quart. J. of math. 36 (1905), p. 282/4).*

72a) *Vgl. auch Nr. 8.*

73) J. f. Math. 84 (1878), p. 246; Acta math. 2 (1883), p. 315.

74) *Vgl. hierzu den Schluß von Nr. 8.*

75) **G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 590; Acta math. 2 (1883), p. 407. Punktmengen von solchem Typus haben schon vorher *A. Harnack,* Math. Ann. 19 (1882), p. 239 und *P. du Bois-Reymond,* Functh.[4]), p. 188 konstruiert; siehe auch *H. J. St. Smith,* Proc. London Math. Soc. (1) 6 (1875), p. 147/9; *V. Volterra,* Giorn. di mat. 19 (1881), p. 80; *W. Veltmann,* Ztschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 176 u. 199.*

Teiles gelegenen Punkte aus. Behandeln wir ebenso die beiden beibehaltenen Strecken, dann die vier neuen Strecken usw.; die Menge der weggenommenen Punkte ist dann die *Komplementärmenge* der Menge E, die wir betrachten wollen. Diese Menge E besteht aus denjenigen Punkten, die rechte oder linke Endpunkte der ausgeschlossenen Strecken sind, und aus den Häufungspunkten dieser Punkte. Sie ist also abgeschlossen, und es ist leicht zu sehen, daß sie perfekt ist. Sie ist sicherlich *in keinem Teile* der ursprünglichen Strecke *überall dicht.*

Wir wollen an diesem Beispiele verständlich machen[76]), wie man eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten von E und den Punkten der Strecke $[0, 1]$ herstellen kann. Kommt man überein, die Abszisse eines Punktes als triadischen Bruch zu schreiben, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Zugehörigkeit eines Punktes zu E darin, daß man seine Abszisse mit Hilfe der Zahlzeichen 0 und 2 allein, mit Ausschluß der 1, schreiben *kann.*[77])

Lassen wir einem Punkte von E einen Punkt entsprechen, dessen Abszisse im System von der Basis 2 erhalten wird, indem man überall die Ziffer 2 durch die Ziffer 1 ersetzt (während man die Nullen an ihrer Stelle beläßt); dann umfaßt die so erhaltene Menge F *alle* Punkte der Strecke $[0, 1]$; einem Punkte von E entspricht ein Punkt von F; einem Punkte von F entsprechen ein oder zwei Punkte von E; demnach haben E und F die gleiche Mächtigkeit.

8. Die abgeschlossenen und die offenen Mengen. Die systematische Untersuchung der abgeschlossenen Mengen hat der Analysis, und, wie man weiter unten sehen wird, auch der Geometrie außerordentliche Dienste geleistet.

C. Jordan[78]) bezeichnet als *„écart“*[79]) zweier Punkte (x, y), (x', y') den Ausdruck:

$$|x - x'| + |y - y'|.$$

Diese Ausdrucksweise läßt sich auf zwei Punkte eines n-dimensionalen Raumes R_n ausdehnen. In allen Fragen, in denen komplexe Koordinaten ausgeschlossen sind, kann man ohne Nachteil den *„écart“* durch die *Entfernung* oder den *Abstand*

$$+\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

76) *Im Anschluß an *G. Cantor,* Acta math. 4 (1884), p. 386.*

77) Man muß sagen: „schreiben kann“; denn es gibt Punkte, deren Abszisse sich auf zwei Arten schreiben läßt (z. B. kann man für $\frac{1}{3}$ schreiben 0,1 oder 0,0222...) und es genügt für die Zugehörigkeit des Punktes zu E, daß *eine* der beiden Schreibweisen die Ziffer 1 nicht enthält.

78) J. de math. (4) 8 (1892), p. 71; Cours d'Analyse[12]) 1, p. 18.

79) *A. Pringsheim* [II A 1, Nr. 21, Note 233] übersetzt den *C. Jordan*schen *„écart“* mit *„Unterschied“*.*

ersetzen. Im folgenden soll der *Abstand* verwendet werden; alle ausgesprochenen Eigenschaften bleiben richtig, wenn man an seine Stelle den *„écart“* setzt; man könnte auch andere stetige positive Funktionen der beiden Punkte benutzen, die nur dann Null werden, wenn die Punkte zusammenfallen. [Vgl. Nr. 26.]

Der *Abstand* eines Punktes von einer Menge ist die untere Grenze der Abstände des Punktes von den verschiedenen Punkten der Menge. Diese untere Grenze ist positiv oder Null. Gehört der betrachtete Punkt der Menge an, so ist sein Abstand von ihr Null. Gehört er ihr aber nicht an, so ist dafür, daß jene untere Grenze der Abstände Null sei, notwendig und hinreichend, daß der gegebene Punkt Häufungsstelle der Punkte der Menge ist, d. h. ihrer Ableitung angehört.

Ist die Menge abgeschlossen, so enthält sie mindestens einen Punkt, dessen Abstand vom gegebenen Punkte p gleich dem Abstand dieses Punktes p von der Menge ist.

Der Abstand zweier Mengen ist die untere Grenze der Abstände je zweier Punkte, von denen der eine in der einen Menge, der andere in der andern beliebig angenommen wird. Sind die beiden Mengen abgeschlossen und ist mindestens eine von ihnen beschränkt, so enthalten sie mindestens ein Paar von Punkten, deren Abstand gleich dem Abstande der beiden Mengen ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei abgeschlossene Mengen, von denen mindestens eine beschränkt ist, einen Punkt gemeinsam haben, besteht darin, daß ihr Abstand Null ist.

*Die obere Grenze der Abstände je zweier Punkte einer Menge wird gewöhnlich als *Durchmesser* [manchmal auch als *Breite*[80])] der Menge bezeichnet.*

*Die kleinste Kugel, die um *jede* n-dimensionale Punktmenge vom Durchmesser d gelegt werden kann, hat nach *H. Jung*[80a]) den Radius

$$r = d \cdot \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\,.$$ [80b])*

80) *Z. B. bei *A. Schoenflies,* Bericht II 1908 p. 102. Gewöhnlich versteht man aber unter *„Breite* einer Menge E in Richtung a“ die untere Grenze des Abstands zweier zu a senkrechter Geraden, zwischen denen E gelegen ist. Dann ist „Durchmesser“ = größte Breite. Manchmal wird auch die kleinste Breite kurz als „Breite“ der Menge bezeichnet [z. B. [80b])].*

80a) **H. Jung,* Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt, Diss. Marburg 1899; J. f. Math. 123 (1901), p. 241/57; 137 (1910), p. 310/3. Siehe auch *R. Bricard,* Nouv. Ann. de math. (4) 14 (1914), p. 19/25; *J. v. Sz. Nagy,* Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), p. 390/2; *K. Reinhardt,* Jahresb. d. Deutsch Math.-Ver. 25 (1916), p. 157/63; *St. Straszewicz,* Dissertation [498]), p. 41/56.*

80b) **W. Blaschke,* Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 369/74 (für die Ebene) und daran anschließend allgemeiner *P. Steinhagen,* Abhandlungen

G. Cantor[81]) hat ein Verfahren angegeben, das die Konstruktion aller linearen abgeschlossenen Mengen erlaubt. Dieses Verfahren besteht darin, aus der gegebenen geradlinigen abgeschlossenen Strecke zunächst die inneren Punkte eines ersten Intervalls zu entfernen, sodann die inneren Punkte eines zweiten, nicht in das erste eingreifenden Intervalls usw., wobei man eine (höchstens) abzählbar unendliche Menge von Intervallen anwendet: darin bestand auch das in dem oben [Nr. 7] gegebenen Beispiel angewandte Verfahren. Die Menge der übrig bleibenden Punkte ist eine abgeschlossene Menge.

Umgekehrt kann jede beschränkte, abgeschlossene, lineare Menge auf diese Weise erhalten werden: ihre Komplementärmenge wird notwendig von allen Punkten gebildet, die innerhalb gewisser einander ausschließender Intervalle[82]) liegen.[83]) Die Menge dieser Intervalle ist abzählbar; denn nach einem Satz von *G. Cantor*[158a]) ist es unmöglich, auf einer geradlinigen Strecke eine unendliche Menge von Intervallen ohne gemeinsame Punkte anzugeben, die nicht abzählbar ist.

Gerade hierauf gründet *G. Cantor* seinen auf die Mächtigkeit der perfekten Mengen bezüglichen Beweis.[72]) [Nr. 7.] Jede eindimensionale perfekte Menge umfaßt die abzählbar unendliche Menge der Endpunkte der punktfreien Intervalle und außerdem noch deren Häufungspunkte. *G. Cantor* läßt ersteren Punkten in passender Weise eine abzählbare, auf einer geradlinigen Strecke überall dichte Punktmenge entsprechen (was möglich ist) und zeigt, daß dann die sämtlichen Punkte dieser Strecke eindeutig denen der perfekten Menge entsprechen.

Math. Seminar d. Hamburg. Universität 1 (1921), p. 15/26 (für n Dimensionen) geben einen dazu gewissermaßen dualen Satz: Die größte Kugel, die in *jede konvexe* n-dimensionale Punktmenge von der (kleinsten) Breite b[80]) einbeschrieben werden kann, hat den Radius

$$\varrho = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+2}}{n+1}.$$

Ferner sei auf *K. Zindler,* Monatsh. Math. Phys. 30 (1920), p. 87/102 hingewiesen.*

81) *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 55/6; Acta math. 2 (1883), p. 377/8; siehe auch Math. Ann. 23 (1884), p. 481, 486; Acta math. 4 (1884), p. 381.*

82) *Diese Intervalle mögen die durch die abgeschlossene Menge bestimmten *punktfreien Intervalle* (oder auch *Lückenintervalle*) heißen;* *R. Baire* nennt sie *intervalles contigus à l'ensemble* [Pariser Thèse 1899 = Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 38]. — *Über solche Intervallmengen (die zuerst von den in Anm. [75]) zitierten Autoren betrachtet worden sind) siehe auch *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (1) 35 (1902/3), p. 245.*

83) *Unter diesen linearen abgeschlossenen Mengen sind die perfekten Mengen dadurch vollständig charakterisiert, daß bei ihnen alle punktfreien Intervalle gänzlich voneinander getrennt liegen, derart, daß sie nicht einmal mit ihren Endpunkten zusammenstoßen.*

Die vorstehende Erzeugungsweise läßt sich ohne Schwierigkeit auf den Fall von zwei oder n Dimensionen ausdehnen.[84]) Es genügt, die punktfreien Intervalle durch Kugeln zu ersetzen, von denen jede als Mittelpunkt einen der Menge nicht angehörenden Punkt, als Radius den Abstand dieses Punktes von der Menge hat, und die Punkte innerhalb solcher Kugeln auszuschließen. Man zeigt, daß eine abzählbar unendliche Mannigfaltigkeit von ihnen hinreicht, woraus sich der folgende allgemeine Satz ergibt:

Man erhält die allgemeinste, abgeschlossene Menge des n-dimensionalen Raumes, indem man aus diesem Raume diejenigen Punkte entfernt, welche innerhalb höchstens abzählbar unendlich vieler n-dimensionaler Kugeln liegen.

*Es sei noch erwähnt, daß jede abgeschlossene Menge P sich als Ableitung einer *abzählbaren* Menge auffassen läßt, und speziell als Ableitung einer isolierten Menge, falls P nirgends dicht ist.[84a])*

*Man kann dies alles noch etwas anders ausdrücken, wenn man den Begriff der *inneren Punkte* einer Menge einführt.*

Nach *G. Cantor*[84b]) und* *C. Jordan*[85]) wird ein Punkt p einer in einem n-dimensionalen Raum gelegenen Menge E als *innerer Punkt* (p. intérieur) von E bezeichnet, wenn alle Punkte einer um p als Mittelpunkt beschriebenen n-dimensionalen Kugel von hinlänglich kleinem Radius der Menge E angehören.

*Die inneren Punkte der Komplementärmenge F von E werden als *äußere* Punkte von E bezeichnet. Die übrigen Punkte, die also weder innere noch äußere Punkte von E sind, werden *Begrenzungspunkte* von E (p. frontières)[85a]) genannt. Die Gesamtheit dieser Begrenzungspunkte heißt die *Begrenzung* der Menge E.*[85b])

84) *L. Zoretti,* Paris C. R. 138 (1904), p. 674; J. de math. (6) 1 (1905), p. 5/6. *Eine andere Methode hat *A. Schoenflies* angegeben, Nachr. Ges. Göttingen 1899, p. 285/6; Math. Ann. 58 (1904), p. 212; Bericht I 1900, p. 81, Bericht I 1913, p. 291. Hierzu auch *E. W. Hobson,* Theory, p. 141, wo eine für die ebenen perfekten Mengen charakteristische Eigenschaft angegeben ist.*

84a) *Dieser Satz wurde für lineare (perfekte) Mengen von *I. Bendixson* [Acta math. 2 (1883), p. 427/9] bewiesen, für den allgemeinen Fall von *L. E. J. Brouwer* [in *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 299]. Vgl. ferner *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 273/74, 459, und *W. Groß*[508c]), p. 814.*

84b) **G. Cantor,* Nachr. Gött. Ges. Wiss. 1879, p. 130.*

85) *C. Jordan,* *J. de math. (4) 8 (1892), p. 72;* Cours d'Analyse[12]) 1, p. 20.

85a) **C. Jordan*[85]). Manche Autoren [z. B. *A. Schoenflies,* Ber. II 1908, p. 111] haben in wenig zweckmäßiger Weise frontière bzw. point frontière durch *Grenze* bzw. *Grenzpunkt* wiedergegeben, was gelegentlich zu Verwechslungen mit Grenzpunkt = Häufungspunkt Veranlassung geben könnte. Vgl. hierzu: II A 1, Nr. 21, Note 239 (*A. Pringsheim*).*

85b) **F. Hausdorff* [Mengenlehre, p. 214] bezeichnet außerdem diejenigen

Seien E' und F' die Ableitungen der Menge E bzw. ihrer Komplementärmenge F; dann gehört ein innerer Punkt von E zu E', *aber nicht zu* F'; ein innerer Punkt von F zu F', *aber nicht zu* E'; endlich umfaßt die Menge der Begrenzungspunkte *beider* Mengen oder die gemeinsame Begrenzung der beiden Mengen alle diejenigen Punkte, die zugleich einer von ihnen und der Ableitung der anderen angehören.[85c])

Es ist sehr leicht zu beweisen, daß zu jeder Menge, die nicht den ganzen Raum umfaßt, Begrenzungspunkte existieren. Ferner ist die Menge dieser Begrenzungspunkte abgeschlossen.

Dagegen ist die Existenz innerer Punkte nicht notwendig. Z. B. besitzt die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten keinen inneren Punkt.

*Eine Menge, die nur aus inneren Punkten besteht, wird sehr treffend als „*offene* Menge" bezeichnet.[85d]) Beispiele für solche offenen Mengen sind die offenen Intervalle oder Mengen von getrennt liegenden offenen Intervallen.

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich, daß *die offenen Mengen die Komplementärmengen der abgeschlossenen Mengen* bilden und umgekehrt; dieses gegensätzliche, gewissermaßen duale Verhalten der abgeschlossenen und der offenen Mengen spielt beim systematischen Aufbau der Punktmengenlehre eine große Rolle.

Begrenzungspunkte von E, die zugleich Punkte der Menge E sind, als „*Randpunkte*" von E und ihre Gesamtheit als den „*Rand*" von E; so daß also die Begrenzung von E sich aus dem „Rand" von E und dem „Rand" der Komplementärmenge F zusammensetzt. Eine Menge, die nur aus Randpunkten besteht, nennt er eine „*Randmenge*". — Jedoch werden sonst zumeist „Rand" und „Randpunkt" in der gleichen Bedeutung wie „Begrenzung" bzw. „Begrenzungspunkt" gebraucht, ohne einen Unterschied zu machen.*

85c) *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 177, sagt allgemein: Zwei Mengen A und B „*grenzen in einem Punkte* p *aneinander*", wenn p der einen angehört und Häufungspunkt der andern ist. Die Gesamtheit dieser Punkte p nennt er die „*Grenze zwischen* A *und* B", so daß also hier die „Begrenzung von A" als die Grenze zwischen A und seiner Komplementärmenge erscheint.

Zwei elementenfremde Mengen, die nicht aneinander grenzen, werden [nach *St. Mazurkiewicz*, Fundamenta math. 1 (1920), p. 66] als „*getrennt*" („séparés") bezeichnet. [Vgl. dazu auch *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 334/5.]*

85d) *Diese Benennung [„ensemble ouvert"] stammt wohl von *H. Lebesgue* [Pariser Thèse 1902, p. 12 = Ann. di mat. (3) 7 (1902), p. 242; J. de math. (6) 1 (1905), p. 157 ff.]. Besondere Verbreitung hat diese Bezeichnung durch *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen [p. 40 ff.] gefunden. Vgl. auch [146]).

Der Durchschnitt einer Menge E mit einer offenen Menge wird von *C. Carathéodory*, a. a. O., p. 60, als eine „*auf* E (oder *relativ zu* E) *offene Menge*" bezeichnet.*

Damit sind wir also zu der obigen Charakterisierung der abgeschlossenen Mengen mit Hilfe ihrer Komplementärmengen zurückgekommen. Wir können die obige Aussage bezüglich der linearen Mengen jetzt auch so aussprechen: Die linearen offenen Mengen bestehen aus einem oder mehreren, höchstens abzählbar unendlich vielen, getrennt liegenden linearen, offenen Intervallen; im Falle der Nichtbeschränktheit können darunter auch ein oder zwei „uneigentliche Intervalle" enthalten sein, nämlich die volle Gerade bzw. ein oder zwei Halbgerade (ohne Endpunkt). Allgemein läßt sich dies entsprechend für n Dimensionen formulieren, wenn man „Gebiete" [Nr. **10**] an Stelle der Intervalle setzt [vgl. Nr. **11**].*

9. Der Borelsche Überdeckungssatz und seine Verallgemeinerungen. *E. Borel*[86]) hat 1894 einen Satz angegeben, der seitdem in der Mengenlehre eine außerordentliche Wichtigkeit erlangt hat. Der Satz wurde zuerst in der folgenden Form ausgesprochen:

Hat man auf einer Geraden eine abgeschlossene Strecke s sowie abzählbar unendlich viele Intervalle d_ν und ist jeder Punkt von s innerer Punkt mindestens eines dieser Intervalle, so kann man unter diesen unendlich vielen Intervallen eine *endliche* Anzahl von Intervallen finden, welche die gleiche Eigenschaft besitzen (nämlich, daß jeder Punkt von s innerer Punkt mindestens eines von ihnen ist).

Der ursprüngliche Beweis gibt in gewissem Grade das Mittel, die endliche Zahl von Intervallen, um die es sich handelt, zu kon-

86) *E. Borel,* Thèse, Paris 1894, p. 43 = Ann. Éc. Norm. (3) 12 (1895), p. 51. *A. Schoenflies* bezeichnet den Satz in Bericht I 1900 (z. B. p. 119) und Bericht II 1908 (z. B. p. 76) zumeist als das *Heine-Borel*sche Theorem, wegen des engen Zusammenhanges, der zwischen *E. Borels* Beweis und dem Beweis von *E. Heine* [J. f. Math. 74 (1872), p. 188] für die Gleichmäßigkeit der Stetigkeit [vgl. II A 1, Nr. 9, Note 92 u. 93 (*A. Pringsheim*)] vorhanden ist; doch erkennt er dort an, daß *E. Heine* nur diese letztere Eigenschaft selbst im Auge hatte; *deshalb zieht er in Bericht I 1913 (siehe p. 234) die einfachere Bezeichnung *Borel*sches Theorem vor. Übrigens sei erwähnt, daß *G. Lejeune-Dirichlet* bereits lange vor *E. Heine,* nämlich schon im Jahre 1854, in seinen Vorlesungen die Gleichmäßigkeit der Stetigkeit bewiesen hat; siehe *G. Lejeune-Dirichlet,* Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, herausgegeben von *G. Arendt,* Braunschweig 1904, p. 4/8.*

Siehe wegen der Benennung des Theorems auch *H. Lebesgue,* Bull. sc. math. (2) 31 (1907), p. 133. *P. Montel* hat vorgeschlagen, dieses Theorem den Satz von *Borel-Lebesgue* zu nennen [vgl. *P. Montel,* Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris 1910, p. 6], *eine Bezeichnung, die wohl kaum sehr sachgemäß wäre.*

*In zweckmäßiger Weise bezeichnet man neuerdings nach *E. Zermelo-W. Alexandrow*[95]) und *C. Carathéodory* [Reelle Funktionen, p. 45] das Theorem als den *„Borelschen Überdeckungssatz"*.*

struieren. Später hat *E. Borel*[87]) den Beweis in einer schneller zum Ziele führenden Form gegeben, die aber diesen Vorteil nicht darbietet.

Man hat sich von gewissen, in der oben zitierten Form des Satzes enthaltenen Voraussetzungen befreien können. Z. B. haben *W. H. Young*[88]) und* *H. Lebesgue*[89]) gezeigt, daß die Beschränkung auf eine *abzählbar* unendliche Menge von Intervallen unnötig ist.

Die Verallgemeinerungen des Satzes sind zahlreich. Man konnte solche nach zwei Richtungen suchen: einmal, indem man an Stelle der geradlinigen Strecke s eine andere lineare Menge setzte; andererseits, indem man untersuchte, wie sich der Satz für einen zwei- oder n-dimensionalen Bereich gestaltet.

Das allgemeinste Resultat, daß sich bei Verfolgung des ersten Gesichtspunktes ergibt, ist die Ausdehnung des Satzes auf den Fall, daß man an Stelle einer Strecke eine beliebige *abgeschlossene, beschränkte* Menge betrachtet.[90]) Man erhält so den folgenden Satz:

Damit eine Punktmenge E die Eigenschaft hat, daß sie immer, wenn jeder ihrer Punkte innerhalb mindestens eines von unendlich vielen Intervallen liegt, bereits im Innern einer endlichen Anzahl dieser Intervalle vollständig enthalten ist, dafür ist notwendig und hinreichend, daß E abgeschlossen und beschränkt ist.[91])

Der *Borel*sche Überdeckungssatz ist also für die abgeschlossenen und beschränkten Mengen *charakteristisch.*[92])

Legen wir z. B. um jeden Punkt von der Abszisse $\frac{p}{q}$, der dem Intervalle (0, 1) angehört, das durch die Ungleichungen

87) *E. Borel,* Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, p. 42.

88) *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (1) 35 (1902/3), p. 384.*

89) *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904, p. 105. Siehe auch: *E. Borel,* Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris 1905, p. 9; *sowie: *F. Riesz,* Paris C. R. 140 (1905), p. 224.*

90) **W. H. Young*[88]); *E. Borel,* Paris C. R. 136 (1903), p. 1055; J. de math. (5) 9 (1903), p. 357. Vgl. auch: *F. Riesz*[89]). [Im Bericht I 1900, p. 119 hatte *A. Schoenflies* bereits gezeigt, daß der *E. Heine*sche Satz[86]) für beliebige perfekte Mengen gilt].*

91) **O. Veblen,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 10 (1904), p. 438;* *E. Borel,* Paris C. R. 140 (1905), p. 298. *Man kann hier, wie es bei *E. Borel* geschieht, den Satz dadurch noch etwas verallgemeinern, daß man die Intervalle durch *beliebige* lineare (derselben Geraden angehörende) Punktmengen P ersetzt und die in Nr. 8 angegebene Definition der inneren Punkte von P benutzt.*

92) *Also: Zu jeder *nicht abgeschlossenen* (oder *nicht beschränkten*) Punktmenge E gibt es immer unendliche Intervallmengen J, so daß jeder Punkt von E innerer Punkt mindestens eines Intervalls von J ist, während keine endliche Teilmenge von J die Eigenschaft hat, alle Punkte von E zu enthalten.*

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n} < x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}$$

bestimmte Intervall. Man kann n so groß machen, daß die Summe der Längen aller dieser Intervalle beliebig klein wird. Nimmt man eine noch so große endliche Anzahl A dieser Intervalle, so gibt es auf der Strecke (0, 1) *Intervalle,* welche außerhalb A liegen, und folglich werden nicht alle Punkte, deren Abszisse eine rationale Zahl ist, bedeckt.

Ein noch einfacheres typisches Beispiel: E sei die nicht-abgeschlossene Menge der Punkte $\frac{1}{n}$ (wo n eine ganze positive Zahl ist), und man betrachte die unendlich vielen (den Häufungspunkt 0 nicht enthaltenden) Intervalle

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}.$$

Keine endliche Anzahl dieser Intervalle wird E bedecken. *Ganz anders ist es, wenn man die abgeschlossene Hülle $\overline{E}$ von E betrachtet und noch ein 0 enthaltendes Intervall hinzunimmt.*

Dem zweiten Gedankengang folgend, hat man den ursprünglichen Satz, sowie den eben ausgesprochenen auf einen Raum von beliebig vielen Dimensionen[93]) ausdehnen können. So ist *E. Borel*[94]) zu dem folgenden Satz gelangt:

In einem n-dimensionalen Raum seien vorgelegt: eine beschränkte abgeschlossene Menge E und unendlich viele n-dimensionale Gebiete G[94a]) derart, daß jeder Punkt von E innerhalb mindestens eines Gebietes G liege; dann kann man aus den G eine *endliche* Anzahl von Gebieten so herausgreifen, daß jeder Punkt von E innerhalb mindestens eines von ihnen liegt.

93) Und sogar auf einen Raum von abzählbar unendlich vielen Dimensionen [*M. Fréchet,* Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 22, 26 u. insbes. 43/44]; *vgl. auch Nr. 26.*

94) *E. Borel*[90])[91]); *ferner *W. H. Young,* Quart. J. of math. 37 (1905), p. 27 [auch abgedruckt in *W. H.* u. *G. Ch. Young,* Theory, p. 202]; derselbe Beweis wie bei *Young,* auch bei *A. Capelli,* Rendic. Accad. Napoli (3) 15 (1909), p. 151. Den ursprünglichen *Borel*schen Satz hatte bereits *A. Schoenflies,* Bericht I 1900, p. 52 auf das Mehrdimensionale ausgedehnt; im Bericht I 1913, p. 242 wendet er dieselbe Methode auf den allgemeineren Fall an; daselbst, p. 243, weitere Methoden zur Übertragung vom linearen auf den n-dimensionalen Fall, zum Teil im Anschluß an *F. Riesz,* Math. Ann. 61 (1905), p. 416; siehe auch *H. Lebesgue,* Leçons[89]), p. 117. Wie oben[91]), so kann auch hier, im Anschluß an *E. Borel* l. c., eine weitere Verallgemeinerung dadurch vorgenommen werden, daß man die n-dimensionalen Gebiete G durch *beliebige* Punktmengen P mit inneren Punkten ersetzt.*

94a) *Über den Begriff des Gebietes siehe Nr. 10.*

Die Anzahl der Beweise, die für den *Borel*schen Überdeckungssatz (einschließlich der genannten Verallgemeinerungen) gegeben worden sind, ist eine sehr große.[95])

Eine letzte wichtige Verallgemeinerung verdankt man endlich *E. Lindelöf*[96]) und *W. H. Young*[97]). Hier handelt es sich im wesent-

95) Außer den schon im vorhergehenden angeführten Beweisen sind noch folgende zu nennen:

W. H. Young, Rend. Circ. mat. Palermo 21 (1906), p. 127. Ferner *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 239/41 (woselbst eine früher gegebene Darstellung verbessert wird); es wird hierbei von einer Schlußweise Gebrauch gemacht, die zuerst bei *W. Wirtinger,* Berichte Ak. Wien 108 II^a (1899), p. 1243/4 auftritt; in ähnlicher Weise *R. Baire* [bei *E. Borel*[91])];* *C. Arzelà,* Rend. Accad. Bologna (2) 13 (1908/9), p. 53; *G. Bagnera,* Rend. Circ. mat. Palermo 28 (1909), p. 244; *H. B. A. Bockwinkel,* Handelingen Vlaamsch. Natuur- en Geneeskundig Congres 13 (1911), p. 147/51.* *Besonders einfach sind die Beweise von *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 231, 272, und *E. Zermelo* (in *W. Alexandrow,* Elementare Grundlagen für die Theorie des Maßes, Diss. Zürich 1915, p. 18/22). — Ein von *C. A. dell' Agnola,* Atti Acc. Torino 45 (1910), p. 23, gegebener Beweis ist nicht völlig beweiskräftig (vgl. *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 240 Anm.).*

Im Zusammenhang mit dem *Borel*schen Satz stehen auch Untersuchungen von *W. H. Young* [Messenger of math. (2) 33 (1904), p. 129; *Proc. London Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 67*]; *G. Vitali* [Atti Accad. Torino 43 (1907/8), p. 229]; *H. Lebesgue* [Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 361]; **J. Pál* [Rend. Circ. mat. Palermo 33 (1912), p. 352/3]; *W. H.* u. *G. Chisholm Young* [Proc. London Math. Soc. (2) 14 (1914), p. 111/30]; *G. Chisholm Young* [Bull. sc. math. [54, =] (2) 43, (1919), p. 245/7]; *W. Sierpiński* [Fundamenta math. 4 (1923), p. 201/3]. Vgl. auch Nr. **20b**, bei Fußn. [430a])—[f]).*

*Es sei hier noch erwähnt, daß *O. Veblen*[91]), p. 436, die Äquivalenz des *Borel*schen Satzes mit dem *Dedekind*schen Stetigkeitsaxiom [III A B 1, Nr. 7 (*F. Enriques*)] nachgewiesen hat. Vgl. im übrigen auch Nr. **26** bei den Fußn. [527])—[582c]).*

96) *E. Lindelöf,* Paris C. R. 137 (1903), p. 697; Acta math. 29 (1905), p. 187.

97) *Nur für lineare Mengen: Proc. London Math. Soc. (1) 35 (1903), p. 384/5; der betreffende Satz tritt hier und auch sonst bei *W. H. Young* in der folgenden Form auf: Wenn eine beliebige Intervallmenge J gegeben ist, so kann man *abzählbar* viele Intervalle von J finden, welche die gleichen inneren Punkte besitzen wie die Intervallmenge J selbst. Zwei weitere Beweise Rend. Circ. mat. Palermo 21 (1906), p. 125/7; der erste auf Grund einer Methode von *F. Bernstein*; der zweite ist von *A. Schoenflies* [Bericht II 1908, p. 80 Anm. 1] als nicht richtig gekennzeichnet worden, woran sich eine längere Diskussion zwischen *W. H. Young* und *A. Schoenflies* anschloß [Messenger of math. (2) 39 (1909), p. 69 Anm.; (2) 42 (1912), p. 59, 113, 119; Rend. Circ. mat. Palermo 35 (1913), p. 74].

Für mehrere Dimensionen gab *W. H. Young* [abgesehen von einem vom Autor selbst als unzulänglich bezeichneten Versuch: Quart. J. of math. 37 (1905), p. 5 u. 25] die folgenden Beweise: Theory, p. 180 u. 199 [im Anschluß an die erwähnte Methode von *F. Bernstein*] sowie Messenger of math. (2) 42 (1912), p. 125.

Für allgemeine Räume [Nr. **26**] siehe insbes. *W. Groß*[508c]), p. 509/10 u. 518, sowie *M. Fréchet*[516a]), p. 353/4.*

lichen um die *nicht abgeschlossenen* Mengen. Für diese gab *E. Lindelöf* den folgenden allgemeinen Satz, den sogenannten *Lindelöfschen Überdeckungssatz*[97a]):

Sei in einem n-dimensionalen Raum R_n eine (nicht abgeschlossene) Menge P vorgelegt, und nehmen wir an, daß jeder Punkt p von P Mittelpunkt einer Kugel[97b]) S_p vom Radius ϱ_p sei; dann kann man unter diesen Kugeln *abzählbar* unendlich viele so auswählen, daß jeder Punkt von P mindestens innerhalb einer von ihnen liegt.

*Mit Hilfe dieses Satzes hat *E. Lindelöf*[96]), wie bereits oben (Nr. 5) erwähnt, das *Cantor-Bendixson*sche Theorem auf besonders einfache Art bewiesen.*

9a. *Die Mengen erster und zweiter Kategorie. *R. Baire*[98]) bezeichnet eine in einem (offenen oder abgeschlossenen) n-dimensionalen Gebiete G_n[94a]) ($n = 1, 2, 3, \ldots$) gelegene Menge, die sich durch Vereinigung von endlich oder abzählbar unendlich vielen in G_n nirgends dichten Mengen erhalten läßt, als *Menge erster Kategorie* in G_n. Jede in G_n gelegene Menge, die daselbst nicht von erster Kategorie ist, nennt er eine *Menge zweiter Kategorie* in G_n.[99])

Wenn nur von den Mengen eines und desselben Gebietes oder

97a) *So bezeichnet diesen Satz *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 46.*

97b) *Die Kugeln kann man durch n-dimensionale Gebiete [Nr. **10**] ersetzen, die p im Innern enthalten.*

98) **R. Baire,* Pariser Thèse 1899 = Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 65; Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905, p. 78.*

99) *In bezug auf den Begriff der Mengen erster bzw. zweiter Kategorie herrscht in der Literatur keine volle Übereinstimmung: *A. Schoenflies* hatte im Bericht I 1900, p. 108/9, abweichend von *R. Baire,* die Menge zweiter Kategorie als die Komplementärmenge einer Menge erster Kategorie definiert; ihm haben sich dann z. B. *F. Bernstein* [Göttinger Dissertation, Halle 1901, p. 47; Math. Ann. 61 (1905), p. 149], *E. W. Hobson* [Theory, p. 114] und *P. Mahlo*[105]) angeschlossen; im Bericht I 1913, p. 344/9, hat jedoch *A. Schoenflies* selbst genau die ursprüngliche Definition von *R. Baire* angenommen. Bei *E. W. Hobson,* a. a. O., ist der Definition der Mengen erster Kategorie die [sehr einschränkende] Bedingung hinzugefügt, daß die betreffenden nirgends dichten Mengen abgeschlossen sein sollen. Diese aus *abgeschlossenen* nirgends dichten Mengen zusammengesetzten Mengen erster Kategorie sind von *F. Bernstein,* a. a. O., als *geschlossene* Mengen erster Kategorie bezeichnet worden. Außerdem sei erwähnt, daß *P. Mahlo*[105]) eine Menge, die in unserer Bezeichnung zugleich mit ihrer Komplementärmenge von zweiter Kategorie ist, eine „Menge dritter Kategorie" nennt. — Neuerdings hat *A. Denjoy,* Paris C. R. 160 (1915), p. 707/9; J. de math. (7) 1 (1915), p. 123/5, im Französischen neue Benennungen eingeführt: er bezeichnet eine Menge erster Kategorie als „ensemble *gerbé*", eine Menge zweiter Kategorie (im allgemeinen *Baire*schen Sinn) als „*inexhaustible*" und die Komplementärmenge einer Menge erster Kategorie als „*résiduel*".*

Raumes die Rede ist, so kann man (wie auch hier im folgenden) ohne nähere Angabe schlechthin von Mengen erster bzw. zweiter Kategorie sprechen.

Unmittelbar aus der Definition ergeben sich die folgenden Sätze:

Jede abzählbare Menge ist eine Menge erster Kategorie. Die Mengen zweiter Kategorie sind also nicht abzählbar.

Die Summe von endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen erster Kategorie ist ebenfalls eine Menge erster Kategorie.

Jede Teilmenge einer Menge erster Kategorie ist gleichfalls von erster Kategorie und deshalb ist auch der Durchschnitt sowie die Differenz von Mengen erster Kategorie wieder eine Menge erster Kategorie.

Besonders bedeutsam ist der Satz[100]): Ist P eine Menge erster Kategorie im Gebiet G_n, so gibt es in jedem n-dimensionalen Teilgebiet von G_n Punkte, die nicht zu P gehören.

Oder anders formuliert:

Ein Gebiet G_n ist, in bezug auf sich selbst, eine Menge zweiter Kategorie.

Die Komplementärmenge einer Menge erster Kategorie ist eine Menge zweiter Kategorie. Sie ist überall dicht in G_n. Ferner[101]) enthält diese Komplementärmenge stets perfekte Teilmengen und ist, wie sich hieraus ergibt, eine *homogene* Menge von *Mächtigkeit des Kontinuums.*[102])

Im Anschluß an *H. Lebesgue*[103]) heißt eine Menge in einem n-dimensionalen Gebiete G_n *überall von zweiter Kategorie,* wenn sie in keinem n-dimensionalen Teilgebiete von G_n von erster Kategorie ist. Er beweist sodann die folgenden Sätze:

Ist eine Menge in G_n von zweiter Kategorie, so gibt es mindestens ein n-dimensionales Teilgebiet H_n von G_n, in welchem sie überall von zweiter Kategorie ist.

---

100) *Dieser Satz ist, unabhängig voneinander, von mehreren Mathematikern gefunden worden; siehe außer *R. Baire*[98]): *W. F. Osgood,* Amer. J. of math. 19 (1897), p. 173; Math. Ann. 53 (1900), p. 462; Ann. of math. (2) 3 (1901), § 2; *F. Hartogs,* Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlichen, Münchener Diss. 1903 (Leipzig 1904), p. 30/31; vgl. auch *L. Zoretti*[161]).*

101) **A. Schoenflies,* Bericht I 1900, p. 108; Bericht I 1913, p. 345/7; auch *W. H. Young,* Messenger of math. (2) 38 (1908/9), p. 46/8.*

102) *Auch eine Menge erster Kategorie in G_n kann eine in G_n überall dichte homogene Menge von Mächtigkeit des Kontinuums sein, wofür *R. Baire,* Leçons[98]), p. 79, ein einfaches Beispiel angegeben hat.*

103) **H. Lebesgue,* J. de math. (6) 1 (1905), p. 185.*

Jede Menge zweiter Kategorie eines Gebietes G_n setzt sich zusammen aus einer Menge erster Kategorie K_1 und aus endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen $K_2^{(s)}$, deren jede in einem gewissen Teilgebiete $H_n^{(s)}$ von G_n überall von zweiter Kategorie ist.

Die Frage, ob der Begriff der Menge zweiter Kategorie allgemeiner ist als der Begriff der Komplementärmenge einer Menge erster Kategorie, war längere Zeit hindurch unentschieden. Erst *H. Lebesgue*[104]) und später auch *P. Mahlo*[105]) haben, auf Grund der Wohlordenbarkeit des Kontinuums[106]), die Existenz von Mengen nachgewiesen, die zugleich mit ihrer Komplementärmenge überall von zweiter Kategorie sind.[107])

---

104) **H. Lebesgue,* Bull. Soc. math. de France 35 (1907), p. 207/8 u. 212.*

105) **P. Mahlo,* Berichte Ges. Wiss. Leipzig 63 (1911), p. 346/7.*

106) **E. Zermelo* [Math. Ann. 59 (1904), p. 514; 65 (1908), p. 107] hat mit Hilfe des sog. *Auswahlaxioms* den Nachweis geführt, daß jede Menge einer *Wohlordnung* fähig ist. [Über den Begriff der Wohlordnung siehe I A 5, Nr. **6** (*A. Schoenflies*)]. Dieses Auswahlaxiom (das jedoch keineswegs von allen Mathematikern als zulässig angesehen wird) besagt in seiner engsten Fassung [vgl. *E. Zermelo,* Math. Ann. 65 (1908), p. 110 u. 266)]: Zerfällt eine Menge S in elementenfremde Teilmengen $M, N, R \ldots$ (deren jede mindestens ein Element enthält), so gibt es mindestens eine Teilmenge S_1 von S, die mit jeder der Mengen $M, N, R \ldots$ genau ein Element gemeinsam hat.

Näheres hierüber siehe bei *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 170/84. Vgl. außerdem *F. Hartogs,* Math. Ann. 76 (1915), p. 438/43 [der hier beweist, daß Auswahlaxiom und Wohlordenbarkeit mit der „Vergleichbarkeit der Mengen" gleichwertig sind].*

107) *Andere Mengen, die zugleich mit ihrer Komplementärmenge überall von zweiter Kategorie sind, stellen z. B. die von *G. Vitali*[396]) und *F. Hausdorff*[400]) (ebenfalls mit Hilfe des Auswahlaxioms) konstruierten nicht-meßbaren Mengen dar [siehe Nr. **20**]. Man erhält hierbei sogar noch mehr, nämlich die Zerspaltung eines linearen Kontinuums C (Intervall oder Kreis) in abzählbar unendlich viele elementenfremde Teilmengen, die alle überall in C von zweiter Kategorie sind. Z. B. wird bei *F. Hausdorff* ein Kreis in abzählbar unendlich viele, untereinander kongruente, elementenfremde Teilmengen zerlegt.

Ferner sei hier auf folgenden Satz von *H. Lebesgue* [J. de math. (6) 1 (1905), p. 186/7] hingewiesen: Eine Menge, die zugleich mit ihrer Komplementärmenge überall von zweiter Kategorie ist, kann keine *Borel*sche Menge und also nicht im *Borel*schen Sinne meßbar sein [siehe über diese Begriffe Nr. **9b** und **20**]. — Dagegen kann man mit Hilfe einer den *P. Mahlo*schen Gedankengang[105]) verwendenden Überlegung die Existenz von Mengen beweisen, die zwar zugleich mit ihrer Komplementärmenge überall von zweiter Kategorie sind, die aber trotzdem im *Lebesgue*schen Sinn [Nr. **20**] meßbar sind. [Man braucht nur bei *P. Mahlo*[105]) die Vereinigungsmenge P der nirgends dichten, perfekten Mengen N_μ speziell so zu wählen, daß P vom Maß 1, also ihre Komplementärmenge $Q = (T' + T'')$ vom Maß 0 wird.]

Es sei noch erwähnt, daß *C. Burstin*[400a]) das lineare Kontinuum in c

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß der Begriff der Menge erster und zweiter Kategorie erweitert werden kann, indem man an Stelle des Gebietes G_n eine beliebige, insbesondere irgendeine offene oder eine perfekte Menge zu Grunde legt[108]): Sei Q irgendeine, in einem Raum R_n gelegene offene oder perfekte Menge und P eine Teilmenge von Q; dann wird P eine *Menge erster Kategorie in* oder *in bezug auf* Q genannt, wenn P aus endlich oder abzählbar unendlich vielen in Q nirgends dichten Mengen zusammengesetzt werden kann. Jede Teilmenge von Q, die in Q nicht von erster Kategorie ist, heißt eine *Menge zweiter Kategorie in* oder *in bezug auf* Q. Alle im vorhergehenden ausgesprochenen Sätze lassen sich unmittelbar auf diese Mengen erster bzw. zweiter Kategorie in einer offenen oder perfekten Menge Q übertragen. Ist z. B. P eine Menge erster Kategorie in Q, so gibt es in jedem Gebiete G_n, das Punkte von Q enthält, auch solche Punkte von Q, die nicht zu P gehören; insbesondere ist daher die offene oder perfekte Menge Q selbst eine Menge zweiter Kategorie in Q.[109])*

9b. *__Die Borelschen Mengen.__ Ist eine Klasse von Mengen E bereits bekannt, so wird man im allgemeinen von da aus zu neuen Mengen durch Anwendung der beiden einfachsten Mengenoperationen gelangen, nämlich dadurch, daß man

α) die Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen E,

β) den Durchschnitt von endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen E bildet.[110])

Ein derartiger Gesichtspunkt ist zuerst in systematischer Weise von *E. Borel*[378]) verwendet worden und zwar im Zusammenhang mit der Aufstellung seines Maßbegriffs [siehe Nr. 20]: Um eine umfassende Gesamtheit der wichtigsten Mengen gleichzeitig mit ihrem Maß konstruktiv zu erhalten, betrachtet er die Gesamtheit aller Mengen eines Raumes R_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), die sich, ausgehend von den Intervallen, durch endlich oder abzählbar unendlich häufige Anwendung der [bei ihm allerdings

---

elementenfremde Mengen, die überall von zweiter Kategorie und (im *Lebesgue*schen Sinn) nicht-meßbar sind, zerspalten hat. Durch eindeutige und stetige Abbildung einer perfekten Menge P auf ein Intervall ergibt sich daraus auch die Zerspaltung jeder perfekten Menge P in c Teilmengen, die in bezug auf P überall von zweiter Kategorie sind.*

108) *_R. Baire,_ Thèse[98]), p. 67; Leçons[98]), p. 106.*

109) *Diese Eigenschaft (dagegen nicht alle übrigen) bleibt auch erhalten, wenn man von der Menge Q nur voraussetzt, daß sie abgeschlossen oder eine innere Grenzmenge [vgl. Nr. 9b] sei; siehe *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 327/8.*

110) *Vgl. auch Fußn. [35]).*

nur für elementenfremde Mengen benutzten[111])] Operation α) sowie der Bildung der Differenz von zwei Mengen gewinnen lassen. Man erhält aber die gleiche Mengengesamtheit, wenn man[112]) — und dies wollen wir an dieser Stelle ausschließlich zugrunde legen — [in allgemeiner Weise] die Operationen α) und β) verwendet.[113])

Die so erzeugten Mengen werden „nach *Borel* meßbare Mengen" [ensembles mesurables B"][112]) genannt (vgl. Nr. 20) oder nach *F. Hausdorff*[114]) kürzer als *„Borelsche Mengen"* bezeichnet.

Die abgeschlossenen und die offenen Mengen sind die einfachsten *Borel*schen Mengen; man kann statt der Intervalle geradezu die abgeschlossenen und offenen Mengen zum Ausgangspunkt für die sukzessive Erzeugung der *Borel*schen Mengen nehmen, was den Vorteil hat, die Komplementärmengen durchgehend als gegensätzlich und gleichwertig behandeln zu können [vgl. Nr. **54 a**].

Wir betrachten zunächst die einfachsten Mengen, die sich nach den abgeschlossenen und offenen Mengen durch die Operationen α) und β) ergeben. Der Durchschnitt von endlich oder abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Mengen ist wieder eine abgeschlossene Menge; und die Vereinigungsmenge von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen; dies alles liefert also nichts Neues. Dagegen wird die *Vereinigungsmenge von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Mengen* im allgemeinen nicht abgeschlossen sein. Ebenso, wenn wir die Komplementärmengen betrachten: Die Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar unendlich vielen offenen Mengen ist wieder offen und der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ebenfalls. Dagegen braucht der *Durchschnitt von abzählbar unendlich vielen offenen Mengen* nicht offen zu sein. Diese Durchschnittmengen bezeichnet man nach *W. H. Young*[115]), der sie eingehend untersucht hat, als *innere*

111) *Auch diese Einschränkung hat ihren Grund in der gleichzeitigen Konstruktion der Mengen und ihres Maßes.*

112) *Nach *H. Lebesgue*[382]).*

113) *Siehe hierüber Nr. 20, insbes. [383]). — Übrigens kann man sich dabei darauf beschränken, α) und β) nur für *aufsteigende* bzw. *absteigende Folgen* von ineinander geschachtelten Mengen anzuwenden, d. h. für Folgen von Mengen, von denen jede in der folgenden enthalten ist bzw. jede die folgende enthält.*

114) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 304 ff. Vgl. auch [115]).*

115) **W. H. Young*, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 55 (1903), p. 287, woselbst er die Bezeichnung *innere Grenzmenge* einführte. Später hat er seine Ausdrucksweise etwas modifiziert (seit 1904; siehe insbes. Theory, p. 63/75): er sagt *„ordinary* inner limiting set". Dagegen versteht er unter *„generalised* inner limiting set" den Durchschnitt einer absteigenden Folge von beliebigen Mengen; unter *„generalised outer limiting set"* die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge von beliebigen Mengen; und er gebraucht die Bezeichnung *„ordinary outer limiting*

Grenzmengen, und ihre Komplementärmengen, die Vereinigungsmengen von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Mengen, als *äußere Grenzmengen.*

Die inneren Grenzmengen sind naturgemäß zuerst im linearen Fall betrachtet worden. Und zwar war folgendes der Ausgangspunkt in der Theorie der inneren Grenzmengen[116]): Man umgebe jeden Punkt q einer gegebenen Menge Q mit einer Folge von ineinander geschachtelten, gegen Null abnehmenden Intervallen $\{\delta_q^{(n)}\}$; man fasse sodann alle zu einem festen Index n gehörende Intervalle zu einer Intervallmenge J_n zusammen und betrachte den Durchschnitt $\mathfrak{D}(J_n)$. Dies wird eine gewisse Punktmenge E (innere Grenzmenge) sein, welche Q[117]) und außerdem eventuell noch weitere Punkte umfaßt.

Diese eventuell zu Q neu hinzukommenden Punkte von E sind, wie leicht zu sehen, sämtlich in der Ableitung Q' enthalten.[118]) Deshalb gehört jede abgeschlossene Menge zu den inneren Grenzmengen.[119])

Die inneren Grenzmengen haben vor allem deshalb interessiert, weil sie nach den abgeschlossenen und offenen Mengen die erste Mengenkategorie waren, über deren Mächtigkeit man Klarheit gewonnen hat. [Für die äußeren Grenzmengen ist das Entsprechende auf Grund der Kenntnis der Mächtigkeit der abgeschlossenen Mengen trivial.] *W. H. Young*[120]) hat nämlich bewiesen:

---

set", wenn in letzterem Fall außerdem alle Mengen der Folge abgeschlossen sind. — Wir benutzen ausschließlich die oben im Text gegebene Benennung.

A. Schoenflies, Bericht I 1900, p. 109/10, der zuerst im Anschluß an ein von *E. Borel*, Leçons [87]), p. 39, angegebenes interessantes Beispiel ausführlicher innere Grenzmengen betrachtet hat, bezeichnet hier die inneren und äußeren Grenzmengen als *Borelsche Mengen*, behält jedoch später im Bericht I 1913, p. 350, die Bezeichnung „*Borel*sche Mengen" nur für die inneren Grenzmengen bei. Doch ist es jetzt nach *F. Hausdorff* [114]) fast allgemein üblich, darunter die viel umfassendere, im Text so bezeichnete Mengengesamtheit zu verstehen.*

116) *Vgl. das [115]) zitierte Beispiel von *E. Borel* und die daran anschließende Begriffsbildung von *A. Schoenflies* [115]); siehe auch die an *W. H. Young* sich anlehnende Darstellung in *E. W. Hobson*, Theory, p. 128.*

117) *Die Punkte Q hat (in einem spezielleren Fall) *E. Borel*, Bull. Soc. math. France 41 (1913), p. 2, *Fundamentalpunkte* der Menge E genannt.*

118) *Nach *W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1903), p. 265/6, kann man zu einer Menge Q immer eine solche, Q als Fundamentalpunkte enthaltende innere Grenzmenge E finden, daß, falls nicht E mit Q identisch ist, die zu Q neu hinzutretenden Punkte nur Häufungspunkte der totalen Inhärenz von Q sind. [Doch ist bei *W. H. Young* der Beweis eines benutzten Hilfssatzes (siehe [54])) unrichtig; vgl. *L. E. J. Brouwer*, Verslag Akad. Amsterdam 23 (1915), p. 1325/6 = Proceed. Akad. Amsterdam 18 (1915), p. 48/9, der zugleich für den hier genannten Satz einen neuen kurzen Beweis gibt.]*

119) **W. H. Young* [118]), p. 262.*

120) **W. H. Young*, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 55 (1903), p. 287/93. — Ent-

Jede innere Grenzmenge ist entweder endlich oder abzählbar unendlich oder von Mächtigkeit des Kontinuums; eine innere Grenzmenge ist dann und nur dann von Mächtigkeit des Kontinuums, wenn sie einen in sich dichten Bestandteil enthält.

Eine abzählbare Menge ist demnach *nur dann* eine innere Grenzmenge, wenn sie keinen in sich dichten Bestandteil enthält. Es läßt sich aber hierüber noch mehr aussagen, nämlich[121]):

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine abzählbare Menge eine innere Grenzmenge ist, besteht darin, daß sie keinen in sich dichten Bestandteil enthält.

Also jede separierte Menge ist eine innere Grenzmenge.

Damit eine *nicht-abzählbare* Menge eine innere Grenzmenge sein kann, ist es (nach *E. W. Hobson*[122])) *notwendig*, daß sie nur Punkte von der Mächtigkeit[122a]) 0, $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}$ enthält und keinen in sich dichten Bestandteil besitzt, der homogen von der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ ist.[122b])

Die vorstehenden Mächtigkeitsaussagen haben dadurch sehr an Bedeutung verloren, daß es sich ermöglichen ließ, ein ganz umfassendes Resultat für *alle Borel*schen Mengen zu erhalten. Es ist nämlich *F. Hausdorff*[123]) und etwa gleichzeitig auch *P. Alexandroff*[124]) gelungen, den allgemeinen Satz zu beweisen[124a]), *daß jede Borelsche Menge endlich, abzählbar unendlich oder von Mächtigkeit des Kontinuums ist und daß sie im letzteren Fall immer eine perfekte Teilmenge enthält.* —

In enger Beziehung zu dem angegebenen Konstruktionsverfahren der *Borel*schen Mengen stehen die folgenden von *F. Hausdorff*[125]) herrührenden Begriffsbildungen: Er bezeichnet ein System von Mengen

---

sprechendes über die Mächtigkeit der Differenz von zwei inneren Grenzmengen (die im allgemeinen keineswegs wieder eine innere Grenzmenge ist) bei *A. Rosenthal,* Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven, Münchener Habilitationsschrift, Leipzig 1912, p. 23; Math. Ann. 73 (1913), p. 499.*

121) **E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 323 [auch: Theory, p. 133]. Ein (sogar noch einfacherer) Beweis ist, wenn auch nur versteckt, schon bei *W. H. Young*[118]) enthalten. Vgl. ferner *L. E. J. Brouwer*[118]), sowie *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 359 u. 355/6.*

122) **E. W. Hobson*[121]), p. 325 [auch: Theory, p. 134].*

122a) *Bezüglich der hierbei auftretenden Begriffe siehe Nr. 5 u. 6.*

122b) *Oder: daß der in der Menge enthaltene in sich dichte Bestandteil homogen von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums ist.*

123) **F. Hausdorff,* Math. Ann. 77 (1916), p. 430/37. — Ein über [120]) bereits hinausgehender Spezialfall schon früher in Mengenlehre, p. 465/6.*

124) **P. Alexandroff,* Paris C. R. 162 (1916), p. 323/5.*

124a) *Ein anderer Beweis bei *W. Sierpiński*[128]), letztes Zitat.*

125) **F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 14/16 und 23/25; siehe auch a. a. O.[123]).*

als *„Ring“*, wenn die Summe und der Durchschnitt je zweier Mengen des Systems wieder dem System angehören; als *„Körper“*, wenn die Summe und die Differenz zweier Mengen des Systems; als *„σ-System“*, wenn die Summe jeder Folge von Mengen des Systems; als *„δ-System“*, wenn der Durchschnitt jeder Folge von Mengen des Systems wieder dem System angehört. Ein System, das z. B. zugleich Ring und σ-System ist, bezeichnet er als *„σ-Ring“*.

Jeder Körper ist gleichzeitig auch ein Ring, aber nicht umgekehrt. Jeder σ-Körper ist zugleich ein δ-Körper, aber nicht umgekehrt.

Über jedem Mengensystem $\mathfrak{M}$ gibt es einen kleinsten Ring und einen kleinsten Körper (welcher den ersteren enthalten muß), ebenso ein kleinstes σ- bzw. δ-System $\mathfrak{M}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{M}_\delta$ [bestehend aus den Summen bzw. Durchschnitten von Folgen von Mengen von $\mathfrak{M}$]. Das kleinste σ-System über $\mathfrak{M}_\delta$ wird dann mit $\mathfrak{M}_{\delta\sigma}$ bezeichnet; analog $\mathfrak{M}_{\delta\sigma\delta}$, $\mathfrak{M}_{\delta\sigma\delta\sigma}$, usw.[125a]) Durch abzählbar häufige derartige abwechselnde Bildung von kleinsten σ- und δ-Systemen und Zusammenfassung aller so entstandenen Mengen erhält man dann das kleinste System über $\mathfrak{M}$, das gleichzeitig σ- und δ-System ist. Ein solches System, das gleichzeitig σ- und δ-System ist, bezeichnet *F. Hausdorff* als *„(σδ)-System“*.

Ist $\mathfrak{G}$ das System der offenen Mengen, $\mathfrak{F}$ das System der abgeschlossenen Mengen, so stellt $\mathfrak{G}_\delta$ die inneren Grenzmengen, $\mathfrak{F}_\sigma$ die äußeren Grenzmengen dar, und das kleinste (σδ)-System über $\mathfrak{G}$ (und $\mathfrak{F}$) das System der *Borel*schen Mengen.

Die Mengensysteme $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}_\sigma$, $\mathfrak{G}_\delta$; $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$, $\mathfrak{G}_{\delta\sigma}$; $\mathfrak{F}_{\sigma\delta\sigma}$, $\mathfrak{G}_{\delta\sigma\delta}$; ... liefern eine *Klassifikation der Borelschen Mengen*, die zum Ausdruck bringt, welche (endliche oder transfinite) Zahl von Operationen α), β) zur Erzeugung der betreffenden *Borel*schen Menge nötig ist, und die in dieser Form im wesentlichen auf *W. H. Young*[1037]) zurückgeht [nachdem vorher *H. Lebesgue*[1035]) gewissermaßen auf einem Umweg zu einer Klasseneinteilung der *Borel*schen Mengen gelangt war]. Genaueres hierüber in sachlicher und historischer Beziehung werden wir erst in Nr. **54a** bringen, wo wir die Klassifikation der *Borel*schen Mengen im Zusammenhang mit der Klassifikation der *Baire*schen Funktionen betrachten werden.

Zum Schluß heben wir hier noch eine wichtige *Verallgemeinerung* der *Borel*schen Mengen hervor.

Den oben [insbes. bei [116])] erwähnten speziellen Konstruktionsprozeß der (linearen) inneren Grenzmengen hat *M. Souslin* derart abgeändert, daß es ihm damit gelang, *alle Borel*schen Mengen und da-

125a) Wobei diese Indexfolgen allen endlichen Zahlen und allen transfiniten Zahlen der zweiten Zahlenklasse entsprechen können.*

rüber hinaus eine noch *umfassendere* Mengengesamtheit, die er die „*Mengen (A)*" nennt, zu erzeugen.[126]) Er verfährt so: Jedem endlichen System von ganzzahligen positiven Indizes $n_1, n_2, \ldots n_k$ soll ein Intervall $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ entsprechen; das System dieser Intervalle sei mit S bezeichnet.[126a]) Er betrachtet nun die Menge E derjenigen Punkte x, für die mindestens eine unendliche Indexfolge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ existiert, so daß x jedem der Intervalle

$$\delta_{n_1};\ \delta_{n_1, n_2};\ \delta_{n_1, n_2, n_3};\ \ldots;\ \delta_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k};\ \ldots$$

angehört. Jede so erzeugte Menge E bezeichnet er als eine „*Menge (A)*". Vereinigung und Durchschnitt von endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen (A) sind selbst wieder Mengen (A). So ergibt sich, daß jede *Borel*sche Menge eine Menge (A) ist, aber *nicht umgekehrt*. Jedoch ergeben sich sämtliche linearen Mengen (A) als orthogonale Projektionen von zweidimensionalen *Borel*schen Mengen[127]) (und analog die n-dimensionalen Mengen (A) als Projektionen der $(n+1)$-dimensionalen *Borel*schen Mengen). Oder auch[128]): Die linearen Mengen (A) entstehen aus den linearen *Borel*schen Mengen[128a]) durch eindeutige und stetige Transformation. Die *Borel*schen Mengen sind unter den Mengen (A) dadurch charakterisiert, daß jede von ihnen *zugleich mit ihrer Komplementärmenge* eine Menge (A) ist.

Wie die *Borel*schen Mengen, so besitzen auch die Mengen (A) die Eigenschaft, daß sie entweder endlich oder abzählbar unendlich oder von Mächtigkeit des Kontinuums sind und in letzterem Fall eine perfekte Teilmenge enthalten.[129])*

---

126) *M. *Souslin,* Paris C. R. 164 (1917), p. 88/91. Dazu auch *N. Lusin*, ib., p. 91/4. In beiden Noten ist vieles ohne Beweis angegeben; weitere Ausführungen hierzu bei *N. Lusin* und *W. Sierpiński,* Bull. Acad. sc. Cracovie (A) 1918, p. 32/48 [siehe dazu auch noch *C. Kuratowski*, Fundamenta math. 3 (1922), p. 107/8].*

126a) *Man kann dabei die Intervalle immer so wählen, daß alle $\delta_{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}}$ im Intervall $\delta_{n_1, \ldots, n_k}$ enthalten sind.*

127) *Sogar von solchen höchstens erster Klasse [vgl. Nr. **54a**].*

128) **N. Lusin* [126]). Ein Beweis bei *W. Sierpiński,* Bull. Acad. sc. Cracovie (A) 1918, p. 161/7 (insbes. p. 163/6) [siehe auch ib., p. 191/2]; dieser charakterisiert die Gesamtheit der linearen Mengen (A) geradezu als das kleinste, die linearen Intervalle enthaltende $(\sigma\delta)$-System, welches mit jeder Menge auch zugleich ihre eindeutigen und stetigen Abbilder enthält. — Vgl. dazu auch *W. Sierpiński*, Fundamenta math. 3 (1922), p. 27/30.*

128a) *Sogar aus einer einzigen von ihnen, nämlich der Mengen der irrationalen Zahlen des Intervalls (0,1).*

129) *Dagegen ist über die Mächtigkeit der Komplementärmengen der Mengen (A) noch nichts Allgemeines bekannt.*

Die Struktur der abgeschlossenen Mengen.

10. Einteilung der abgeschlossenen Mengen. Die Untersuchung der verschiedenen Arten von abgeschlossenen Mengen bietet ein zweifaches Interesse dar: erstens ist sie bei einer großen Zahl von Anwendungen vollkommen unentbehrlich, und zweitens enthüllt sie seltsame, geradezu paradox erscheinende Umstände, die zeigen, mit welcher Sorgfalt man schließen muß, um, wie es unerläßlich ist, in sicherer Weise die Analysis auf den Begriff der ganzen Zahl aufzubauen.

Die Untersuchung der *linearen* Mengen fördert nur wenig derartig Überraschendes zu Tage: Eine beschränkte, abgeschlossene, eindimensionale Menge enthält im allgemeinen überall dichte Teile und nirgends dichte Teile. Jene erschöpfen die Punkte gewisser Intervalle; diese umfassen isolierte bzw. durch fortgesetzten Ableitungsprozeß isolierbare Punkte und perfekte (nirgends dichte) Mengen. Nun ist aber der Begriff des linearen Kontinuums einer jener Begriffe, die wir (mit Recht oder Unrecht) als wohlvertraut ansehen[130]); andererseits gleichen alle perfekten, nirgends dichten, linearen Mengen einander, wenigstens hinsichtlich ihrer Erzeugungsweise; *sie lassen sich alle ordnungstreu aufeinander abbilden*. Man braucht nur ein Beispiel zu studieren, um zu bemerken, daß hier zwar eine sehr merkwürdige und wenig gewohnte Punktgruppierung vorliegt, die jedoch nichts Paradoxes hat.

In ganz anderer Weise sind dagegen die *n-dimensionalen* Mengen ($n > 1$) instruktiv. Bei der Beschäftigung mit diesen Mengen wollen wir uns im allgemeinen auf den Fall zweier Dimensionen beschränken, und zwar aus folgenden Gründen:

1. In sehr vielen Fällen lassen sich die erhaltenen Resultate ohne weiteres auf beliebig viele Dimensionen ausdehnen.

---

130) Siehe hierzu *P. du Bois-Reymond*, Functionenth.[4]). Er nennt [p. 184] *vollständige Pantachie* das Zahlenkontinuum, d. i. [p. 213] für seinen *Idealisten* „der Inbegriff der gleichzeitig vorhandenen Vielheit aller *möglichen* Größen" und für seinen *Empiristen* „der Inbegriff aller *denkbaren* durch geometrische oder numerische Bestimmung festgelegten oder noch festzulegenden Größen".

*Neuerdings haben mit besonderer Schärfe *L. E. J. Brouwer* und *H Weyl* gegen die übliche Auffassung des linearen Kontinuums und gegen die damit zusammenhängende Irrationalzahltheorie und viele Teile der Punktmengenlehre Stellung genommen; siehe: *L. E. J. Brouwer,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 28 (1920), p. 203/8 und insbes. seine dort auf p. 203 in Fußn. 1) angegebenen, mehr philosophischen Schriften; außerdem „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten", Verhandelingen Akad. Amsterdam (1. Sectie) 12, Nr. 5 (1918) und Nr. 7 (1919), sowie die (demnächst erscheinende) „Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten", 1. Teil, ibid. 13, Nr. 2 (1923); *H. Weyl,* Das Kontinuum, Leipzig 1918; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 28 (1919), p. 85/92; Math. Ztschr. 10 (1921), p. 39/79.*

2. In der bei zwei Dimensionen gebräuchlichen Redeweise sind die angewandten Worte vertraut und anschaulich, und folglich wird der Nutzen einer solchen Untersuchung vor allem darin bestehen, genau zu bestimmen, was rein logisch den allgemein gebräuchlichen Begriffen der Linie, des Gebietes usw. entspricht.

In den Fällen jedoch, wo die Übertragung auf mehr Dimensionen nicht ganz selbstverständlich ist, sondern auf Schwierigkeiten stößt, werden wir die diesbezüglichen Untersuchungen (soweit solche überhaupt bis jetzt geführt sind) ausdrücklich besprechen.

G. Cantor[131]) nennt *Kontinuum* eine Punktmenge, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Sie ist *perfekt.*

2. Sie ist *zusammenhängend*; das soll heißen: wenn zwei beliebige Punkte p_1 und p_2 der Menge sowie eine beliebig kleine positive Zahl ε gegeben sind, so kann man eine endliche Folge von Punkten der Menge finden, die in p_1 und p_2 anfängt bzw. endigt, derart, daß der Abstand jedes Punktes vom folgenden kleiner als ε ist.

Übrigens ist schon eine zusammenhängende, *abgeschlossene* Menge notwendig in sich dicht und folglich ein Kontinuum.

Z. B. ist nach *G. Cantor* die Menge der Punkte *innerhalb* einer Strecke kein Kontinuum, da sie nicht abgeschlossen ist; ebenso auch nicht die Menge aller Punkte zweier abgeschlossener Strecken ohne gemeinsamen Punkt, da diese nicht zusammenhängend ist.

C. Jordan[132]) nennt eine abgeschlossene Menge zusammenhängend, wenn man sie nicht in zwei abgeschlossene elementenfremde Mengen zerlegen kann. Die damit sich ergebende Definition des Kontinuums ist für beschränkte Mengen mit der *G. Cantor*schen gleichbedeutend. *Im Fall der nicht beschränkten Kontinuen werden wir im folgenden stets die an *C. Jordan* anschließende Definition akzeptieren.[132a])*

131) *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 576; Acta math. 2 (1883), p. 406. — *Den Versuch, eine Definition des Kontinuums aufzustellen, hatte schon vorher *B. Bolzano* [Paradoxien des Unendlichen, herausg. v. *Fr. Přihonsky,* Leipzig 1851, p. 73, 83] unternommen; aber mit seiner Definition hat er nicht das getroffen, was man von jeher anschauungsgemäß unter einem Kontinuum zu verstehen gewohnt war.*

132) *C. Jordan,* *J. de math. (4) 8 (1892), p. 75;* Cours d'Analyse[2]) 1, p. 25. *Die französischen Bezeichnungen für „zusammenhängend" sind: *„bien enchaîné"* [*G. Cantor*] und *„d'un seul tenant"* [*C. Jordan*].*

132a) **W. Sierpiński,* Tôhoku Math. J. 13 (1918), p. 300/3, hat bewiesen, daß man ein *beschränktes* Kontinuum (eines m-dimensionalen Raums) auch *nicht* in *abzählbar* viele elementenfremde, abgeschlossene Teilmengen zerlegen kann. Dagegen gilt diese Behauptung für nicht-beschränkte Kontinua nicht mehr: Im 3-dimensionalen Raum kann man in der Tat Beispiele von *nicht-beschränkten* Kontinuen bilden, die sich also *nicht* in *zwei* (oder endlich viele), wohl aber in

*In einem von *G. Cantor* abweichenden Sinne haben neuerdings *N. J. Lennes*[133]) und *F. Hausdorff*[134]) „zusammenhängende Menge" definiert, indem sie die Definition von *C. Jordan* auf beliebige (nicht notwendig abgeschlossene) Mengen übertragen: sie nennen eine Menge E „*connected*" bzw. „*zusammenhängend*"[134a]), wenn sie sich nicht in zwei elementenfremde, in E abgeschlossene Teilmengen spalten läßt.[134b]) Dieser *Lennes-Hausdorff*sche Begriff ist enger als der *Cantor*sche Begriff; z. B. ist die Menge der rationalen Zahlen eines Intervalls nach *G. Cantor* „zusammenhängend", nicht aber nach *N. J. Lennes* und *F. Hausdorff*. Wir werden im folgenden eine im Sinne von *Lennes-Hausdorff* „zusammenhängende" Menge als „*lückenlos zusammenhängend*" bezeichnen und im übrigen „*zusammenhängend*" schlechthin stets im *Cantor*schen Sinn gebrauchen.[135]) Unmittelbar aus der Definition folgt als vielleicht wichtigste Eigenschaft: Enthält eine „lückenlos zusammenhängende" Menge Punkte zweier Komplementärmengen, so enthält sie auch mindestens einen Punkt von deren Begrenzung.[136])*

**A. Schoenflies*[137]) bezeichnet das, was *G. Cantor* Kontinuum nennt, als *abgeschlossenes Kontinuum*. Er will damit den Gegensatz und die Beziehung zu einem anderen Begriff hervorheben, den er als *nicht-*

---

abzählbar unendlich viele elementenfremde, abgeschlossene Teilmengen (sogar Teilkontinuen) zerlegen lassen. [Die Frage, ob derartiges auch in der Ebene möglich ist, scheint noch nicht beantwortet zu sein]. Vgl. auch den Schluß von [136]).*

133) **N. J. Lennes*, Amer. J. of math. 33 (1911), p. 303.*

134) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 244; siehe auch p. 458.*

134a) *Im Französischen wird dafür der Ausdruck „*connexe*" verwendet.*

134b) *Oder in der Ausdrucksweise von [85c]): wenn sich E nicht in zwei „getrennte" Teilmengen zerlegen läßt.*

135) *Außerdem nennt *F. Hausdorff* [Mengenlehre, p. 298] eine Menge E „*ϱ-zusammenhängend*" bzw. „*0-zusammenhängend*", wenn bei jeder Zerlegung von E in zwei elementenfremde Teilmengen deren gegenseitige Entfernung $\leqq \varrho$ bzw. $= 0$ ist. Dieser Begriff „0-zusammenhängend" deckt sich mit dem *Cantor*schen Begriff „zusammenhängend".

Bezüglich des von *H. Hahn* neuerdings eingeführten Begriffes „*zusammenhängend im kleinen*" siehe Nr. 16 Schluß.*

136) Eine eingehende Untersuchung der „lückenlos zusammenhängenden" Mengen bei *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 173/204 [der hiefür den Namen „stetige Mengen" verwendet] und bei *B. Knaster* u. *C. Kuratowski,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 206/55. Vgl. auch Nr. **14**, Schluß [bei [267a])—[ε])].

Mit Bezug auf [132a]) und [134b]) sei noch hervorgehoben: Es gibt in der Ebene *beschränkte,* lückenlos zusammenhängende Mengen, die sich in *abzählbar unendlich* viele, „getrennte" Teilmengen zerlegen lassen; vgl. *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 4 (1923), p. 5/6.*

137) *Bericht II 1908, p. 108. *A. Schoenflies* nimmt das abgeschlossene Kontinuum immer als beschränkt an, was wir nicht tun wollen.* .

abgeschlossenes Kontinuum bezeichnet, und zugleich dem Wort *Kontinuum* eine umfassendere Bedeutung beilegen, als es *G. Cantor* tut. *A. Schoenflies*[138]) nennt *nichtabgeschlossenes Kontinuum* jede nichtabgeschlossene Menge P, welche die Eigenschaft hat, daß je zwei ihrer Punkte in einem abgeschlossenen Kontinuum enthalten sind, das Teilmenge von P ist.[138a]) *G. Cantor* gebraucht hierfür die Bezeichnung *Semikontinuum.*[139])

Wir werden unter „Kontinuum", wenn nichts anderes beigefügt ist, hier immer (mit *G. Cantor*) das „abgeschlossene Kontinuum" verstehen.

Es sei bemerkt, daß die Ableitung eines nichtabgeschlossenen Kontinuums ein abgeschlossenes Kontinuum darstellt.

Ein Spezialfall dieser nichtabgeschlossenen Kontinuen sind die *Gebiete,* die *A. Schoenflies* deshalb auch als die *engeren* nichtabgeschlossenen Kontinua bezeichnet[140]), [wogegen er die sonstigen nichtabgeschlossenen Kontinua *„weitere"* Kontinua nennt[141])]. Damit ein nichtabgeschlossenes Kontinuum G ein *Gebiet* sei, muß noch eine Forderung erfüllt sein, nämlich daß jeder Punkt von G ein *innerer* Punkt ist.*

Also wir können definieren: Ein *Gebiet* ist eine Menge, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1. Gehört ein Punkt zu der Menge, so gehören alle Punkte einer gewissen Umgebung auch zu ihr; mit anderen Worten: *alle* Punkte sind innere Punkte der Menge.

2. Zwei Punkte der Menge können immer durch einen Streckenzug von endlicher Seitenzahl verbunden werden, dessen sämtliche Punkte der Menge angehören.[142])

138) *Bericht II 1908, p. 117. Ähnlich auch bei *E. Study,* Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 247/8.*

138a) *Es macht einen Unterschied, ob man für das hier verwendete abgeschlossene Teilkontinuum noch Beschränktheit voraussetzt oder nicht. Vgl. *E. H. Neville,* Acta math. 42 (1918), p. 78/80. Wir wollen die Voraussetzung der Beschränktheit nicht hinzufügen.*

139) *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 590; Acta math. 2 (1883), p. 407.

140) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 110/11.*

141) *Bericht II 1908, p. 117.*

142) *Für die Definition des Gebietes ist es völlig gleichwertig, ob man in 2. von endlichem Streckenzug oder von abgeschlossenem Kontinuum Gebrauch macht; vgl. *A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 111, Anm. 2).

Es sei übrigens hervorgehoben, daß in Übereinstimmung mit der im Text gegebenen Definition das „Gebiet" sich auch definieren läßt als „offene, lückenlos zusammenhängende Menge". Vgl. *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 215; *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 222.*

*Diese in der Funktionentheorie gebräuchliche Begriffsbildung dürfte auf *K. Weierstraß*[143]) zurückgehen, wenn er auch eine andere Ausdrucksweise (Kontinuum, Bereich) bevorzugt hat. In der funktionentheoretischen Literatur werden meistens die Worte „Gebiet", „Bereich" u. dergl. ohne Unterschied angewendet. *A. Schoenflies* schlägt vor, ausschließlich „*Gebiet*" in dem angeführten Sinn zu gebrauchen, mit dem Wort „*Bereich*" hingegen die abgeschlossene Menge zu bezeichnen, die aus einem Gebiet und seiner Begrenzung besteht.[144]) Es wäre gewiß sehr zweckmäßig, wenn diese Unterscheidung der beiden Ausdrücke sich durchsetzen könnte. Neuerdings wird übrigens vielfach[145]) in diesem Sinn für Gebiet bzw. Bereich auch *offenes* bzw. *abgeschlossenes Gebiet* gesagt. Wir werden hier diese Bezeichnungen: einerseits „*Bereich*" oder auch „*abgeschlossenes Gebiet*", andererseits „*Gebiet*" (schlechthin) oder, wenn nötig, „*offenes Gebiet*" verwenden, je nachdem ob die Begrenzung dazu gehört oder nicht.

Von manchen Autoren ist der Ausdruck „Gebiet" u. dergl. in einem anderen Sinn gebraucht worden[146]); wir wollen hier jedoch an der angegebenen fast allgemein üblichen Begriffsbildung festhalten.*

143) *Vgl. II A 1, Nr. 21, Note 244 (*A. Pringsheim*) und II B 1, Nr. 1, Note 1 (*W. F. Osgood*); s. insbes *G. Mittag-Leffler*, Acta math. 4 (1884), p. 2.*

144) **A. Schoenflies*, Bericht I 1913, p. 24, Anm. 1).*

145) *Z. B. *C. Carathéodory*, Math. Ann. 72 (1912), p. 118/9; Reelle Funktionen, p. 227.*

146) *C. Jordan* [Cours d'Analyse 1, p. 22] nennt „*domaine*" *jede* abgeschlossene Menge, die innere Punkte enthält.

H. Lebesgue [Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 377; *Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p 367, 377*] bezeichnet mit „*domaine*" eine beschränkte, abgeschlossene, zusammenhängende Menge, die mit der Ableitung ihrer inneren Punkte zusammenfällt. *Dieser Begriff stimmt (wie er selbst hervorhebt) nicht mit dem im Text angegebenen Begriff des Bereiches überein, da *H. Lebesgue* von der Menge der inneren Punkte nur voraussetzt, daß sie zusammenhängend sein soll, während oben im Text vorausgesetzt ist, daß zwei innere Punkte durch einen Streckenzug von lauter inneren Punkten verbunden werden können. Infolgedessen stellen bei *H. Lebesgue* in einer Ebene z. B. zwei sich von außen berührende Kreisflächen oder die Lemniskatenfläche auch schon ein „domaine" dar.*

An der erstgenannten Stelle fügte *H. Lebesgue* in Hinsicht auf Bereiche von unendlicher Zusammenhangszahl [s. Nr. 11] seiner Definition noch eine weitere Einschränkung hinzu, nämlich: wenn ein Punkt von einer einfachen geschlossenen Kurve [s. Nr 12] eingeschlossen werden kann, deren sämtliche Punkte innere Punkte sind, und wenn diese Kurve beliebig klein gewählt werden kann, dann soll jener Punkt gleichfalls ein innerer Punkt sein.

**F. Hausdorff* [Mengenlehre, p. 215] nennt jede offene Menge ein „*Gebiet*", und in gleichem Sinne gebraucht *J. Pierpont* [Lectures on the theory of functions of real variables 1 (Boston 1905), p. 167] den Ausdruck „*region*". Was wir unter Gebiet verstehen, wird von *F. Hausdorff* „zusammenhängendes Gebiet"

In der Ebene wird ein Kontinuum als *flächenhaft* bezeichnet, wenn es innere Punkte (also Gebiete) enthält, als *linienhaft* (oder *kurvenhaft*), wenn es keine inneren Punkte enthält, sondern aus lauter Begrenzungspunkten besteht.[147])

A. Schoenflies[147a]) nennt eine abgeschlossene Menge, die keine zusammenhängende Teilmenge (d. h. kein Teilkontinuum) besitzt, *durchweg zusammenhanglos* oder kurz *zusammenhanglos* oder *punkthaft*.[148]) *Es erweist sich als nötig, nicht nur dies auf nicht-abgeschlossene Mengen zu übertragen, sondern für nicht-abgeschlossene Mengen eine weitergehende Begriffszergliederung vorzunehmen. Wir wollen deshalb für beliebige Punktmengen folgende Festsetzungen treffen: Eine Punktmenge, die kein Kontinuum als Teilmenge enthält, werde als *punkthaft* bezeichnet. Eine Punktmenge, die keine (aus mehr als einem Punkt bestehende) „lückenlos zusammenhängende" Teilmenge enthält, soll *„ohne lückenlosen Zusammenhang"* heißen oder kann vielleicht auch als *„zerhackte"* Menge bezeichnet werden.[148a]) Eine Punktmenge, die keinen zusammenhängenden Bestandteil enthält, heiße *durchweg zu-*

genannt; er bezeichnet ferner eine „relativ offene" Menge[85d]) als *„Relativgebiet"* (a. a. O., p. 240). *J. Pierpont* verwendet noch die Bezeichnung *„complete region"* für offene Menge mit Begrenzung.

W. H. Young [Theory, p. 180; etwas modifiziert gegen Quart. J. of math. 37 (1905), p. 6] gibt einen Gebietsbegriff, der sachlich mit unserem *Weierstraß*schen übereinstimmt, so sehr auch seine Definition formal abweicht. Beschränken wir uns auf den zweidimensionalen Fall. *W. H. Young* nennt zunächst eine Menge D von Dreiecken „intransitiv", wenn man D in zwei Teilmengen D_1 und D_2 zerlegen kann, so daß kein Dreieck von D_1 in ein Dreieck von D_2 übergreift. Ist eine solche Zerlegung nicht möglich, so nennt er die Dreiecksmenge D „transitiv". Er definiert dann *„domain"* (oder auch *„completely open region"*) als die Gesamtheit der inneren Punkte einer transitiven Menge von Dreiecken; dies deckt sich mit unserem Gebietsbegriff. Ferner bezeichnet er als *„region"* die durch Vereinigung des Gebietes mit einigen oder allen ihren Begrenzungspunkten entstehende Menge; speziell nennt er *„closed region"* ein Gebiet mit seiner ganzen Begrenzung.*

147) Siehe *A. Schoenflies,* Ber. II 1908, p. 108. Daselbst bezeichnet er die abgeschlossenen Kontinua, die in keinem Gebiet der Ebene linienhaft sind, als *Flächen.* *Dies sind also offene Mengen mit Begrenzung. Eine zusammenhängende Fläche, d. h. einen Bereich, nennt er auch *einfache Fläche* oder *einfaches Flächenstück.* — Im Raum von mehr als 2 Dimensionen würde man an Stelle von „flächenhaft" den Ausdruck *„raumhaft"* zu setzen haben *

147a) a. a. O.[147])

148) *L. Zoretti* [J. de math. (6) 1 (1905), p. 7] verwendet hierfür die Bezeichnung *„partout discontinu"*.

148a) **F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 322, bezeichnet, abweichend von dem hier festgehaltenen Sprachgebrauch, eine solche Menge als „punkthaft"; *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 81, bezeichnet sie als *„dispersé"*.*

sammenhanglos oder kurz *zusammenhanglos.*[148b]) Eine zusammenhanglose Menge, deren Ableitung ebenfalls zusammenhanglos ist, möge speziell eine *verstreute* Menge genannt werden.[148c])*

Wir werden demgemäß im folgenden *zunächst die Struktur der allgemeinsten abgeschlossenen Mengen behandeln und dann* nacheinander untersuchen:

die flächenhaften Kontinua,
die linienhaften Kontinua,
die punkthaften Mengen.

10a. *__Die Struktur der allgemeinsten abgeschlossenen Mengen.__ Nach dem *Cantor-Bendixson*schen Satz wird jede nichtabzählbare abgeschlossene Menge durch fortgesetztes Abspalten isolierter Punkte in eine (höchstens) abzählbare Menge R und eine perfekte Menge C zerlegt. Welches ist nun die Struktur dieses perfekten Bestandteils C? Ist die perfekte Menge C nicht selbst ein Kontinuum, so ergeben sich für sie sofort zwei mögliche Typen; entweder sind in C *isolierbare Kontinua* vorhanden oder nicht. Dabei ist unter einem isolierbaren Kontinuum eine Teilmenge von C verstanden, die ein Kontinuum ist und von der Restmenge einen von 0 verschiedenen Abstand besitzt.[149])

Eine perfekte Menge *ohne* isolierbares Kontinuum nennt *A. Schoenflies*[150]) eine *perfekte Menge vom ersten Typus.* Diese hat die Eigenschaft, daß sie sich unbegrenzt in Teilmengen von gleicher Struktur wie die Gesamtmenge zerlegen läßt. Da nämlich diese Menge nicht zusammenhängend ist, läßt sie sich in zwei getrennte Bestandteile spalten, die ebenfalls perfekt und nicht zusammenhängend sein müssen und kein isolierbares Kontinuum enthalten können. Eine solche perfekte Menge vom ersten Typus braucht keineswegs punkthaft zu sein. Ein Beispiel dafür erhalten wir in der Ebene, wenn wir in allen Punkten einer linearen punkthaften perfekten Menge P gleichlange Lote errichten; eine so entstehende perfekte Menge enthält linienhafte Kon-

148b) *Eine derartige Unterscheidung zwischen „punkthaft" und „zusammenhanglos" findet sich auch bei *E. Mazurkiewicz* [Anz. Ak. Wiss. Krakau 1913 A, p. 47], wo hierfür die Ausdrücke *„punctiforme"* bzw. *„partout discontinu"* gebraucht werden.*

148c) *Im Anschluß an *S. Janiszewski* [J. Éc. Polyt. (2) 16 (1912), p. 85], der eine solche Menge *discret* nennt. Ein Beispiel einer zusammenhanglosen, nicht verstreuten Menge ist die Menge der Punkte: $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{1}{q}$ (wobei p und q relativ prime ganze positive Zahlen sind und $p < q$).*

149) *Auch in dem Fall, wo C selbst ein Kontinuum ist, wird man dieses zweckmäßig als „isolierbar" bezeichnen.*

150) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 131.*

tinua, die aber nicht isolierbar sind. Man erhält sogar perfekte Mengen vom ersten Typus mit flächenhaften Kontinuen, wenn man jene Lote durch schmale Rechtecke ersetzt, die Teile der punktfreien Intervalle von P als Grundlinien haben.

Enthält die perfekte Menge isolierbare Kontinua, so lassen sich diese fortgesetzt abspalten durch ein Verfahren, ähnlich dem, welches die isolierbaren Punkte aus einer abgeschlossenen Menge fortgesetzt abzuspalten gestattet. Man erhält schließlich den folgenden von *A. Schoenflies*[151]) aufgestellten und von *L. E. J. Brouwer*[152]) bewiesenen Satz:

Aus jeder perfekten Menge lassen sich durch endlich oder abzählbar unendlich viele Schritte nach und nach isolierbare Kontinua abspalten, bis die Menge entweder völlig erschöpft ist oder eine Menge vom ersten Typus als Rest bleibt.

Man kann dies alles noch etwas anders auffassen, wenn man nach *L. E J. Brouwer*[153]) als Elemente der Mengen nicht Punkte, sondern „Stücke" betrachtet. Unter einem *Stück* einer abgeschlossenen Menge M wird dabei ein einzelner Punkt oder ein Kontinuum verstanden, die nicht einem andern in M enthaltenen Kontinuum angehören. Die betrachteten Mengen seien nun stillschweigend als beschränkt vorausgesetzt. Ein Stück S wird *Grenzstück* einer unendlichen Menge von Stücken genannt, wenn unter diesen eine unendliche Teilfolge von Stücken S_i existiert, deren Abstand von S mit wachsendem Index i unbegrenzt gegen 0 abnimmt. Andernfalls (d. h. wenn S von der Restmenge einen von 0 verschiedenen Abstand besitzt) heißt S ein *isoliertes* oder isolierbares Stück der Menge. Eine Menge M von Stücken heißt *abgeschlossen*, wenn in M zu jeder unendlichen Folge von Stücken mindestens ein Grenzstück gehört. Eine abgeschlossene Menge von Punkten ist dann zugleich eine abgeschlossene Menge von Stücken. Unter einer *perfekten* Menge von Stücken wird eine abgeschlossene Menge verstanden, deren sämtliche Stücke Grenzstücke sind. Die perfekten Mengen von Stücken sind identisch mit den *Schoenflies*schen perfekten Mengen vom ersten Typus. Man kann also den *Schoenflies*schen Satz, zusammengefaßt mit dem *Cantor-Bendixson*schen Satz, auch so aussprechen:

Aus jeder *abgeschlossenen* Menge lassen sich durch eine endliche oder abzählbare Menge von Schritten nach und nach isolierbare Stücke abspalten, bis die Menge entweder völlig erschöpft ist oder eine *perfekte Menge von Stücken* als Rest bleibt.

151) *A. Schoenflies,* Math. Ann. 59 (1904), p. 145; Bericht II 1908, p. 135.*

152) *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 68 (1909), p. 429; Versl. Amsterd. Ak 18_2 (1909/10), p. 835.*

153) *Versl. Amsterd. Ak. 18_2 (1909/10), p. 833.*

L. E. J. Brouwer[154]) hat ferner die Struktur der perfekten Mengen von Stücken noch näher untersucht und hierfür den folgenden Satz bewiesen:

Jede perfekte Menge P von Stücken besitzt den geometrischen Ordnungstypus[154a]) *der linearen punkthaften perfekten Punktmengen p;* d. h. beide Mengen P und p lassen sich so umkehrbar eindeutig aufeinander abbilden, daß einem Grenzstück einer Folge von Stücken von P ein Grenzstück der entsprechenden Folge von p zugeordnet ist und umgekehrt; mit anderen Worten: P und p können umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abgebildet werden.

In derselben Weise ergibt sich[155]): Jede abgeschlossene Menge von Stücken besitzt den geometrischen Ordnungstypus einer linearen punkthaften abgeschlossenen Punktmenge.[155a])

Es sei noch darauf hingewiesen, daß alle diese Resultate von *A. Schoenflies* und *L. E. J. Brouwer* sich unmittelbar auf *beliebige* Mengen übertragen lassen. Das Vorstehende ergänzt den *Cantor-Bendixson*schen Satz durch eine genauere Analyse der Struktur des perfekten Bestandteils einer abgeschlossenen Menge; analog kann man die allgemeine *Cantor*sche Zerlegung einer beliebigen Menge in den separierten und den in sich dichten Bestandteil durch Untersuchung der Struktur dieses in sich dichten Bestandteils weiterführen: statt, wie oben, isolierbare Kontinua abzutrennen, wird man jetzt isolierbare *zusammenhängende* Stücke* fortgesetzt abspalten. Man erhält überhaupt aus den obenstehenden Resultaten wieder richtige Resultate, wenn man überall „Kontinuum", „perfekt", „abgeschlossen" bzw. durch *„zusammenhängende Menge"*, *„in sich dicht"*, *„beliebig"* ersetzt.[156]) Der Beweis hierfür ergibt sich am einfachsten, wenn man von der zu betrachtenden Menge M zu der abgeschlossenen Hülle $\overline{M}$ übergeht, auf diese abgeschlossene Menge $\overline{M}$ die obigen Betrachtungen anwendet und schließlich wieder zur Menge M selbst zurückkehrt.

154) *L. E. J. Brouwer* [153]), p. 835/8.*

154a) *Über den Begriff des *Ordnungstypus* siehe: I A 5, Nr. 5 (*A. Schoenflies*).*

155) **L. E. J. Brouwer*, Verslag Amsterd. Ak. 19_2 (1910/11), p. 1419 = Proc. Amsterd. Ak. 1911, p. 139.*

155a) **L. E. J. Brouwer*, Paris C. R. 169 (1919), p. 953/4; Proc. Amsterd. Ak. 22 (1919/20), p 471/4, hat auch die Struktur von abgeschlossenen Mengen untersucht, die auf Flächen gelegen sind.*

156) *Bei dieser Übertragung aus dem obigen ist die Definition der abgeschlossenen Mengen von Stücken wegzulassen; ferner ist dabei in dem Satz vom Ordnungstypus der perfekten Mengen von Stücken „*der* . . . Mengen p" zu ersetzen durch „*einer* . . . Menge p", da zwar alle linearen punkthaften *perfekten* Mengen denselben Ordnungstypus besitzen, nicht aber alle linearen punkthaften *in sich dichten* Mengen.*

Zu noch wichtigeren Begriffen kommt man, wenn man hier statt „zusammenhängend" mit *F. Hausdorff* „lückenlos zusammenhängend" verwendet.[156a]) Er bezeichnet das hierbei dem „Stück" entsprechende Gebilde als „*Komponente*", d. h. er versteht unter einer *Komponente* einer Menge M einen Punkt oder eine lückenlos zusammenhängende Teilmenge von M, die nicht in einer anderen lückenlos zusammenhängenden Teilmenge von M enthalten ist.[157]) Als *Quasikomponente*[157a]) von M bezeichnet er ferner die Menge aller Punkte, die bei jeder Zerlegung von M in zwei elementenfremde, relativ abgeschlossene Teilmengen gleichzeitig *einer* Teilmenge angehören. Mehrere Komponenten können sich zu einer Quasikomponente zusammenschließen.[157b]) Bei *abgeschlossenen, beschränkten* Mengen sind jedoch die Stücke, Komponenten, Quasikomponenten[157c]) identisch.[158])*

11. Flächenhafte Kontinua. Die Haupteigenschaften der flächenhaften Kontinua (*bez. im Raum von drei oder mehr Dimensionen: der raumhaften[147]) Kontinua*) beziehen sich auf ihre Begrenzung; deshalb finden sie ihren Platz besser in Nr. **13** und **13a**. Wir wollen uns hier auf einige andere Eigenschaften beschränken.

Zunächst sei auf einen schon früher [Nr. 8] gelegentlich erwähnten Satz von *G. Cantor*[158a]) hingewiesen:

In einem n-dimensionalen Raume R_n gibt es höchstens abzählbar unendlich viele Punktmengen, von denen jede innere Punkte enthält, und von denen keine zwei irgend welche gemeinsame innere Punkte besitzen ($n = 1, 2, 3 \ldots$).

Z. B. kann man auf einer Geraden nicht mehr als eine abzählbar unendliche Menge von Strecken angeben, so daß keine derselben in eine der anderen eingreift; ebenso ist es unmöglich, in einer Ebene (oder im gewöhnlichen Raum) eine nicht abzählbar unendliche Menge

156a) *Entsprechend kann man an Stelle von „lückenlos zusammenhängend" die „nicht-abgeschlossenen Kontinua" verwenden; vgl. dazu *E. H. Neville*[138a]), p. 85/6.*

157) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 245.

Wird dabei „lückenlos zusammenhängend" durch „0-zusammenhängend" [= „zusammenhängend" im gewöhnlichen Sinn; s. [135])] ersetzt, so wählt er die Bezeichnung 0-*Komponente* [p. 299].*

157a) *a. a. O., p. 248.*

157b) *Dies kann sogar bei Mengen „ohne lückenlosen Zusammenhang" eintreten, bei denen also die Komponenten aus einzelnen Punkten bestehen; wie *W. Sierpiński*[256]) gezeigt hat. [Vgl. dazu auch *St. Mazurkiewicz*, Fundamenta math. 2 (1921), p. 201/5.]*

157c) *Und „0-Komponenten".*

158) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 303.*

158a) *G. Cantor*, Math. Ann. 20 (1882), p. 117; Acta math. 2 (1883), p. 366.

von zwei- (bzw. drei-)dimensionalen Gebieten unterzubringen, ohne daß sie ineinandergreifen. Die Beschränkung, daß die Gebiete nicht ineinandergreifen sollen, kann teilweise aufgehoben werden. Es genügt, wenn jeder Punkt von R_n innerer Punkt von höchstens abzählbar unendlich vielen der gegebenen Mengen ist.

G. Cantor[159]) beweist ferner den Satz:

Hebt man aus dem Raume R_n eine beliebige abzählbare Menge heraus, so ist die übrigbleibende Komplementärmenge E, wenigstens für $n \geqq 2$, so beschaffen, daß zwei beliebige ihrer Punkte durch eine stetige Linie[159a]) verbunden werden können, die nur Punkte von E enthält[160]). *Also: E ist ein Semikontinuum (nichtabgeschlossenes Kontinuum).*

Hierher gehören auch die folgenden Sätze[161]):

Die Summe von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Mengen, von denen keine ein Kontinuum als Teilmenge enthält, umfaßt ebenfalls kein solches.

Ferner enthält die Summe von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Mengen, von denen keine innere Punkte enthält, ebenfalls keine solchen.

*Dieser letztere Satz ist übrigens in dem früher besprochenen Theorem enthalten, daß ein Gebiet des R_n eine Menge zweiter Kategorie in R_n ist [siehe Nr. **9a**, insbes. Fußn. [100])].*

---

159) *G. Cantor,* Math. Ann. 20 (1882), p. 118/21; Acta math. 2 (1883), p. 367/71. Siehe auch *C. Severini*, Atti Ist. Veneto (8) 8 (1905/6), p. 1301/6. *Vgl. auch [234a]) u. [267b]).*

159a) *Über den allgemeinen Begriff der stetigen Linie siehe Nr. **12**. — Hier im Text genügt es, statt „stetiger Linien" speziell „Kreisbogen" zu nehmen.*

160) *G. Cantor* untersucht im Anschluß daran die Frage der Beziehungen zwischen dem *wirklichen* stetigen Raum, den wir geometrisch erfassen, und dem *arithmetischen* stetigen Raum [der Gesamtheit aller Systeme dreier reeller Zahlen, siehe bei Fußn. [1])]. Die Übereinstimmung dieser beiden Begriffe, die man gewöhnlich postuliert, ist „an sich willkürlich".

Sogar die Menge E, die man erhält, indem man aus dem arithmetischen Raum eine überall dichte abzählbare Menge ausschließt, kann ebensogut die Rolle des geometrischen Raumes spielen; eine Mechanik ist in diesem Raume wegen des im Text angegebenen Satzes möglich; „es stellt sich also merkwürdigerweise heraus, daß aus der bloßen Tatsache der stetigen Bewegung auf die durchgängige Stetigkeit des zur Erklärung der Bewegungserscheinungen gebrauchten dreidimensionalen Raumbegriffes zunächst kein Schluß gemacht werden kann". Aber indem man die Resultate einer solchen Mechanik mit den Tatsachen vergleicht, könnte man vielleicht Folgerungen für den gewöhnlichen Raumbegriff ziehen.

161) *L. Zoretti,* Paris C. R. 138 (1904), p. 674; Leçons sur le prolongement analytique, Paris 1911, p. 17, 19.

*Für beschränkte Gebiete einer Ebene hat man allgemein mengentheoretisch die *Zusammenhangszahl*[162]) definiert. Ein Gebiet, dem die Zusammenhangszahl n zukommt, wird als *n-fach zusammenhängend* bezeichnet.*

Nach *C. Jordan*[163]) ist ein ebenes Gebiet n-fach zusammenhängend, wenn es begrenzt ist:

1. durch $(n-1)$ geschlossene stetige Linien ohne vielfache Punkte, von denen jede außerhalb der übrigen liegt,

2. durch eine ebensolche Linie, die sie alle in ihrem Inneren enthält.

*Diese Begriffsbildung von *C. Jordan* läßt sich aber keineswegs auf alle ebenen Gebiete anwenden; sie versagt schon für folgende einfachen Beispiele von Gebieten: eine Kreisfläche ohne ihren Mittelpunkt oder ein Gebiet, das begrenzt ist von einem Kreis und einer innerhalb von ihm gelegenen Lemniskate, oder ein Gebiet, das von zwei sich von innen berührenden Kreisen begrenzt ist.

Man muß deshalb, wie es *F. Hausdorff*[164]) getan hat, die angegegebene Begriffsbildung etwa so verallgemeinern: Ein beschränktes ebenes Gebiet wird n-fach zusammenhängend genannt, wenn seine Begrenzung aus n „Stücken" („Komponenten") [siehe Nr. **10a**] besteht.*

A. Schoenflies[165]) definiert die Zusammenhangszahl, indem er von den approximierenden Polygonen[166]) der Begrenzung des Gebietes ausgeht.

**C. Carathéodory*[167]) gibt eine Definition, in welcher von der Begrenzung des Gebietes überhaupt nicht die Rede ist, die sich also nur auf die inneren Punkte des Gebietes bezieht: Ein beschränktes ebenes Gebiet G ist n-fach zusammenhängend, wenn von n beliebigen geschlossenen Polygonen, die G angehören und von denen jedes außerhalb der anderen liegt, mindestens eines die Eigenschaft hat, daß sein Inneres aus lauter inneren Punkten von G besteht, während $(n-1)$ außerhalb einander liegende Polygone in G gefunden werden können, welche diese Eigenschaft nicht besitzen.*

Übrigens kann die Zusammenhangszahl endlich oder unendlich sein.

---

162) *Siehe auch III A B 3, p. 195, Note 97 (*M. Dehn* und *P. Heegaard*).*

163) Cours d'Analyse[12]) 1, 2 éd., p. 100; *3. éd., p. 99.*

164) *Mengenlehre, p. 351.*

165) Bericht II 1908, p. 112/14; *bezügl. der Übertragung auf n-dimensionale Gebiete ($n > 2$) siehe p. 136.*

166) *Bericht II 1908, p. 104.*

167) *Math. Ann. 73 (1913), p. 325.*

12. Linienhafte Kontinua. *Der Begriff des linienhaften Kontinuums steht in engster Beziehung zu dem Begriff der *Linie* (*Kurve*). Bezüglich der historischen Entwicklung, die dieser Begriff der Linie genommen hat, sowie bezüglich der verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen er zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Zwecke in Analysis und Geometrie aufgefaßt worden ist, sei auf den Artikel III A B 2 (*H. v. Mangoldt*) verwiesen. Hier soll der Begriff der (in einer Ebene gelegenen) Linie in seiner allgemeinsten Form vom geometrisch-mengentheoretischen Standpunkt aus betrachtet werden.

Auf drei verschiedene Weisen kann man allgemein in einer Ebene die „*Linie*" (in Anlehnung an den gewöhnlichen Gebrauch des Wortes) definieren: 1. als *linienhaftes Kontinuum* („Länge ohne Breite", d. h. Kontinuum, das kein Flächenstück enthält); 2. als *Bahnkurve* oder *Parameterkurve* (Bahn eines sich stetig bewegenden Punktes); 3. als *Gebietsbegrenzung*.

Diese drei Begriffsbildungen stimmen keineswegs miteinander überein; ihr Umfang ist durchaus verschieden; nur 3. ist in 1. enthalten. Wir werden hier die Eigenschaften dieser Begriffsbildungen und die zwischen ihnen bestehenden Zusammenhänge zu betrachten haben. Dabei soll alles, was sich auf die dritte Definition bezieht, in die nächste Nummer hinübergenommen werden, und vieles, was die zweite Definition betrifft, wird (sofern nicht ebenfalls in die nächste Nummer gehörig) erst in Nr. **16** zur Sprache kommen.*

Die *linienhaften Kontinua* einer Ebene sind schon in Nr. **10** als Kontinua ohne innere Punkte definiert worden. *P. Painlevé*[168]) und *L. Zoretti*[169]) wenden zu ihrer Bezeichnung auch den Namen *Cantorsche Linie* (*ligne cantorienne*) an.[169a])[170])

168) Notice sur ses travaux scientifiques, Paris 1900, p. 16.

169) J. de math. (6) 1 (1905), p. 8.

L. Zoretti, Paris C. R. 150 (1910), p. 1506, und Acta math. 36 (1912/13), p. 265/7, gibt übrigens als eine charakteristische Eigenschaft für die *Cantor*schen Linien, d. h. als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein in der Ebene gelegenes Kontinuum C linienhaft sei, die folgende an: Durch jeden Punkt c von C gibt es mindestens eine Gerade, die mit C kein den Punkt c enthaltendes Kontinuum gemeinsam hat. Sein Beweis hiefür ist allerdings unrichtig, kann aber durch einen richtigen ersetzt werden. [Dagegen ist sein Versuch einer Ausdehnung auf den Raum gänzlich mißglückt, da der von ihm für räumliche Kontinua aufgestellte analoge Satz bereits durch das Beispiel einer Kugel widerlegt wird.]*

169a) *Eine andere (für Räume von beliebig vielen Dimensionen aufgestellte) allgemeine Kurven- und Flächendefinition von ähnlichem Charakter, die *E. H. Neville*[313b]) angegeben hat, ist als verfehlt anzusehen; vgl. hierüber *A. Rosenthal*[313b]).*

170) **W. H. Young* [Quart. J. of math. 37 (1905), p. 29; Theory, p. 206, 219]

*Die Definition der *Bahnkurve* ist von *C. Jordan* gegeben worden.* *C. Jordan*[171]) nennt *stetige Kurve* (ligne continue) eine Menge von Punkten, deren Koordinaten eindeutige und stetige Funktionen eines Parameters sind, der *alle* Werte eines beschränkten, abgeschlossenen Intervalles annimmt. Man hat

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

wobei t den Ungleichungen

$$\alpha \leqq t \leqq \beta,$$

genügt, in denen α und β gegebene Zahlen bedeuten. *Die stetige Kurve ist also das eindeutige und stetige Abbild einer Strecke $[\alpha, \beta]$.[172])*

*Übrigens sind dabei die *Bahn* eines beweglichen Punktes und die *Punktmenge*, auf der er läuft, wohl zu unterscheiden. Demgemäß bezeichnet *A. Schoenflies*[173]) die Punktmenge als *stetige Kurve*, die Bahn dagegen als *Bahnkurve* (von manchen wird hierfür *Parameterkurve* gesagt).

Charakteristisch für die Bahnkurve ist die von ihr gebildete Punktmenge sowie die durch die Abbildung der Strecke bewirkte Anordnung der Kurvenpunkte. Zwei Bahnkurven sind demnach als identisch zu betrachten, wenn sie in Punktmenge und Anordnung der Kurvenpunkte übereinstimmen. Aber es kann dieselbe Bahnkurve in verschiedenster Weise auf die Parameterstrecke $[\alpha, \beta]$ bezogen werden, also durch verschiedene Paare von eindeutigen und stetigen Funktionen dargestellt werden; d. h. (wenn man den Parameter t als „Zeit" auffaßt) die „Durchlaufungszeit" der einzelnen Kurvenstücke soll keine Rolle spielen. Übrigens können zu *einer* stetigen Kurve noch sehr verschiedene Bahnkurven (Anordnungsmöglichkeiten) gehören.

Bei manchen Fragen kommt es auch auf das Verhältnis der „Durchlaufungszeiten" verschiedener Bahnstücke an. Es ist deshalb zweckmäßig, für Bahnkurven, bei welchen dieses Verhältnis der Durch-

---

bezeichnet als „Kurve" eine in einer Ebene gelegene, nirgends dichte Punktmenge, welche die folgende Eigenschaft besitzt: Legt man, bei vorgegebener Zahl ε, um jeden Punkt der Menge irgendein Gebiet, dessen Durchmesser kleiner als ε ist, so soll die Vereinigung dieser Gebiete ein einziges Gebiet G_ε ergeben, dessen Durchmesser nicht gleichzeitig mit ε unbegrenzt gegen 0 abnimmt.*

171) *C. Jordan,* Cours d'Analyse [12]) 1, p. 90.

172) *Hierbei ist die Kurve ganz auf das Endliche beschränkt. Will man ins Unendliche gehende stetige Kurven haben [„verallgemeinerte stetige Kurven"], so benutze man entweder die stereographische Projektion der Ebene auf die Kugel oder man lasse den Parameter t die volle Gerade oder eine Halbgerade durchlaufen.*

173) *Bericht II 1908, p. 201, 237.*

laufungszeiten berücksichtigt wird, einen besonderen Namen, etwa *Bewegungskurven* einzuführen. Zwei Bewegungskurven werden dann und nur dann als identisch angesehen werden, wenn die Funktionenpaare der beiden betrachteten Kurven durch die Substitution $t = a + b\tau$ (Ähnlichkeitstransformation der Durchlaufungszeit) auseinander hervorgehen.*[174])

Es erhebt sich natürlich die Frage, welche Beziehungen zwischen den vorstehenden Definitionen des linienhaften Kontinuums und der stetigen Kurve bestehen. Zunächst ist jede stetige Kurve (im Sinne von *C. Jordan*) eine perfekte Punktmenge. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit [siehe II A 1, Nr. **9** (*A. Pringsheim*)] der Funktionen f und g ist sie auch zusammenhängend. Also ist sie ein *Kontinuum* im Sinne von *G. Cantor*. Aber man wird weiter unten [Nr. **16**] sehen, daß sie nicht notwendig ein linienhaftes Kontinuum ist; sie kann vielmehr auch Flächenstücke enthalten.

Komplizierter ist die Untersuchung, unter welchen Bedingungen ein linienhaftes Kontinuum eine stetige Kurve (Bahnkurve) ist. Es gibt *Cantor*sche Linien, die nicht als Bahnkurven aufgefaßt werden können.[175]) Man hat also den *Cantor*schen Linien noch gewisse Beschränkungen aufzuerlegen, damit es möglich ist, sie als Bahnkurven aufzufassen. *Das Nähere hierüber siehe in Nr. **16**. Hier wollen wir uns zunächst mit einigen spezielleren Fragen beschäftigen.*

Im Anschluß an *C. Jordan*[171]) bezeichnet man als *stetige Kurve ohne vielfache Punkte*, häufiger als *einfache Kurve* oder *Jordansche Kurve*[175a]) eine stetige Kurve von der Art, daß nicht zwei verschiedene Werte von t existieren, die denselben Punkt der Kurve liefern, ausgenommen

---

174) *Alles dies läßt sich ohne weiteres auf Bahnkurven im 3- oder n-dimensionalen Raum übertragen. Im 3-dimensionalen Raum wird man ansetzen:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

wobei $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ eindeutige und stetige Funktion von t für

$$\alpha \leqq t \leqq \beta$$

sind.*

175) *Ein einfaches Beispiel hierfür ist:

$$y = \sin\frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0,\ |x| \leqq 1$$

$$y = \text{Intervall } [-1, +1] \text{ für } x = 0.*$$

175a) *Daß abweichend von dem sonst (insbes. in Deutschland) allgemein üblichen, im Text festgehaltenen Sprachgebrauch gelegentlich [z. B. durchgehend in den Fundamenta mathematicae] mit „lignes de Jordan" die *„stetigen Kurven"* bezeichnet werden, ist bedauerlich, da dies zu Irrtümern Anlaß geben kann.*

vielleicht die Anfangs- bzw. Endwerte $t = \alpha$, $t = \beta$.[176]) Geben diese beiden Werte verschiedene Punkte, so heißt die *Jordan*sche Kurve *offen* oder *ungeschlossen* oder auch „*Jordan*scher Kurven*bogen*“ oder „einfacher Kurven*bogen*“; sie ist *geschlossen*, wenn jene Punkte zusammenfallen; in letzterem Fall wird sie als „*einfache geschlossene Kurve*“ oder „*geschlossene Jordansche Kurve*“ bezeichnet. *Also ist die ungeschlossene (bzw. geschlossene) *Jordan*sche Kurve nicht nur ein eindeutiges und stetiges, sondern sogar ein umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild einer abgeschlossenen Strecke (bzw. eines Kreises).*

*Wie *R. L. Moore*[176a]), *H. Tietze*[176b]) und *St. Mazurkiewicz*[176c]) neuerdings unabhängig voneinander gezeigt haben, ist in jeder stetigen Kurve, die zwei verschiedene Punkte a, b verbindet, ein von a nach b führender *Jordan*scher Kurvenbogen enthalten.[176d])*

Es liegt nun die Frage nahe, wie eine *Cantor*sche Linie beschaffen sein muß, damit sie zugleich eine einfache (*Jordan*sche) Kurve sein kann. Diese Frage ist auf verschiedene Arten, einerseits von *A. Schoenflies* (*sowie auch von *P. Nalli*, *R. L. Moore* und von *C. Carathéodory**), andererseits von *L. Zoretti* und *S. Janiszewski*, *sowie von *N. J. Lennes* und verschiedenen anderen Mathematikern* behandelt worden. Die Resultate der erstgenannten finden (da sie sich auf Gebietsbegrenzung beziehen) ihren Platz besser weiter unten [Nr. **13**]. Beschränken wir uns hier auf die Untersuchungen der anderen genannten Autoren.

L. Zoretti[177]) nennt ein Kontinuum, dem die Punkte a und b angehören und von dem nicht schon ein Teilkontinuum die Punkte a und b enthält, ein *zwischen den Punkten a und b irreduzibles Kontinuum* (c. irréductible).[178])[178a])

---

176) *O. Veblen* [Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 86/9] hat die „einfachen Kurven“ durch ein System von Forderungen definiert, in welche eine auf Kurvenpunkte sich beziehende Ordnungsrelation eingeht. Vgl. auch III AB 1, Nr. **14** (*F. Enriques*).*

176a) **R. L. Moore*, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 23 (1917), p 233/6 [dazu auch Math. Ztschr. 15 (1922), p 254/60].*

176b) **H. Tietze*, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 284/8.*

176c) **St. Mazurkiewicz*[292]), insbes. letztes Zitat, p. 196/205.*

176d) *Vgl. dazu auch *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 278/80; *C. Kuratowski*, Fundamenta math. 3 (1922), p. 59/64.*

177) *L. Zoretti*, Ann. Éc. Norm. (3) 26 (1909), p. 487.

178) *Diese Definition sowie das im folgenden über irreduzible Kontinua Gesagte gilt (wo nicht ausdrücklich anders angegeben) ohne weiteres auch für Kontinua im 3- oder n-dimensionalen Raum.*

178a) **S. Janiszewski*, Thèse[180]), p. 7/8, bezeichnet, hieran anknüpfend, allgemeiner eine Menge M als „*irreduzibel* bezüglich einer gegebenen Eigenschaft E“, wenn M, aber keine echte Teilmenge von M die Eigenschaft E besitzt.

Sind a und b beliebige Punkte irgendeines beschränkten[178b]) Kontinuums C, dann umfaßt C immer (mindestens) ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum (eventuell C selbst)[179]).

Ein zwischen zwei Punkten irreduzibles Kontinuum, *das in einer Ebene gelegen ist*, ist linienhaft.[180])

Jeder einfache Kurvenbogen ist ein zwischen seinen Endpunkten irreduzibles Kontinuum.[177]) Man muß aber dem Begriff des irreduziblen Kontinuums noch eine weitgehende Einschränkung hinzufügen, um eine Übereinstimmung mit dem Begriff des einfachen Kurvenbogens zu erzielen. Wir fragen also nach einer notwendigen und hinreichenden derartigen Einschränkung.

Zerlegt man ein Kontinuum in zwei abgeschlossene Mengen, die einen einzigen Punkt gemeinsam haben, so ist jede einzelne von

---

Und in ähnlicher Weise bezeichnet er eine Menge M als „*gesättigt* (*saturé*) bezüglich einer Eigenschaft E“, wenn M die Eigenschaft E besitzt, aber nicht echte Teilmenge einer die Eigenschaft E besitzenden Menge ist.

Insbesondere kann man als Gegenstück zu den zwischen a und b irreduziblen Kontinuen *die zwischen a und b irreduziblen, lückenlos zusammenhängenden Mengen* definieren; eine ausführliche Untersuchung hierüber bei *B. Knaster* u. *C. Kuratowski*[136]), p. 216ff und *L. Vietoris*[136]) *

178b) *„Beschränkt“ darf hier nicht weggelassen werden, wie *C. Kuratowski*[183]), p. 218, durch ein sehr einfaches Beispiel zeigt.*

179) **S. Janiszewski*, Paris C. R. 151 (1910), p. 198; andere Beweise gaben: *E.* [= *St.*] *Mazurkiewicz*, ib. p. 296; Bull. Acad. Cracovie A 1919, p. 44; *L. E. J. Brouwer*, Verslag Amsterdam Ak. 19_2 (1910/11), p. 1418 = Proc. Amsterdam Ak. 1911, p. 138; besonders einfach bewiesen bei *L. Zoretti*, Acta math. 36 (1912/13), p. 246; vgl. ferner *C. Kuratowski*, Fundamenta math. 3 (1922), p. 88/90. — Ein Beweisversuch von *K. Yoneyama*, Memoirs of the College of science and engineering, Kyoto Univers. 5 (1913), p. 261/2, muß als mißlungen bezeichnet werden. —

Der entsprechende Satz gilt nicht mehr für „irreduzible lückenlos zusammenhängende“ Mengen; vgl. *L. Vietoris*[136]), p. 198/200; *B. Knaster* und *C. Kuratowski*[136]), p. 225; *B. Knaster*[186a]), p. 286.*

180) *Dagegen kann ein irreduzibles Kontinuum im 3- (bzw. n-) dimensionalen Raum einen ebenen (bzw. ($n-1$)-dimensionalen) Bereich enthalten. *S. Janiszewski* [Pariser Thèse (1911) = J. Éc. Polyt. (2) 16 (1912), p. 116/8] hat sogar gezeigt, daß jedes beliebig vorgegebene, in einem ($n-1$)-dimensionalen Raum R_{n-1} gelegene Kontinuum der vollständige Schnitt von R_{n-1} mit einem irreduziblen Kontinuum des n-dimensionalen Raumes R_n sein kann.

Überhaupt kann, auch in der Ebene, ein irreduzibles Kontinuum wesentlich komplizierter sein, als man auf den ersten Blick vermuten möchte. Z. B. kann ein zwischen zwei Punkten irreduzibles Kontinuum C die Ebene (in der es liegt) in zwei oder beliebig viele Gebiete teilen und es können sogar mehrere dieser Gebiete vom ganzen Kontinuum C begrenzt werden; vgl. das Beispiel in Anm. [183]) sowie insbesondere *L. E. J. Brouwer*, Math. Ann. 68 (1909/10), p. 423/6 und [179]), Verslag, p. 1419/24 = Proc., p. 139/145; *S. Janiszewski*, a. a. O., p. 113/4. Siehe ferner [186a]).*

ihnen ein Kontinuum; ist das ursprüngliche irreduzibel, so sind es die beiden andern auch (zwischen passend gewählten Punkten), und die Zerlegung ist für eine gegebene Lage des gemeinsamen Punktes nur auf eine einzige Weise möglich.[181])

Ist ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum gegeben, so ist es nicht immer möglich, es in zwei Kontinua zu zerlegen, von denen das eine a, das andere b enthält, so daß beide nur einen einzigen vorgegebenen Punkt c gemeinsam haben.[182])[183])

Diejenigen beschränkten irreduziblen Kontinua, für die eine solche Zerlegung möglich ist, was auch c sei, sind von *S. Janiszewski*[184]) „arcs simples" (einfache Kurvenbogen) genannt worden.[185]) Sie sind, wie er zeigt, mit den *Jordan*schen Kurvenbogen identisch.[185a])

181) **L. Zoretti*[177]), p. 489.*

182) Das Beispiel der Linie $y = \sin \frac{1}{x}$[175]) zeigt dies deutlich. —

*Dagegen ist bei den „irreduziblen lückenlos zusammenhängenden Mengen"[178a]) eine entsprechende Zerlegung stets möglich, so daß hier die Punkte linear geordnet werden können; siehe *L. Vietoris*[136]), p. 179/81; *B. Knaster* u. *C. Kuratowski*[136]), p. 218/21.*

*Nach *H. Hahn*, Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien IIa 130 (1921), p. 217/50, kann man in jedem beschränkten, irreduziblen Kontinuum $\mathfrak{C}$, wenn auch nicht die Punkte, so doch gewisse *„Primteile"* (geeignet definierte Punkte oder Teilkontinua von $\mathfrak{C}$) linear ordnen, sofern $\mathfrak{C}$ aus mehr als einem „Primteil" besteht.*

183) *Weiteres Allgemeine über irreduzible Kontinua siehe bei *S. Janiszewski*[180]) und Paris C. R. 152 (1911), p. 752/5; Anzeiger Ak. Wiss. Krakau A 1912, p. 909/14; *K. Yoneyama,* Tôhoku Math. J. 12 (1917), p. 43/158; 13 (1918), p. 33/157; 18 (1920), p. 134/86, 205/55; *A. Rosenthal*[208]); *H. Hahn*[182]); *L. Vietoris*[136]), insbes. p. 195/204; *C. Kuratowski,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 200/231; sowie in den hier (in dieser Nummer) zitierten Arbeiten von *L. Zoretti.* Letztere enthalten allerdings (die von uns hier referierten Dinge ausgenommen) vielfach falsche oder unrichtig bewiesene Sätze. Vgl. die gegen [177]) und Paris C. R. 151 (1910), p. 202, gerichteten treffenden kritischen Bemerkungen von *L. E. J. Brouwer,* Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 565/6 und [179]), Versl., p. 1423/4 = Proc., p. 144/5 [die auch gegenüber *L. Zoretti,* Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 567 und [179]), p. 229, Geltung haben]. Insbesondere enthält auch die neuere Abhandlung *L. Zorettis* in den Acta math.[179]) viele unrichtig bewiesene und falsche Sätze; vgl. [169]) und *A. Rosenthal*[208]), insbes. p 91/3. Z. B. ist der in Acta math.[179]), p. 258/9, aufgestellte Satz: „Jedes Teilkontinuum eines irreduziblen Kontinuums ist selbst irreduzibel zwischen zwei seiner Punkte" nicht richtig; Gegenbeispiel: Zwei um einen Kreis K asymptotisch sich herumwindende Spiralen S_a und S_b, von denen die eine in einem Punkte a, die andere in einem Punkte b anfängt, bilden zusammen mit K ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum; dagegen ist der Kreis K zwischen keinen zwei seiner Punkte irreduzibel.*

184) *S. Janiszewski*[179]), p. 200; *[180]), p. 129, 135/7.*

185) *L. Zoretti* hatte anfänglich eine derartige Menge als „ensemble complètement fermé" bezeichnet.

185a) *Viel allgemeiner und ohne den Begriff der irreduziblen Kontinua

*Hiermit ist also eine notwendige und hinreichende Bedingung, wie wir sie verlangten, gefunden. Andere Formen der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß ein gegebenes beschränktes irreduzibles Kontinuum C ein *Jordan*scher Kurvenbogen ist, sind die folgenden*:

Nach *S. Janiszewski*[186]) darf C kein *Häufungskontinuum* (*continu de condensation*) enthalten, wobei er so ein Kontinuum H nennt, das ganz aus Häufungspunkten der nicht in H enthaltenen Punkte von C besteht; [d. h. die Ableitung von $(C - H)$ ist C selbst].[186a])

---

zu benutzen, ist dies von *W. Sierpiński*, Annali di mat. (3) 26 (1916/17), p. 131/50, und von *S. Straszewicz*, Math. Ann. 78 (1918), p. 369/74, bewiesen worden; sie zeigen: Ein die Punkte a und b enthaltendes beschränktes Kontinuum C ist dann und nur dann ein *Jordan*scher Kurvenbogen mit den Endpunkten a und b, wenn jedem seiner Punkte c eine Zerlegung von C in zwei abgeschlossene Teilmengen zugeordnet werden kann, derart, daß die eine Teilmenge den Punkt a, die andere den Punkt b enthält und beide nur den Punkt c gemeinsam haben. — Bei *W. Sierpiński* (der übrigens die Untersuchung im R_n führt) noch etwas allgemeiner, da er gar nicht voraussetzt, daß C ein Kontinuum ist. [Es muß dann nur noch ausdrücklich hinzugefügt werden, daß die beiden abgeschlossenen Teilmengen, wenn $c \neq a$ oder b ist, aus mehr als einem Punkt bestehen.]

Noch eine andere Form einer solchen Zerlegungsbedingung bei *R. L. Moore*, Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), p. 333/47. — Vgl. ferner *J. R. Kline*, Proc. National Acad. America 9 (1923), p. 7/12.*

186) **S. Janiszewski*[179]), p. 200; [180]), p. 81, 131. [Vgl. dazu auch *St. Mazurkiewicz*[292]), letztes Zitat, p. 208/9, sowie *B. Knaster* u. *C. Kuratowski*[136]), p. 224, und *R. L. Moore*, Bull. Amer Math. Soc. 25 (1918/19), p. 174/6.]

Bei *H. Hahn*[182]) ergibt sich die Bedingung, daß alle „Primteile" von C nur Punkte sein sollen.*

186a) *Es sei hier hervorgehoben, daß auch der andere extreme Fall vorkommen kann, nämlich, daß bei einem Kontinuum $\mathfrak{C}$ *jedes* echte Teilkontinuum von $\mathfrak{C}$ ein Häufungskontinuum von $\mathfrak{C}$ ist. Ein erstes derartiges Beispiel hat *L. E. J. Brouwer*[180]) angegeben. Wie *Z.* [*S.*] *Janiszewski*, Fundamenta math. 1 (1920), p. 210/14, gezeigt hat, ist für derartige Kontinua $\mathfrak{C}$ charakteristisch, daß sie sich nicht als Vereinigungsmenge von zwei *echten* Teilkontinuen darstellen lassen, weshalb $\mathfrak{C}$ als *„continu indécomposable"* (*„unzerlegbares Kontinuum"*) bezeichnet wird. $\mathfrak{C}$ ist dann auch nicht Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar unendlich vielen echten Teilkontinuen. Mit diesen „unzerlegbaren Kontinuen" hat sich bereits *K. Yoneyama*[183]) [insbes 12 (1917), p. 54/87; 18 (1920), p. 135/83] eingehend beschäftigt. Wie er zeigt [a. a. O. 12 (1917), p. 67; 18 (1920), p. 135/6], ist ein Kontinuum $\mathfrak{C}$ dann und nur dann „unzerlegbar", wenn zu *jedem* Punkt a von $\mathfrak{C}$ (mindestens) ein Punkt x existiert, so daß $\mathfrak{C}$ zwischen a und x irreduzibel ist. *St. Mazurkiewicz*, Fundamenta math. 1 (1920), p. 35/9, und *Z.* [*S.*] *Janiszewski* u. *C. Kuratowski*, ib., p. 210/22 (insbes. p. 215/17), beweisen dieselbe Bedingung und vor allem auch die folgende: Das Kontinuum $\mathfrak{C}$ ist dann und nur dann „unzerlegbar", wenn in $\mathfrak{C}$ drei Punkte existieren, so daß $\mathfrak{C}$ zwischen irgend zweien von ihnen irreduzibel ist. — *B. Knaster*, Fundamenta math. 3 (1922), p 247/86, hat neuerdings ein Kontinuum konstruiert, von dem *jedes* Teilkontinuum „unzerlegbar" ist.*

Nach *L. Zoretti*[187]) darf C kein Teilkontinuum enthalten, das auf mehrfache Weise, d. h. zwischen verschiedenen Punktepaaren, irreduzibel ist.

*Die erste dieser beiden Bedingungen kann man auf Grund von Sätzen von *St. Mazurkiewicz*[187a]) in die folgende sehr einfache Form bringen: C muß eine „stetige Kurve" sein.*

*Eine etwas andersartige Charakterisierung derjenigen Kontinua, die einfache Kurven sind, ist von *N. J. Lennes*[188]) gegeben worden. Er zeigt nämlich, daß die *Jordan*schen Kurvenbogen (mit den Endpunkten a und b) identisch sind mit den beschränkten[189]), abgeschlossenen, „lückenlos zusammenhängenden" Punktmengen, die a und b enthalten, aber keine a und b enthaltende „lückenlos zusammenhängende" (echte) Teilmenge besitzen. Oder in der Ausdrucksweise von [178a]) und mit Berücksichtigung von [189]): Die *Jordan*schen Kurvenbogen (mit den Endpunkten a und b) sind identisch mit den abgeschlossenen, zwischen a und b irreduziblen, lückenlos zusammenhängenden Mengen.*

*Alle diese Bedingungen für einfache *ungeschlossene* Kurven führen unmittelbar auch zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Kontinuum eine einfache *geschlossene* Kurve sei (da ja jede einfache geschlossene Kurve durch irgend zwei ihrer Punkte a und b in zwei einfache Kurvenbogen zerlegt wird, die nur die Punkte a und b gemeinsam haben). Im übrigen siehe hierüber Nr. **13**. Hier sei noch darauf hingewiesen, daß *S. Janiszewski* gezeigt hat:

Ein Kontinuum ist immer dann und nur dann eine einfache geschlossene Kurve, wenn es durch irgend zwei beliebige seiner Punkte, a und b, in zwei Kontinua zerlegt wird, welche nur diese Punkte a und b gemeinsam haben.[190])*

---

187) *L. Zoretti,* Paris C. R. 151 (1910), p. 202; *Acta math. 36 (1912/13), p. 257/8. Diese und einige andere derartige Bedingungen auch bei *K. Yoneyama*[179]), p. 262/3, u. [183]), Tôhoku Math J. 12 (1917), p. 142/53.*

187a) **St. Mazurkiewicz*[292]), letztes Zitat, p. 176, 191, 205. Vgl. auch *C. Kuratowski*[176d]), p. 62.*

188) **N. J. Lennes,* Amer. J. of math. 33 (1911), p. 308/12; auch Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1905/6), p. 284/5; 17 (1910/11), p. 525 (wo darauf hingewiesen ist, daß das Gesagte auch für einfache Kurven im Raum gilt). — [Vgl. auch *H. Tietze*[176b]), p. 288/90.]*

189) *Die Beschränktheit braucht nicht besonders vorausgesetzt zu werden; vgl. *G. H. Hallett,* Bull. Amer. Math. Soc. 25 (1919), p. 325/6; *B. Knaster* u. *C. Kuratowski*[136]), p. 222/25.*

190) **S. Janiszewski*[180]), p. 137/40. Er geht hierbei umgekehrt vor: durch die angegebene Eigenschaft *definiert* er die „einfachen geschlossenen Kurven" und zeigt dann, daß diese mit den sonst als „einfache geschlossene Kurven" bezeichneten Gebilden identisch sind. — Ein anderer Beweis bei *S. Straszewicz*[185a]),

*Zum Schluß sei hier noch auf ganz andersartige Untersuchungen hingewiesen, welche die darstellenden Funktionenpaare einer geschlossenen *Jordan*schen Kurve betreffen.

J. Pál[191]) hat die Frage beantwortet, welchen Bedingungen die stetige, nach 2π periodische Funktion $f(t)$ genügen muß, damit eine „*Ergänzungsfunktion*" $g(t)$ existiert, derart, daß die Gleichungen $x = f(t)$, $y = g(t)$ eine geschlossene *Jordan*sche Kurve mit der Umlaufszeit 2π darstellen. Er findet: Damit zu $f(t)$ eine Ergänzungsfunktion existiert, ist notwendig und hinreichend, daß kein Intervall $[t_0, t_0 + 2\pi]$ mehr als zwei „*Brückenintervalle*" enthält. Oder mit anderen Worten: Für $f(t)$ sollen nur zwei „voneinander unabhängige" Brückenintervalle existieren.

Unter einem „Brückenintervall" wird dabei folgendes verstanden: Sei im Intervall $a \leq t \leq b$ die stetige Funktion $F(t)$ definiert, deren Maximum bzw. Minimum daselbst mit M bzw. mit m bezeichnet werden soll. Dann heißt $[\alpha, \beta]$ ein *Brückenintervall* von $F(t)$, wenn $F(\alpha) = M$ und $F(\beta) = m$ (oder $F(\alpha) = m$ und $F(\beta) = M$) ist und zwischen α und β die Werte M und m von $F(t)$ nicht angenommen werden.

Man kann den erwähnten Satz noch anders aussprechen[192]): Man denke sich, (um die Periodizität nach 2π auszudrücken) den Parameter t auf dem Umfang des Einheitskreises laufen. Damit es dann zu einer gegebenen stetigen Funktion $x = f(t)$ eine zu einer geschlossenen *Jordan*schen Kurve führende Ergänzungsfunktion $y = g(t)$ gebe, ist notwendig und hinreichend, daß die (absoluten) Maxima und die (absoluten) Minima der Funktion $f(t)$ auf der Kreislinie einander nicht trennen.[193])*

---

p. 375/7. — Vgl. auch hierzu *H. Tietze*[188]), sowie *K. Yoneyama*[187]), letztes Zitat, p. 153/7, und *J. R. Kline*[185a]).*

191) *J. Pál,* J. f. Math. 143 (1913), p. 294/9.*

192) *Nach *H. Tietze,* J. f. Math. 145 (1914), p. 17, der daselbst auch einen anderen Beweis hierfür gegeben hat.*

193) *Die analoge Frage für *räumliche Jordan*sche Kurven ist bis jetzt noch nicht endgültig beantwortet, nämlich die Frage: Unter welchen Bedingungen gibt es zu zwei vorgegebenen stetigen Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ mit kleinster gemeinschaftlicher Periode 2π eine Ergänzungsfunktion $h(t)$, so daß diese drei Funktionen eine geschlossene *Jordan*sche Raumkurve mit der Umlaufszeit 2π ergeben? *J. Pál* [J. f. Math. 145 (1914), p. 4/6] hat bewiesen, daß es für die Existenz der Ergänzungsfunktion $h(t)$ *hinreichend* ist, wenn die ebene Kurve $x = f(t)$, $y = g(t)$ mindestens einen einfachen Punkt $t = t_0$ besitzt (d. h. einen solchen, der nur mit den Punkten $t \equiv t_0$ (mod. 2π) zusammenfällt). *J. Pál* [a. a. O., p 7] und *H. Tietze* [[192]), p. 19/23] haben noch allgemeinere hinreichende Bedingungen bewiesen. Aber alle diese hinreichenden Bedingungen sind nicht notwendig und man kennt bis jetzt keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der

13. Die Begrenzung eines ebenen Gebietes. *C. Jordan*[194]) hat bewiesen, daß eine in einer Ebene gelegene, geschlossene Jordansche Kurve C die folgende wichtige Eigenschaft besitzt:

Die Punkte der Ebene, die nicht zu C gehören, bilden zwei durch C getrennte Gebiete, d. h. zwei Punkte eines derselben können stets durch eine einfache stetige Kurve (z. B. einen endlichen Streckenzug) verbunden werden, der keinen Punkt von C enthält; dagegen kann ein Punkt des einen Gebietes mit einem Punkte des andern *nicht* durch eine stetige Kurve verbunden werden, ohne daß man dabei C begegnet.

Dieser Satz wird der *Jordansche Kurvensatz*[195]) genannt. Der von *C. Jordan* gegebene Beweis läuft darauf hinaus, folgendes nachzuweisen: man kann zwei Polygone S_1 und S_2 ohne vielfachen Punkt, von denen das eine innerhalb des anderen gelegen ist, finden, so daß C zwischen ihnen eingeschlossen ist und jeder zwischen ihnen eingeschlossene Punkt einen kleineren Abstand von C hat als ein vorgegebenes ε.

*Andere Beweise für den *Jordan*schen Kurvensatz sind von *Ch. J. de la Vallée Poussin*[196]), *O. Veblen*[197]), *W. H.* u. *G. Ch. Young*[198]), *A. Schoenflies*[199]), *L. E. J. Brouwer*[200]), *N. J. Lennes*[201]), *L. Bieberbach*[202]), *A. Winternitz*[202a]), *A. Denjoy*[202b]), *J. W. Alexander*[202c]), *A. Prings-*

Ergänzungsfunktion $h(t)$. [Vgl. dazu auch *J. Pál,* Math. és phys. lapok 24 (1915), p. 236/42 (ungarisch), Referat: Ftschr. d. Math. 45 (1914/15 [1922]), p. 1330.]

H. Tietze [a. a. O.] formuliert übrigens noch andere verwandte Fragen.*

194) *C. Jordan,* Cours d'Analyse *1. éd., Bd. 3 (1887), p. 587/94;* 2. u. 3. éd., Bd. 1 (1893 bzw. 1909), p. 90/99.

195) *A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 168.

196) *Cours d'Analyse infinitésimale, Bd. 1, 1. éd. (Louvain-Paris 1903), p. 308; 2. éd. (1909), p. 357/9; der Beweis ist ausführlicher dargestellt in 3. éd. (1914), p. 374/9.*

197) *Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 92/8.*

198) *Theory, p. 224/8.*

199) *Math. Ann. 68 (1910), p. 439/442.*

200) *Math. Ann. 69 (1910), p. 169/75 (dieser Beweis ist ganz besonders durchsichtig); ein zweiter Beweis ist implizit in den allgemeineren Betrachtungen Math. Ann. 72 (1912), p. 422/5, enthalten.*

201) *Amer. J. of math. 33 (1911), p. 314/8.*

202) *Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1913), p. 144/51.*

202a) *Math. Ztschr. 1 (1918), p. 329/37.*

202b) *Paris C. R. 167 (1918), p. 389/91; Verslag Amsterdam Ak. 27 (1918), p. 146/51. — Außerdem hat *A. Denjoy,* Paris C. R. 166 (1918), p. 207/9, eine rein analytische Definition der außerhalb bzw. innerhalb der *Jordan*schen Kurve gelegenen Punkte gegeben.*

202c) *Ann. of math. (2) 21 (1920), p. 180/4.*

heim[202d]) gegeben worden.[203]) Einige dieser Autoren[204]) führen den Beweis, indem sie den Satz in die folgenden drei (einzeln zu beweisenden) Bestandteile zerlegen: 1. Die Begrenzung eines von einer geschlossenen *Jordan*schen Kurve bestimmten Gebietes ist mit der ganzen Kurve identisch. 2. Eine geschlossene *Jordan*sche Kurve bestimmt *höchstens* zwei Gebiete. 3. Eine geschlossene *Jordan*sche Kurve bestimmt *mindestens* zwei Gebiete.*

Die *Jordan*sche und die meisten der anderen Beweisführungen[205]) setzen den *Jordan*schen Kurvensatz für Polygone voraus und beweisen ihn dann nur noch für die Kurven. ₊Es sind aber auch mehrere elementare Beweise für den Polygonsatz gegeben worden, d. h. für den Satz, daß jedes einfache geschlossene Polygon[206]) die Ebene in zwei Gebiete teilt.[207])*

₊Eine weitgehende Verallgemeinerung des *Jordan*schen Kurvensatzes hat *A. Rosenthal*[208]) gegeben:

202d) ₊Sitzgsber. Bayer. Ak. Wiss. 1922, p. 187/212.*

203) Außerdem ist der *Jordan*sche Kurvensatz noch verschiedentlich unter sehr einschränkenden Voraussetzungen [abteilungsweise monotone *Jordan*sche Kurven, zum Teil noch als (stetig) differenzierbar vorausgesetzt] bewiesen worden, und zwar von *A. Schoenflies,* Nachr Ges. Wiss. Göttingen 1896, p. 79/89 [₊eine kleine Vervollständigung, deren dieser Beweis bedarf, ist leicht zu erbringen*]; *L. D. Ames,* ₊Bull. Amer. Math. Soc. (2) 10 (1903/4), p. 301/3 und Diss. Havard University 1905 =* Amer. J. of math. 27 (1905), p. 345/58; ₊*G. A. Bliss,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 10 (1903/4), p. 398/404.*

204) ₊*O. Veblen*[197]), *A. Schoenflies*[199]), *L. E. J. Brouwer* [erstes Zitat von [200])], *L. Bieberbach*[202]), *A. Denjoy*[202b]), *J. W. Alexander*[202c]).*

205) ₊Ausgenommen nur *O. Veblen*[197]) (sowie die in [203]) genannten Beweise von Spezialfällen von *L. D. Ames* und *G. A. Bliss*). — *N. J. Lennes*[201]) und *A. Winternitz*[202a]) schicken erst einen Beweis des Polygonsatzes voraus.

Bei einigen Autoren, die den Polygonsatz für den Beweis des Kurvensatzes verwenden, werden die Polygone allerdings nicht zur Approximation der *Jordan*schen Kurve, sondern mehr topologisch verwendet. Dies ist der Fall bei *A. Schoenflies*[199]), *L. E. J. Brouwer*[204]), *N. J. Lennes*[201]) und *A. Winternitz*[202a]).*

206) ₊Ein geschlossenes Polygon wird *einfach* genannt, wenn die Ecken des Polygons sämtlich voneinander verschieden sind, keine seiner Ecken in eine seiner Seiten fällt und keine zwei seiner Seiten sich schneiden.*

207) ₊Solche Beweise werden gegeben von *O. Veblen,* Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904), p. 365/6; *H. Hahn,* Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), p. 289/303; *W. Killing* u. *H. Hovestadt,* Handbuch des mathematischen Unterrichts 1, Leipzig u. Berlin 1910, p. 62/66; *N. J. Lennes* [mehrere Beweise] Amer. J. of math. 33 (1911), p. 42/5, 47/8, 292/9, und [für „Treppenpolygone"] von *A. Pringsheim,* Sitzgsber. Bayer. Ak. Wiss. 1915, p. 27/52. Der entsprechende Satz über Polyeder im 3- bzw. n-dimensionalen Raum ist bewiesen worden von *N. J. Lennes,* a. a. O., p. 50/55; *O. Veblen,* Trans. Amer. Math. Soc. 14 (1913), p. 65/72; *Lilly Hahn,* Monatsh. Math. Phys. 25 (1914), p. 303/20.*

208) ₊*A. Rosenthal,* Sitzgsber. Bayer. Ak. Wiss. 1919, p. 91/109. —
Schon *L. Zoretti,* Acta math. 36 (1912/13), p. 261/3, hatte die durch 𝔈 in

Betrachtet man in der Ebene statt der geschlossenen *Jordan*schen Kurve (oder, was dasselbe ist, statt der Vereinigungsmenge von zwei einfachen, sich nicht schneidenden *Jordan*schen Kurvenbogen mit gemeinsamen Endpunkten) allgemeiner die Vereinigungsmenge $\mathfrak{C}$ von zwei beschränkten, zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, die außer a und b keine Punkte gemeinsam haben, so kann $\mathfrak{C}$ in der Ebene beliebig viele, sogar abzählbar unendlich viele Komplementärgebiete bestimmen. Es giebt aber stets *genau zwei* ausgezeichnete Komplementärgebiete von $\mathfrak{C}$, die nämlich von dem *ganzen* Kontinuum $\mathfrak{C}$ begrenzt werden. Die übrigen von $\mathfrak{C}$ eventuell bestimmten Komplementärgebiete sind (von a und b abgesehen) von Punkten von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ *allein* begrenzt.[209])

Ist C irgend ein Kontinuum in der Ebene, so werde jedes Komplementärgebiet von C, dessen Begrenzung mit dem *ganzen* Kontinuum C identisch ist, als (von C bestimmtes) „*Hauptgebiet*" bezeichnet, jedes andere (also nur von einem Teil von C begrenzte) Komplementärgebiet von C als „*Nebengebiet*".[210]) Dann kann man den vorstehenden Satz auch so formulieren:

$\mathfrak{C}$ bestimmt in der Ebene stets genau zwei Hauptgebiete. Die etwa vorhandenen Nebengebiete werden von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ allein begrenzt.

A. Rosenthal[211]) hat (bei Ableitung des vorstehenden Resultats) noch eine andere Verallgemeinerung des *Jordan*schen Kurvensatzes bewiesen[211a]):

---

der Ebene hervorgerufene Teilung ins Auge gefaßt; aber sein hierüber aufgestellter Satz ist nicht korrekt, würde auch bei einwandfreier Fassung nicht viel besagen und sein Beweisgang ist nicht richtig; siehe dazu *A. Rosenthal,* a. a. O., p. 91/3.*

209) *Der Satz gilt auch noch, wenn nur eines der beiden Kontinuen $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{C}_2$ beschränkt ist, aber nicht mehr, wenn $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ beide nicht beschränkt sind; a. a. O., p. 107. Der Satz läßt sich ferner noch etwas allgemeiner fassen, wenn man $\mathfrak{C}$ aus endlich vielen, zyklisch geordneten, beschränkten, zwischen ihren Endpunkten irreduziblen Kontinuen zusammensetzt, die, abgesehen vom gemeinsamen Endpunkt zweier im Zyklus aufeinanderfolgender Kontinuen, paarweise keine Punkte gemeinsam haben; a. a. O., p. 108/9.*

210) *A. Rosenthal*[208]), p. 106.*

211) *A. Rosenthal*[208]), p. 102/3.*

211a) *Diese beiden Sätze ergeben sich aus einigen [von *A. Rosenthal*[208]) bewiesenen] allgemeinen Zerlegungssätzen von Gebieten:

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Begrenzung B beschränkt ist und aus mehr als einem Punkt besteht. Eine in G gelegene, lückenlos zusammenhängende Menge C, die eine punkthafte (abgeschlossene) Menge von Randpunkten von G, mindestens aber zwei Randpunkte approximiert, zer-

Bestimmen die beiden elementenfremden, beschränkten, lückenlos zusammenhängenden Mengen C_1 und C_2 je ein einziges Komplementärgebiet in der Ebene und approximieren beide zugleich genau zwei Punkte, a und b, dann wird die Ebene durch die Vereinigungsmenge $(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)$ der abgeschlossenen Hüllen von C_1 und C_2 in genau zwei Teilgebiete zerlegt.[211 b])

Wenn C_1 und C_2 nicht je ein einziges Komplementärgebiet bestimmen, sondern nur jedes von ihnen in einem einzigen Komplementärgebiet des andern liegt, so gibt es unter den Komplementärgebieten von $(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)$ stets genau zwei, die (von a und b abgesehen) *zugleich* von Punkten von $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ begrenzt werden. [Bestimmen C_1 und C_2 in der Ebene m_1 bzw. m_2 Komplementärgebiete, so wird die Ebene durch $(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)$ insgesamt in $(m_1 + m_2)$ Teilgebiete zerlegt].*

*In anderer Weise, nämlich unmittelbar von der Zweiteilung der Ebene ausgehend, hatte *A. Schoenflies* eine Verallgemeinerung der geschlossenen *Jordan*schen Kurven gegeben. *A. Schoenflies*[212]) bezeichnet als „*geschlossene Kurve*" jede ebene beschränkte[212a]) Punktmenge K, welche in der Ebene genau zwei Gebiete G_1 und G_2 bestimmt, derart daß K mit der vollen Begrenzung sowohl von G_1 wie von G_2 identisch ist; [also in der vorstehenden Bezeichnungsweise: K bestimmt genau zwei Hauptgebiete ohne Nebengebiete].[213]) Die geschlossene Kurve ist ein linienhaftes Kontinuum.

legt G in *mindestens zwei* Teilgebiete (an deren Begrenzung der Rand B und die abgeschlossene Hülle $\bar{C}$ von C gemeinsam teilnehmen).

Ist C eine in G gelegene, lückenlos zusammenhängende Menge, die genau zwei Randpunkte approximiert und die ferner in der Ebene ein einziges Komplementärgebiet bestimmt, dann wird G durch C in *genau zwei* Teilgebiete zerlegt.*

211 b) *Z. Janiszewski* hat in einer polnisch geschriebenen Abhandlung [Prace matematyczno-fizyczne 26 (1915), p. 11/63] die notwendigen und hinreichenden Bedingungen untersucht, unter denen die Vereinigungsmenge von zwei beschränkten Kontinuen C_1 und C_2, von denen jedes in der Ebene nur ein einziges Komplementärgebiet bestimmt, die Ebene in *mindestens* zwei Teilgebiete zerlegt; er findet: Der Durchschnitt von C_1 und C_2 darf weder leer noch zusammenhängend sein.

S. Straszewicz, Fundamenta math. 4 (1923), p. 128/35, folgert daraus ganz neuerdings (ebenfalls als Verallgemeinerung des *Jordan*schen Kurvensatzes): Wenn der Durchschnitt der beiden beschränkten Kontinuen C_1 und C_2, von denen jedes nur ein einziges Komplementärgebiet in der Ebene bestimmt, aus zwei Komponenten besteht, so wird die Ebene durch $(C_1 + C_2)$ in *genau zwei* Gebiete zerlegt.

Wegen nicht beschränkter Kontinuen siehe *B. Knaster* u. *C. Kuratowski*, Fundamenta math. 5 (1923), p. 35/6.*

212) **A. Schoenflies*, Math. Ann. 59 (1904), p. 147; Bericht II 1908, p. 119.*

212a) *Wegen des Falles eines nicht beschränkten K siehe *E. W. Chittenden*, Trans Amer. Math. Soc. 21 (1920), p. 451/8.*

213) **A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 121 [Satz XI] hat das obenstehende

Die in die Definition der geschlossenen Kurve aufgenommene Bedingung, daß K die volle Begrenzung der *beiden* Gebiete G_1 und G_2 bilden soll, ist natürlich wesentlich.[214]) Doch, auch wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann man wenigstens noch folgendes aussagen: Zerfällt die Komplementärmenge eines beschränkten, abgeschlossenen, linienhaften Kontinuums $\overline{K}$ in zwei Gebiete G_1 und G_2, so gibt es eine geschlossene Kurve, die in $\overline{K}$ enthalten ist und G_1 von G_2 trennt.[215]) Man braucht nämlich nur die in $\overline{K}$ enthaltenen, gemeinsamen Begrenzungspunkte von G_1 und G_2 ins Auge zu fassen.

A. Schoenflies[216]) bezeichnet als *Außenrand* irgendeines beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebietes G die Menge der Punkte, welche gleichzeitig Begrenzungspunkte von G und desjenigen Komplementärgebietes sind, das sich ins Unendliche erstreckt. Der Außenrand ist ein Kontinuum, braucht aber keineswegs eine geschlossene Kurve zu sein.

Da der Begriff der geschlossenen Kurve eine Verallgemeinerung der *Jordan*schen Kurve ist, so ist naturgemäß die folgende von *A. Schoenflies* gestellte und beantwortete Frage besonders interessant: Unter welcher Bedingung ist eine geschlossene Kurve zugleich eine *Jordan*sche Kurve?*

A. Schoenflies gibt zunächst die folgenden Definitionen:

Ein Punkt p der Begrenzung B eines Gebietes G heißt *erreichbar für* G[217]), wenn man ihn mit einem beliebigen Punkte von G durch einen in G verlaufenden Streckenzug verbinden kann, der entweder aus einer endlichen Anzahl von Strecken besteht, oder aus unendlich vielen, die in p ihren *einzigen* Grenzpunkt besitzen [siehe Nr. **15**]. Er nennt einen solchen Streckenzug einen *einfachen Weg* oder *Weg*

---

noch etwas verallgemeinert, indem er die Gebiete G_1 und G_2 durch zwei zu K komplementäre, nicht-abgeschlossene Kontinua ersetzt. K ergibt sich dann wieder als eine geschlossene Kurve. Diesen Satz hat er unter der besonderen Voraussetzung, daß K ein abgeschlossenes Kontinuum ist, bewiesen. Man kann sich aber von dieser Voraussetzung sofort befreien, indem man zeigt, daß sie immer von selbst erfüllt ist.*

214) *Sei z. B. Q ein Quadratumfang mit nach innen gehenden Stacheln; dann teilt Q zwar die Ebene in zwei Gebiete G_1 und G_2, ist aber keine geschlossene Kurve.*

215) **A. Schoenflies*, Math. Ann. 59 (1904), p. 158; Bericht II 1908, p. 122.*

216) *Math. Ann. 68 (1910), p. 438.*

217) **A. Schoenflies*, Math. Ann. 62 (1906), p. 296; Bericht II 1908, p. 126, 176. Wie leicht zu sehen, ist jeder Punkt der Begrenzung von G entweder selbst erreichbar für G oder wenigstens Häufungspunkt von erreichbaren Begrenzungspunkten.*

schlechthin[218]). Gilt die Eigenschaft für jedes [durch „Querschnitte“[236]) abgetrennte] Teilgebiet von G, zu dessen Begrenzung p gehört, so heißt p *allseitig erreichbar für* G.[219])

A. Schoenflies beweist sodann, um die vorige Frage zu beantworten, den folgenden Satz, der als die *Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes* bezeichnet wird:

*Eine geschlossene Kurve K ist dann und nur dann eine *Jordan*sche Kurve, wenn jeder ihrer Punkte für die *beiden* Gebiete, in welche K die Ebene teilt, erreichbar ist.[219a])

Bei *A. Schoenflies* wird dieser Satz in seine beiden Bestandteile zerlegt: 1. Er bezeichnet eine geschlossene Kurve K als *„einfache geschlossene Kurve“*, wenn jeder ihrer Punkte für die beiden Gebiete, in welche K die Ebene teilt, erreichbar ist.[220]) Er beweist sodann, daß jede „einfache geschlossene Kurve“ sich umkehrbar eindeutig und stetig auf eine Kreislinie abbilden läßt.[221]) 2. Er zeigt, daß alle Punkte einer geschlossenen *Jordan*schen Kurve für beide zugehörigen Gebiete erreichbar (und sogar allseitig erreichbar) sind.[222])

---

218) *Es sei erwähnt, daß man keineswegs einen allgemeineren Erreichbarkeitsbegriff erhalten würde, wenn man diesen „einfachen Weg“ durch ein beliebiges abgeschlossenes Kontinuum ersetzen würde, das, abgesehen von p, ganz dem Innern von G angehört. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem *Borel*schen Überdeckungssatz; vgl. Anm. [142]).

O. Veblen[197]) betrachtet speziell die für G *„endlich erreichbaren“*, d. h. mit Wegen von endlicher Streckenzahl erreichbaren Punkte (oder, wie *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 347, sagt: die *„geradlinig erreichbaren“* Punkte); sie liegen gleichfalls auf der Begrenzung von G überall dicht.*

219) **A. Schoenflies,* Math. Ann. 62 (1906), p. 298; Bericht II 1908, p. 176.*

219a) *Der Satz läßt sich noch folgendermaßen verallgemeinern: Ein beschränktes Kontinuum K, das in der Ebene *mindestens zwei* Hauptgebiete (außerdem eventuell Nebengebiete) bestimmt, ist dann und nur dann eine geschlossene *Jordan*sche Kurve, wenn jeder Punkt von K für jene beiden Hauptgebiete erreichbar ist. Vgl. *A. Schoenflies,* Math. Ann. 68 (1910), p. 440/1.*

220) **A. Schoenflies,* Math. Ann. 58 (1904), p. 217; Bericht II 1908. p. 178.*

221) **A. Schoenflies,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1902, p. 185/92; Math. Ann. 58 (1904), p. 230/4; Math. Ann. 62 (1906), p. 310/6; Bericht II 1908, p. 180/5. Weitere Beweise gaben *F. Riesz,* Math. Ann. 59 (1904), p. 409/15 [im Anschluß an Betrachtungen von *D. Hilbert,* Math. Ann. 56 (1902/3), p. 381 = Grundlagen der Geometrie (2., 3., bzw. 4. Aufl., Leipzig 1903, 1909 bzw. 1913), Anhang IV] sowie *N. J. Lennes*[201]), p. 312/14.

Wegen nicht beschränkter K siehe *J. R. Kline,* Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), p. 177/84.*

222) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 189/90 [dazu eine kleine Ergänzung von *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 68 (1910), p. 433/4] und Math. Ann. 68 (1910), p. 439/40. Andere Beweise für die Erreichbarkeit bei *N. J. Lennes*[201]), sowie bei *L. Bieberbach*[202]), p. 151/2.*

1., 2. und der *Jordan*sche Kurvensatz zusammengenommen zeigen die Identität der eben definierten „einfachen geschlossenen Kurven" mit den in Nr. **12** nach *C. Jordan* anders definierten „einfachen geschlossenen Kurven", d. h. mit den geschlossenen *Jordan*schen Kurven.

Weiterhin hat *A. Schoenflies*[223]) den Satz bewiesen: Sind alle Punkte einer geschlossenen Kurve K für eines der beiden zugehörigen Gebiete allseitig erreichbar, so sind sie es auch für das andere.

Daraus ergibt sich eine andere Form der Umkehrung des *Jordan*schen Kurvensatzes: Eine geschlossene Kurve ist dann und nur dann eine *Jordan*sche Kurve, wenn sie für (mindestens) eines der beiden zugehörigen Gebiete allseitig erreichbar ist.[223a])

Noch eine andere Form der Umkehrung des *Jordan*schen Kurvensatzes hat *Pia Nalli*[224]) gegeben, indem sie zeigte: Damit eine geschlossene Kurve K eine *Jordan*sche Kurve sei, ist die Erfüllung der folgenden Bedingung notwendig und hinreichend: sei a ein beliebiger Punkt von K und α eine beliebige Umgebung von a, dann soll es möglich sein, innerhalb α eine andere Umgebung α' von a zu finden, derart daß man jeden beliebigen innerhalb α' gelegenen Punkt b von K durch eine zusammenhängende Teilmenge von K, die ganz innerhalb α liegt, mit a verbinden kann.

Diese Bedingung bedeutet nichts anderes als, daß (in der neuerdings eingeführten Ausdrucksweise von *H. Hahn* [siehe Nr. **16**, Schluß]) die geschlossene Kurve K *„zusammenhängend im kleinen"* sei.[224a]) Man hat hier also einen Spezialfall der allgemeineren in Nr. **16** (Schluß) berichteten Betrachtungen.[225])*

---

223) *Bericht II 1908, p. 215.*

223a) *Dies kann man wieder [ähnlich wie [219a])] verallgemeinern: Ein beschränktes Kontinuum K, das in der Ebene *mindestens zwei* Hauptgebiete (außerdem eventuell Nebengebiete) bestimmt, ist dann und nur dann eine *Jordan*sche Kurve, wenn K für (mindestens) ein Hauptgebiet allseitig erreichbar ist.*

224) **Pia Nalli,* Supplemento Rend. Circ. mat. Palermo 6 (1911), p. 31/2; Rend. Circ. mat. Palermo 32 (1911), p. 391/401. — Vgl. auch *J. R. Kline,* Bull. Amer. Math. Soc. 24 (1918), p. 471; Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), p. 451/8.

Auch hier ergibt sich eine ähnliche Verallgemeinerung wie in [219a]) und [223a]).*

224a) *Eine andere, ebenfalls auf dem Begriff „zusammenhängend im kleinen" beruhende Umkehrung des *Jordan*schen Kurvensatzes hat neuerdings *R. L. Moore,* Proceed. National Acad. Amer. 4 (1918), p. 364/70, gegeben, wobei die Begrenzung B eines beschränkten, einfach zusammenhängenden ebenen Gebietes G nur durch eine entsprechende, auf G allein (nicht auf B) sich beziehende Bedingung charakterisiert wird.*

225) *Eine Umkehrung des *Jordan*schen Kurvensatzes beantwortet immer zugleich die Frage [siehe Nr 12], unter welchen Bedingungen ein Kontinuum eine *geschlossene Jordan*sche Kurve ist. Im Anschluß daran findet man auch

*Außer der Erreichbarkeit hat *A. Schoenflies* dem *Jordan*schen Kurvensatz noch eine andere Eigenschaft der Kurvenpunkte als Ergänzung hinzugefügt[226]), die [nach *L. E. J. Brouwer*[226a])] als die *Unbewalltheit* bezeichnet wird: Sei B die Begrenzung eines Gebietes G, seien b_1 und b_2 irgend zwei für G erreichbare Punkte von B, w ein b_1 und b_2 in G verbindender Weg, μ das Maximum der Entfernung der zu w gehörenden Punkte von b_1 und b_2, sei endlich m die untere Grenze von μ für die verschiedenen bei festem b_1 und b_2 möglichen Wege w. Dann wird diese Größe m als die *Wegdistanz*[227]) von b_1 und b_2 für das Gebiet G bezeichnet. Wenn diese Wegdistanz stets zugleich mit der gegenseitigen Entfernung der Punkte b_1 und b_2 gegen Null konvergiert, so wird B als „*unbewallt* für das Gebiet G"[226a]) bezeichnet.[227a])

Es gilt dann der Satz[226]): Jede geschlossene *Jordan*sche Kurve ist für die beiden zugehörigen Gebiete unbewallt.[227b])

Also: Ist eine geschlossene Kurve für ein zugehöriges Gebiet G allseitig erreichbar, so ist sie (weil sie eine *Jordan*sche Kurve darstellt) auch unbewallt.[227b]) Dagegen können alle Punkte einer geschlossenen Kurve für ein zugehöriges Gebiet G erreichbar sein, ohne daß daraus die Unbewalltheit für G folgt.[228]) Für die Begrenzung B eines be-

weitere Antworten auf die Frage [Nr. 12], unter welchen Bedingungen ein Kontinuum eine *offene Jordan*sche Kurve ist: Es ergibt sich leicht, daß hierfür notwendig und hinreichend ist, daß die Komplementärmenge des Kontinuums ein einziges Gebiet ist und daß das Kontinuum zwischen zweien seiner Punkte irreduzibel und für das Komplementärgebiet *allseitig* erreichbar ist. Ersetzt man hierin die Worte „für das Komplementärgebiet allseitig erreichbar" durch die Worte „zusammenhängend im kleinen", so erhält man wieder eine notwendige und hinreichende Bedingung. Übrigens führen andererseits auch die in Nr 12 angegebenen Beantwortungen dieser Fragen zu weiteren Umkehrungen des *Jordan*schen Kurvensatzes. Eine letzte, von *C. Carathéodory* herrührende Form der Umkehrung des *Jordan*schen Kurvensatzes wird erst weiter unten bei [242]) angegeben.*

226) **A. Schoenflies*, Math. Ann. 62 (1906), p. 308/10; Bericht II 1908, p. 179/80. Ein Beweis für diese Eigenschaft auch bei *L. Bieberbach*[202]), p. 152.*

226a) **L. E. J. Brouwer*, Math. Ann. 71 (1911), p. 321.*

227) **A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 175; früher in Math. Ann. 62 (1906), p. 300 als *Ausbiegung* bezeichnet.*

227a) *Dem Begriff der „Unbewalltheit für das Gebiet G" sollte man noch die „*allseitige Unbewalltheit* für das Gebiet G" an die Seite stellen und hierunter die Unbewalltheit der Begrenzung B von G für jedes (durch „Querschnitte"[236]) abgetrennte) Teilgebiet von G verstehen. Z. B. ist eine Strecke mit der nach einer Seite gerichteten Mittelsenkrechten für das Komplementärgebiet unbewallt, aber nicht allseitig unbewallt.*

227b) *Und auch allseitig unbewallt.*

228) *Ein einfaches Gegenbeispiel ist die geschlossene Kurve, welche das

liebigen einfach zusammenhängenden Gebietes folgt auch aus der allseitigen Erreichbarkeit keineswegs die Unbewalltheit.[229])*

*Die allseitig erreichbaren Kontinua spielen für die in Nr. **16** angeführten weitergehenden Untersuchungen von *A. Schoenflies* eine wesentliche Rolle; hier ist hiervon nur der folgende Satz hervorzuheben[230]): Die Begrenzung B eines einfach zusammenhängenden Gebietes G ist dann und nur dann eine stetige Kurve [nicht notwendig eine „geschlossene Kurve"[231]) oder gar eine *Jordan*sche Kurve], wenn alle Punkte von B für G allseitig erreichbar sind.[231a])*

*Hieraus und aus der zweiten Form der *Schoenflies*schen Umkehrung des *Jordan*schen Kurvensatzes ergibt sich dann noch eine andere Form dieser Umkehrung: Eine geschlossene Kurve ist dann und nur dann eine *Jordan*sche Kurve, wenn sie eine stetige Kurve ist.[231b])*

Die allgemeine Untersuchung der geschlossenen Kurven ist, wie erwähnt, von *A. Schoenflies* in Angriff genommen worden; aber *L. E. J. Brouwer*[232]) hat durch sehr merkwürdige Beispiele, welche er angegeben (und welche neue, bis dahin unbekannte Möglichkeiten darstellen), gezeigt, daß einige der erhaltenen Resultate unrichtig sind.

---

zwischen folgenden vier Kurven eingeschlossene Gebiet G begrenzt:

$$x=1;\quad x=-1;\quad y=2;\quad \left\{\begin{array}{l} y=\sin\frac{1}{x} \text{ für } x>0 \\ y=\text{Intervall}\,[-1,+1] \text{ für } x=0 \\ y=-1 \text{ für } x<0 \end{array}\right\}.^*$$

229) *Gegenbeispiel: Quadratumfang mit einem nach innen gehenden Stachel.*

230) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 215. Vgl. auch [291]).*

231) *Ein Beispiel eines solchen Gebietes G, dessen Begrenzung eine für G allseitig erreichbare stetige Kurve ist, die aber keine geschlossene Kurve darstellt, ist das Gebiet, das von zwei sich von innen berührenden Kreisen begrenzt wird, oder das Innere eines mit nach innen gehenden Stacheln besetzten Quadrates.*

231a) *Diese Bedingung kann man durch die Forderung des „Zusammenhangs im kleinen" von B ersetzen; vgl. die allgemeinen Kriterien für stetige Kurven [Nr. **16** bei [292])]. Nach *Marie Torhorst,* Math. Ztschr. 9 (1921), p. 44/65, ist damit auch die Bedingung gleichwertig, daß der Rand von G ausschließlich aus Primenden 1. Art [siehe bei [240])] bestehen soll. — Eine andere Bedingung bei *R. L. Moore*[293b]), p. 235/7.*

231b) *Dies folgt auch aus dem Satz von *Pia Nalli*[224]), zusammen mit den Resultaten von Nr **16** Schluß [bei [292])].

Außerdem hängt damit zusammen der folgende Satz, den *R. L. Moore*[176a]), zweites Zitat, insbes. p. 258/60, neuerdings bewiesen hat: Wenn die Begrenzung B des beschränkten Gebietes G eine stetige Kurve ist, dann ist der Außenrand von G eine geschlossene *Jordan*sche Kurve.*

232) *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 68 (1910), p. 422/34; *siehe auch Verslag Ak. Amsterdam 19_2 (1910/11), p. 1419/24 = Proc. Ak. Amsterdam 1911, p. 139/45.*

Von diesen durch *L. E. J. Brouwer* aufgedeckten sonderbaren Möglichkeiten führen wir z. B. folgende an[232a]): „die Existenz eines Kontinuums, das außer zwei Hauptgebieten noch Nebengebiete bestimmt*; die Existenz eines Kontinuums, das gemeinsame Begrenzung von endlich oder abzählbar unendlich vielen Gebieten ist [„das also mehr als zwei Hauptgebiete bestimmt*][233]); die Existenz einer geschlossenen Kurve, die man nicht in zwei verschiedene (eigentliche) Kurvenbogen zerlegen kann[233a]); „geschlossene Kurven, die sich in zwei uneigentliche Kurvenbogen zerlegen lassen; eigentliche Kurvenbogen, die sich in zwei mit dem ganzen identische Kurvenbogen zerlegen lassen.*

„Die von *L. E. J. Brouwer* angegebenen Beispiele zeigen, wie kompliziert die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden, ebenen Gebietes sein kann. Es erhebt sich daher die allgemeine Frage: Wie ist überhaupt die Begrenzung eines ebenen (nicht mit der ganzen Ebene identischen) Gebietes G beschaffen? Es ergibt sich zunächst unmittelbar, daß die Begrenzung irgendeines ebenen Gebietes G eine *abgeschlossene, punkthafte* oder *linienhafte* Menge ist. Gibt es zu einem Gebiete G äußere Punkte, so enthält, wie schon *E. Phragmén*[234]) zeigte, die Begrenzung von G einen zusammenhängenden Bestandteil, also ein Kontinuum. Daraus folgt: Die Komplementärmenge einer abgeschlossenen, punkthaften Menge bildet ein einziges Gebiet.[234a]) Ferner folgt: Die Begrenzung jedes beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebietes G ist ein Kontinuum. Die Komplementärmenge eines Kontinuums C besteht aus einem oder mehreren Gebieten, die sämtlich ein-

232a) „Die beiden erstgenannten Möglichkeiten haben wir schon im vorhergehenden Text verwendet.*

233) Auf diese Möglichkeit hat auch *A. Denjoy*, Paris C. R. 151 (1910), p. 138 hingewiesen.

233a) „Ein *Kurvenbogen* [oder genauer gesagt: Bogen einer geschlossenen Kurve] wird dabei von *L. E. J. Brouwer*, [[232]), erstes Zitat, p. 423] definiert durch zwei Schnitte in einem zyklischen, abzählbaren, überall dichten Ordnungstypus von für das innere (bzw. äußere) Gebiet erreichbaren Punkten. Dies ist etwas allgemeiner als eine entsprechende Definition von *A. Schoenflies* [Bericht II 1908, p. 128], wo unter diesen Schnitten nur die durch erreichbare Punkte gebildeten zugelassen werden. Ferner versteht *L. E. J. Brouwer* unter einem *uneigentlichen* Kurvenbogen einen durch zwei Schnitte definierten Kurvenbogen, welcher mit der ganzen Kurve identisch ist; andernfalls spricht er von einem *eigentlichen* Kurvenbogen.*

234) *E. Phragmén*, Acta math. 7 (1885/6), p. 43. „Ein anderer Beweis hierfür bei *A. Pringsheim*[202d]), p. 188/204.*

234a) „Schon früher von *E. Phragmén* gesondert bewiesen in Öfvers. Vetensk. Akad. Förhandl. 41 (1884), Nr. 1, p. 121. — Bezüglich der Komplementärmenge einer beliebigen punkthaften Menge siehe den Text bei [267b]).*

fach zusammenhängend sind, deren Begrenzung also jeweils ein in C enthaltenes Kontinuum ist.[234b])

Nach *A. Schoenflies*[234c]) kann man die Begrenzung B jedes beschränkten einfach zusammenhängenden Gebietes G beliebig gut durch einfache Polygone, die in G liegen, approximieren; d. h.: Bei beliebig vorgegebenem ε kann man ein in G gelegenes einfaches Polygon $\mathfrak{P}_\varepsilon$ finden, so daß jeder zu $\mathfrak{P}_\varepsilon$ gehörende Punkt um weniger als ε von B und jeder zu B gehörende Punkt um weniger als ε von $\mathfrak{P}_\varepsilon$ entfernt ist.

Die genauere allgemeine Analyse der Begrenzung eines beliebigen beschränkten, einfach zusammenhängenden, ebenen Gebietes G (dessen Begrenzung aus mehr als einem Punkt besteht) ist erst von *C. Carathéodory*[235]) geliefert worden; er verfolgt dabei zugleich das Ziel, die Struktur der Begrenzung des Gebietes allein mit Hilfe der *inneren* Punkte des Gebietes zu charakterisieren.

C. Carathéodory bezeichnet als „Querschnitt" des Gebietes G ein Jordansches Kurvenstück, das nur seine zwei Endpunkte auf der Begrenzung des Gebietes hat, sonst ganz im Innern verläuft.[236]) Unter einer

234b) *Vgl. dazu auch *L. E. J. Brouwer*[200]), erstes Zitat, p. 170/71; *St. Mazurkiewicz,* Fundamenta mat. 3 (1922), p. 20/5.*

234c) *Bericht II 1908, p. 114.*

235) **C. Carathéodory,* Math. Ann. 73 (1913), p. 323/70.

In enger Beziehung dazu stehen auch die gleichzeitigen Untersuchungen von *E. Study,* Vorles. üb ausgew. Gegenst. d. Geometrie II: Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche (unter Mitwirkung von *W. Blaschke*), Leipzig u. Berlin 1913, § 8. Aber die Untersuchungen *E. Study*s (die zum Teil in bewußter Weise hypothetisch sind) geben nicht so sehr eine Analyse der Struktur der Begrenzung eines Gebietes, als vielmehr eine Betrachtung der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung des Gebietes auf ein Kreisgebiet. Für die hier vorliegenden Zwecke der Punktmengenlehre kommt daher die *Study*sche Untersuchung weniger in Betracht. Dasselbe gilt im wesentlichen auch für die andern auf die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung sich beziehenden Abhandlungen [siehe insbesondere die übrigen in diesen Fußnoten [236])—[242]), sowie [340]) zitierten Arbeiten].

Die Bezeichnungen *E. Study*s sind von denen *C. Carathéodory*s durchaus verschieden; doch sind die letzteren vorzuziehen, weshalb wir ihnen im Text gefolgt sind; *E. Study* versteht z. B. unter „Grenzpunkt" [a. a. O., p. 60/61] einen Begrenzungspunkt des Gebietes, der als einem bestimmten Primende angehörig betrachtet wird, unter einem „Randpunkt" [a. a. O, p. 47] einen erreichbaren „Grenzpunkt".

Es sei noch darauf hingewiesen, daß eine von *E. Study* aufgestellte und wesentlich benutzte (die konforme Abbildung betreffende) Hypothese neuerdings von *E. Lindelöf,* Acta Soc. sc. Fennicae 46 (1915), No. 4, bewiesen worden ist.*

236) *Die von ihm noch hinzugefügte Forderung, daß jedes ganz im Innern von G gelegene Teilkurvenstück des Querschnitts aus endlich vielen analytischen Kurvenstücken bestehen soll, ist überflüssig.*

„*Kette* von Teilgebieten“ versteht er eine Folge von Teilgebieten von G, deren jedes alle folgenden enthält und deren jedes durch einen „Querschnitt“ abgeschnitten ist, wobei keine zwei dieser Querschnitte Punkte gemeinsam haben. Die betreffenden Querschnitte nennt er eine „Kette von Querschnitten“. Jede Kette von Teilgebieten $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ bestimmt ein „*Ende*“ E_g (der Kette, des Gebietes). Der Begriff des „Ende“ wird von *C. Carathéodory* axiomatisch durch folgende fünf Erklärungen festgelegt:[237])

I. Ist H ein beliebiges Gebiet, welches sämtliche inneren Punkte eines Gebietes g_n der Kette enthält, so sagen wir, daß das Ende E_g der Kette in H enthalten ist.

II. Sind in G zwei Ketten von Teilgebieten $g_1, g_2, \ldots$ und $h_1, h_2, \ldots$ gegeben, sind E_g und E_h ihre Enden, und ist (nach Def. I.) das Ende E_h in *jedem* g_n enthalten, so sagen wir, daß E_h in E_g *enthalten*, oder daß E_g durch E_h *teilbar* ist.

III. Von einer unendlichen Punktfolge sagen wir, daß sie gegen ein Ende E_g konvergiert, wenn außerhalb jedes Gebietes g_n der Kette, die E_g definiert, jeweils nur endlich viele Punkte der Folge liegen.

IV. Von einem Punkte sagen wir, daß er im Ende E_g enthalten ist, wenn er in der Ableitung jedes g_n der Kette, die E_g definiert, enthalten ist.

V. Zwei Enden E_g und E_h von G sollen dann und nur dann als identisch angesehen werden, wenn jedes von ihnen durch das andere teilbar ist.

Ein Ende enthält entweder einen einzigen Punkt oder ein Kontinuum. Ein Ende, das keinen echten Teiler besitzt, also nur durch sich selbst teilbar ist, wird von *C. Carathéodory* ein *Primende* genannt[237a]), wogegen *P. Koebe*[238]) die (wohl zweckmäßigere) Bezeichnung *Randelement* vorschlägt. Die Primenden sind identisch mit den Enden, die durch eine Kette von Querschnitten definiert werden, welche gegen einen Punkt konvergieren. Insbesondere kann man diese Querschnitte immer so annehmen, daß sie auf konzentrischen Kreisen liegen. Ein Primende enthält nur Punkte der Begrenzung von G.

P. Koebe[238a]) führt den Begriff des Randelements = Primende in anderer (einfacherer) Weise ein. Er geht von den erreichbaren Punkten p der Begrenzung B des Gebietes G aus. Ein solcher Punkt soll ge-

---

237) **C. Carathéodory*[235]), p. 331/3; dieser Begriff des „Ende“ steht in enger Beziehung zu dem gemeinsamen Durchschnitt einer Kette von Bereichen.*

237a) *a. a. O., p. 336.*

238) **P. Koebe,* J. f. Math. 145 (1915), p. 217.*

238a) **P. Koebe*[238]), p. 214 u. 217/8.*

gebenenfalls mehrfach gerechnet werden und er betrachtet ihn als eindeutig bestimmt erst nach Angabe eines zu ihm hinführenden Weges λ. Zwei erreichbare Punkte p_1 und p_2 von B mit den zugehörigen definierenden Wegen λ_1 und λ_2 werden dann und nur dann als identisch angesehen, wenn erstens p_1 und p_2 sich decken und wenn außerdem die beiden Wege λ_1 und λ_2, die man von demselben innern Punkt ausgehen lassen kann, nur solche Gebiete einschließen, die in ihrem Innern keine Begrenzungspunkte von G enthalten.[238b]) Die Menge der so zum Teil als mehrfach aufgefaßten erreichbaren Punkte p von B ist nun zyklisch geordnet; in dieser Menge kann man (ähnlich wie in der Menge der rationalen Zahlen) „*Schnitte*" definieren.[238c]) Ein solcher Schnitt kann zur Darstellung gebracht werden durch eine Folge von ineinander geschachtelten Paaren erreichbarer Punkte $(p_n p'_n)$. Jedes dieser Punktepaare werde durch einen Querschnitt π_n verbunden; dabei sollen diese Querschnitte einander nicht schneiden und sollen mit unbegrenzt wachsendem Index n gleichmäßig der Begrenzung B zustreben, d. h., von einem genügend hohen n ab, außerhalb jedes beliebigen, völlig dem Innern von G angehörenden Teilbereichs liegen. Wird das durch π_n abgeschnittene Teilgebiet von G mit g_n bezeichnet, so definiert *P. Koebe* nun als *Randelement* die Menge derjenigen Begrenzungspunkte von G, welche gleichzeitig Begrenzungspunkte aller Teilgebiete g_n unserer Folge sind. Zwei Randelemente werden dann und nur dann als verschieden angesehen, wenn die zur Definition benutzten Gebietsfolgen $\{g_n\}$ bzw. $\{g_n^*\}$ von einem gewissen n ab keinen innern Punkt gemeinsam haben.

Ferner werden von *C. Carathéodory* Hauptpunkte und Nebenpunkte eines Primendes unterschieden[239]): Als *Hauptpunkte* eines Primendes E_g werden diejenigen Punkte bezeichnet, gegen welche mindestens eine E_g definierende Kette von Querschnitten konvergiert.[239a]) Die übrigen Punkte von E_g werden *Nebenpunkte* von E_g genannt. Alle erreichbaren[239b]) Punkte von E_g sind Hauptpunkte, ein Primende E_g kann höch-

238b) *So auch schon bei *W. F. Osgood,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 9 (1902/3), p. 233/4 und *W. F. Osgood* u. *E. H. Taylor*[242]), p. 293/4. Vgl. ferner *C. Poli*[339]).*

238c) *Vgl. Fußnote [233a]).*

239) **C. Carathéodory*[235]), p. 353/4.*

239a) *Die Gesamtheit der Hauptpunkte von E_g wird von *E. Study*[235]), p. 64, als „*Kern*" von E_g bezeichnet. Dieser Kern eines Primendes bildet die kleinste Punktmenge, die von jeder in G gegen dieses Primende konvergierenden Kurve approximiert werden muß; vgl. *C. Carathéodory*[235]), p. 362 und *E. Study,* a. a. O.; noch etwas allgemeiner bei *A. Rosenthal*[208]), p. 96/7.*

239b) *Gemeint ist natürlich immer ein Punkt, der mittels eines gegen E_g konvergierenden Weges erreicht werden kann; ein unerreichbarer Punkt von E_g kann erreichbarer Punkt eines anderen Primendes sein.*

stens einen erreichbaren Punkt besitzen. Weiterhin zeigt *C. Carathéodory*[240]), daß jedes Primende einem der folgenden vier Typen angehören muß:

1. Ein Primende 1. Art besteht aus einem einzigen erreichbaren Punkt.

2. Ein Primende 2. Art besteht aus einem erreichbaren Hauptpunkt und aus unendlich vielen unerreichbaren Nebenpunkten.

3. Ein Primende 3. Art besteht aus einem Kontinuum von lauter nicht erreichbaren Hauptpunkten und enthält keinen Nebenpunkt.

4. Ein Primende 4. Art enthält ein Kontinuum von nicht erreichbaren Hauptpunkten und unendlich viele ebenfalls unerreichbare Nebenpunkte.

Ein Punkt der Begrenzung B des Gebietes G soll ein *einfacher Punkt* von B genannt werden, wenn er in einem einzigen Primende enthalten ist, ein *mehrfacher* Punkt dagegen, wenn er in mehreren Primenden liegt.[241]) Die Vielfachheit eines Punktes a der Begrenzung B wird durch die Anzahl der verschiedenen Primenden, die a enthalten, definiert, solange diese Anzahl endlich ist. Gibt es unendlich viele verschiedene Primenden, die den Punkt a enthalten, so kann man noch die beiden Fälle unterscheiden, je nachdem diese Menge abzählbar ist oder nicht. Damit ein Punkt a ein *einfacher* Punkt der Begrenzung von G sei, ist es notwendig und hinreichend, daß von irgend zwei kreisförmigen Querschnitten des Gebietes G, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, mindestens der eine ein Teilgebiet von G bestimmt, das a auf seiner Begrenzung nicht enthält.

C. Carathéodory[242]) gibt im Anschluß hieran eine weitere einfache Form der Umkehrung des *Jordan*schen Kurvensatzes:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Begrenzung eines Gebietes G eine *Jordan*sche Kurve sei, ist die, daß diese Begrenzung lauter einfache und für G erreichbare Punkte enthalte.*

13a. *Die Begrenzung eines n-dimensionalen Gebietes.** In der vorhergehenden Nummer haben wir die Begrenzung von *ebenen* Gebieten besprochen; wenden wir uns jetzt noch der Begrenzung von *drei- oder n-dimensionalen* Gebieten zu.

Die Begrenzung eines Gebietes G_n ist eine abgeschlossene, nirgends

240) *a. a. O.[235]), p. 362. [Vgl. dazu auch *Marie Torhorst*[231a]).]*

241) *a. a. O.[235]), p. 362/3. Die oben bei [238a]) u. [238b]) angeführte Vielfachheit der erreichbaren Punkte ordnet sich dem hier angegebenen Begriff unter.*

242) *a. a. O.[235]), p. 366; kurz darauf auch *W. F. Osgood* u. *E. H. Taylor*, Trans. Amer. Math. Soc. 14 (1913), p. 295.*

dichte Punktmenge. Gibt es zu einem Gebiet G_n äußere Punkte, so enthält die Begrenzung von G_n einen zusammenhängenden Bestandteil, also ein Kontinuum.

Der *A. Schoenflies*sche Begriff der „geschlossenen Kurve" läßt sich ohne weiteres übertragen und führt hier zu dem Begriff der „*geschlossenen Fläche*"[243]; das ist eine beschränkte Punktmenge, welche im R_n genau zwei Gebiete bestimmt und zugleich mit der Begrenzung dieser beiden Gebiete identisch ist. Ebenso lassen sich auch ohne weiteres die Begriffe (*allseitige*) *Erreichbarkeit* und *Unbewalltheit* übertragen. Ferner läßt sich (in Analogie zur geschlossenen *Jordan*schen Kurve) der Begriff der [$(n-1)$-dimensionalen] *geschlossenen Jordanschen Fläche* oder der *Jordanschen Mannigfaltigkeit*[244]) im R_n bilden: Man bezeichnet so das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild der Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel, oder wesentlich allgemeiner: das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild einer zweiseitigen[244a]), geschlossenen $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit.[245]) Im Falle $n = 3$ würde letzterem entsprechen: das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild der Oberfläche einer 3-dimensionalen Kugel oder einer solchen Kugel mit Henkeln.[246])

Es gelingt sodann (allerdings unter Überwindung von erheblich größeren Schwierigkeiten als in der Ebene) der Beweis des „*Jordanschen Satzes im n-dimensionalen Raum*", nämlich des Satzes:

Im n-dimensionalen Raum R_n bestimmt eine *Jordan*sche Mannigfaltigkeit J genau zwei Gebiete und ist mit der Begrenzung dieser Gebiete identisch.

Dieser Satz läßt sich (analog wie in der Ebene) in die folgenden drei Bestandteile zerlegen: 1. Die Begrenzung eines von J in R_n bestimmten Gebietes ist mit J identisch. 2. J bestimmt höchstens 2 Gebiete in R_n. 3. J bestimmt mindestens 2 Gebiete in R_n.

---

243) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 137.*

244) **L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 71 (1911), p. 314.*

244a) *Über den Begriff der „*Zweiseitigkeit*" siehe III A B 3 (*M. Dehn* u. *P. Heegard*), Grundlagen, Nr. 2, 5.*

245) *Über den Begriff der *Mannigfaltigkeit (variété)* siehe *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 71 (1911), p. 97; *J. Hadamard* [Note in *J. Tannery,* Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Bd. II (Paris 1910), p. 441/65]; vgl. auch *H. Weyl,* Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig u. Berlin 1913), p. 16/25. Vgl. ferner III A B 1, Nr. 15 (*F. Enriques*).*

246) *Vgl. dazu: III A B 3 (*M. Dehn* u. *P. Heegaard*), B II, Nr. 2 u. 4.

Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild einer Kugeloberfläche wäre als *einfach zusammenhängende Jordansche Mannigfaltigkeit (Fläche)* zu bezeichnen.*

Eine Beweismethode für 3. hat *H. Lebesgue*[247]) angegeben; die Teile 1. und 2. dagegen sind erst von *L. E. J. Brouwer*[248]) bewiesen worden.[249])

L. E. J. Brouwer hat ferner bewiesen, daß jeder Punkt einer *Jordan*schen Mannigfaltigkeit für beide zugehörigen Gebiete *erreichbar* ist[250]), und daß eine *Jordan*sche Mannigfaltigkeit für beide Gebiete *unbewallt* ist.[251]) Außerdem hat er gezeigt, daß eine *Jordan*sche Mannigfaltigkeit immer eine *zweiseitige*[244a]) Mannigfaltigkeit ist.[252])

Dagegen hat er durch Angabe eines Beispiels[253]) nachgewiesen, daß bereits im *dreidimensionalen* Raum das *Analogon* zu der in der Ebene gültigen *Schoenfliesschen Umkehrung des Jordanschen Satzes nicht mehr richtig* ist. Das Analogon dieser Umkehrung würde im Raume R_n lauten: Eine geschlossene Fläche, von der jeder Punkt für beide zugehörigen Gebiete erreichbar ist, ist eine *Jordan*sche Mannigfaltigkeit. Diese Aussage ist also *bereits im* R_3 *nicht mehr richtig.**

14. Punkthafte Mengen. Die *punkthaften* Mengen sind erst neuerdings etwas näher untersucht worden. Manche ihrer Eigenschaften nehmen sich, wie wir sehen werden, recht paradox aus.

*Wir betrachten im folgenden zunächst die *abgeschlossenen* punkthaften Mengen; statt der abgeschlossenen punkthaften Mengen könnte man dabei überall von beliebigen Teilmengen derselben reden, also von den Mengen, die wir früher (Nr. **10**) *verstreute* Mengen genannt haben. Erst gegen Schluß dieser Nummer werden dann allgemeinere punkthafte Mengen ins Auge gefaßt.*

Die einfachsten Beispiele abgeschlossener punkthafter Mengen werden von den nirgends dichten perfekten linearen Mengen geliefert [Nr. 7]. Viel merkwürdigere Punktgruppierungen stellen aber die zweidimensionalen abgeschlossenen punkthaften (bzw. verstreuten) Mengen dar.

Die wichtigsten allgemeinen Eigenschaften dieser Mengen sind die beiden folgenden:

---

247) **H. Lebesgue,* Paris C. R. 152 (1911), p. 841.*

248) **L. E. J. Brouwer,* Paris C. R. 153 (1911), p. 542/4; Math. Ann. 71 (1911), p. 312 u. 314/9.*

249) *Einen sehr speziellen Fall des *Jordan*schen Satzes für den dreidimensionalen Raum (wobei für die betreffende *Jordan*sche Fläche sehr viele, äußerst spezielle Einschränkungen gemacht werden) hatte bereits früher *L. D. Ames* bewiesen: Bull. Amer. Math. Soc. (2) 10 (1903/4), p. 303/5; Amer. J. of math. 27 (1905), p. 365/80.*

250) **L. E. J. Brouwer,* Paris C. R.[248]); Math. Ann. 71 (1911), p. 320/1.*

251) *Math. Ann. 71 (1911), p. 321/22.*

252) *Ibid., p. 322/3.*

253) **L. E. J. Brouwer*[251]), p. 321.*

Jeder Punkt a einer abgeschlossenen punkthaften Menge kann von einer einfachen geschlossenen Kurve umgeben werden, die keinen Punkt der Menge enthält und deren Punkte sämtlich von a einen Abstand, kleiner als irgendeine vorgegebene Zahl, haben. Die Kurve, von der im Satze die Rede ist, kann als *analytisch* oder aus endlichvielen analytischen Linien (z. B. geradlinigen Strecken) zusammengesetzt angenommen werden. Diese Eigenschaft hat *P. Painlevé*[254]) angegeben.[254a])

Ferner ist im Anschluß an *L. Zoretti* bewiesen worden, daß man eine geschlossene *Jordan*sche Kurve durch *alle* Punkte einer gegebenen beschränkten abgeschlossenen punkthaften Menge legen kann.[255])

*Eine unmittelbare Folgerung dieses Satzes ist, daß alle beschränkten perfekten punkthaften Mengen homöomorph sind, d. h. umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig aufeinander abgebildet werden können[256]) [vgl. auch Nr. **10a**].*

P. Painlevé[257]) hat eine Einteilung der abgeschlossenen punkt-

---

254) Der Beweis findet sich bei *L. Zoretti*, J. de math. (6) 1 (1905), p. 9/11. *Dieser Beweis ist nicht ganz korrekt, kann aber sehr leicht in Ordnung gebracht werden. — Eine Verallgemeinerung dieses Satzes bei *L. Antoine*[340a]), zweites Zitat, p. 296/7.*

254a) *Vgl. dazu den in Nr. **13** angegebenen Satz von *E. Phragmén*[234]) u. [234a]), daß die Komplementärmenge einer abgeschlossenen, punkthaften Menge ein einziges Gebiet bildet.*

255) *L. Zoretti*[254]), p. 12 selbst hatte etwas weniger bewiesen, nämlich daß man durch alle Punkte einer beschränkten abgeschlossenen punkthaften Menge eine *Cantor*sche Linie legen kann, welche die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebietes ist. *F. Riesz* [Paris C. R. 141 (1905), p. 650] hat den weitergehenden Satz des Textes zuerst ausgesprochen und zu beweisen versucht. Aber sein Beweis ist unrichtig. *Dagegen hat *A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 257/9 einen völlig einwandfreien Beweis dieses Satzes gegeben.*

*Neuerdings haben *R. L. Moore* u. *J. R. Kline*, Annals of math. (2) 20 1919), p. 218/23, noch folgenden allgemeineren Satz bewiesen: Damit eine *abgeschlossene* und *beschränkte* Punktmenge M Teilmenge eines *Jordan*schen Kurvenbogens sein kann, ist notwendig und hinreichend, daß jede Komponente von M entweder ein einzelner Punkt oder ein *Jordan*scher Kurvenbogen C sei, derart, daß kein Punkt von C (außer seinen Endpunkten) ein Häufungspunkt von $(M - C)$ ist. — Den Fall, daß M nicht abgeschlossen ist, hat *J. R. Kline*, Tôhoku Math. J. 18 (1920), p. 116/25, betrachtet.*

256) *Hierzu siehe auch *P. Mahlo*, Leipzig Ber. 61 (1909), p. 125; sowie *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 322/4.

Insbesondere sind also alle punkthaften perfekten Mengen des R_n (ebenso alle punkthaften abgeschlossenen Mengen und alle punkthaften äußeren Grenzmengen [wegen der letzteren siehe *St. Mazurkiewicz*[265a]), p. 70]) homöomorph zu linearen Mengen. Dagegen ist dies bereits nicht mehr allgemein der Fall für die punkthaften inneren Grenzmengen, was *St. Mazurkiewicz*, Fundamenta math.

haften Mengen gegeben. *Seine Einteilung ist jedoch nichts anderes als eine Einteilung darnach, ob der Inhalt bzw. der Linearinhalt [siehe Nr. **20c**] Null, endlich oder unendlich ist. Diese Klassifizierung enthält also nichts, was speziell auf die punkthaften Mengen zugeschnitten ist.*

Es sollen jetzt einige Beispiele von solchen punkthaften Mengen angegeben werden, die, wie man sehen wird, Eigenschaften besitzen, die a priori den Kontinuen allein eigentümlich zu sein scheinen: diese logischen Konsequenzen scharfer Definitionen laufen unleugbar unserer gewöhnlichen, gefühlsmäßigen Vorstellung von der Stetigkeit zuwider und lehren uns, ihr zu mißtrauen.

Betrachten wir die Menge der Punkte mit den Koordinaten:

$$x = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$$
$$y = 0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots,$$

wo x in dem Zahlensystem von der Basis 3, und y in dem System von der Basis 2 geschrieben ist; die a bezeichnen in beliebiger Kombination die Ziffern 0 und 2, die b sind mit den a folgendermaßen verknüpft: es ist

$$b_n = 0, \quad \text{wenn} \quad a_n = 0,$$

und

$$b_n = 1, \quad \text{wenn} \quad a_n = 2.$$

Die so erhaltene Menge ist perfekt und zwischen zweien ihrer Punkte unzusammenhängend. Sie enthält also kein Kontinuum. Nun aber ist ihre Projektion auf die x-Achse eine perfekte, nirgends dichte Menge, während ihre Projektion auf die y-Achse *alle* Punkte der Strecke [0, 1] umfaßt. Man hat hier also eine abgeschlossene punkthafte Menge, deren eine Projektion ein Kontinuum ist.[257a])

Aus dem vorstehenden Beispiel kann man andere, noch merkwürdigere erhalten. Sei E die soeben betrachtete Menge und sei eine abzählbare abgeschlossene Menge von reellen, zwischen 0 und 1 liegenden Zahlen α gegeben. Unterwerfen wir E allen Rotationen vom Winkel $2\pi\alpha$ um den Anfangspunkt. Die Menge der so erhaltenen Mengen ist abgeschlossen und punkthaft. Ihre Projektionen auf Gerade von abzählbar unendlich vielen Richtungen, nämlich denjenigen,

---

1 (1920), p. 61/81, gezeigt hat; siehe auch *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 81/95. Dieser gibt [ib., p. 89/94] eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine punkthafte Menge des R_n zu linearen Mengen homöomorph sei.*

257) *P. Painlevé*[168]), p. 16; etwas abweichend später Paris C. R. 148 (1909), p. 1156/7.

257a) *Andere Beispiele hierfür gaben: *R. Baire* [in *A. Schoenflies,* Math. Ann. 61 (1905), p. 287/8] und *W. H. Young* Math. Ann. 61 (1905), p. 281/6.*

welche mit der y-Achse den Winkel $2\pi\alpha$ bilden, enthalten Intervalle. Alle diejenigen Geraden, welche zu einer der Richtungen, die den Winkel $2\pi\alpha$ mit der x-Achse bilden, parallel sind und vom Anfangspunkt eine kleinere Entfernung als 1 haben, begegnen der Menge.

Bezeichnen wir mit

$$y = f(x)$$

die durch die Menge E definierte Beziehung; dann ist auch die Menge

$$\varrho = f\left(\frac{\Theta}{2\pi}\right),$$

wo ϱ und Θ die Polarkoordinaten eines Punktes sind, perfekt und punkthaft, und jeder Kreis, der den Anfangspunkt zum Mittelpunkt und einen Radius kleiner als 1 hat, begegnet der Menge[258]). Dagegen wird die perfekte, punkthafte Menge

$$\Theta = 2\pi f(\varrho)$$

von allen vom Anfangspunkte aus gezogenen Geraden in wenigstens einem Punkte getroffen[259]).

L. Zoretti[260]) hat, indem er diese Menge noch ein wenig modifiziert und dann unendlich viele[260a]) dazu ähnliche Mengen vereinigt, eine abgeschlossene Menge M erhalten, die von *jeder* Geraden der Ebene getroffen wird. Er gibt an, M sei punkthaft; doch fehlt bei ihm der Nachweis dieser Eigenschaft, die demnach zweifelhaft bleibt. Nun ist etwas später auch von *A. Denjoy*[260b]) ein (sogar noch einfacheres) Beispiel einer abgeschlossenen, sicherlich punkthaften Menge gegeben worden, die von jeder Geraden der Ebene getroffen wird. Wir geben deshalb hier[260c]) ein derartiges Beispiel, das dem *Denjoy*schen Beispiel nachgebildet ist:

Fügt man zur obigen Menge E alle diejenigen horizontalen Strecken δ_n hinzu, deren beide Endpunkte E angehören, so erhält man einen (mit x monoton ansteigenden) *Jordan*schen Kurvenbogen J,

258) Hieraus ersieht man, daß man als Kurve, von welcher im ersten Satze am Anfang dieser Nummer die Rede ist, nicht immer einen Kreis wählen kann; ferner auch, daß dieser Satz, den man für selbstverständlich zu halten versucht sein könnte, erst bewiesen werden muß.

259) Bei der Bildung des *Mittag-Leffler*schen Sternes [siehe II B 1, Nr. 13 (*W. F. Osgood*)] kann also das erhaltene Gebiet beschränkt sein, auch wenn die Funktion nur singuläre *Punkte,* keine singulären Linien besitzt.

260) *L. Zoretti,* Paris C. R. 142 (1906), p. 763; Leçons[161]), p. 23/4.

260a) *Eine Gesamtheit von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.*

260b) *A. Denjoy,* Paris C. R. 149 (1909), p. 726/7. *Ein anderes Beispiel gibt *St. Mazurkiewicz,* Prace matematyczno-fizyczne 27 (1916), p. 11/16 [polnisch].*

260c) *Statt des *Zoretti*schen Beispiels, das in der französischen Ausgabe der Encyklopädie an dieser Stelle reproduziert wird.*

dessen Endpunkte mit O und P bezeichnet seien. Zusammen mit den Intervallen $[y=0;\ 0 \leqq x \leqq 1]$ und $[x=1;\ 0 \leqq y \leqq 1]$ begrenzt J ein dreieckförmiges Gebiet Δ. Daraus kann man folgern, daß E nicht nur von den $[OP]$ schneidenden, zur x-Achse parallelen Geraden getroffen wird, sondern auch von allen denjenigen Geraden g, die $[OP]$ schneiden und mit der positiven x-Achse einen positiven Winkel $< \frac{\pi}{4}$ einschließen.[260d]) P_ν seien die auf der Geraden $\overline{OP}$ gelegenen Punkte mit ganzzahligen Abszissen. Man verschiebe nun E auf alle möglichen Weisen derart, daß Anfangspunkt und Endpunkt in zwei aufeinanderfolgende Punkte P_ν und $P_{\nu+1}$ fallen, und vereinige E und alle diese zu E kongruenten Mengen zu einer Menge E^*. Mit E^* vereinige man diejenigen Mengen, welche aus E^* durch Drehung um die Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ entstehen. Man erhält so eine abgeschlossene, punkthafte Menge E^{**}, die von *jeder* Geraden der Ebene getroffen wird.*

*Nach *E.* [= *St.*] *Mazurkiewicz*[261]) kann man sogar folgendes erreichen: Man kann zu irgend zwei Punkten a und b innerhalb eines Quadrates Q eine durchweg zusammenhanglose [s. Nr. **10**] Menge M angeben, welche die beiden Punkte trennt; d. h. so daß es in Q kein Kontinuum gibt, das a mit b verbindet und M nicht trifft.[262]) Er erzielt dies dadurch, daß er auf der Strecke (ab) eine nirgends dichte, perfekte Menge annimmt, in den Punkten dieser Menge Lote auf (ab) errichtet und diese Geraden eineindeutig den in gleicher Mächtigkeit vorhandenen Kontinuen zuordnet, welche a und b enthalten; sodann zeichnet er einen Schnittpunkt p jedes dieser Kontinuen mit der entsprechenden Geraden aus; die Menge aller Punkte p bildet die gewünschte zusammenhanglose Menge M. Er gibt übrigens ein in jeder Beziehung eindeutiges Konstruktionsverfahren an, welches den Gebrauch des Aus-

---

260d) *Denn: g trifft J, und zwar bilden die Schnittpunkte eine abgeschlossene Menge; durchläuft man g in Richtung der abnehmenden y, so gibt es einen *letzten* Schnittpunkt, nämlich A auf g. A muß zu E gehören; denn andernfalls wäre A innerhalb einer Strecke δ_n gelegen und g müßte (wegen der Annahme über die Neigungswinkel) nach A in Δ eindringen, müßte also Δ wieder verlassen und J noch einmal schneiden.*

261) **E.* [= *St.*] *Mazurkiewicz,* Anz. Ak. Wiss. Krakau 1913 A, p. 49/51 u. 52/55.*

262) *Daß man dies nicht für eine *abgeschlossene* punkthafte Menge M erreichen kann, folgt aus dem in Nr. **13** [bei Anm. [234a])] angegebenen Satz von *E. Phragmén* (oder aus dem in Nr. **17** [bei Anm. [313])] angeführten *L. E. J. Brouwer*schen Satz, der die Übereinstimmung von Dimensionsgrad und Dimensionszahl aussagt).*

wahlaxioms [s. [106])] vermeidet und vor allem eine einzige völlig bestimmte Punktmenge M liefert.

Mit Hilfe dieser zusammenhanglosen Mengen M gelingt es *E. Mazurkiewicz*[263]) weiterhin, zu zeigen, daß jedes Kontinuum[263a]) in 2 (elementenfremde) punkthafte Mengen zerlegt werden kann. Eine andere solche Zerlegung der Ebene und damit irgendeines in ihr enthaltenen Kontinuums in 2 punkthafte Mengen gibt (ebenfalls in völlig eindeutiger Weise) *W. Sierpiński.*[264]) Dieser weist darauf hin, daß die Zerlegung in 3 punkthafte Mengen sehr leicht ist (was für 2 nicht behauptet werden kann).[265]) Man braucht nämlich die Punkte der Ebene nur zu zerlegen in 1. die Menge aller Punkte mit nur rationalen Koordinaten, 2. die Menge aller Punkte mit nur irrationalen Koordinaten, 3. die Menge der Punkte, für welche die eine Koordinate rational, die andere irrational ist. Neuerdings hat *St. Mazurkiewicz*[265a]) noch gezeigt, daß jeder ebene Bereich sogar in zwei punkthafte *Borel*sche Mengen [dritter Ordnung[265b]), vgl. Nr. **54a**] zerlegt werden kann.

Ferner zeigen *E. Mazurkiewicz* u. *W. Sierpiński*[266]) die Existenz einer Menge E, welche sich so in zwei elementenfremde Teilmengen A und B zerlegen läßt, daß die ursprüngliche Menge E mit jeder ihrer beiden Teilmengen A und B kongruent ist.[266a]) Betrachtet man nämlich in der Ebene der komplexen Zahlen die Rotation $R(z) = e^i z$ und die Translation $T(z) = z + 1$; dann soll die Menge E aus allen [abzählbar unendlich vielen] Punkten der Ebene bestehen, die man aus dem Nullpunkt erhalten kann, dadurch daß man diese beiden Operationen endlich oft in beliebiger Ordnung anwendet. Die Teilmenge A seien diejenigen Punkte, welche sich ergeben, wenn die zuletzt an-

263) *Ib.[261]), p. 46/52.*

263a) *In der Ebene oder im n-dimensionalen Raum.*

264) **W. Sierpiński,* Anz. Ak. Wiss. Krakau 1913 A, p. 76/82.*

265) *Ib., p. 82. [Vgl. auch *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 4 (1923), p. 1/2.]*

265a) **St. Mazurkiewicz,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 65/75.*

265b) *Er beweist zugleich, daß eine solche Zerlegung in zwei punkthafte *Borel*sche Mengen zweiter Ordnung nicht möglich ist. Vgl. dazu auch *C. Kuratowski* u. *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 303/13.*

266) **E. Mazurkiewicz* u. *W. Sierpiński,* Paris C. R. 158 (1914), p. 618/9. [Siehe hierzu auch *St. Ruziewicz,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 4/7.]*

266a) **F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 469/72; Math. Ann. 75 (1914), p. 428/433, hat (ungefähr gleichzeitig) in anderer Weise auf der Kugel eine derartige abzählbare Menge E konstruiert und dann [mit Hilfe des Auswahlaxioms [106])] sogar eine solche nicht-abzählbare Menge; letztere entsteht bei ihm so, daß er die Kugeloberfläche (von einer abzählbaren Menge abgesehen) in drei elementenfremde Mengen A, B, C zerlegt, derart, daß A, B, C und $(B + C)$ paarweise kongruent sind. Vgl. Nr. 20, Fußn. [404]).*

gewendete Operation die Rotation $R(z)$ ist; die Teilmenge B seien diejenigen Punkte, die sich ergeben, wenn die zuletzt angewendete Operation die Translation $T(z)$ ist. Dann wird [mit Hilfe der Tatsache, daß e^i nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann[266b])] bewiesen, daß A und B ohne gemeinsame Elemente sind, und es ist deshalb

$$E = A + B; \; R(E) = A; \; T(E) = B.$$

In ähnlicher Weise kann man die Menge E in beliebig endlich viele oder in abzählbar unendlich viele Teilmengen zerlegen, die paarweise ohne gemeinsame Punkte sind und von denen jede mit E zur Deckung gebracht werden kann.*

Die Eigentümlichkeiten der punkthaften Mengen haben Veranlassung gegeben zur Einführung des Begriffes der *Windung* (*sinuosité*) einer punkthaften Menge.

Verbinden wir zwei Punkte a und b der Komplementärmenge einer punkthaften Menge E auf alle Arten, die möglich sind, ohne daß man durch einen Punkt der Menge E hindurchgeht. Sei $1 + \lambda$ die untere Grenze des Verhältnisses der Längen dieser Wege zur Länge ab. Der obere Limes von λ, wenn a und b gegen einen gegebenen Punkt der Menge E konvergieren, ist dann die Windung (sinuosité) von E in diesem Punkte.[267])

*Es sei bemerkt, daß dieser Begriff im wesentlichen auf abgeschlossene punkthafte bzw. auf verstreute Mengen zugeschnitten ist. In der Tat kann bei allgemeineren punkthaften Mengen M (wie die vorhin erwähnten Resultate von *E. Mazurkiewicz* zeigen) die Komplementärmenge K ebenfalls punkthaft sein, so daß es nicht möglich ist, irgend zwei Punkte a und b von K durch einen (noch dazu rektifizierbaren) Weg zu verbinden, ohne die Menge M zu treffen. Jedoch haben, wie *W. Sierpiński*[267a]) neuerdings gezeigt hat, ebene Punktmengen, die zugleich mit ihrer Komplementärmenge punkthaft sind, die bemerkenswerte Eigenschaft, auch lückenlos zusammenhängend zu sein. Er beweist übrigens allgemein, daß die Komplementärmenge einer ebenen (oder überhaupt einer im R_n, für $n > 1$, ge-

---

266b) *Vgl. I C 3, Nr. 7 (*P. Bachmann*).*

267) *A. Denjoy,* Paris C. R. 149 (1909), p. 726, 1048. Siehe auch *L. Zoretti,* Paris C. R. 150 (1910), p. 162, wo andere Arten der Einführung solcher charakteristischer Zahlen für die Punkte einer (nicht einmal mehr notwendig punkthaften) Menge auseinandergesetzt sind. *Übrigens sei darauf hingewiesen, daß dieser Begriff der Windung (sinuosité) aufs engste mit dem *A. Schoenflies*schen Begriff der Wegdistanz bzw. der Unbewalltheit [vgl. Nr. **13**] zusammenhängt.*

267a) **W. Sierpiński,* Fundamenta math. 1 (1920), p. 7/10.*

legenen) punkthaften Menge lückenlos zusammenhängend ist.[267b]) Eine andere Klasse von Mengen, die zugleich punkthaft und lückenlos zusammenhängend sind, haben *B. Knaster* und *C. Kuratowski*[267c]) angegeben[267d]): Sie bezeichnen eine lückenlos zusammenhängende Menge („ens. connexe"), die sich nicht in zwei elementenfremde, lückenlos zusammenhängende Teilmengen zerlegen läßt, als *„biconnexe"* und sie beweisen durch ein merkwürdiges Beispiel[267e]) die Existenz solcher Mengen. Dieses Beispiel hat zugleich die Eigenschaft[267f]), nach Weglassung eines einzigen Punktes keinen lückenlos zusammenhängenden Bestandteil mehr zu enthalten.[267g])*

*Zum Schluß sei hier noch auf einen Satz hingewiesen, der (in etwas speziellerer Form) von *L. Scheeffer*[268]) aufgestellt worden ist:

Sind auf einer Geraden eine beliebige nirgends dichte Punktmenge P und eine beliebige abzählbare Menge A vorgelegt; dann kann man zwischen beliebig gegebenen Grenzen g_1 und g_2 immer Zahlen g so bestimmen, daß die Menge A, wenn sie um die Strecke g verschoben wird, in ihrer neuen Lage keinen einzigen Punkt von P enthält.

Dieser Satz läßt sich mit Leichtigkeit auf beliebig viele Dimensionen übertragen.[268a])*

15. Mengen, die von einem Parameter abhängen. Man hat häufig veränderliche Mengen zu betrachten, die von einem Parameter abhängen. Man kann dann für diese Mengen die *Grenzmenge* definieren. Wir finden hier das Wort „Grenze" in seiner alten, auf die

---

267b) **W. Sierpiński,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 94/5; [vgl. auch *B. Knaster* u. *C. Kuratowski*[136]), p. 236/7]. — Daß die Komplementärmenge einer abgeschlossenen, punkthaften Menge ein einziges Gebiet ist, hat schon früher *E. Phragmén* gezeigt; siehe [234a]).*

267c) **B. Knaster* u. *C. Kuratowski*[136]), insbes. p. 214/16.*

267d) *Noch andere Beispiele punkthafter, lückenlos zusammenhängender Mengen: a. a. O. [267c]), p. 245/53; *L. Vietoris*[136]), p. 202/4; *C. Kuratowski* u. *W. Sierpiński*[265i]), p. 303/6.*

267e) *a. a. O. [267c]), p. 241/5.*

267f) *a. a. O. [267c]), p. 244; siehe dazu auch *J. R. Kline,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 238/9.*

267g) *Hier sei noch darauf hingewiesen, daß *St. Mazurkiewicz,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 96/103, ein sehr eigentümliches Beispiel einer ebenen, lückenlos zusammenhängenden Menge angegeben hat, die keine beschränkte, lückenlos zusammenhängende Teilmenge enthält. [Vgl. auch *B. Knaster* u. *C. Kuratowski*[136]), p. 244/5.]*

268) *Acta math. 5 (1884), p. 291; dort handelt es sich nur um eine *perfekte* nirgends dichte Menge P; doch ist leicht ersichtlich, daß sich der Satz ebenso auch in der obigen allgemeineren Fassung beweisen läßt.*

268a) *Vgl. etwa *Y. Uchida,* Tôhoku Math. J. 15 (1919), p. 284.*

Aufeinanderfolge veränderlicher Elemente bezüglichen Gebrauchsweise, während man sonst in der Mengenlehre die in unendlicher Zahl gegebenen Elemente *gleichzeitig* betrachtet.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Mengen E_n von einem Index n abhängen, der über alle Grenzen wächst, also eine *Mengenfolge* bilden.[268b])

Ein Punkt heiße *Grenzpunkt der* E_n, wenn es in jeder seiner Umgebungen für unendlich viele Werte von n Punkte gibt, die zu E_n gehören. Er heiße *Grenzpunkt für fast alle* E_n, wenn man zu jeder seiner Umgebungen eine Zahl ν derart finden kann, daß für $n \geqq \nu$ *jede* Menge E_n in diese Umgebung eindringt.[269])

Die Menge der Grenzpunkte der E_n wird kurz *Grenzmenge* der E_n genannt. Diese Menge enthält stets mindestens einen Punkt, *wenn die E_n gleichmäßig beschränkt sind*, und ist dann abgeschlossen. *Dagegen brauchen Grenzpunkte für fast alle E_n (auch bei gleichmäßig beschränkten E_n) nicht immer zu existieren; wenn aber solche Punkte existieren, dann ist ihre Menge ebenfalls abgeschlossen.*

*Im Zusammenhang damit stehen die folgenden Begriffe, die auf *E. Borel*[270]) zurückgehen: Als *„vollständige Grenzmenge"* (*„ensemble limite complet"*) der Mengen E_n bezeichnet er die Menge der Elemente, die unendlich vielen E_n angehören; als *„engere Grenzmenge"* (*„e. l. restreint"*) die Menge der Elemente, die fast allen E_n (d. h. allen bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen) angehören. Die vollständige Grenzmenge einer Mengenfolge und die engere Grenzmenge der Folge der Komplementärmengen sind zueinander komplementär.

F. Hausdorff hat für vorstehende Begriffe abweichende zweckmäßige Bezeichnungen eingeführt und auch einige weitere hierhergehörige Begriffsbildungen angegeben. Er bezeichnet zunächst[271]) (nach dem Vorbild

---

268b) *Allgemeinere Betrachtungen bei *L. Vietoris*[136]), p. 184/194.*

269) Dieser Begriff des Grenzpunktes einer Mengenfolge ist von *P. Painlevé* eingeführt worden; siehe *L. Zoretti*, J. de math. (6) 1 (1905), p. 8; Bull. Soc. math. France 37 (1909), p. 116/9. — **L. Zorettis* Bezeichnung *„p. limite pour tous les E_n"* ist im Text mit „Grenzpunkt für *fast alle* E_n" wiedergegeben, dem Wortgebrauch von *G. Kowalewski* folgend [zuerst in: Einführung in die Infinitesimalrechnung, Leipzig 1908, p. 14]: *fast alle* = alle bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen.*

*Eine von der vorigen abweichende Bezeichnung findet sich bei *S. Janiszewski*, Thèse[180]), p. 93/4: *ensemble d'accumulation* = Menge der Grenzpunkte der E_n (Grenzmenge); *ensemble limite* = Menge der Grenzpunkte fast aller E_n.*

270) **E. Borel*, Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris 1905, p. 18.*

271) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 21.*

der Analysis[271a]) die „vollständige Grenzmenge“ der E_n als den *oberen Limes* (limes superior) der Mengenfolge; ferner die „engere Grenzmenge“ der E_n als den *unteren Limes* (limes inferior) der Mengenfolge; sind beide gleich, so bezeichnet er sie kurz als den *Limes* der Mengenfolge, und er nennt in diesem Falle die Mengenfolge *konvergent*[271b]); er schreibt: $\operatorname*{Lim}_n \sup E_n$, $\operatorname*{Lim}_n \inf E_n$ bzw. $\operatorname*{Lim}_n E_n$. Sodann bezeichnet er[272]), was oben Menge der Grenzpunkte der E_n (Grenzmenge) bzw. Menge der Grenzpunkte für fast alle E_n genannt wurde, als *oberen abgeschlossenen Limes* bzw. als *unteren abgeschlossenen Limes* von E_n und im Falle der Gleichheit beider kurz als *abgeschlossenen Limes*; er schreibt dies: $\overline{\mathrm{Lim}} \sup E_n$ bzw. $\overline{\mathrm{Lim}} \inf E_n$ bzw. $\overline{\mathrm{Lim}}\, E_n$.[272a]) Außerdem bildet er noch folgende neuen Begriffe[272]): die Menge der Punkte, deren Umgebung unendlich vielen E_n angehört, nennt er das *obere Limesgebiet* der Mengenfolge; die Menge der Punkte, deren Umgebung fast allen E_n angehört, bezeichnet er als das *untere Limesgebiet* der E_n; sind beide einander gleich, so bezeichnet er sie einfach als *Limesgebiet* der Mengenfolge[273]); mit Rücksicht auf Nr. 8 [insbes. bei [85d])] hätten wir dafür konsequent zu sagen: „*oberen* bzw. *unteren offenen Limes*“ bzw. „*offenen Limes*“ schlechthin; *F. Hausdorff* schreibt hierfür: $\underline{\mathrm{Lim}} \sup E_n$ bzw. $\underline{\mathrm{Lim}} \inf E_n$ bzw. $\underline{\mathrm{Lim}}\, E_n$. Alle diese Begriffe lassen sich mit Hilfe von Summe und Durchschnitt [siehe Anm. [35])] in Formeln ausdrücken.[273a])*

271a) *Vgl. I A 3, Nr. 15 (*A. Pringsheim*).*

271b) *Z. B.: Eine aufsteigende bzw. absteigende Folge ineinander geschachtelter Mengen konvergiert und zwar gegen die Vereinigungsmenge bzw. gegen den Durchschnitt der Folge.*

272) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 236.*

272a) *Sehr ausdrucksvoll sind die Bezeichnungen, die neuerdings *H. Hahn*, Reelle Funktionen I, p. 4 u. 74, hierfür verwendet: Er bezeichnet einen „Grenzpunkt der E_n“ bzw. „für fast alle E_n“ als *„äußeren bzw. inneren Näherungspunkt“* der Folge E_n; die Menge der ersteren bezeichnet er als *„obere Näherungsgrenze“*, die der letzteren als *„untere Näherungsgrenze“* der E_n; wenn beide zusammenfallen, spricht er kurz von der *„Näherungsgrenze“* der E_n. Dagegen bezeichnet er den „oberen bzw. unteren Limes“ als *„obere* bzw. *untere Gemeinschaftsgrenze“*.*

273) *Siehe Anm. [146]) [soweit sie sich auf *F. Hausdorff* bezieht]. — Ein Ansatz zu dem Begriff des „Limesgebietes“ findet sich bei *C. Carathéodory*, Math. Ann. 72 (1912), p. 124/5.*

273a) *Z. B.:

$$\operatorname*{Lim}_n \sup E_n = [(E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_n + \cdots)\cdot(E_2 + E_3 + \cdots + E_n + \cdots) \cdot (E_3 + \cdots + E_n + \cdots) \cdots\cdot];$$

$$\operatorname*{Lim}_n \inf E_n = [(E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdots E_n \cdots) + (E_2 \cdot E_3 \cdots E_n \cdots) + (E_3 \cdots E_n \cdots) + \cdots\cdot].*$$

Es ist von Interesse, zu fragen, in welchem Falle ein veränderliches Kontinuum wieder ein Kontinuum als Grenzmenge hat.

P. Painlevé gibt den folgenden Satz:

Wenn jedes der beschränkten Kontinuen E_n alle folgenden enthält, so ist die Grenzmenge[273b]) ein Kontinuum (oder reduziert sich auf einen Punkt).[273c])

L. Zoretti[274]) verallgemeinert den Satz so: Hat man eine *gleichmäßig beschränkte[274a])* Folge von Kontinuen[274b]) E_n und existiert mindestens ein Punkt a, der Grenzpunkt für fast alle Kontinua E_n ist, so ist die Grenzmenge ein Kontinuum (oder reduziert sich auf einen Punkt).

Man kann weiter fragen, ob es in dem Falle, wo Kontinua E_n zur Grenzmenge ein Kontinuum E haben, notwendig Punkte von E gibt, die Grenzpunkte für fast alle E_n sind, oder auch ob man unter den E_n solche Mengen G_p auswählen kann, daß die neue Grenzmenge ebenfalls noch ein Kontinuum ist und Grenzpunkte fast aller G_p enthält. Einfache Beispiele zeigen, daß dafür Bedingungen notwendig sind.

E. Zoretti[275]) hat hierüber den folgenden Satz bewiesen:

Haben die *gleichmäßig beschränkten* Kontinua E_n ein Kontinuum E zur Grenzmenge und existiert ein Punkt a, der Grenzpunkt fast aller E_n ist, so kann man unter den E_n unendlich viele Mengen G_p auswählen, derart, daß deren Grenzmenge G ein Kontinuum ist, und daß jeder Punkt von G Grenzpunkt fast aller G_p ist.

Alle diese Resultate finden vielfache Anwendungen in der Funktionenlehre.

Korrespondenzen zwischen Bereichen von m und n Dimensionen.

16. Die Mächtigkeit des n-dimensionalen Kontinuums. Peano-Kurven. Schon weiter oben [Nr. 7] ist auf den allgemeinen Satz von *G. Cantor*[276]) über die Mächtigkeit des n-dimensionalen Kontinuums hingewiesen worden. Diesen Satz hat *G. Cantor* in den beiden folgenden Formen angegeben.

I. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n Veränderliche, von denen jede alle reellen

273b) *Hier = Limes.*

273c) *Vgl. dazu [34]).*

274) *L. Zoretti*[269]), erstes Zitat.*

274a) *Ohne diesen Zusatz „gleichmäßig beschränkt" wäre der Satz nicht richtig; vgl. *F. Hausdorff*[274b]).*

274b) *Allgemeiner: zusammenhängende Mengen; siehe *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 301/2.*

275) *L. Zoretti*[269]), zweites Zitat.*

276) *G. Cantor,* J. f. Math. 84 (1878), p. 242ff.; Acta math. 2 (1883), p. 311ff.

Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, und sei t eine andere Veränderliche, die derselben Werte fähig ist, dann kann man alle Werte von t allen Wertesystemen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eineindeutig zuordnen.

II. Ein n-dimensionales Kontinuum läßt sich einem linearen Kontinuum oder auch einem Kontinuum von m Dimensionen $(m \gtreqless n)$ eineindeutig zuordnen.

Der Beweis (z. B. im Falle $n = 2$) beruht auf der Darstellung jeder reellen Zahl zwischen 0 und 1 durch einen Kettenbruch [I A 3, Nr. 9, 45 und 47 (*A. Pringsheim*)]

$$x = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots + \frac{1|}{|a_n} + \cdots,$$

wo die $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ganze positive Zahlen sind.[277] *Dieser Kettenbruch ist endlich oder unendlich, je nachdem x eine rationale oder eine irrationale Zahl ist.*

Dieser Zahl x kann man beispielsweise das System der Zahlen

$$X = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_3} + \cdots + \frac{1|}{|a_{2n+1}} + \cdots$$

$$Y = \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_4} + \cdots + \frac{1|}{|a_{2n}} + \cdots$$

entsprechen lassen, und man sieht, daß jeder Zahl x zwischen 0 und 1 ein System von Zahlen X, Y zwischen 0 und 1 entspricht.

*Es gilt auch das Umgekehrte, wenn man nur irrationale Koordinaten x bzw. X, Y ins Auge faßt (wo also alle Kettenbrüche unendlich sind). Man erhält demnach für diese irrationalen Punkte x und X, Y eine umkehrbar eindeutige Abbildung aufeinander. Diese Abbildung muß man nun durch Hinzunahme der rationalen Werte in geeigneter Weise zu einer Abbildung *aller* reellen Werte erweitern; dies ist möglich, da man die irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1 auf alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 eineindeutig beziehen kann. Auf diese Weise erhält man die gesuchte Zuordnung.[278][279]*

277) *Man kann statt von der Kettenbruchentwicklung auch von der Dezimalbruchdarstellung ausgehen; hierbei ist es zweckmäßig, von einem Kunstgriff von *J. König* Gebrauch zu machen, um eine eineindeutige Abbildung zu erhalten; siehe hierüber *F. Klein,* Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I, 1. Aufl. Leipzig 1908, p. 559/65; 2. Aufl. Leipzig 1911, p. 561/7.*

278) *Wenn man die Dezimalbruchdarstellung [mit dem in [277] zitierten Kunstgriff von *J. König*] verwendet, so erhält man ganz direkt und also einfacher die umkehrbar eindeutige Abbildung aller Zahlen x auf alle Zahlenpaare X, Y.*

279) *Die gleiche Methode läßt sich nicht nur auf beliebige endliche Dimensionen übertragen, sondern *G. Cantor* [J. f. Math. 84 (1878), p. 256; Acta math. 2 (1883), p. 326] hat mit dieser Methode sogar nachgewiesen, daß ein *Kontinuum*

Hat man eine solche Zuordnung aufgestellt, so kann man sagen, daß X und Y Funktionen von x sind; diese Funktionen sind aber *unstetig.*[280])

G. Peano[281]) hat das erste Beispiel einer *stetigen* Abbildung der Strecke auf das Quadrat gegeben: er hat zwei *stetige* Funktionen der Veränderlichen x

$$X(x), \quad Y(x)$$

bilden können, die, wenn x alle Werte von 0 bis 1 durchläuft, alle Wertesysteme annehmen, bei denen die beiden Variabeln zwischen 0 und 1 liegen (inklusive 0 und 1 selbst). Der Punkt X, Y beschreibt also eine *stetige* Kurve [Nr. **12**] und diese Kurve geht durch alle Punkte eines Quadrates von der Seite 1.

Man bezeichnet solche Kurven mit dem Namen *Peano-Kurven.*

Das Beispiel von *G. Peano* ist folgendes: Sei die Zahl x im System von der Basis 3 geschrieben:

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

Nennen wir die Ziffer $(2 - a)$ das *Komplement* der Ziffer a, und be-

---

von abzählbar unendlichvielen Dimensionen [vgl. Nr. **26a**] sich ebenfalls auf das Linearkontinuum umkehrbar eindeutig abbilden läßt, so daß also beide die gleiche Mächtigkeit besitzen.

Ferner hat *F. Bernstein* [Dissertation[99]), p. 44; Math. Ann. 61 (1905), p. 146] gezeigt, daß nicht nur die Menge der *Punkte* des n-dimensionalen Raumes, sondern auch die *Menge der abzählbaren Mengen, die Menge der abgeschlossenen Mengen, die Menge der perfekten Mengen* des n-dimensionalen Raumes die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Linearkontinuums besitzen. [Vgl. auch: *B. Levi,* Rendic. Istit. Lomb. (2) 35 (1902), p. 864/8; *F. Bernstein,* Gött. Nachr. 1904, p. 559.]

Ebenso ergibt sich leicht, daß die Mächtigkeit der Menge aller *Borel*schen Mengen sowie auch die der Menge aller Mengen (A) [Nr. **9b**] gleich $\mathfrak{c}$ ist.*

280) *Wird ein beliebiger Bereich B der Ebene auf eine Strecke J umkehrbar eindeutig abgebildet, wobei diese Abbildung durch die Funktion $X = f(x)$, $Y = g(x)$ dargestellt wird, dann kann man einen Punkt x (von J), für welchen $f(x)$ und $g(x)$ *beide* stetig sind, einen Stetigkeitspunkt der Abbildung nennen, und einen Punkt x, für welchen mindestens eine der beiden Funktionen unstetig ist, als Unstetigkeitspunkt bezeichnen. *S. Kakeya* [Tôhoku Math. Journ. 5 (1914), p. 185/8] hat hierüber den folgenden Satz bewiesen: In jeder umkehrbar eindeutigen Abbildung einer Strecke J auf einen Bereich B muß die Menge der Stetigkeitspunkte in J eine innere Grenzmenge sein und die Menge der Unstetigkeitspunkte in J einen in sich dichten Bestandteil enthalten.

H. Hahn [Ann. di mat. (3) 21 (1913), p. 33/42] hat durch ein Beispiel gezeigt, daß man die umkehrbar eindeutige Abbildung eines Quadrates auf die Strecke J so ausführen kann, daß dabei die *eine* der beiden Abbildungsfunktionen $X = f(x)$, $Y = g(x)$ auf der ganzen Strecke J *stetig* ist.*

281) *G. Peano,* Math. Ann. 36 (1890), p. 157/60. [Ein ähnliches Beispiel, das sich ebenfalls auf mehr als 2 Dimensionen ausdehnen läßt, hat später *A. Schoenflies,* Nachr. Ges. Gött. 1896, p. 255/66, gegeben.]

zeichnen wir sie mit k_a, so daß

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 0$$

ist. Sei k_a^n das Resultat der n-mal an a wiederholten Operation k. Man hat dann:
$$k_a^{2n} = a; \quad k_a^{2n+1} = k_a.$$

Lassen wir der Zahl x das System der beiden Zahlen:

$$X = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots,$$
$$Y = 0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots,$$

entsprechen, indem wir setzen:

$$\begin{array}{ll} b_1 = a_1, & c_1 = k_{a_2}^{a_1}, \\ b_2 = k_{a_3}^{a_2}, & c_2 = k_{a_4}^{a_1+a_3}, \\ \vdots & \vdots \\ b_n = k_{a_{2n-1}}^{a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}}, & c_n = k_{a_{2n}}^{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}; \end{array}$$

mit anderen Worten, die n^{te} Ziffer von X soll a_{2n-1} oder sein Komplement sein, je nachdem die Summe, die aus den vorhergehenden Ziffern von gerader Ordnung in x gebildet wird, gerade oder ungerade ist; entsprechend ist die Regel für Y.

Jedem Wert von x entspricht dann ein System X, Y, und diese Zuordnung ist stetig. Denn: Wenn zwei Werte von x benachbart sind, so haben sie (*im allgemeinen*) eine große Anzahl von Ziffern gemeinsam; die entsprechenden Zahlenwerte X, Y haben demnach auch viele Ziffern gemeinsam. *Außerdem gilt (was für die Stetigkeit der *Peano*schen Abbildung entscheidend ist) der folgende Umstand[282]): Wenn x und x' zwei triadische Brüche von gleichem Werte, aber verschiedener Form sind[283]), und wenn X, Y bzw. X', Y' dem x bzw. x' entsprechen, so hat man

$$\text{Wert von } X = \text{Wert von } X', \quad \text{Wert von } Y = \text{Wert von } Y'.^*$$

Man muß hier sogleich bemerken, daß zwar jedem Wert von x genau ein Wertesystem X, Y entspricht, daß aber umgekehrt einem System von Werten von X und Y zwei oder vier Werte von x entsprechen können; die Zuordnung ist also *nicht umkehrbar* eindeutig.

Ein anderes Beispiel hat in geometrisch-anschaulicher Form *D. Hilbert*[284]) gegeben. Es besteht in folgendem: Man teile die Strecke [0, 1] in 4, 16, 64, ..., 4^n gleiche Teile und ebenso das Quadrat von der

---

282) *G. Peano,* a. a. O.[281]), p. 158.*

283) *Z. B.:
$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n 2\,2\,2 \ldots$$
$$x' = 0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n' 0\,0\,0 \ldots,$$
wobei $a_n = 0$ oder 1, $a_n' = a_n + 1$ ist.*

284) *D. Hilbert,* Math. Ann. 38 (1891), p. 459.

Seite *eins* in dieselbe Zahl gleich großer Quadrate; hierauf setze man unter diesen 4^n Quadraten eine geeignete Ordnung, eine Numerierung fest, die jedes von ihnen einer der Strecken entsprechen läßt. Ein beliebiger Punkt der Strecke (0, 1) ist dann in jedem Stadium der Teilung (*wenn nicht selbst ein Teilpunkt*) ein innerer Punkt einer der Strecken; ihm entspricht also jedesmal ein Quadrat; man beweist, daß diese Quadrate ineinander eingeschachtelt sind und gegen einen Punkt konvergieren. *In ähnlicher Weise ist auch einem Teilpunkt der Strecke ein Eckpunkt der Quadratteilung zugeordnet.* Jedem Punkt x der Strecke entspricht demnach genau ein Punkt X, Y des Quadrates und die Zuordnung ist stetig.

Auch hier entspricht einem Punkte des Quadrates nicht immer nur *ein* Wert von x. *Wenn wir von den Punkten der Begrenzung des Ausgangsquadrates (welche einfache oder zweifache Punkte sind) absehen und nur die inneren Punkte des Ausgangsquadrates betrachten, so ergibt sich*: liegt der Punkt auf einer Seite eines der Teilquadrate, so entsprechen ihm zwei; ist er Eckpunkt eines der Teilquadrate, so entsprechen ihm *zwei, drei oder* vier Werte x.[285] Die Menge der Punkte des Quadrates, denen mehr als ein Punkt entspricht, ist [*wie auch bei *G. Peano**] im Quadrate *überall dicht.*

Seither sind noch andere Beispiele von *Peano*-Kurven gegeben worden.[286]

**H. Hahn*[287]) hat bewiesen, daß *jede* eindeutige und stetige Ab-

285) *Die Vielfachheit der Punkte bei dem *Hilbert*schen Beispiel wird häufig unrichtig angegeben. Eine richtige Darstellung findet sich z. B. bei *J. Pierpont,* Lectures on the theory of functions of real variables, Bd. 2 (Boston 1912), p. 590/2.*

286) **A. Schoenflies* [Bericht I 1900, p. 121/3] hat eine einfache (der *Hilbert*schen Betrachtungsweise entsprechende) geometrische Interpretation des *Peano*schen Beispiels und zugleich eine Verallgemeinerung desselben gegeben. Ebenso *E. H. Moore,* Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 72. Vgl. auch *A. Heß,* Stetige Abbildung einer Linie auf ein Quadrat, Dissert. Univ. Zürich 1905. Andere Beispiele gaben: *W. Sierpiński,* Anz. Ak. Wiss. Krakau 1912 A, p. 462/78; Prace matematyczno-fizyczne 23 (1912), p. 193/219 [letzteres polnisch]; *G. Pólya*, Anz. Ak. Wiss. Krakau 1913 A, p. 305/13;* sowie insbesondere *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration[89]), p. 44; letzterer hat sein Beispiel sogar auf den Fall von abzählbar unendlich vielen Dimensionen übertragen [J. de math. (6) 1 (1905), p. 210]. *Ferner *H. Hahn*[280]), p. 50/55 und *K. Knopp,* Archiv Math. Phys. (3) 26 (1917), p. 110.*

287) **H. Hahn*[280]), p. 42/50. Die auf die dreifachen Punkte sich beziehende Behauptung ist schon früher von *H. Lebesgue*, Math. Ann. 70 (1911), p. 168, (ohne Beweis) ausgesprochen und neuerdings, Fundamenta math. 2 (1921), p. 256/85, insbes. p. 277/85, von ihm bewiesen worden; und zwar gleich für n Dimensionen, wo mindestens $(n+1)$-fache Punkte auftreten. [Dazu (für $n = 2$) auch *St. Mazurkiewicz,* Prace matematyczno-fizyczne 26 (1915), p. 113/20 (polnisch).]*

bildung der Strecke auf das Quadrat folgende Eigenschaften besitzt: Es gibt immer im Quadrat ein Teilkontinuum, durch dessen sämtliche Punkte die Peano-Kurve mindestens zweimal hindurchgeht. Ferner gibt es immer eine im Quadrat überall dichte Menge von Punkten, die sämtlich mindestens dreifache Punkte sind; ihre entsprechenden Punkte liegen auf der Strecke ebenfalls überall dicht. Außerdem haben *H. Hahn*[288]) sowie *G. Pólya*[286]) Beispiele von Peano-Kurven angegeben, welche nur höchstens dreifache Punkte besitzen.*

A. Schoenflies hat die Frage aufgeworfen, ob oder unter welchen Bedingungen ein beliebiger Bereich der Ebene durch eine *Peano*-Kurve bedeckt werden kann, d. h. eindeutiges und stetiges Abbild der Strecke sein kann.

*Zugleich hat er die folgende, noch viel allgemeinere Frage gestellt und beantwortet: Welches sind überhaupt die Gebilde der Ebene, die als eindeutiges und stetiges Abbild der Strecke, d. h. als stetige Kurve aufgefaßt werden können? Damit kommen wir also zu der schon in Nr. 12 aufgeworfenen Frage zurück nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Kontinuum eine stetige Kurve darstelle. *A. Schoenflies* ist hierbei zu dem folgenden wichtigen und die Frage entscheidenden Resultate gelangt[289]):

Es sei zunächst bemerkt, daß die Komplementärmenge eines Kontinuums C sich aus endlich oder abzählbar unendlich vielen (einfach zusammenhängenden) Gebieten G_i zusammensetzt, deren Begrenzung ganz aus Punkten von C gebildet wird.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein ebenes[289a]), *beschränktes Kontinuum C als eindeutiges und stetiges Bild einer Strecke darstellbar ist, besteht nun darin, daß 1. für jedes Komplementärgebiet G_i von C seine Begrenzung allseitig erreichbar ist, und daß 2. Komplementärgebiete von C, deren Durchmesser eine beliebig vorgegebene, positive Größe übersteigen, nur in endlicher Anzahl auftreten.*[290])

288) **H. Hahn*[280]), p. 50/1; dies ist eine einfache Modifikation der geometrischen Fassung[286]) des *Peano*schen Beispiels. — Auf die Existenz derartiger *Peano*-Kurven hat bereits *D. Hilbert*[284]) hingewiesen. — Siehe auch *H. Lebesgue*[287]), erstes Zitat und zweites Zitat, p. 281/3.*

289) **A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 212/37, insbesondere p. 237; zum Teil auch schon Gött. Nachr. 1907, p. 28/47.*

289a) *Wegen der im 3-dimensionalen Raum vorliegenden Möglichkeiten siehe *R. L. Moore*, Proc. National Acad. America 8 (1922), p. 33/8.*

290) *Da im Falle unendlich vieler Komplementärgebiete das Grenzgebilde dieser Gebiete keiner weiteren Bedingung unterliegt, so ergibt sich (wie bei *A. Schoenflies* angedeutet ist) die eigenartige Folgerung, daß eine linienhafte Menge, die eindeutiges und stetiges Abbild der Strecke ist, Bestandteile ent-

Man kann hieraus für die speziellere Frage, wann ein einfach zusammenhängender Bereich B[290a]) von einer *Peano*kurve bedeckt werden kann, eine hinreichende, aber keineswegs notwendige [vgl. [290])] Bedingung in folgender einfacher Form erhalten:

Ein einfach zusammenhängender, beschränkter, ebener Bereich B ist sicherlich dann ein stetiges und eindeutiges Abbild einer Strecke, wenn seine Begrenzung für B allseitig erreichbar ist.[291])

H. Hahn und etwa gleichzeitig auch *St. Mazurkiewicz* haben auf die obige allgemeine Frage eine andere, einfachere Form der Antwort gegeben, die zugleich für den n-dimensionalen Raum R_n gilt[292]):

Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine Punktmenge ein stetiges und eindeutiges Abbild der (abgeschlossenen) Strecke sein kann, besteht darin, daß sie ein beschränktes Kontinuum sei, das „zusammenhängend im kleinen" ist.

H. Hahn nennt dabei eine Menge M *„zusammenhängend im kleinen"*,

---

halten kann, die für sich diese Eigenschaft nicht besitzen. Siehe [289]), erstes Zitat, p. 232.

Man kann sogar Beispiele eines beschränkten, einfach zusammenhängenden[290a]) Bereichs angeben, der eindeutiges und stetiges Abbild der Strecke ist, also eine stetige Kurve darstellt, während seine Begrenzung *nicht* als stetige Kurve aufgefaßt werden kann. Siehe: *A. Rosenthal,* Math. Ztschr. 10 (1921), p. 102/4. Übrigens ist aus den im obigen Text angegebenen Bedingungen unmittelbar ersichtlich, daß umgekehrt, wenn die Begrenzung eines beschränkten, einfach zusammenhängenden Bereiches B sich als stetige Kurve auffassen läßt, immer auch der Bereich B sich als stetige Kurve darstellen läßt.*

290a) *Ein Bereich B heißt einfach zusammenhängend, wenn das Gebiet seiner inneren Punkte einfach zusammenhängend ist.*

291) *Denn: Nach *A. Schoenflies* [Nr. 13, bei Anm. [280])] ist die Begrenzung $\mathfrak{C}$ eines einfach zusammenhängenden Bereiches B dann und nur dann eine stetige Kurve, wenn $\mathfrak{C}$ für B allseitig erreichbar ist. Andererseits ist nach dem *Schoenflies*schen allgemeinen Satz des Textes dies dann und nur dann der Fall, wenn die in diesem Satz des Textes angegebenen Bedingungen für $\mathfrak{C}$ erfüllt sind. Daraus folgt:

Ist die Begrenzung $\mathfrak{C}$ eines einfach zusammenhängenden Bereiches B für B allseitig erreichbar, so ist jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ für jedes Komplementärgebiet, zu dessen Begrenzung er gehört, allseitig erreichbar, und Komplementärgebiete, deren Durchmesser eine vorgegebene Größe überschreiten, treten nur in endlicher Anzahl auf.*

292) **H. Hahn,* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 318/22; Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien 123 IIa (1914), p. 2433/89; (in dieser zweiten Abhandlung beweist er seinen Satz auch noch für Mengen einer normalen Klasse (V) [vgl. Nr. 26]); *St. Mazurkiewicz,* C. R. Soc. sc. Varsovie, classe III, 6 (1913), p. 305/11; 9 (1916), p. 429/42 [polnisch]; Fundamenta math. 1 (1920), p. 166/209 [französisch]. —

H. Hahn, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 66/73, hat noch direkt die Äquivalenz der *Schoenflies*schen Bedingung mit der seinigen (in der Ebene) nachgewiesen.*

wenn sie in jedem ihrer Punkte p „zusammenhängend im kleinen" ist, d. h. die folgende Eigenschaft besitzt: Sei p ein Punkt der Menge M; zu jeder positiven Zahl ε soll dann eine positive Zahl η gehören, derart daß es zu jedem in der Umgebung[293]) η von p liegenden Punkt p' von M ein die beiden Punkte p und p' enthaltendes Teilkontinuum von M gibt, das ganz in der Umgebung ε von p gelegen ist.[293a])*

Neuerdings hat *W. Sierpiński*[293b]) noch eine andere, sehr einfache, notwendige und hinreichende Bedingung dafür gegeben, daß ein [im R_n gelegenes] Kontinuum C sich als stetige Kurve auffassen läßt: Wenn ein beliebiges positives ε gegeben ist, so soll sich C als Vereinigungsmenge von *endlich* vielen Kontinuen, deren Durchmesser kleiner als ε sind, darstellen lassen.*

17. Die Invarianz der Dimensionszahl bei umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen. Betrachten wir einerseits die *umkehrbar* eindeutigen und stetigen Transformationen: sie bilden eine Gruppe G. Andererseits bilden die *einseitig* eindeutigen und stetigen Transformationen auch eine Gruppe, Γ, von der die erste eine Untergruppe ist. *A. Schoenflies*[294]) nennt die erste *die engere Gruppe*, die zweite *die weitere Gruppe.*

Nun hat *C. Jordan*[295]) den Satz bewiesen: Wenn eine umkehrbar eindeutige Transformation, *die auf eine abgeschlossene und beschränkte Menge ausgeübt wird,* stetig ist, so ist die inverse Transformation ebenfalls stetig.[296])[296a]) Man darf daher, *wenn es sich nur um abgeschlossene,

293) *Unter der „*Umgebung η von p*" wird hier das Innere eines mit dem Radius η um p beschriebenen Kreises (bzw. Kugel) verstanden.*

293a) **St. Mazurkiewicz*[292]) unterscheidet die Punkte p eines Kontinuums C als Punkte von 1. oder 2. „*genre*", je nachdem C in p „zusammenhängend im kleinen" ist oder nicht. —

H. Tietze, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 288/9 [vgl. auch Math. Ann. 88 (1923), p. 297] und *C. Kuratowski,* Fundamenta math. 1 (1920), p. 40/3, haben diese Definition des „Zusammenhangs im kleinen" in eine rein topologische (nichts Metrisches mehr enthaltende) Form gebracht und damit ergibt sich zugleich eine neue Formulierung für die obige notwendige und hinreichende Bedingung. Vgl. dazu auch *H. Hahn,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 189/92.*

293b) **W. Sierpiński,* Fundamenta math. 1 (1920), p. 44/60. [Siehe dazu auch *R. L. Moore,* ib. 3 (1922), p. 232/7].*

294) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 149/50.*

295) **C. Jordan,* Cours d'analyse[12]) 1, p. 53.*

296) **A. Capelli* [Rendic. Accad. Napoli (3) 11 (1905), p. 427/34 u. 470/6; ferner Istutizioni di Analisi algebrica, 4. ediz., Napoli 1909, p. 525/8] hat die Umkehrung einer stetigen Abbildung auch noch in dem allgemeineren Fall untersucht, wo die Abbildung mehrdeutig ist.*

296a) *In Beantwortung einer von *W. Sierpiński* [Fundamenta math. 1 (1920), p. 223] gestellten Frage hat *C. Kuratowski* [ib. 2 (1921), p. 158/60] durch sehr

beschränkte Mengen handelt,* für die engere Gruppe nach Belieben annehmen, daß das Wort „umkehrbar" sich auf die beiden Worte „eindeutig" und „stetig" bezieht, oder auf das erste allein. *Um Zweideutigkeiten auszuschließen, wollen wir jedoch daran festhalten, daß „umkehrbar" sich immer nur auf das nächststehende Wort beziehen soll.*

*Es ist von besonderer Wichtigkeit, zu untersuchen, welche der grundlegenden Begriffe oder Eigenschaften invariant bleiben gegenüber den umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen.[297]) Dabei soll sich die Transformation im allgemeinen nicht auf den ganzen Raum [vgl. [299])], sondern nur auf die betrachtete Punktmenge beziehen. Man sagt dann, eine Menge M sei in eine Menge M_1 umkehrbar eindeutig und stetig transformiert, wenn die Punkte umkehrbar eindeutig einander zugeordnet sind und jedem in M enthaltenen Häufungspunkt ein in M_1 enthaltener Häufungspunkt entspricht.

Die einfachste und fast selbstverständliche Invariante der engeren wie der weiteren Gruppe [sofern bei letzterer die Umkehrung der Transformation nur endlich-vieldeutig ist[297a])] ist der *Häufungspunkt*; daraus folgt: Invarianten für beide Gruppen sind die Begriffe *abgeschlossen* [dieser, sofern es sich um beschränkte Mengen handelt], ferner *„lückenlos zusammenhängend"*[297b]); daher [wenn es sich nur um beschränkte Mengen handelt[298])] auch *Kontinuum* [wobei jedoch zu berücksichtigen ist, daß bei Transformationen der weiteren Gruppe, deren Umkehrung unendlich-vieldeutig ist, einem Kontinuum auch ein einzelner Punkt entsprechen kann].

„Zusammenhängend" (im gewöhnlichen Sinn) ist im allgemeinen

einfache Beispiele gezeigt: Wenn eine Punktmenge P umkehrbar-eindeutiges und stetiges (aber nicht beiderseits stetiges) Abbild der Menge Q ist und wenn Q umkehrbar-eindeutiges und stetiges Abbild von P ist, dann braucht noch keine umkehrbar-eindeutige und beiderseits stetige Abbildung zwischen P und Q zu existieren. Ein solches Beispiel linearer Mengen ist: P besteht aus den Punkten von der Form $3n+2$ und aus den offenen Intervallen $(3n, 3n+1)$ für jedes ganzzahlige $n \geq 0$; Q entsteht aus P, indem man den Punkt 2 durch den Punkt 1 ersetzt.*

297) *Die *Analysis situs*, der allgemeinste Zweig der Geometrie, ist nichts anderes als die Untersuchung derjenigen geometrischen Eigenschaften, welche gegenüber umkehrbar eindeutigen und beiderseits stetigen Transformationen ungeändert bleiben. Siehe hierüber Nr. **24**.*

297a) *Ist die Umkehrung der Abbildung unendlich-vieldeutig, so kann z. B. einer Punktfolge mit Häufungspunkt ein einzelner Punkt entsprechen.*

297b) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 361 u. 363.*

298) *Vgl. *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 458; das dort angegebene Beispiel zeigt, daß das (nicht beschränkte) Kontinuum keine Invariante der weiteren Gruppe ist; man kann leicht auch Beispiele angeben, die zeigen, daß es auch für die engere Gruppe keine Invariante ist.*

keine Invariante weder für G noch für Γ, sondern nur in den eben erwähnten speziellen Fällen (lückenlos zusammenhängend, beschränktes Kontinuum) [oder auch z. B. im Fall einer in einem Kontinuum C überall dichten Teilmenge, wenn die stetige Abbildung sich auf ganz C bezieht].

Wenn es sich um beschränkte Mengen handelt, ist „*perfekt*" für die engere Gruppe invariant, für die weitere Gruppe im allgemeinen nur dann, wenn die Umkehrung der Abbildung nur *endlich*-vieldeutig ist.[299])*

Die durch die *Peano*kurven klargestellte Tatsache kann man so aussprechen, daß man sagt: die *Zahl der Dimensionen* eines Raumes ist keine Invariante der Gruppe Γ.

Dagegen ist sie eine Invariante der Gruppe G, was durch folgenden *Satz von der Invarianz der Dimensionszahl* ausgedrückt wird:

Betrachtet man die vollständige Umgebung eines Punktes in einem n-dimensionalen Raume R_n, so ist es nicht möglich, ihr durch eine *umkehrbar eindeutige und stetige* Transformation die vollständige Umgebung eines Punktes in einem m-dimensionalen Raum R_m entsprechen zu lassen, wenn m und n voneinander verschieden sind.

G. Cantor[300]) formuliert den folgenden, damit in Zusammenhang stehenden Satz: Wenn zwei Gebiete von m und n Dimensionen derart in umkehrbar stetiger Beziehung zueinander stehen, daß jedem Punkte des ersten, G_m, mindestens ein Punkt des zweiten, G_n, entspricht, und jedem Punkte des zweiten höchstens ein Punkt des ersten, so ist $n \geqq m$.

Der Satz von der Invarianz der Dimensionszahl ist zuerst für spezielle Werte von m und n bewiesen worden.

J. Lüroth[301]) hat zuerst den Fall $m = 1$, $n \geqq 2$ bewiesen; er hat diesen Beweis auf den Fall $m = 2$, $n \geqq 3$ ausgedehnt[302]); später hat er auch den Fall $m = 3$, $n \geqq 4$ bewiesen.[303])

299) *Wenn die Abbildung sich nicht nur auf die betrachtete Menge M, sondern auf ein größeres, M umfassendes Gebilde (z. B. den Gesamtraum oder einen Bereich) bezieht, so kann man vielfach noch mehr über die Abbildung von M aussagen. Wird z. B. der beschränkte Bereich B auf sich selbst oder auf einen anderen beschränkten Bereich B_1 stetig abgebildet, so ist dabei [für die Teilmengen M von B] auch „zusammenhängend" eine Invariante der engeren und der weiteren Gruppe.*

300) **G. Cantor*, Nachr. Ges. Gött. 1879, p. 131.*

301) *J. Lüroth*, Sitzungsb. phys.-med. Soc. Erlangen 10 (1877/8), p. 190/1.

302) *Ib., p. 191/5. Einen anderen Beweis hat *A. Winternitz*[202a]), p. 338 gegeben.*

303) *J. Lüroth*, Sitzungsb. phys.-med. Soc. Erlangen 31 (1899), p. 87/91; Math. Ann. 63 (1907), p. 222/38. [*Letzteres ist eine Ausarbeitung der früheren Noten.*]

Für $m = 1$ und $n \geqq 2$ haben *R. Milesi*[304]) und *A. Schoenflies*[305]) einen besonders einfachen Beweis gegeben: Jedes n-dimensionale Gebiet G_n enthält einen n-dimensionalen Würfel W_n; wegen der Invarianz des Zusammenhangs bei beschränkten, abgeschlossenen Mengen müßte jedem Schnitt von W_n durch eine Ebene ein Intervall auf der Geraden entsprechen; nun kann man aber auf dieser nur eine abzählbare Folge von nicht übereinandergreifenden Intervallen unterbringen, während man in W_n eine nicht abzählbare Reihe von Parallelschnitten annehmen kann.[305a])

*Verschiedene allgemeine Beweisversuche, die von *J. Thomae*[306]), *G. Cantor*[307]) und *E. Netto*[308]) herrühren, sind als unzureichend zu betrachten.[309])*

Ein allgemeiner Beweis für den Satz von der Invarianz der Dimensionszahl ist erst von *L. E. J. Brouwer*[310]) erbracht worden.[311])[312])

*Wegen des Satzes von der Invarianz der Dimensionszahl läßt sich die Dimensionszahl einer Mannigfaltigkeit[245]) definieren als die Anzahl der Parameter, durch welche sich die Mannigfaltigkeit in der Umgebung eines beliebigen ihrer Punkte umkehrbar eindeutig und stetig darstellen läßt.

304) Rivista mat. 2 (1892), p. 103/6.

305) *Math. Ann. 62 (1906), p. 325; Bericht II 1908, p. 165; auf ähnliche Weise hat er auch den Fall $m = 2$, $n \geqq 3$ behandelt:* Nachr. Ges. Gött. 1899, p. 289/90; *auch Bericht II 1908, p. 168.*

305a) *Ein anderer einfacher Beweis für den Fall $m = 1$, $n > 2$ bei *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 147.*

306) *Nachr. Ges. Göttingen 1878, p. 466/8.*

307) **G. Cantor*[300]), p. 127/35.*

308) *J. f. Math. 86 (1879), p. 263/8.*

309) *Siehe die Kritik dieser Beweisversuche bei *E. Jürgens,* Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 7 (1899), p. 50/55, und bei *A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 167.*

310) *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 70 (1911), p. 161/5.

311) Kurz darauf hat auch *H. Lebesgue,* Math. Ann. 70 (1911), p. 166/8, *den Satz zu beweisen versucht; jedoch ist hier der Beweis eines (den Kern der Überlegungen bildenden) Hilfssatzes unrichtig; diesen Hilfssatz hat dann erst *L. E. J. Brouwer*[313]), p. 150/2, bewiesen. Neuerdings hat *H. Lebesgue,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 256/85 (insbes. p. 256/68), einen [dem *Brouwer*schen ähnlichen] Beweis seines Hilfssatzes angegeben und im übrigen seinen Gedankengang ausführlicher dargestellt.* Einen anderen Beweis für den Satz von der Invarianz der Dimensionszahl, *dessen Gedankengang sich aber von dem *L. E. J. Brouwers*[310]) nicht wesentlich unterscheidet,* gab *H. Lebesgue* in Paris C. R. 152 (1911), p. 841/2.

312) *Außerdem folgt die Invarianz der Dimensionszahl aus der weiter unten besprochenen Invarianz des n-dimensionalen Gebietes; siehe dazu *R. Baire,* Bull. sc. math. (2) 31 (1907), p. 96/7.*

L. E. J. Brouwer[313]) setzt dem noch eine andere, an einen Ansatz von *H. Poincaré* anknüpfende (rekurrente) Definition, die auf der Zerlegbarkeit durch Gebilde niedrigerer Dimension beruht, an die Seite, wobei er den auf so ganz andere Weise eingeführten Begriff als *allgemeinen Dimensionsgrad* bezeichnet: Sei P eine vorgelegte Punktmenge, und seien P_1, R, $\bar{R}$ drei Teilmengen von P, die in bezug auf P abgeschlossen[313a]) sind und keine gemeinsamen Punkte besitzen. Dann heiße R und $\bar{R}$ in P durch P_1 getrennt, wenn P_1 in P eine R enthaltende, aber $\bar{R}$ nicht enthaltende (mithin auch eine $\bar{R}$ enthaltende, aber R nicht enthaltende) offene Menge begrenzt. Der Ausdruck „P besitzt den allgemeinen Dimensionsgrad n" (wobei n irgendeine ganze positive Zahl bezeichnet), soll nun besagen, daß für jede Wahl von R und $\bar{R}$ eine trennende Menge P_1 existiert, die den allgemeinen Dimensionsgrad $(n-1)$ besitzt, daß aber nicht für jede Wahl von R und $\bar{R}$ eine trennende Menge P_1 existiert, die einen geringeren Dimensionsgrad als $(n-1)$ besitzt. Weiter soll der Ausdruck „P besitzt den allgemeinen Dimensionsgrad 0 bzw. einen unendlichen allgemeinen Dimensionsgrad" bedeuten, daß P kein Kontinuum als Teilmenge enthält, bzw. daß weder 0 noch irgendeine natürliche Zahl als ihr allgemeiner Dimensionsgrad gefunden werden kann.

L. E. J. Brouwer weist sodann nach, daß in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit die Umgebung eines beliebigen Punktes immer genau den Dimensionsgrad n besitzt.[313b])*

M. Fréchet[314]) hat eine allgemeine Definition der Zahl (oder besser des Typus) der Dimensionen einer abstrakten Menge gegeben.

*Wir können uns hier für unsere Zwecke darauf beschränken, von Punktmengen zu reden. (*M. Fréchets* Betrachtungen gelten allgemeiner für alle L-Klassen [vgl. Nr. **26**].)

Den *Dimensionstypus*[314a]) einer Menge E bezeichnet er mit dE und trifft hierüber folgende Festsetzungen:

313) **L. E. J. Brouwer,* J. f. Math. 142 (1913), p. 146/52, sowie eine demnächst (1923 oder 1924) in derselben Zeitschrift erscheinende Berichtigung dazu.*

313a) *Daß P_1 in P abgeschlossen ist, ist durchaus wesentlich; vgl. dazu den Text bei [262]).*

313b) *Eine andere rekurrente Definition der Dimensionszahl, die neuerdings von *E. H. Neville,* Acta math. 42 (1918), p. 63/93, insbes. p. 91, aufgestellt worden ist, muß als durchaus mißlungen betrachtet werden; vgl. hierüber die Besprechung von *A. Rosenthal* in den Fortschr. d. Math. 46 (1916/18 [1923]), p. 304/5.*

314) *M. Fréchet,* *Paris C. R. 148 (1909), p. 1152/4;* Math. Ann. 68 (1910), p. 145/68.

314a) **P. Mahlo,* Ber. Ges. Wiss. Leipzig 63 (1911), p. 319/47, bezeichnet den Dimensionstypus, indem er von der Beziehung zur Dimension absieht, als „*Homöie*"; (er untersucht speziell die Homöien gewisser linearer Punktmengen).*

Kann eine Menge E_1 umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig abgebildet werden auf eine Menge E_2 oder auf einen Teil von ihr, so setzt er $dE_1 \leqq dE_2$. Kann man *außerdem* E_2 umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig auf die Menge E_1 oder einen Teil von ihr abbilden, so setzt er $dE_1 = dE_2$. Kann man ersteres, aber nicht letzteres ausführen (d. h. ist $dE_1 \leqq dE_2$, ohne daß $dE_1 = dE_2$ ist), dann setzt er $dE_1 < dE_2$.

Diese Festsetzungen stimmen wegen des Satzes von der Invarianz der Dimensionszahl für lineare Punkträume R_n mit dem Gewohnten überein, und man ist deshalb hier berechtigt, den Dimensionstypus des linearen Punktraumes R_n mit der Zahl n zu bezeichnen. *M. Fréchet* zeigt nun, daß es Punktmengen gibt, deren Dimensionstypus < 1 ist, und daß sogar unendlich viele verschiedene solche Dimensionstypen < 1 existieren, und ebenso, daß es zwischen n und $n+1$ unendlich viele verschiedene Dimensionstypen gibt. Besonders bemerkenswert ist dabei, daß es unter allen Dimensionstypen, die < 1 sind, einen *größten* gibt, nämlich den Dimensionstypus aller irrationalen Zahlen.[315]) Ebenso gibt es unter allen Dimensionstypen, die $< n$ sind, einen größten, nämlich den Dimensionstypus aller Punkte des n-dimensionalen Raumes R_n, für die nicht alle Koordinaten rational sind. Übrigens gibt es Paare verschiedener Dimensionstypen von Punktmengen, die beide z. B. größer als 1 und kleiner als 2 sind, ohne daß sie vergleichbar sind, d. h. ohne daß die eine $>$, $<$ oder $=$ der anderen ist.[316])*

*Eine ganz andere Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffs, die auf dem Maßbegriff beruht, jedoch keine Invariante der Analysis situs ist, hat *F. Hausdorff*[447]) gegeben; man sehe hierüber den Schluß von Nr. **20c**.*

17a. *Die übrigen Invarianten der umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen. Wir verlassen nunmehr den Dimensionsbegriff und gehen zu *sonstigen Invarianten der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen* über.[316a])

---

315) *Den gleichen Dimensionstypus besitzt übrigens auch die Menge der Punkte des R_n mit lauter irrationalen Koordinaten, wie aus der mit Hilfe von Kettenbrüchen ausgeführten *G. Cantor*schen Abbildung [Nr **16**, Anfang] hervorgeht.*

316) *Die Dimensionstypen einer Kreislinie γ und der ebenen Punktmenge F, welche aus dem Punkt mit den Koordinaten $x = 0$, $y = 0$ und den Strecken $0 < x < 1$, $y = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ besteht, haben diese Eigenschaft; es sind $d\gamma$ und dF beide > 1 und < 2, ohne daß $d\gamma$ mit dF vergleichbar ist. [Math. Ann.[314]), p. 158 Anm.].*

316a) *Die allereinfachsten Invarianten sind bereits am Anfang von Nr. **17** besprochen worden.*

Zunächst ist das *Gebiet* eine solche Invariante. Dies wurde für *ebene* Gebiete zuerst von *E. Jürgens* ausgesprochen und bewiesen[317]; andere Beweise gaben später *A. Schoenflies*[318]), *W. F. Osgood*[319]), *F. Bernstein*[320]), *L. Bieberbach*[320a]), *F. Hausdorff*[321]). Die Invarianz des *n-dimensionalen* Gebietes wurde erst von *L. E. J. Brouwer*[322]) nachgewiesen: In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild eines n-dimensionalen Gebietes wiederum ein Gebiet. Ein weiterer Beweis hierfür folgt nach Methoden von *R. Baire*[323]) und *J. Hadamard*[324]) aus dem auf n Dimensionen erweiterten *Jordan*schen Satz [Nr. **13a**].[325])

Die Invarianz der *einfach geschlossenen (Jordanschen) Kurve* gegenüber der engeren Gruppe folgt unmittelbar aus der Definition als umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild eines Kreises; und das Analoge

---

317) **E. Jürgens,* Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Functionen von zwei reellen Veränderlichen, Leipzig 1879. — *E. Jürgens* hat auch bewiesen, daß in der Ebene bei eindeutigen und stetigen Transformationen, deren Umkehrung nur endlich vieldeutig ist, das Abbild eines Bereiches wieder einen Bereich enthält.*

318) *Nachr. Ges. Göttingen 1899, p. 282/90.*

319) *Ib. 1900, p. 94/7.*

320) *Ib. 1900, p. 98/102.*

320a) *Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1913), p. 152/3.*

321) *Mengenlehre, p. 378/80.*

322) **L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 71 (1911), p. 305/13; ein zweiter Beweis: Math. Ann. 72 (1912), p. 55/6.*

323) *Paris C. R. 144 (1907), p. 318/21; Bull. sc. math. (2) 31 (1907), p. 97/9.*

324) **J. Hadamard*[245]), p. 469/72. [Dazu siehe außer dem *Jordan*schen Satz für n-Dimensionen noch *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 71 (1911), p. 323/4].*

325) **H. Weyl* [Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig u. Berlin 1913, p. 19] bezeichnet die Abbildung einer nur aus inneren Punkten bestehenden Menge E auf einer Mannigfaltigkeit als *„gebietsstetig"*, wenn das Abbild einer jeden ganz in E gelegenen Umgebung eines beliebigen zu E gehörigen Punktes p stets den Bildpunkt p' von p *im Innern* enthält. Eine umkehrbar eindeutige und umkehrbar gebietsstetige Abbildung ist auch im gewöhnlichen Sinne stetig. Wegen des Satzes von der Invarianz des Gebietes ist umgekehrt auch jede umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung einer nur aus inneren Punkten bestehenden Menge samt der inversen Abbildung gebietsstetig. [Gelegentlich ist mit „Gebietsstetigkeit" ein anderer Begriff (nämlich „gleichmäßige Stetigkeit im Bereich") bezeichnet worden; vgl. II A 1, Nr. **22** bei Fußn. [256]) (*A. Pringsheim*)].

Hierher gehört auch *C. Carathéodory* u. *H. Rademacher,* Archiv Math. Phys. (3) 26 (1917), p. 1/9, wo bei stetigen Abbildungen von (ebenen, einfach zusammenhängenden) Gebieten Beziehungen zwischen Eineindeutigkeit im Kleinen (d. h. in der Umgebung der einzelnen Punkte) und im Großen (d. h. fürs ganze Gebiet) untersucht werden. Vgl. dazu noch: *B. v. Kerékjártó,* Math. Ztschr. 8 (1920), p. 310/19.*

gilt für die Invarianz der *geschlossenen Jordanschen Fläche* sowie für die Invarianz der *„stetigen Kurven“*.

Die Invarianz der *„geschlossenen Kurve“* [Nr. **13**] wurde von *L. E. J. Brouwer*[326]) bewiesen[327]): Das ebene, umkehrbar eindeutige und stetige Abbild einer geschlossenen Kurve ist wieder eine geschlossene Kurve.[328]) Er hat aber gleichzeitig[326]) noch viel mehr bewiesen, nämlich den folgenden Satz: Die Gebietsmengen, die von zwei ebenen beschränkten, einander umkehrbar eindeutig und stetig entsprechenden Kontinuen in der Ebene bestimmt sind, besitzen die gleiche Anzahl bzw. Mächtigkeit von Gebieten.

Ferner ist die *Zusammenhangszahl* eines ebenen Gebietes eine Invariante; dies hat *F. Hausdorff* bewiesen durch Aufstellung des folgenden Satzes[329]): Das ebene, beschränkte, umkehrbar eindeutige und stetige Bild eines ebenen, beschränkten, k-fach zusammenhängenden Gebietes ist wieder ein k-fach zusammenhängendes Gebiet. [Dabei kann k eine endliche Anzahl oder die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}$ bedeuten.]

Daß ferner die *Struktur einer abgeschlossenen, beschränkten Menge* gegenüber umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen invariant bleibt, ergibt sich ganz unmittelbar aus den Betrachtungen von Nr. **10a**.

Wie *A. Schoenflies* gezeigt hat, ist die *allseitige Erreichbarkeit* einer ebenen Kurve eine Invariante, und zwar nicht nur der engeren, sondern auch der weiteren Gruppe. Er bewies nämlich den Satz[330]): Ist die Begrenzung B eines ebenen Gebietes G eindeutiges und stetiges Abbild eines Kreises oder Kreisbogens, so sind alle Punkte von B für das Gebiet G allseitig erreichbar. Dazu gehört noch ein anderes (schon Nr. **16** Schluß angegebenes) Resultat von *A. Schoenflies*, daß jeder Punkt einer stetigen Kurve der Ebene für alle Gebiete, zu deren Begrenzung er gehört, allseitig erreichbar ist. Dagegen ist die bloße (nicht allseitige) Erreichbarkeit einer Kurve für ein Gebiet bzw. die Erreichbarkeit eines einzelnen Kurvenpunktes keine Invariante weder der weiteren noch der engeren Gruppe.[331])

326) **L. E. J. Brouwer,* Paris C. R. 154 (1912), p. 862; Math. Ann. 72 (1912), p. 422/5.*

327) *Ausgesprochen wurde die Invarianz der geschlossenen Kurve bereits von *A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 160; [siehe dazu *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 68 (1910), p. 429/31 u. 434].*

328) *Dies ist zugleich eine weitgehende Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes.*

329) **F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 380/2.*

330) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 189/90 [dazu eine Ergänzung von *L. E. J. Brouwer*[327]), p. 433/4]; siehe auch *A. Schoenflies,* Math. Ann. 68 (1910), p 439/40, sowie Nr. **13** bei Anm [230]).*

331) *Vgl. *L. E. J. Brouwer*[327]).*

Ferner hat *L. E. J. Brouwer*[332]) die Invarianz der *Zweiseitigkeit* bzw. *Einseitigkeit*[332a]) von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten gegenüber umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen bewiesen.

Bei einer Anzahl anderer im früheren erwähnten Begriffe ergibt sich die Invarianz gegenüber umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen fast unmittelbar aus der Definition dieser Begriffe; beispielsweise sind, sofern es sich nur um beschränkte Mengen handelt, solche Invarianten: „*irreduzibles Kontinuum*" und „*Häufungskontinuum*" [Nr. **12**], sowie für beschränkte, abgeschlossene Mengen „*zusammenhängend im kleinen*"[333]) [Nr. **16**, Schluß].

Die Invarianz der *Borel*schen Mengen und ihrer Klassifikation [Nr. **54a**] gegenüber umkehrbar eindeutigen und beiderseits stetigen Abbildungen ist von *W. Sierpiński*[333a]) bewiesen worden. Daß dagegen der Begriff der *Borel*schen Mengen gegenüber nur eindeutigen und stetigen Abbildungen nicht invariant ist, geht aus den früher angegebenen Resultaten von *M. Souslin*[126]) und *N. Lusin*[126]) [Nr. **9b**] hervor; jedoch besitzen die „*Mengen* (A)" [Nr. **9b**] diese letztere Eigenschaft [was wenigstens für die *linearen* „Mengen (A)" von *W. Sierpiński*[333b]) auf Grund eines Satzes von *N. Lusin* bewiesen worden ist].[333c])

Es sei nun noch auf eine wichtige Invariante der engeren Gruppe hingewiesen, die von *L. E. J. Brouwer* eingeführt wurde und in der Mehrzahl seiner Untersuchungen eine wesentliche Rolle spielt: der „*Abbildungsgrad*".[334]) Der Abbildungsgrad ist eine endliche ganze Zahl c, die charakteristisch ist für eine eindeutige und stetige Abbildung einer zweiseitigen, geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit μ auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ'; die Bildmenge von μ muß nämlich jedes Teilgebiet von μ' genau um c-mal öfters positiv

---

332) **L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 71 (1911), p. 324, Fußnote; siehe auch *H. Weyl*[325]), p. 61/3.*

332a) *Über diese Begriffe siehe III AB 3 (*M. Dehn* u. *P. Heegaard),* Grundlagen, Nr. **2**, **5**.*

333) *Wie einfache Beispiele zeigen, ist „zusammenhängend im kleinen" für *nicht-abgeschlossene,* beschränkte Mengen im allgemeinen nicht invariant; man erhielte in diesem Fall Invarianz erst bei umkehrbar eindeutigen und *beiderseits* stetigen Transformationen.*

333a) **W. Sierpiński,* Paris C. R. 171 (1920), p. 24/6.*

333b) **W. Sierpiński*[128]), erstes Zitat.*

333c) *Wegen der Invarianz anderer spezieller Mengengattungen siehe: *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 1 (1920), p. 11/16; 3 (1922), p. 119/22; 4 (1923), p. 319/23; *C. Kuratowski* u. *W. Sierpiński,* Tôhoku Math. J. 20 (1921), p. 22/5; *St. Mazurkiewicz,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 104/11.*

334) *Siehe hierüber *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 71 (1911), p. 97/106; sowie [336]).*

als negativ überdecken. Diese Konstante c bleibt ungeändert, wenn die Abbildung stetig geändert wird. Ist μ' einseitig oder offen, so ist immer $c = 0$. Ferner[335]): Ist auch μ' geschlossen und zweiseitig, und ist die Abbildung eineindeutig und stetig, so ist $c = \pm 1$. *L. E. J. Brouwers* Satz von der Invarianz des Abbildungsgrades[336]) sagt sodann aus, daß bei umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen der Mannigfaltigkeiten μ und μ' der für die Abbildung zwischen μ und μ' bestehende Abbildungsgrad ungeändert bleibt.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß *J. W. Alexander II*[336a]) die Invarianz der für die verschiedenen Typen der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten charakteristischen topologischen Konstanten bewiesen hat.*

17b. ***Sonstige Untersuchungen über umkehrbar eindeutige und stetige Transformationen.** Nachdem wir so die wesentlichsten Invarianten der umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen besprochen haben, wollen wir noch kurz auf einige andere hiermit zusammenhängende, aber sich doch in anderer Richtung bewegende Untersuchungen hinweisen.[337]) Es handelt sich, allgemein gesprochen, insbesondere um Fragestellungen folgender Natur:

Es seien zwei Gebilde γ und γ' vorgelegt, die sich durch umkehrbar eindeutige und stetige Transformation ineinander überführen lassen; kann man dies noch bewerkstelligen, wenn man über die Art der Transformation gewisse speziellere Voraussetzungen macht? Man kann folgendes verlangen: 1. Gewisse Teilgebilde von γ und γ', die sich, *für sich betrachtet,* ineinander umkehrbar eindeutig und stetig abbilden lassen, sollen bei der Transformation von γ nach γ' ineinander übergeführt werden. 2. Man füge zu γ ein Gebilde $\bar{\gamma}$, zu γ' ein Gebilde $\bar{\gamma}'$ hinzu; dann soll die Abbildung von γ nach γ' dahin erweitert werden, daß nunmehr $(\gamma + \bar{\gamma})$ in $(\gamma' + \bar{\gamma}')$ umkehrbar eindeutig und stetig abgebildet werden, ohne daß dabei die Abbildung von γ nach γ' irgendwie abgeändert wird. 3. Wenn γ und γ' Teile

---

335) **L. E. J. Brouwer*[336]), p. 324.*

336) **L. E. J. Brouwer* hat hierfür zwei Beweise gegeben: Math. Ann. 71 (1911), p. 326/7 und [einfacher] p. 598.*

336a) **J. W. Alexander II,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 148/54. — Im übrigen sei deswegen auf den Artikel III AB 13 (*H. Tietze*) verwiesen.*

337) *Übrigens gehören hierher eigentlich alle Fragen der *Analysis situs.* [Siehe Anm. [297]) u. Nr. 24, sowie den Artikel III AB 3 (*M. Dehn* u. *P. Heegaard*)]. Doch ist vieles noch nicht mengentheoretisch unter dem Gesichtspunkt der Invarianz gegenüber umkehrbar eindeutigen und beiderseits stetigen Transformationen, sondern nur kombinatorisch behandelt. Es sei hier auf den geplanten Artikel „Geometria situs" III AB 13 (*H. Tietze*) hingewiesen.*

eines Gebildes G sind, kann man verlangen: Die Abbildung γ nach γ' soll ersetzt werden durch eine *stetige Deformation*, die innerhalb G verlaufend von γ nach γ' führt; d. h. es soll möglich sein, zwischen γ und γ' eine endliche Anzahl von anderen, ebenfalls G angehörenden Gebilden zwischenzuschalten, so daß in der so entstehenden Reihe von Gebilden jedes ein umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des vorhergehenden ist, wobei zugleich die Verrückung, die jedesmal von irgendeinem Punkt eines Gebildes zu einem entsprechenden Punkt des nächsten Gebildes führt, eine gewisse vorgegebene Größe nicht überschreitet.

Zu 1. sei der folgende Satz von *L. E. J. Brouwer*[338]) erwähnt: Wenn in einem n-dimensionalen Kubus zwei abzählbare, überall dichte Punktmengen M und R gegeben sind, so kann der Kubus einschließlich seiner Begrenzung derartig umkehrbar eindeutig und stetig auf sich selbst abgebildet werden, daß dabei M in R übergeht. Ferner der folgende Satz von *C. Carathéodory*[339]): Man kann das Innere von zwei einfach zusammenhängenden ebenen Gebieten umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander[339a]) abbilden, derart, daß die Randelemente (= Primenden) [Nr. **13**, Schluß] dieser Gebiete umkehrbar eindeutig einander entsprechen.

Zu 2. gehört der folgende Satz von *A. Schoenflies*[340]): Sind zwei

338) **L. E. J. Brouwer,* Verslag Ak. Amsterdam 21 (1913), p. 1416 = Proc. Akad. Amsterdam 15 (1913), p. 1260. Siehe hierzu auch *E. Borel,* Bull. Soc. math. de France 41 (1913), p. 1/19; The Rice Institute Pamphlet 4 (1917), p. 1/21 = Methodes et problèmes de théorie des fonctions, Paris 1922, p. 20/38.*

339) **C. Carathéodory,* Math. Ann. 73 (1913), p. 350/1. Weitere Beweise wurden gegeben von *P. Koebe*[238]) und *E. Lindelöf*[235]).*

339a) *Mit Hilfe irgendeiner konformen Abbildung.*

340) **A. Schoenflies,* Math. Ann. 62 (1906), p. 319/24; Bericht II 1908, p. 209/12. [Einen anderen Beweis hierfür hat *J. R. Kline,* Proc. National Acad. U. S. A. 6 (1920), p. 529/31, gegeben.]

Die Umkehrung dieses Satzes ist, wie an Beispielen leicht ersichtlich, im allgemeinen nicht richtig; d. h. eine beliebige umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung des Innern von zwei *Jordan*schen Kurven C_1 und C_2 läßt sich im allgemeinen nicht so auf die Kurven selbst ausdehnen, daß dann die beiden Bereiche mit ihren Begrenzungen umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander bezogen sind.

Wenn aber speziell das Innere der beiden *Jordan*schen Kurven C_1 und C_2 *konform* aufeinander abgebildet ist, dann läßt sich immer diese Abbildung stetig so erweitern, daß auch die Ränder C_1 und C_2 umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abgebildet werden; dies wurde zuerst ausgesprochen von *W. F. Osgood*[238b]) [vgl. auch II B 1, Nr. **19**], zuerst bewiesen von *C. Carathéodory,* Math. Ann. 73 (1913), p. 305/20, und *W. F. Osgood* u. *E. H. Taylor*[242]), p. 294; weitere Beweise gaben: *E. Lindelöf,* Paris C. R. 158 (1914), p. 245/7; *R. Courant,* Nachr.

einfache geschlossene Kurven C_1 und C_2 umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abgebildet, so kann man diese Abbildung zu einer analogen Abbildung des Innern der beiden Kurven erweitern, die stetig in die gegebene Abbildung der beiden Kurven übergeht.

Hiermit hängen auch die neueren, ebenfalls zu 2. gehörenden Untersuchungen von *L. Antoine*[340a]) zusammen. Dieser stellt die allgemeine Frage: Wenn zwei Gebilde γ und γ' eines n-dimensionalen Raumes umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig aufeinander bezogen sind, unter welchen Umständen kann man die Abbildung auf Teile des umgebenden Raumes ausdehnen? Also: Unter welchen Umständen kann man zwei n-dimensionale Gebilde γ^* und γ'^* finden, die γ bzw. γ' im *Innern* enthalten, und die sich so umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig aufeinander abbilden lassen, daß dabei γ und γ' einander entsprechen? Er führt diese Untersuchung im 2- und 3-dimensionalen Raum a) für die (ungeschlossenen und geschlossenen) *Jordan*schen Kurven und b) für die beschränkten, perfekten, punkthaften Mengen[340b]) aus. Für $n = 2$ ist hierbei die Erweiterung der Abbildung auf die ganze Ebene möglich; dagegen gibt es im 3-dimensionalen Raum [sowohl bei a) wie bei b)] Fälle, wo eine derartige Erweiterung nur teilweise oder überhaupt nicht möglich ist.

Endlich sind Fragen, welche den Fall 3. [zum Teil gleichzeitig auch den Fall 1. und 2.] betreffen, von *H. Tietze* eingehend behandelt worden. Doch sei zunächst auf einige damit in Zusammenhang stehende Untersuchungen von *L. E. J. Brouwer* hingewiesen. *L. E. J. Brouwer*[341]) stellt folgende Definition auf: Sind μ und μ' geschlossene Mannigfaltigkeiten, dann sagt er, daß zwei eindeutige und stetige Abbildungen von μ auf μ' derselben *Klasse* angehören, wenn man von der einen Abbildung zu der anderen durch stetige Modifikation kommen kann. Zwei Abbildungen von gleicher Klasse besitzen nach dem oben [bei [336])] Gesagten den gleichen Abbildungsgrad. *L. E. J. Brouwer* zeigt nun, daß unter gewissen Bedingungen auch die Umkehrung zutrifft; er beweist nämlich den folgenden Satz[342]): Irgend zwei eindeutige und stetige Abbildungen einer geschlossenen, einfach zusammenhängenden

Ges. Wiss. Göttingen 1914, p. 101/10 u. J f. Math. 144 (1914), p. 207/10. Übrigens ist dieser Satz nur ein Spezialfall des oben im Text bei [339]) angegebenen Satzes von *C. Carathéodory*.*

340a) **L. Antoine*, Paris C. R. 171 (1920), p. 661/3; Thèse, Straßburg 1921 = J. de math (8) 4 [= 86] (1921), p. 221/325.*

340b) *Wegen des Zusammenhangs von a) und b) siehe Nr. 14 bei [255]) u. [256]).*

341) *Proc. 5 internat. Congr. of Math. 1912, Bd. II (Cambridge 1913), p. 9.*

342) **L. E. J. Brouwer*[341]), und Verslag Akad. Amsterdam 21 (1912/3), p. 300/9 = Proceed. Akad. Amsterdam 15 (1912/3), p 352/60. Hier ist nur von

*Jordan*schen Fläche auf sich selbst [oder auf eine andere ebensolche Fläche], welche die Indikatrix[342a]) nicht umkehren, gehören zu der gleichen Klasse, wenn sie beide vom gleichen Grad sind.

Bei *H. Tietze*s Untersuchungen spielen die umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen im wesentlichen dieselbe Rolle, wie bei *L. E. J. Brouwer* die eindeutigen und stetigen Abbildungen. *H. Tietze*[343]) beweist den folgenden Satz: Jede umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung eines beschränkten, von einer geschlossenen *Jordan*schen Kurve berandeten Bereichs[344]) auf sich selbst, bei der die Indikatrix der Fläche erhalten bleibt, ist eine Deformation des Bereichs in sich; d. h. die Punkte des Bereichs lassen sich so bewegen, daß dabei, während der Bereich als Ganzes ungeändert bleibt, jeder Punkt schließlich in den ihm vermöge der gegebenen Abbildung entsprechenden Bildpunkt gelangt. Dieses Resultat erhält er aus dem folgenden Satz[343]): Ist Q die Fläche eines Quadrates (einschließlich der Begrenzung) und sind j_1 und j_2 zwei durch das Innere von Q führende *Jordan*sche Kurvenbogen, die beide dieselben zwei Begrenzungspunkte a und b verbinden, dann gibt es eine stetige Deformation des Quadrates Q in sich, die jeden Begrenzungspunkt ungeändert läßt und j_1 in j_2 überführt. Hieraus leitet er auch noch folgenden Satz[345]) ab: Irgend zwei geschlossene ebene *Jordan*sche Kurven lassen sich ineinander überführen durch eine in einem beschränkten Teil der Ebene sich abspielende stetige Transformation der Ebene in sich.

Bei allen diesen Fragen hat, wie wir gesehen haben, der Fall besonderes Interesse, wo die beiden ineinander zu transformierenden Gebilde γ und γ' identisch sind, d. h. wenn es sich um die umkehr-

Kugelflächen die Rede; es ist aber selbstverständlich, daß alles auch für die umkehrbar eindeutigen und stetigen Bilder der Kugelflächen gilt.

Übrigens vgl. man hierzu auch *L. E. J. Brouwer,* Paris C. R. 170 (1920), p. 834/5; 171 (1920), p. 89/91; Math. Ann. 82 (1921), p. 280/6; wo für beliebige endlichfach zusammenhängende μ und μ' sämtliche Klassen von eindeutigen und stetigen Abbildungen von μ auf μ' aufgezählt werden.*

342a) *D. h. einen bestimmten Umlaufssinn; siehe III AB 3, Grundlagen, Nr. 2 u. 5 (*M. Dehn* u. *P. Heegard*).*

343) **H. Tietze,* Paris C. R. 157 (1913), p. 509; Rendic. Circ. mat. Palermo 38 (1914), p. 247/304; vgl. auch *H. L. Smith,* Annals of math. (2) 19 (1917), p. 137/41, und für mehrere Dimensionen *O. Veblen,* Proc. National Ac. U. S. A. 3 (1917), p. 654/6.*

344) *Übrigens dehnt *H. Tietze* [Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien, Bd. 122, Abt. IIa (1913), p. 1658] den Satz auch auf geschlossene, einfach-zusammenhängende zweidimensionale *Jordan*sche Flächen aus, d. h. auf die umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbilder der Kugelflächen des drei-dimensionalen Raumes.*

345) **H. Tietze*[344]), p. 1655. Siehe dazu auch *L. Antoine*[340a]), zweites Zitat, insbes. p. 252/6, 264/6, 276/7.*

bar eindeutige und stetige Transformation des Gebildes γ in sich handelt. In diesem Falle erhebt sich noch die folgende weitere wichtige Frage: Gibt es bei der eineindeutigen und stetigen Transformation von γ in sich selbst Teilgebilde g, die bei dieser Transformation invariant bleiben, d. h. dabei ebenfalls in sich übergeführt werden? Mit dieser Frage hat sich insbesondere *L. E. J. Brouwer* eingehend beschäftigt.[346]) Von seinen weitgehenden Resultaten[347]) seien nur die folgenden hervorgehoben:

Jede eineindeutige und stetige Transformation einer Kugelfläche[348]) gerader Dimensionenzahl in sich, welche den Sinn der Indikatrix[342a]) nicht ändert, sowie jede eineindeutige und stetige Transformation einer Kugelfläche ungerader Dimensionenzahl in sich, welche den Sinn der Indikatrix umkehrt, besitzt mindestens einen Fixpunkt.[349])

---

346) **L. E. J. Brouwer,* Verslag Amsterdam Akad. 17_2 (1909), p. 741/52; 18_1 (1909), p. 106/117; 19_2 (1910/11), p. 737/47; 20_1 (1911), p. 24/34 = Proceed. Amsterdam Akad. 11 (1909), p. 788/98; 12 (1909), p. 286/97; 13 (1910/11), p. 767/77; 14 (1911), p. 300/10; Math. Ann. 69 (1910), p. 176/180 [Referat über die eben zitierten holländischen Arbeiten]; 71 (1911), p. 112/115 u. 325/6; 72 (1912), p. 37/54. Ferner: Math. Ann. 80 (1919), p. 39/41; 82 (1921), p. 94/6; Verslag Amsterdam Akad. 27 (1918/19), p. 840/1, 1201/3 = Proceed. Amsterdam Akad. 21 (1919), p. 935/6, 1143/5; Paris C. R. 168 (1919), p. 1042/4. An die genannten Arbeiten *L. E. J. Brouwers* knüpft dann *B. von Kerékjártó* an: Math. Ann. 80 (1919), p. 29/32, 33/5, 36/8; Verslag Amsterdam Akad. 28 (1919), p. 379 = Proceed. Amsterdam Akad. 22 (1919), p. 475. Siehe dazu auch *J. Nielsen*[348]) und Math. Ann. 82 (1921), p. 83/93. —

Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen stehen auch die gruppentheoretischen Abhandlungen von *L. E. J. Brouwer* [Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von *Lie*], Math. Ann. 67 (1909), p. 246/67; 69 (1910), p. 181/203; auch Atti 4. Congr. intern. Mat. (Rom 1908), 2 (1909), p. 296/303.*

347) *Die sich teilweise auch auf nur *eindeutige* und stetige Transformationen beziehen.*

348) *Natürlich kann man statt der Kugelfläche irgendein umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild von ihr, d. h. eine geschlossene, einfach zusammenhängende *Jordan*sche Fläche nehmen. Dagegen gilt die Aussage nicht mehr für eine zweiseitige geschlossene Fläche vom Geschlecht $p > 0$; vgl. *L. E. J. Brouwer,* Paris C. R. 168 (1919), p. 1042/4, sowie *J. Nielsen,* Math. Ann. 81 (1920), p. 94/6.*

349) **L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 71 (1911), p. 114 u. 325/6 [bereits in Math. Ann. 69 (1910), p. 180 formuliert]. Den Spezialfall einer zweidimensionalen Kugel hat er schon vorher bewiesen in Verslag Amsterdam Akad. 17_2 (1909), p. 750 = Proceed. Amsterdam Akad. 11 (1909), p. 797; einen anderen Beweis für diesen zweidimensionalen Fall hat *B. von Kerékjártó,* Math. Ann. 80 (1919), p. 30/2 gegeben. —

Vgl. auch *G. D. Birkhoff,* Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), p. 286/94, der noch einen weiteren derartigen Satz beweist. — Verallgemeinerungen des *Brouwer*schen Satzes und andere analoge Sätze bei: *J. W. Alexander,* Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), p. 89/95; *G. D. Birkhoff* u. *O. D. Kellog,* ib., p. 96/115; *S. Lefschetz,* Proc. National Acad. U. S. A. 9 (1923), p. 90/93.*

Jede eineindeutige und stetige, den Umlaufsinn nicht ändernde Transformation der Cartesischen Ebene in sich, ist entweder über die ganze Ebene eineindeutiges und stetiges Abbild einer Translation oder besitzt mindestens einen Fixpunkt.[350])*

Der Inhalt der Punktmengen.

18. Die Cantorsche Inhaltsdefinition. Man hat sich seit den Anfängen der Mengenlehre die Aufgabe gestellt, jeder Punktmenge Zahlen zuzuordnen, die eine Verallgemeinerung der die Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte darstellenden Zahlen sein sollten und demgemäß als *Inhalt der Punktmenge* bezeichnet werden könnten. Es sind im Laufe der Zeit mehrere sachlich von einander verschiedene Inhaltsdefinitionen gegeben worden.

*Die erste Inhaltsdefinition ist, nach vorausgegangenen Andeutungen *H. Hankels*[351]), an die verschiedene andere Mathematiker[352]) angeknüpft haben, von *O. Stolz*[353]) und von *A. Harnack*[354]) aufgestellt worden.* Man schließe die Punkte der (als linear vorausgesetzten) beschränkten Menge in eine *endliche* Zahl von nicht übereinandergreifenden Intervallen ein; man nehme an, daß die Länge dieser Intervalle (des größten unter ihnen) gegen Null konvergiert; dann ist der *Inhalt* der Menge der (immer existierende) Grenzwert, gegen den unter diesen Bedingungen die Summe der Längen der Intervalle konvergiert.

O. Stolz[353]) zeigte, daß dieser Grenzwert von der Wahl der benutzten Intervalle völlig unabhängig ist. *A. Harnack*[354]) wies die Bestimmtheit des Grenzwertes dadurch nach, daß er ein eindeutiges Verfahren angab, um den Grenzwert zu erhalten; nämlich:*

Um den Inhalt einer Menge auszuwerten, deren Punkte über

350) **L. E. J. Brouwer*, Verslag Amsterdam Akad. 18_1 (1909), p. 117 = Proceed. Amsterdam Akad. 12 (1909), p. 297; Math. Ann. 72 (1912), 37/54; vgl. auch Verslag Amsterdam Akad. 27 (1918/19), p. 840/1 = Proceed. Amsterdam Akad. 21 (1919), p. 935/6.*

351) *H. Hankel*, *Gratul.-Programm Univ. Tübingen 1870, p. 25/6* = Math. Ann. 20 (1882), p. 87/8 = Ostwalds Klassiker Nr. 153, p. 72/3.

352) *Insbesondere die in Anm. [360]) bis [364]) genannten Autoren [*H. J. St. Smith, V. Volterra, P. du Bois-Reymond, A. Harnack, W. Veltmann*], welche die Tatsache erkannt haben, durch die ein weiter unten angegebener Irrtum *H Hankels* widerlegt wurde. Außerdem die in Anm. [359]) zitierten Stellen bei *U. Dini* und *A. Harnack*; schließlich gehört hierher auch *G. Cantor*[359]). — Vgl. auch I A 5, Nr. 15 (*A. Schoenflies*).*

353) **O. Stolz*, Math. Ann. 23 (1884), p. 152/6.*

354) *A. Harnack*, Math. Ann. 25 (1885), p. 241/50. *Vorher waren bereits die in Anm. [359]) u. [366]) zitierten Abhandlungen *G. Cantors* erschienen.*

eine Strecke von der Länge l verteilt sind, entfernt man aus l die (offenen) Intervalle, die größer als $\frac{l}{2}$ sind und keinen Punkt der Menge enthalten; hierauf aus den übrigbleibenden Intervallen alle diejenigen, die größer als $\frac{l}{4}$ sind und keinen Punkt der Menge enthalten, usw. In jedem Stadium des Verfahrens behält man dann eine endliche Anzahl von abgeschlossenen Komplementärintervallen, welche die Punkte der Menge enthalten, und kann ihre Gesamtlänge und deren Grenzwert berechnen.

*Etwas später hat *M. Pasch*[355]) die Unabhängigkeit des Inhalts von der Wahl der Intervalle dadurch nachgewiesen, daß er zeigte, daß die oben angegebene Inhaltsdefinition mit der folgenden Definition des Inhalts übereinstimmt: Schließt man auf alle möglichen Weisen die Punktmenge M in endlich viele, nicht übereinandergreifende Intervalle ein, so stelle die untere Grenze der Summe der Intervallängen den Inhalt von M dar.*

Die Definition des Inhalts läßt sich auf einen n-dimensionalen Raum ausdehnen, indem man die Intervalle durch n-dimensionale Kugeln *oder besser durch n-dimensionale Intervalle* ersetzt.

Ist der Inhalt Null, so nennt *A. Harnack*[356]) die Menge *diskret*, *wogegen *P. du Bois-Reymond*[362]) sie als *integrierbar*, *M. Pasch*[355]) als *unausgedehnt* bezeichnet.*

A. Harnack[357]) gibt an, daß es auf den ersten Blick scheinen könnte, als ob jede abzählbare Menge diskret wäre; denn man kann sich eine Folge von Zahlen ε_n derart geben, daß die Reihe

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots$$

eine sehr kleine Summe hat, und kann dann jeden der Punkte x_n der Menge in ein Intervall von der Länge ε_n einschließen: allein die Zahl der Intervalle ist jetzt nicht mehr endlich.

A. Harnack[358]) gibt ferner einige allgemeine Eigenschaften der diskreten Mengen: Die Summe einer endlichen Anzahl von diskreten Mengen ist gleichfalls eine diskrete Menge. Jede Menge, deren Ableitung diskret ist, ist selbst diskret.

Jede Menge, von der irgendeine Ableitung Null ist, ist diskret. *Letztere Eigenschaft hatte vorher schon *G. Cantor* bewiesen.[359])*

---

355) **M. Pasch*, Math. Ann. 30 (1887), p. 142/4.*

356) **A. Harnack*[359]), p. 259 sowie [363]), [354]).*

357) **A. Harnack*[354]), p. 242/4.*

358) **A. Harnack*[354]), p. 244/6. Vgl. auch *G. Cantor*[368]).*

359) **G. Cantor*, Math. Ann. 21 (1883), p. 54/7; siehe auch *G. Cantor*[368]). Übrigens hatte bereits *U. Dini*, Fondamenti per la teorica delle funzioni

Daß eine diskrete Menge nirgends dicht ist, ist ziemlich selbstverständlich; das Umgekehrte jedoch (was *H. Hankel*[351]) zu beweisen geglaubt hatte) gilt nicht. *Die Tatsache, daß eine nirgends dichte Menge nicht notwendig diskret sein muß, oder, was dasselbe ist, daß eine im Intervall d überall dichte Intervallmenge einen Inhalt $< d$ besitzen kann, wurde zuerst von *H. J. St. Smith*[360]), dann auch von *V. Volterra*[361]), *P. du Bois-Reymond*[362]), *A. Harnack*[363]), *W. Veltmann*[364]) erkannt und durch Beispiele erwiesen.[365])*

*Die Inhaltsdefinition von *G. Cantor*[366]) ist formal zwar ganz anders, der Sache nach jedoch *mit der vorigen identisch:**

Sei in einem n-dimensionalen Raum R_n eine beschränkte Menge E von Punkten p vorgelegt. Umgeben wir jeden Punkt p mit einer Kugel vom (für alle Punkte gleichen) Radius ϱ. Die Gesamtheit aller dieser Kugeln erfüllt einen Raumteil (dessen Inhalt man durch ein n-faches Integral erhalten kann). Dieser Raumteil $V(\varrho)$ ist eine stetige Funktion von ϱ; sie konvergiert gegen einen bestimmten Grenzwert, wenn ϱ gegen Null konvergiert. Dieser Grenzwert stellt für *G. Cantor* den Inhalt der Menge dar.[367])

---

di variabili reali, Pisa 1878, p. 18/9, gezeigt, daß jede Menge erster Gattung[32]) [d. h. jede Menge, von der eine Ableitung mit endlichem Index verschwindet] diskret ist; ebenso auch *A. Harnack*, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung, Lpz. 1881, p. 261/2.*

360) **H. J. St. Smith,* Proc. Lond. Math. Soc. (1) 6 (1875), p. 148/50.*

361) *Giorn. di mat. 19 (1881), p. 80/2.*

362) *Functionentheorie[4]), p. 188/90; eine kurze Andeutung bereits Math. Ann. 16 (1880), p. 128 Anm.*

363) *Math. Ann. 19 (1882), p. 238/9.*

364) *Ztschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 176/9, 199, 313/4. Daselbst auch ein erstes Beispiel, das den zweidimensionalen Fall betrifft.*

365) Ein typisches Beispiel für eine nirgends dichte Menge, die nicht diskret ist, ist das folgende. Sei eine Folge von Brüchen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ gegeben, die ein konvergentes Produkt $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$ bilden. Teilen wir das Intervall $[0, 1]$ in drei Teile, von denen die beiden äußeren gleich groß sind, während der mittlere sich zum ganzen Intervall wie $(1 - \alpha_1) : 1$ verhält. Schließen wir die inneren Punkte des mittleren Teiles aus. Verfahren wir ebenso mit den verbleibenden Teilen, indem wir nur α_1 durch α_2 ersetzen, usw. Die (perfekte) Menge der übrigbleibenden Punkte ist nirgends dicht und besitzt als *Stolz-Harnack*schen Inhalt das Produkt $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$ *Dieses Konstruktionsverfahren läßt sich natürlich auch auf den Fall von mehreren Dimensionen übertragen.*

366) *G. Cantor,* Acta math. 4 (1884), p. 388/90; Math. Ann. 23 (1884), p. 473/9.

367) *Die in der *Cantor*schen Definition auftretende Inhaltsbestimmung des Raumteils $V(\varrho)$, der als Vereinigungsmenge von unendlich vielen Kugeln entsteht, ist begrifflich nicht ganz einfach. Es läßt sich aber [vgl. *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 303] mit Leichtigkeit alles auf nur endlich viele Kugeln vom Radius ϱ zurückführen. Denn mit der Menge E werden gleichzeitig auch alle

*Da zugleich mit der Menge E auch alle ihre Häufungspunkte innerhalb $V(\varrho)$ enthalten sind, so ergibt sich nach *G. Cantor*[368]), daß der Inhalt jeder Menge mit dem Inhalt ihrer Ableitung übereinstimmt, und daraus weiterhin, daß jede Menge den gleichen Inhalt besitzt wie der in ihrer Ableitung enthaltene perfekte Bestandteil; speziell hat also (wie oben schon erwähnt) eine Menge, von der eine Ableitung verschwindet, den Inhalt Null.*

Es ist zu bemerken, daß der *Cantor*sche Inhalt (wie auch alle sonstigen Inhaltsdefinitionen) von der Zahl der Dimensionen des Raumes abhängt, in dem die Menge E nach Voraussetzung liegt. Eine Strecke z. B. oder eine lineare Menge hat einen verschiedenen Inhalt, je nachdem man sie in einem eindimensionalen Raum, in der Ebene, im gewöhnlichen Raum gelegen voraussetzt. So hat ein p-dimensionaler Bereich in jedem n-dimensionalen Raum $(n > p)$ den Inhalt Null.

19. Der Jordansche Inhalt. *G. Peano*[369]) und *C. Jordan*[370]) haben (in etwas verschiedener Formulierung) folgenden Inhaltsbegriff angegeben:

Sei eine beschränkte Menge E z. B. in einer Ebene vorgelegt. Betrachten wir eine Einteilung der Ebene durch Parallele zu den Achsen in Quadrate von der Seite a. Gewisse dieser Quadrate bestehen aus lauter inneren Punkten von E; andere enthalten Begrenzungspunkte von E; noch andere endlich enthalten gar keinen Punkt von E. Sei S der gesamte Flächeninhalt der ersten Quadrate, S' der Flächeninhalt der zweiten.

Konvergiert a gegen Null, so kann man beweisen, daß S und S' gegen Grenzwerte konvergieren; $S + S'$ konvergiert also auch gegen einen Grenzwert. Der Grenzwert von S heißt der *innere Inhalt* (aire intérieure), der von $S + S'$ der *äußere Inhalt* (aire extérieure) der Menge E. Die Menge E wird „*(nach Jordan) meßbar*“ oder auch

---

ihre Häufungspunkte von den unendlich vielen, $V(\varrho)$ bildenden Kugeln eingeschlossen. Man kann deshalb den *Borel*schen Überdeckungssatz anwenden, woraus sich ergibt, daß von diesen unendlich vielen Kugeln bereits endlich viele zur Bedeckung ausreichen. Es ist dann auch leicht zu sehen, daß die Vereinigungsmenge dieser endlich vielen Kugeln mit gegen 0 abnehmendem ϱ dem gleichen Grenzwert wie $V(\varrho)$ zustrebt.*

368) **G. Cantor*[366]); auch *A. Harnack*[358]). Vgl. ferner die frühere Abhandlung von *G. Cantor*[359]), sowie den übrigen Text von [359]).*

369) *G. Peano,* Applicazioni geometriche del calculo infinitesimale, Turin 1887, p. 154/5, 156, 158.

370) *C. Jordan,* *J. de Math. (4) 8 (1892), p. 76/9;* Cours d'Analyse[12]) 1, p. 28/31.

„quadrierbar“[370a]) (quarrable) genannt, wenn diese beiden Flächeninhalte einander gleich sind, d. h. wenn der Grenzwert von S' Null ist. In diesem Falle heißt der gemeinsame Grenzwert von S und $S + S'$ einfach der (*Jordansche*) *Inhalt* der Menge E.

Würde man E statt in einem zweidimensionalen Raume in einem n-dimensionalen Raume befindlich annehmen, so würde man durch ein ganz ähnliches Verfahren den *äußeren Inhalt* (étendue extérieure) bzw. den *inneren Inhalt* (ét. intérieure) der Menge definieren. Und sie würde *„messbar“* (mesurable) oder genauer *„nach Jordan meßbar“*[371]) heißen, wenn diese beiden Inhaltszahlen einander gleich sind. Deren gemeinsamer Wert wird dann wieder als (*Jordan*scher) *Inhalt* bezeichnet.

*Die vorstehende Formulierung des Inhaltsbegriffes ist die von *C. Jordan*; *G. Peano* hat genau denselben Begriff in etwas anderer Weise definiert, nämlich[371a]):

Der äußere Inhalt der Menge E ist die untere Grenze der Inhalte der aus endlich vielen Quadraten bestehenden, E einschließenden Mengen. Der innere Inhalt der Menge E ist die obere Grenze der Inhalte der aus endlich vielen Quadraten bestehenden, in E enthaltenen Mengen. Stimmen äußerer und innerer Inhalt überein, so heißt ihr gemeinsamer Wert wieder der Inhalt von E.*

*Summe, Differenz und Durchschnitt von endlich vielen, nach *Jordan* meßbaren Mengen sind wieder nach *Jordan* meßbare Mengen. Speziell ist die Summe der Inhalte von endlich vielen elementenfremden Mengen gleich dem Inhalt der Summe dieser endlich vielen Mengen. Dies alles gilt nicht mehr für abzählbar unendlich viele Mengen. (Für letztere leistet dies erst der *Borel*sche und der *Lebesgue*sche Maßbegriff [Nr. **20**], und darin besteht gerade der Hauptfortschritt, den diese Maßbegriffe erzielen.)

Der *äußere Inhalt* ist, wie unmittelbar ersichtlich, *identisch* mit dem (*Stolz-Harnack-*)*Cantor*schen Inhalt.

Während jede Menge nach *Cantor* einen Inhalt besitzt, ist dies nach *Jordan* nicht der Fall. Wenn aber eine Menge einen *Jordan*schen Inhalt besitzt, so stimmt dieser mit dem äußeren Inhalt, d. h. mit dem *Cantor*schen Inhalt der Menge überein.

370a) **C. Carathéodory* bildet noch die Begriffe *„nach außen quadrierbar“* und *„nach innen quadrierbar“*. Siehe hierüber Fußnote [393]).*

371) *Zum Unterschied von anderen Meßbarkeitsbegriffen [siehe Nr. **20**]. Die Franzosen bezeichnen [nach dem Vorgang von *H. Lebesgue*[382])] die „nach *Jordan* meßbaren Mengen“ vielfach als *„ensembles mesurables (J)“*.*

371a) *Vgl. dazu auch die bei *E. Schmidt*, Math. Ztschr. 11 (1921), p. 298/316, gegebene ausführliche Darstellung.*

Eine Menge A ist dann und nur dann nach *Jordan* meßbar, wenn die Begrenzung von A den (*Jordan*schen) Inhalt Null hat.*

Es ist sehr leicht, Mengen zu konstruieren, die nicht nach *Jordan* meßbar sind: Eine überall dichte Menge, die (wenn sie auf einer Geraden liegt) kein Intervall enthält oder (wenn sie in einer Ebene liegt) kein Gebiet, ist offenbar nicht nach *Jordan* meßbar. Auch bei einer nirgends dichten Menge kann es vorkommen, daß sie nicht nach *Jordan* meßbar ist; *die in Nr. 18 erwähnten nirgends dichten Mengen, deren *Cantor*scher Inhalt von Null verschieden ist [vgl. Anm. [360] bis [365]], sowie* die sogleich zu erwähnenden Kurven sind Beispiele dafür.

Betrachten wir eine in einer Ebene gelegene stetige Kurve, die keinen Bereich erfüllt. Ihr innerer Inhalt ist Null, aber ihr äußerer Inhalt kann von Null verschieden sein, sogar wenn die stetige Kurve eine *Jordan*sche Kurve ist.[371b] Beispiele hierfür, die einander ziemlich ähnlich sind, haben zuerst *H. Lebesgue*[372] und *W. F. Osgood*[373] gegeben.[374]

Das Beispiel von *W. F. Osgood* besteht in Folgendem: Ziehen wir in einem Quadrat zu jeder Seite vier Parallelen, derart, daß sie vier Streifen bilden, von denen je zwei zu jeder Seite parallel sind. Außerhalb der Streifen bleiben *neun* Quadrate c. Die Streifen schneiden sich in vier weiteren Quadraten. Wir wollen jetzt eine geordnete Reihe von kleinen horizontalen und vertikalen Strecken nach folgendem Bildungsgesetz herstellen: man beginne an der linken oberen Ecke und endige an der rechten unteren Ecke; der Anfangspunkt irgendeiner der Strecken ist derjenige Eckpunkt des Quadrates c, in das wir eben eingetreten sind, der vom vorhergehenden Endpunkt am weitesten in der Diagonale entfernt ist. Dieses Verfahren liefert die

---

371b) *Also diese Kurven sind (im Sinne von *H. Lebesgue* [Nr. 20]) von positivem Flächenmaß.*

372) *H. Lebesgue,* Pariser Thèse 1902, p. 17 = Ann. di mat. (3) 7 (1902), p. 247; Bull. Soc. math. France 31 (1903), p. 197/203.

373) *W. F. Osgood,* Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 107/12.

374) *Andere derartige Beispiele sind gegeben worden von *G. Chisholm Young,* Quart. J. of math. 37 (1905), p. 87/91 [auch in *W. H.* u. *G. Ch. Young,* Theory, p. 244/7]; *W. Sierpiński,* Anz. Ak. Wiss. Krakau 1913 (A), p 254/63; *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 374/5, und *K. Knopp,* Archiv Math. Phys. (3) 26 (1917), p. 109/10. Die beiden letzteren Beispiele sind besonders einfach. — Die Beispiele von *W. Sierpiński* und *K. Knopp* haben den Vorzug, daß jedes Stück der Kurve die gewünschte Eigenschaft hat (während die anderen Beispiele geradlinige Stücke enthalten).*

in der folgenden Figur angegebene Numerierung von 0 bis 17 und die acht aufeinanderfolgenden (dickgezeichneten) horizontalen und vertikalen Strecken. Markieren wir nun auf einem Intervall von der Länge 1 die Punkte von der Abszisse $\frac{n}{17}$, und lassen wir dem mit der Nummer n bezeichneten Punkt des Quadrates den Punkt $\frac{n}{17}$ des Intervalls entsprechen. Wenden wir hierauf auf jedes der neun Teilquadrate c dasselbe Verfahren an: Einteilung durch Streifen und Bildung von 8×9 neuen kleinen horizontalen bzw. vertikalen Strecken indem man z. B. für das die Punkte 2 und 3 enthaltende Quadrat von der Ecke 2 ausgeht und an der Ecke 3 endigt, und ferner den so erhaltenen Punkten dieses Quadrates auf dem Intervall $[0, 1]$ die Punkte

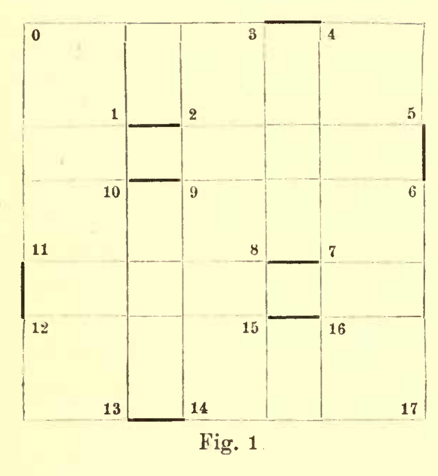


Fig. 1

$$\left[\frac{2}{17} + \frac{1}{17^2};\ \frac{2}{17} + \frac{2}{17^2};\ \cdots;\ \frac{2}{17} + \frac{16}{17^2};\ \frac{2}{17} + \frac{17}{17^2} = \frac{3}{17}\right]$$

entsprechen läßt; usw.

Die Kurve C wird dann durch die Gesamtheit aller dieser horizontalen und vertikalen Strecken und ihrer Grenzpunkte gebildet; die Koordinaten eines Punktes von C sind Funktionen der Abszisse des Punktes auf dem Intervall $[0, 1]$, die stetig und für eine überall dichte Menge von Werten des Parameters definiert sind, was genügt. Die Kurve ist eine (ungeschlossene) *Jordan*sche Kurve, die einen von Null verschiedenen äußeren Inhalt besitzt. Dieser *Jordan*sche Kurvenbogen C ist dann, da der innere Inhalt Null ist, *nicht quadrierbar.*

*Verbindet man die Endpunkte dieser ungeschlossenen *Jordan*schen Kurve C durch einen das Quadrat nicht treffenden *Jordan*schen Kurvenbogen, so erhält man *ein von einer geschlossenen Jordanschen Kurve begrenztes Gebiet, das nicht quadrierbar ist.*

Das allgemeine Prinzip, solche nicht quadrierbare *Jordan*sche Kurven zu konstruieren, besteht[375]) in folgendem: Nach dem in Nr. **14** [bei [255])] erwähnten Satz kann man durch jede beliebige punkthafte abgeschlossene Menge P der Ebene eine geschlossene *Jordan*sche Kurve $\mathfrak{C}$ legen. Wählt man die Menge P so, daß ihr äußerer Inhalt in der Ebene von Null verschieden ist, so ist $\mathfrak{C}$ nicht quadrierbar.

375) *Nach einer Bemerkung von *A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 202.*

Endlich sei in diesem Zusammenhang noch darauf hingewiesen, daß *C. Jordan* bewiesen hat[376]): Jede *rektifizierbare* [siehe Nr. 40 bei [753])] *Jordan*sche Kurve (sowie, wenn sie geschlossen ist, das von ihr begrenzte Gebiet) ist auch *quadrierbar.**

20. Das Borelsche und das Lebesguesche Maß. Die für die Anwendungen so wichtige Frage nach dem Inhalt der Mengen hat erst durch *E. Borel* und *H. Lebesgue* eine Lösung erhalten, die vollkommen befriedigt. Die oben [Nr. 18 u. 19] behandelten Definitionen hatten nämlich alle ihre Übelstände: *Der *Cantor*sche Inhalt der Summe zweier elementenfremder Mengen kann verschieden sein von der Summe der Inhalte der beiden Mengen[377]);* die Definition von *G. Cantor* ist überhaupt eigentlich auf die abgeschlossenen Mengen zugeschnitten, da sie einer Menge und ihrer Ableitung den gleichen Inhalt erteilt. Die Definition von *C. Jordan* gibt eine zu große Anzahl nicht meßbarer Mengen. Wie man sehen wird, besitzt die Definition, die *H. Lebesgue* durch Verallgemeinerung der von *E. Borel* herrührenden Definition erhalten hat, keine derartigen Übelstände.

E. Borel[378]) sucht den Inhalt oder (wie man bei diesen allgemeineren Definitionen von *E. Borel* und *H. Lebesgue* zu sagen pflegt) das *Maß*[379]) einer Menge „von innen heraus (du dedans)“[380]) zu definieren; d. h. (wenn man sich der Einfachheit halber in den Fall einer Dimension versetzt): anstatt die Gerade willkürlich in Strecken zu teilen und diejenigen zu zählen, die Punkte der Menge enthalten, geht man gerade umgekehrt von der Menge aus und versucht, ihre Punkte mittels

376) **C. Jordan,* Cours d'analyse[12]) 1, 2. éd., p. 107; 3. éd., p. 106.

Ch. J. de la Vallée Poussin [Cours d'analyse infinitesimale 1, 2. éd. (Louvain-Paris 1909), p. 366; 3. éd. (1914), p. 385] hat einen noch allgemeineren Satz gegeben: Jede geschlossene *Jordan*sche Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ist quadrierbar, wenn mindestens eine der beiden Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ von beschränkter Schwankung [vgl. Nr. 22 und Nr. 40 (bei [753]))] ist.*

377) *Beispiel: Die Summe der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1.*

378) *E. Borel,* Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, p. 46; [*ebenso 2. éd. 1914.*]

379) *Diese Unterscheidung zwischen „*Inhalt*“ [*Cantor*sche und *Jordan*sche Definition] und „*Maß*“ [*Borel*sche und *Lebesgue*sche Definition] ist in analoger Weise auch im Französischen und Englischen üblich: im Französischen pflegt man entsprechend zwischen „*étendue*“ und „*mesure*“, im Englischen zwischen „*content*“ und „*measure*“ zu unterscheiden. Doch hat sich im Deutschen und in den anderen Sprachen dieser Wortgebrauch noch nicht völlig unumschränkt durchgesetzt. [Z. B. gebraucht neuerdings *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, Kap. V, das Wort „Inhalt“ für die *Lebesgue*sche Definition, während er sich den Ausdruck „Maß“ für seine eigene Meßbarkeitstheorie (vgl. Nr. 20b) vorbehält.]*

380) Siehe *E. Borel,* Revue gén. des sciences 20 (1909), p. 320.

kleiner Strecken, die man konstruiert, zu bedecken. *Das *wesentlich* Neue ist aber, daß *E. Borel* sich dabei nicht auf *endlich* viele, nicht übereinandergreifende Strecken beschränkt (wie es bei den früheren Inhaltsdefinitionen geschehen ist), sondern *abzählbar unendlich* viele solche Strecken zuläßt.*

Nehmen wir an, daß eine Menge M durch die Punkte einer abzählbar unendlichen Menge von Intervallen gebildet wird, die nicht übereinandergreifen Ihre Längen mögen eine konvergente Reihe von der Summe S bilden. Diese Summe sei dann das Maß der Menge M.

Um das Maß einer anderen Menge zu definieren, stellt *E. Borel* die folgenden Prinzipien auf:

a_1) Eine Menge, welche die Summe zweier oder mehrerer anderer vom Maße $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ist, hat zum Maß:

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n,$$

wofern diese Teilmengen keinen Punkt gemeinsam haben.

a_2) Ist eine Menge die Summe abzählbar unendlich vieler Mengen vom Maß $S_1, S_2, \ldots, S_\nu, \ldots$, die keine gemeinsamen Punkte besitzen, so hat sie zum Maß die Summe der Reihe

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_\nu + \cdots.$$

b) Enthält ferner eine Menge E vom Maß S alle Punkte einer Menge E_1 vom Maß S_1, so hat die Menge $E - E_1$ das Maß $S - S_1$.

E. Borel nennt „meßbar" diejenigen Mengen, deren Maß man, von endlich oder abzählbar unendlich vielen Intervallen[381]) ausgehend, mittels der vorstehenden Prinzipien bestimmen kann. Zur Unterscheidung von anderen Meßbarkeitsbegriffen werden diese Mengen als *„nach Borel meßbar"* oder *„im Borelschen Sinne meßbar"* bezeichnet. **H. Lebesgue*[382]) definiert diese Mengen [die er *„ensembles mésurables B"* nennt] in abweichender Weise als diejenigen Mengen, die man, ausgehend von endlich oder abzählbar unendlich vielen Intervallen[381]), durch endlich oder abzählbar häufige Anwendung der beiden folgenden Operationen erhalten kann: α) Bildung der Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen; β) Bildung des Durchschnitts von endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen. Es läßt sich zeigen daß die beiden Mengensysteme, die durch diese beiden Konstruktionsverfahren (a_1, a_2, b) bzw. (α, β) erzeugt werden, identisch

381) *Bei mehreren Dimensionen hat man von der Gesamtheit der n-dimensionalen Intervalle auszugehen.*

382) **H. Lebesgue*, J. de math. (6) 1 (1905), p 165. Früher schon so ähnlich, jedoch mit der später beseitigten Einschränkung, daß die Operationen α) und β) nur endlich oft angewendet werden sollen, in: Pariser Thèse 1902, p. 10 = Annali di mat. (3) 7 (1902), p. 240; Leçons sur l'intégration[89]), p. 108/9.*

sind.[383]) Diese „nach *Borel* meßbaren Mengen", die nach *F. Hausdorff*[114]) kürzer als *„Borelsche Mengen"* bezeichnet werden, sind demnach genau die bereits in Nr. **9b** in anderem Zusammenhang betrachteten Mengen.*

Das Maß ist niemals negativ; es kann aber Null sein, und zwar auch für eine nicht abzählbare Menge. Z. B. hat die Menge, die [in Nr. 7] dadurch erhalten wurde, daß man aus der Strecke [0, 1] sukzessive eine Strecke gleich $\frac{1}{3}$, zwei Strecken gleich $\frac{1}{9}$, . . ., ausschließt, das Maß Null, obwohl sie perfekt ist. Sind zwei auf der Strecke [0, 1] gelegene Mengen komplementär, so haben ihre Maße (falls sie existieren) die Einheit zur Summe.

Da ein einzelner Punkt das Maß Null hat, so besitzt auch jede abzählbare Menge das Maß Null. Jede offene Menge ist im *Borel*schen Sinne meßbar und deshalb (als Komplementärmenge) auch jede abgeschlossene Menge. *Im übrigen sei hier auf die Ausführungen von Nr. **9b** verwiesen.*

---

383) *Zunächst ergibt sich aus Betrachtungen von *H. Lebesgue,* J. de math. (6) 1 (1905), p. 160/5, daß die Gesamtheit der in angegebener Weise durch (α, β) entstehenden Mengen identisch ist mit der Gesamtheit der durch (α, b) erzeugten Mengen. Es bleibt aber dabei gegenüber der ursprünglichen *Borel*schen Fassung der wesentliche Unterschied bestehen, daß bei dieser [$a_{1,2}$] nur elementenfremde Mengen vereinigt werden, dagegen hier bei der *Lebesgue*schen Fassung [α] auch Mengen mit gemeinsamen Elementen. Das *Borel*sche Konstruktionsverfahren ist also hiernach sicherlich nicht weittragender als das *Lebesgue*sche; daß aber die beiden Konstruktionsverfahren ($a_{1,2}$, b) und (α, b) genau das gleiche Mengensystem erzeugen, kann man, nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn *F. Hausdorff,* folgendermaßen zeigen (über die dabei verwendeten Begriffe [Ring, Körper, σ-System] siehe den Schluß von Nr. **9b**):

Im eindimensionalen bzw. n-dimensionalen Raum bildet die Gesamtheit der offenen Mengen einen Ring $\mathfrak{R}_0$. Der kleinste Körper $\mathfrak{K}_1$ über diesem Ring $\mathfrak{R}_0$ läßt sich durch Differenzbildung und Summation von endlich vielen, elementenfremden Mengen erzeugen [siehe *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 16], also durch das *Borel*sche Konstruktionsverfahren (a_1, b). Ferner führt von diesem Körper $\mathfrak{K}_1$ aus die Operation (α) nicht weiter als die Operation ($a_{1,2}$); denn statt $\mathfrak{S}(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \ldots)$, wobei die A_n Mengen von $\mathfrak{K}_1$ sind, kann man

$$\mathfrak{S}(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots) = B_1 + (B_2 - B_1) + (B_3 - B_2) + \cdots + (B_n - B_{n-1}) + \cdots$$

schreiben, wo $B_n = \mathfrak{S}(A_1, A_2, A_3, \ldots A_n)$ bedeutet und wieder zu $\mathfrak{K}_1$ gehört, und wo nun die ebenfalls zu $\mathfrak{K}_1$ gehörenden Mengen ($B_n - B_{n-1}$) sämtlich zueinander elementenfremd sind. Die Mengen $\mathfrak{S}(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots)$ bilden das kleinste σ-System $\mathfrak{R}_1$ über $\mathfrak{K}_1$, das wieder ein Ring ist [siehe Mengenlehre, p. 23/4].

Man kann nun $\mathfrak{R}_1$ wieder genau ebenso wie $\mathfrak{R}_0$ behandeln, und so läßt sich dieses Beweisverfahren unbegrenzt weiterführen, und es läßt sich (da die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge von ineinandergeschachtelten Ringen wieder ein Ring ist) auch ins Transfinite fortsetzen.*

H. Lebesgue[384]) stellt eine neue Definition des Maßes auf, indem er sich, ähnlich wie *E. Borel*, im voraus die Eigenschaften gibt, die er dem Maß beilegen will.

Er will möglichst jeder beschränkten Menge eine nicht negative Zahl (ihr „*Maß*") zuordnen, die folgende Eigenschaften hat:

1. Es gibt Mengen, deren Maß von Null verschieden ist.

2. Zwei kongruente Mengen haben dasselbe Maß.

3. Eine Menge, welche die Summe von endlich vielen oder von abzählbar unendlich vielen Mengen ohne gemeinsame Punkte ist, hat als Maß die Summe der Maße dieser Teilmengen.

$_*$Die Frage nach einer solchen Maßzahl nennt *H. Lebesgue* das *Inhaltsproblem.**

Im Falle einer Dimension legen wir willkürlich einer Strecke von der Länge 1 das Maß 1 bei. Man sieht ohne Mühe, daß das Maß einer beliebigen Strecke ihre Länge ist. Schließen wir nun die Punkte einer auf der Strecke [0, 1] gelegenen Menge E in endlich oder abzählbar unendlich viele Intervalle ein, deren Summe die Länge (oder das Maß) Δ hat; dann soll das Maß von E, wenn es existiert, kleiner oder gleich Δ sein. *H. Lebesgue* bezeichnet die untere Grenze der Menge der Zahlen Δ als *äußeres Maß* (mesure extérieure) von E und stellt es durch das Symbol $m_e E$ dar; $_*$im Deutschen bezeichnet man es mit $m_a E$*.

Sei $C(E)$ die Komplementärmenge von E in $[0, 1]$. Dann nennt er den Ausdruck

$$1 - m_a C(E)$$

das *innere Maß* (m. intérieure) von E und stellt es durch das Symbol $m_i E$ dar.[385])

Dann ist das äußere Maß von E größer oder gleich dem inneren Maß $m_i E$.

Man nennt „*im Lebesgueschen Sinne meßbar*" oder „*nach Lebesgue*

384) *H. Lebesgue*, [$_*$Pariser Thèse 1902, p. 5/15 =*] Ann. di mat. (3) 7 (1902), p. 235/45; Leçons sur l'intégration[89]), p. 102/10. *H. Lebesgue* erklärt [Leçons sur l'intégration[89]), p. 109 Anm.], in der Definition von *E. Borel* die Anregung zu seiner eigenen Definition gefunden zu haben.

Eine gute Darstellung der *Lebesgue*schen Meßbarkeitstheorie findet sich bei *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Cours d'analyse infinitésimale, Bd. I, 2. éd. (Paris et Louvain 1909), p. 240/52; $_*$3. éd. (1914), p. 59/69; Bd. II, 2. éd. (1912), p. 103/5; sowie [etwas anders, mehr im Sinn von *W. H. Young*[388])] in: Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire, Paris 1916, p. 16/27.*

385) $_*$*C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 232 u. 275, gebraucht für m_a und m_i die zweckmäßigen Bezeichnungen m^* und m_*. Vgl. auch [379]) und Nr. **20b.***

meßbar" oder meist kurz *„meßbar"* diejenigen Mengen, für die das innere Maß gleich dem äußeren ist; *in diesem Fall heißt der gemeinsame Wert von m_a und m_i das *Maß* der Menge E und wird mit mE bezeichnet.* Für die meßbaren Mengen ist das weiter oben gestellte Inhaltsproblem lösbar und gelöst, und es gibt keine anderen Lösungen desselben (wenn man solche Lösungen, die sich um einen konstanten Faktor unterscheiden, als nicht verschieden ansieht).[386]

Für die Meßbarkeit einer Menge E ist notwendig und hinreichend, daß man die Menge E in eine Intervallmenge α und die Komplementärmenge $C(E)$ in eine Intervallmenge β einschließen kann, derart, daß das Maß des Durchschnitts dieser Intervallmengen α und β kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ε ist.

*Zu genau demselben Maßbegriff wie *H. Lebesgue* sind etwas später, aber offenbar unabhängig von ihm, auch *G. Vitali*[387]) und (auf anderem Wege) *W. H. Young*[388]) gelangt. *W. H. Young* definiert das äußere Maß einer Menge E als die untere Grenze der Maße der E einschließenden offenen Mengen; das innere Maß von E als die obere Grenze der Maße der in E enthaltenen abgeschlossenen Teilmengen[389]); wenn äußeres und inneres Maß übereinstimmen, wird ihr gemeinsamer Wert wieder einfach als Maß bezeichnet und die betreffende Menge wird wieder meßbar genannt. Dabei wird naturgemäß das Maß einer Menge von nicht übereinandergreifenden Intervallen durch die Summe der Längen der

386) *Eine genaue axiomatische Charakterisierung der im *Lebesgue*schen Sinne meßbaren Mengen und ihrer Maße hat *W. Sierpiński*, Bull. Acad. Cracovie (A) 1918, p. 173/8, gegeben. [Dabei spielt eine wesentliche Rolle die Forderung, daß jede Teilmenge einer Menge vom Maß Null selbst meßbar sein soll.] Vgl. dazu auch *M. Fréchet*, Paris C. R. 170 (1920), p. 563/4.*

387) *G. Vitali*, Rendic. Istit. Lomb. (2) 37 (1904), p. 69/73, wo der Begriff des äußeren Maßes [„minima estensione"] behandelt wird, und Rendic. Circ. mat. Palermo 18 (1904), p. 116/26, wo der Begriff der Meßbarkeit gegeben wird; als Definition der Meßbarkeit wird die im obigen Text unmittelbar vorhergehende notwendige und hinreichende Bedingung genommen; im wesentlichen also wie bei *H. Lebesgue*.*

388) *W. H. Young*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 16/51; systematische Darstellung seiner Untersuchung in *W. H.* u. *G. Ch. Young*, Theory, Kap. V, p. 76/120.

Er gebraucht meist die Bezeichnung *„content"* und *„inner* bzw. *outer content"*. [Vgl. dazu [379]); die dort angegebene Unterscheidung zwischen *„content"* und *„measure"* findet sich z. B. bei *E. W. Hobson*, Theory, siehe p. 102.]*

389) *Da das innere Maß die obere Grenze der Maße der abgeschlossenen Teilmengen und (weil die abzählbaren Mengen das Maß Null haben) auch die obere Grenze der Maße der perfekten Teilmengen ist, so ergibt sich: Jede Menge, die *nicht vom inneren Maß Null* ist, besitzt die *Mächtigkeit des Kontinuums*.*

Teilintervalle definiert und das Maß einer abgeschlossenen Menge z. B. mit Hilfe des Maßes der komplementären punktfreien Intervalle.*

H. Lebesgue entwickelt seine Definition auch im Falle zweier Dimensionen, indem er zunächst dem Quadrate von der Seite 1 das Maß 1 zuerteilt und dann das Maß eines Dreiecks, eines Polygons definiert. Für eine beliebige Menge definiert er das *äußere Maß* als die untere Grenze der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke, welche die Menge bedecken; das *innere Maß* mittels des äußeren Maßes der Komplementärmengen. *Meßbar* sind wieder diejenigen Mengen, für die beide Maßzahlen übereinstimmen. *Genau analog ist alles im Falle von noch mehr Dimensionen. Auch *W. H. Young*s Betrachtungsweise läßt sich auf mehr Dimensionen übertragen.[389a])*

*Eine in Form und Bezeichnungsweise von *H. Lebesgue* abweichende Darstellung seiner Theorie haben neuerdings *E. Zermelo* und *W. Alexandrow*[390]) gegeben.*

*Heben wir noch zwei Bezeichnungen hervor, die sich jetzt allgemein eingebürgert haben: Eine Menge vom *Lebesgue*schen Maß Null wird kurz als *„Nullmenge“* bezeichnet; und für „überall, ausgenommen eine Nullmenge“ wird noch kürzer *„fast überall“*[390a]) gesagt.*

Die wichtigsten Eigenschaften des *Lebesgue*schen Maßes sind die folgenden:

Die Vereinigungsmenge S von abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen M_ν ist selbst meßbar; *sind speziell die Mengen M_ν elementenfremd, so ist das Maß von S gleich der Summe der Maße von M_ν.* Der Durchschnitt von abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen ist ebenfalls meßbar. *Ebenso ist die Differenz einer meßbaren Menge M und einer meßbaren Teilmenge M_1 selbst meßbar, und zwar ist das Maß der Differenz gleich der Differenz der Einzelmaße.*

*Daraus folgt: Jede nach *Borel* meßbare Menge ist auch im *Lebesgue*schen Sinne meßbar; und zwar stimmen dann auch die Maßzahlen überein.*

389a) *Vgl. *W. H.* u. *G. Ch. Young,* Theory, Kap. XII (p. 238/63).*

390) *In der bei *E. Zermelo* entstandenen Züricher Dissertation von *W. Alexandrow*, Elementare Grundlagen für die Theorie des Maßes, Zürich 1915. Hier wird das *Lebesgue*sche äußere Maß als „Maß“ schlechthin bezeichnet, und an die Stelle des inneren Maßes von E tritt hier die Differenz zwischen äußerem und innerem Maß von E; sie wird *„Diskrepanz“* von E genannt (in Zeichen: $\mathfrak{d}E$) und zwar wird diese eingeführt als die untere Grenze des Maßes der Durchschnitte aller E umfassenden Intervallmengen α mit den die Komplementärmenge $C(E)$ umfassenden Intervallmengen β. Wenn $\mathfrak{d}E = 0$ ist, heißt die Menge E wieder „meßbar“. — Vgl. übrigens [387]).*

390a) *„*presque partout*“; *H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. 27 (1910), p. 376.*

Jede im *Lebesgue*schen Sinne meßbare Menge enthält eine nach *Borel* meßbare Menge von gleichem Maß, *nämlich die Vereinigungsmenge einer Folge von abgeschlossenen Teilmengen,* und ist in einer nach *Borel* meßbaren Menge von gleichem Maß, *nämlich dem Durchschnitt einer Folge von einschließenden offenen Mengen,* enthalten.[391]

Daraus folgt: Für die Meßbarkeit einer Menge ist notwendig und hinreichend, daß sie Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar unendlich vielen perfekten Mengen und einer Menge vom Maße Null ist (wobei einer dieser Bestandteile auch fehlen kann). Ferner ist für die Meßbarkeit einer Menge notwendig und hinreichend, daß sie Differenz zwischen einem Durchschnitt von endlich oder abzählbar unendlich vielen offenen Mengen und einer Menge vom Maße Null ist (wobei die abzuziehende Nullmenge auch fehlen kann).[392]

*Bezeichnet man den äußeren *Jordan*schen Inhalt mit i_a und den inneren Inhalt mit i_i, so ist

$$i_i \leqq m_i \leqq m_a \leqq i_a.$$

Daraus ergibt sich, daß eine Menge, die im *Jordan*schen Sinne meßbar ist, immer auch nach *Lebesgue* meßbar ist und daß dann Inhalt und Maß dem Werte nach übereinstimmen. Dagegen gibt es Mengen, die nach *Jordan* meßbar sind (und z. B. den Inhalt Null besitzen), und die trotzdem *nicht* im *Borel*schen Sinne meßbar sind. [Siehe hierüber weiter unten.]*

Der innere Inhalt *C. Jordans* ist das Maß der Menge der inneren

391) *Übrigens enthält jede beliebige Menge E vom *inneren* Maß k eine im *Borel*schen Sinne meßbare Menge vom Maß k (nämlich die Vereinigungsmenge einer Folge von abgeschlossenen Teilmengen) und jede beliebige Menge E vom *äußeren* Maß k ist in einer nach *Borel* meßbaren Menge vom Maße k (nämlich dem Durchschnitt einer Folge von einschließenden offenen Mengen) enthalten. Hierfür (sowie allgemeiner, wenn man derartige Mengen hat, die wenn auch nicht nach *Borel*, so doch nach *Lebesgue* meßbar sind) werden die Bezeichnungen „*maßgleicher Kern*“ bzw. „*maßgleiche Hülle*“ von E gebraucht; [letztere Bezeichnung stammt von *E. Zermelo* (bei *W. Alexandrow*[390]), p. 6 u. 62), erstere von *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 261 u. 279]. Der Überschuß im ersten Fall und die Differenz im zweiten Fall ist jedesmal eine Menge vom *inneren* Maß Null und vom *äußeren* Maß λ, wenn λ die Differenz des äußeren und inneren Maßes von E bezeichnet.*

392) *Speziellere Untersuchungen der Nullmengen, ihrer Struktur und Klassifikation bei: *E. Borel,* Paris C. R. 152 (1911), p. 576/8; 154 (1912), p. 568/70; a. a. O. [338]); Bull. Soc. math. France 47 (1919), p. 97/125; [diese Arbeiten sind, abgesehen von der ersten Note, abgedruckt in *E. Borel,* Méthodes et problèmes de théorie des fonctions, Paris 1922, p. 12/15; 20/38; 38/66]; *G. Valiron,* Paris C. R. 169 (1919), p. 953/4; *S. Stoïlow,* Paris C. R. 169 (1919), p. 766/8; 171 (1920), p. 539/41.*

Punkte; der äußere Inhalt ist das Maß der abgeschlossenen Hülle der Menge. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Menge im *Jordan*schen Sinne meßbar sei, besteht darin, daß ihre Begrenzung das *Lebesgue*sche Maß Null besitzt.[393])

*Für abgeschlossene Mengen stimmt der *Cantor*sche Inhalt (der *äußere Jordan*sche Inhalt) mit dem *Borel-Lebesgue*schen Maß überein [wie unmittelbar aus dem *Heine-Borel*schenTheorem folgt].[394]) Ebenso stimmt für offene Mengen der *innere Jordan*sche Inhalt mit dem *Borel-Lebesgue*schen Maß überein.*

*Die Existenz von Mengen, die *nicht* im *Borel*schen Sinne meßbar sind, ergibt sich aus einfachen Mächtigkeitsbetrachtungen. Man sieht nämlich leicht, daß die Gesamtheit der nach *Borel* meßbaren Mengen die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, während die Gesamtheit aller (etwa linearen) Punktmengen eine höhere Mächtigkeit besitzt (nämlich die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ aller eindeutigen reellen Funktionen; siehe hierüber Nr. 7). Andererseits ist auch die Mächtigkeit der Gesamtheit aller nach *Lebesgue* meßbaren Mengen und sogar die Mächtig-

---

393) *Natürlich besagt dies nicht mehr als die bereits in Nr. 19 angegebene Bedingung, daß die Begrenzung der Menge den *Jordan*schen Inhalt Null besitzen soll.

Hier seien noch zwei mit dem *Jordan*schen Inhalt zusammenhängende Begriffsbildungen von *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 289/90, erwähnt: Ist $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A und ist $\underline{A}$ die größte offene Teilmenge von A, dann nennt er A *„nach außen quadrierbar"* bzw. *„nach innen quadrierbar"*, wenn $m(\bar{A} - A) = 0$ bzw. $m(A - \underline{A}) = 0$ ist. Ist beides der Fall, dann ist die Menge *quadrierbar* (d. h. sie hat einen *Jordan*schen Inhalt).*

394) *Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß *A. Denjoy* [Paris C. R. 150 (1910), p. 597], ausgehend vom *Cantor*schen Inhaltsbegriff, einen neuen Inhaltsbegriff formuliert hat: Die vorgelegte Menge E wird auf alle möglichen Weisen in endlich oder abzählbar unendlich viele elementenfremde Teilmengen zerlegt, und jedesmal wird die Summe der *Cantor*schen Inhalte dieser Teilmengen gebildet; von diesen Summen nimmt er nun die untere Grenze, die er dann als „Inhalt im verallgemeinerten *Cantor*schen Sinn" bezeichnet. Dieser Begriff deckt sich jedoch, wie *A. Denjoy* selbst hervorhebt, auch bei meßbaren Mengen keineswegs mit dem *Borel*schen oder gar dem *Lebesgue*schen Maßbegriff; nur bei gewissen ausgezeichneten Mengenarten [darunter bei den nach *Jordan* meßbaren Mengen] liefert der Begriff von *A. Denjoy* dasselbe Resultat wie der *Lebesgue*sche Meßbarkeitsbegriff.

Wenn man übrigens in analoger Weise vom *inneren Inhalt* ausgeht und die obere Grenze der Summe der inneren Inhalte der Teilmengen betrachtet, so erhält man nur wieder den *Jordan*schen inneren Inhalt. Man könnte diesen und den (als äußeres Maß aufgefaßten) *Denjoy*schen Begriff zusammennehmen; auf diese Weise würde man zu einem neuen Maßbegriff gelangen, dessen Umfang zwischen dem des *Jordan*schen Inhalts und dem des *Lebesgue*schen Maßes stehen würde.*

keit der Gesamtheit aller nach *Jordan* meßbaren Mengen gleich der Mächtigkeit f aller Punktmengen; denn die Teilmengen einer perfekten Menge vom Maß Null sind alle ebenfalls vom *Lebesgue*schen Maß Null sowie vom *Jordan*schen Inhalt Null, und ihre Gesamtheit besitzt die Mächtigkeit f. Daraus folgt also die Existenz von Mengen, die nicht nach *Borel* meßbar sind, die aber trotzdem nach *Lebesgue* und sogar nach *Jordan* meßbar sind. Dadurch ist schließlich bewiesen, daß der Begriff der nach *Lebesgue* meßbaren Mengen wesentlich umfassender ist als der Begriff der nach *Borel* meßbaren Mengen.*

H. Lebesgue[395]) ist es sogar gelungen, gänzlich bestimmte Beispiele von Mengen zu konstruieren, die nicht nach *Borel* meßbar sind, die aber trotzdem im *Lebesgue*schen Sinne *und sogar im *Jordan*schen Sinne* meßbar sind.

*Der engere Begriff der nach *Borel* meßbaren Mengen behält trotzdem seine große Bedeutung: Das geht schon aus der in Nr. **9b** gegebenen Darstellung hervor.* Seine Wichtigkeit zeigt sich ferner insbesondere darin, daß jede Funktion jeder *Baire*schen Klasse *und demnach überhaupt jede durch einen analytischen Ausdruck darstellbare Funktion* im *Borel*schen Sinne meßbar ist. *[Siehe hierüber Nr. **53**, **54**, **54a** u. **55**.]*

Daß weiterhin auch Mengen existieren, die sogar im *Lebesgue*schen Sinne *nicht meßbar* sind, ist zuerst von *G. Vitali*[396]), dann von *H. Lebesgue*[397]), *E. B. Van Vleck*[398]), **F. Bernstein*[399]), *F. Hausdorff*[400]), *C. Bur-*

395) **H. Lebesgue,* J. de math. (6) 1 (1905), p. 213/6. Andere Beispiele werden durch diejenigen „Mengen (A)" geliefert, die keine *Borel*schen Mengen sind [vgl. Nr. 9b]; alle „Mengen (A)" sind nämlich im *Lebesgue*schen Sinne meßbar [vgl. [126])].*

396) *G. Vitali,* Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, Bologna 1905.

*Vgl. dazu auch *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 349/54. Er zeigt, daß jede Punktmenge von nicht-verschwindendem äußeren Maß nicht-meßbare Teilmengen enthält.*

397) Bull. Soc. math. France 35 (1907), p. 202/12.

398) Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 237/44. *Siehe hierzu auch *N. J. Lennes,* Trans. Amer. Math. Soc. 14 (1913), p. 109/12.*

399) *Berichte Ges. Wiss. Leipzig 60 (1908), p. 329/30. Man muß zu den Überlegungen *F. Bernsteins* ausdrücklich die Voraussetzung der Wohlordenbarkeit des Kontinuums hinzunehmen; dann kann man schließen, daß Mengen existieren, die gleichzeitig mit ihren Komplementärmengen total imperfekt [siehe Nr. 6 Schluß] sind, also nicht meßbar sind.*

400) *Mengenlehre p. 401/2; Math. Ann. 75 (1914), p. 428/9. Das von *F. Hausdorff* angewendete Verfahren ist dem von *G. Vitali* ziemlich ähnlich.*

stin[400a]), sowie von *W. Sierpiński* und *N. Lusin*[400aa])* bewiesen worden. Allerdings benutzen alle diese Existenzbeweise das *Zermelo*sche Auswahlaxiom [siehe Anm. [106])]; diese Beweise sind also nur für diejenigen bindend, die das *Zermelo*sche Axiom anerkennen. *C. *Burstin*[400b]) und *W. Sierpiński*[400c]) haben versucht, den Beweis der Existenz nicht-meßbarer Mengen ohne Verwendung des Auswahlaxioms, nur mit Hilfe von Mächtigkeitsbetrachtungen zu erbringen; doch lassen sich sehr wahrscheinlich die benutzten Mächtigkeitssätze nicht ohne Auswahlaxiom beweisen.[400d])*

Für solche nicht-meßbare Mengen könnte das Inhaltsproblem vielleicht trotzdem (durch noch allgemeinere Methoden) lösbar sein:

*F. *Hausdorff*[400]) hat nun aber darauf aufmerksam gemacht, daß für den von ihm angegebenen Typus von nicht-meßbaren Mengen *das Inhaltsproblem überhaupt nicht lösbar ist.* [Dasselbe kann übrigens auch für die von *G. Vitali* angegebenen nicht-meßbaren Mengen behauptet werden[401])]: *F. Hausdorff*s Mengen entstehen nämlich dadurch, daß ein Kreisumfang in abzählbar unendlich viele, untereinander kongruente Teilmengen zerlegt wird. — Die Mächtigkeit dieser Mengen, für die das Inhaltsproblem nicht lösbar ist, ist sogar gleich der Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ der Gesamtheit aller Punktmengen.[402])

F. Hausdorff hat das oben gestellte Inhaltsproblem in folgender Weise noch verallgemeinert: Er läßt in 3. jede Forderung für die Summe von *abzählbar unendlich vielen* elementenfremden Mengen fallen, behält also Forderung 3. nur für Summen von *endlich vielen* elementenfremden Mengen bei. Es ist ihm sodann der Nachweis gelungen[403])

400a) *Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien 125, IIa (1916), p. 209/17. Hier wird das lineare Intervall in genau $\mathfrak{c}$ nicht-meßbare Teilmengen zerlegt; vgl. auch [107]). Siehe ferner hierzu *St. Mazurkiewicz,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 8/14.*

400aa) *Paris C. R. 165 (1917), p. 422/4. Auch hier wird [durch ein mit [400a]) verwandtes Verfahren] das lineare Intervall in $\mathfrak{c}$ nicht-meßbare Teilmengen zerlegt.*

400b) **C. Burstin,* Sitzgber. Ak. Wiss. Wien 123, IIa (1914), p. 1543/51; der Beweis hatte sich ursprünglich auf einen falschen Hilfssatz gestützt, ist aber berichtigt worden: Monatsh. Math. Phys. 17 (1916), p. 163/5.*

400c) **W. Sierpiński,* Paris C. R. 164 (1917), p. 882/4.*

400d) *Bei *C. Burstin*[400b]) benötigt man offenbar das Auswahlpostulat zur Auswahl der Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ (p. 1545/6); bezüglich *W. Sierpiński*[400c]) vgl. die Bemerkungen bei *H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. 35 (1918), p. 238/9.*

401) *Auch für die nicht-meßbaren Mengen, die *H. Lebesgue*[397]) nach seinem Verfahren erhält, wenn er speziell an die Menge der abzählbaren Teilmengen eines Intervalls anknüpft, ist das Inhaltsproblem nicht lösbar.*

402) **F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 418.*

403) **F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 469/72; Math. Ann. 75 (1914), p. 428/33.*

[ebenfalls mit Hilfe des Auswahlprinzips], daß wenigstens auf der Kugel und deshalb auch im drei- oder mehrdimensionalen (Euklidischen) Raum Mengen existieren, für die *sogar das verallgemeinerte Inhaltsproblem nicht lösbar ist.*[404]) Für die Punktmengen auf der Geraden und in der Ebene war diese Frage nach der Lösbarkeit des *verallgemeinerten* Inhaltsproblems zunächst noch unbeantwortet geblieben. Neuerdings konnte aber *St. Banach*[404a]) zeigen, daß in diesen Fällen Lösungen existieren; d. h. er konnte für die Gesamtheit aller Punktmengen auf der Geraden bzw. in der Ebene Maßzahlen definieren, die den Bedingungen des verallgemeinerten Inhaltsproblems genügen.[404b])*

*Es sei hier noch auf einige für die meßbaren Mengen charakteristische Eigenschaften hingewiesen. *W. H. Young* und *L. Tonelli*[405]) haben gezeigt, daß dann und nur dann, wenn eine Menge M meßbar ist, folgendes gilt: Bildet man die Vereinigungsmenge von M mit einer willkürlichen anderen elementenfremden Menge W, so ist das innere (bzw. äußere) Maß dieser Vereinigungsmenge gleich der Summe der inneren (bzw. äußeren) Maße von M und W.

Eine ähnliche für die meßbaren Mengen charakteristische Eigenschaft hat *C. Carathéodory*[406]) angegeben: Dann und nur dann, wenn

---

404) *Er zeigt, daß (von einer abzählbaren Menge abgesehen) eine Kugelhälfte mit einem Kugeldrittel kongruent sein kann, oder genauer, daß die Kugeloberfläche in eine abzählbare Menge und außerdem in drei Mengen A, B, C zerlegt werden kann, derart, daß A, B, C und $(B + C)$ paarweise kongruent sind. Vgl. auch Nr. **14**, Anm. [266a]).*

404a) **St. Banach*, Fundamenta math. 4 (1923), p. 7/33.*

404b) *Und zwar sowohl solche Maßzahlen, die für alle (nach *Lebesgue*) meßbaren Mengen mit dem *Lebesgue*schen Maß übereinstimmen, als auch solche, für die dies nicht durchweg der Fall ist.*

405) **W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 42/44; Theory, p. 109/110, hatte nur zeigen können, daß jede Menge M, welche die genannte Eigenschaft besitzt, meßbar ist; darnach hat *L. Tonelli*, Rendic. Istit. Lomb. (2) 41 (1908), p. 776/8, aus Sätzen von *W. H. Young* in einfachster Weise gefolgert, daß jede meßbare Menge M diese Eigenschaft besitzt, und hat damit mehrere von *W. H. Young* eingeführte Begriffsbildungen als völlig überflüssig erwiesen.*

406) **C. Carathéodory*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1914, p. 404/20; Reelle Funktionen, Kap. V, insbes. p. 246 (vgl. auch p. 267/9 und 282).

Daß jeder meßbaren Menge diese Eigenschaft (für m_a und für m_i) zukommt [nicht aber daß diese Eigenschaft für die meßbaren Mengen charakteristisch ist], findet sich schon etwas vorher bei *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 415.

Im Zusammenhang damit hat *F. Hausdorff* [a. a. O.] den Begriff der *relativen Meßbarkeit* gebildet. Er nennt den Durchschnitt einer Menge E mit einer meßbaren Menge M „*eine in E meßbare Menge*". Er folgert aus der eben erwähnten Eigenschaft der meßbaren Mengen den folgenden Satz: Wird eine Menge

M eine meßbare Menge ist, gilt für jede beliebige Menge W von endlichem äußeren Maß[407]) die Beziehung[407a])

$$(\mathfrak{A}) \qquad m_a(W) = m_a(WM) + m_a(W - WM).$$

Genau dasselbe gilt auch für m_i.[408])

Diese auf das *äußere* Maß sich beziehende Eigenschaft hat *C. Carathéodory*[406]) als Definition der meßbaren Mengen benutzt und hierauf eine formale (die *Lebesgue*sche umfassende) Meßbarkeitstheorie aufgebaut; sie kann nach *A. Rosenthal*[409]) auch mit Hilfe der auf die *inneren* Maße sich beziehenden Eigenschaft ($\mathfrak{A}$) begründet werden. [Vgl. Nr. **20b**.]

C. Burstin[409a]) hat die folgende notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, dafür, daß eine Menge E nicht meßbar ist: es soll eine perfekte Menge P von positivem Maß existieren, welche die Eigenschaft besitzt, daß jeder in P enthaltenen perfekten Menge von positivem Maß Punkte der Menge E und ihrer Komplementärmenge $C(E)$ angehören.*

*Des weiteren sei hier noch darauf hingewiesen, daß die *Lebesgue*sche Definition des Maßes nur für *beschränkte* Mengen zu gebrauchen ist; dagegen lassen die von *W. H. Young*[388]) sowie die von *G. Vitali*[387]) und *E. Zermelo-W. Alexandrow*[390]) gegebenen Fassungen des *Lebesgue*schen Maßbegriffes [ebenso auch die Meßbarkeitstheorie von *C. Carathéodory*, vgl. Nr. **20b**] unmittelbar auch die Ausdehnung auf *nicht beschränkte* Mengen zu, (bei *W. H. Young* mit der Einschränkung, daß die in Betracht kommenden Maßzahlen endlich sind). *H. Lebesgue* selbst verfährt anders, um den Begriff der Meßbarkeit und des Maßes auf die nicht beschränkten Mengen zu übertragen:[410]) Er nennt eine

---

$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + \cdots$ in endlich oder abzählbar unendlich viele, untereinander elementenfremde, in E meßbare Mengen E_n zerlegt, so ist

$$(1) \qquad m_a(E) = m_a(E_1) + m_a(E_2) + \cdots + m_a(E_n) + \cdots,$$

$$(2) \qquad m_i(E) = m_i(E_1) + m_i(E_2) + \cdots + m_i(E_n) + \cdots.$$

Ein Teil dieses Satzes ist umkehrbar: Wenn

$$m_a(E) = m_a(E_1) + m_a(E_2) + \cdots + m_a(E_n) + \cdots,$$

so sind die Teilmengen E_n in E meßbar. Dagegen gilt diese Umkehrung für m_i nicht allgemein [a. a. O., p. 415/6 und 419].*

407) *Dieser Zusatz „von endlichem äußeren Maß" könnte hier weggelassen werden, ohne etwas an der Sache zu ändern, da die genannte Relation für unendliches äußeres Maß von W immer identisch erfüllt ist.*

407a) *WM bezeichnet dabei den Durchschnitt von W und M; vgl. [35]).*

408) *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 269.*

409) *A. Rosenthal*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1916, p. 305/21.*

409a) *C. Burstin*, Sitzgsber.[400b]), p. 1539.*

410) *H. Lebesgue*, Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 378/9.*

nicht beschränkte Menge E in der Ebene „meßbar", wenn der in einem ganz beliebigen Kreis[410a]) enthaltene Teil von E meßbar ist. Läßt man den Radius eines Kreises K unbegrenzt wachsen und bleibt dabei das Maß des in K enthaltenen Teiles von E unter einer festen Schranke, dann nennt er E „von endlichem Maß" und sein Maß $m(E)$ ist der (eindeutig bestimmte) Grenzwert des Maßes des in K enthaltenen Teiles von E. Letzteres[411]) ließe sich auch für inneres und äußeres Maß anwenden; man kann dies auch noch etwas anders ausdrücken [sachlich ist es genau dasselbe]: man kann mit *F. Hausdorff*[412]) das innere oder äußere Maß einer nicht beschränkten Menge E definieren durch die obere Grenze der entsprechenden Maßzahlen der in E enthaltenen beschränkten Teilmengen. So kann man auch für den (*Jordan*schen) inneren und äußeren Inhalt verfahren.

Alle diese verschiedenen Möglichkeiten der Übertragung des inneren oder äußeren Maßes bzw. des Maßes selbst auf nicht beschränkte Mengen stimmen sachlich völlig überein. Bei *H. Lebesgue, G. Vitali, E. Zermelo-W. Alexandrow* [und *C. Carathéodory*] ist es sogar im Falle eines unendlichen äußeren und inneren Maßes noch möglich, zwischen „meßbar" und „nicht-meßbar" zu unterscheiden.*

*Zum Schluß sei noch hervorgehoben, daß *das Maß keine Invariante der Analysis situs* ist, d. h. keineswegs bei allen umkehrbar eindeutigen und (beiderseits) stetigen Transformationen ungeändert bleibt; vielmehr können dabei Mengen von positivem Maß in Mengen vom Maß Null übergehen und umgekehrt.[413]) Daraus folgt, daß nicht

410a) *Im Eindimensionalen bzw. n-dimensionalen: Intervall bzw. n-dimensionale Kugel.*

411) *Für den äußeren Inhalt bei linearen Mengen hat schon früher *E. Bortolotti* [Rendic. Accad. Lincei Roma (5) 11_2 (1902), p. 45/52] von diesem Verfahren Gebrauch gemacht.*

412) **F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 416; vgl. auch *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 271/2.*

413) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 193/4. Vgl. auch: *H. Hahn,* Monatsh. Math. Phys. 23 (1912), p. 163/70; *C. Burstin*[400b]), Sitzgsber., p. 1535/7; *W. Sierpiński,* Paris C. R. 162 (1916), p. 716/7, sowie *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 354/9. Die beiden letzteren zeigen, daß jede (beschränkte) lineare Menge aus einer Nullmenge und einem Rest [von erster Kategorie] besteht, der auf eine Nullmenge umkehrbar eindeutig und stetig abgebildet werden kann. — *L. E. J. Brouwer*, Math. Ann. 79 (1918), p. 212/22, hat den zweidimensionalen Fall eingehend untersucht und insbesondere den folgenden Satz [und einen entsprechenden allgemeineren für innere und äußere Grenzmengen] bewiesen: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat von der Seitenlänge 1 und C eine in k enthaltene, im Innern von k nicht-abzählbare abgeschlossene Punktmenge; bei den eineindeutigen und stetigen Transformationen von k in sich schwankt das Maß der Punktmengen, in welche C übergeht, zwischen 0 (inklusive) und 1 (exklusive),

einmal der Begriff der Meßbarkeit eine solche Invariante ist; d. h. bei derartigen Transformationen können meßbare Mengen in nicht-meßbare Mengen übergehen und umgekehrt.[413a]) Deshalb führen *H. Rademacher*[413b]) und *C. Carathéodory*[413]) den Begriff der *„meßbaren Abbildung"* ein, d. h. einer umkehrbar eindeutigen Abbildung, welche samt ihrer Umkehrung die meßbaren Punktmengen wieder in meßbare Punktmengen überführt. Eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung ist dann und nur dann meßbar, wenn sie die Nullmengen ineinander überführt.[413c]) Nach dem vorstehenden gibt es umkehrbar eindeutige und stetige Abbildungen, die nicht meßbar sind. Für die Meßbarkeit stetiger Abbildungen hat *H. Rademacher*[413b]) eine andere notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, in die wesentlich ein „Vergrößerungsverhältnis" eingeht. [Die Teilmenge, wo dieses „Vergrößerungsverhältnis" unendlich oder Null ist, soll auf eine Nullmenge abgebildet werden.] Speziell hat er noch eingehend die meßbaren Abbildungen von Gebieten untersucht.*

20a. *__Spezielle Sätze über Inhalt und Maß.__ Es sollen hier noch einige speziellere Sätze über Inhalt und Maß angegeben werden:

Es seien A_1 und A_2 zwei meßbare Mengen, $(A_1 + A_2)$ ihre Vereinigungsmenge und $(A_1 A_2)$ ihr Durchschnitt; dann ist[414])

$$m(A_1) + m(A_2) = m(A_1 + A_2) + m(A_1 A_2).$$

---

wenn C nirgends dicht ist; zwischen 0 (exklusive) und 1 (exklusive), wenn C weder nirgends dicht noch überall dicht ist.*

413a) *Auf Grund der Wohlordnung des Kontinuums existieren nicht-meßbare Punktmengen, die bei jeder eineindeutigen und beiderseits stetigen Abbildung wieder in nicht-meßbare Mengen übergehen, wie *C. Burstin*[413]) gezeigt hat, und wie übrigens unmittelbar aus der Existenz der Mengen folgt, die zugleich mit ihrer Komplementärmenge „total imperfekt" sind [vgl. [399])]; denn eine solche Menge wird immer wieder in eine Menge gleicher Eigenschaft abgebildet.*

413b) **H. Rademacher*, Eineindeutige Abbildungen und Meßbarkeit, Göttinger Dissertation 1917 = Monatsh. Math. Phys. 27 (1916), p. 183/291, insbes. p. 183, 195/223, 234/5, 236/65. Er faßt übrigens den Begriff der „meßbaren Abbildung" ein wenig anders als *C. Carathéodory*, indem er nicht fordert, daß auch die Umkehrung der Abbildung die meßbaren Punktmengen in meßbare Punktmengen überführen soll; vielmehr gibt er [p. 235] eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Meßbarkeit der Umkehrung einer eineindeutigen, stetigen, „meßbaren" Abbildung. Vgl. auch *H. Hahn*[413]) und Reelle Funktionen I, p. 586/9, der übrigens an letzterer Stelle statt „meßbarer Abbildung" [im Sinne von *H Rademacher*] die Bezeichnung „reguläre Abbildung" verwendet.*

413c) *Diese Bedingung ist nicht hinreichend, wenn die Abbildung nicht als stetig vorausgesetzt wird, wie *H. Rademacher*[413b]), p. 197, durch ein sehr einfaches Beispiel gezeigt hat.*

414) **W. H.* u. *G. Ch. Young*, Theory, p. 107. Vgl. auch *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 403/11.*

Hätte man keine meßbaren Mengen und statt Maß nur *äußeres* bzw. *inneres* Maß, so wäre $=$ durch $\geqq$ bzw. $\leqq$ zu ersetzen.[414a])

Sind speziell A_1 und A_2 zwei elementenfremde Mengen, so ist[415])

$$m_i(A_1) + m_i(A_2) \leqq m_i(A_1 + A_2) \leqq m_i(A_1) + m_a(A_2)$$
$$\leqq m_a(A_1 + A_2) \leqq m_a(A_1) + m_a(A_2)$$

und[415a])

$$0 \leqq m_i(A_1 + A_2) - m_i(A_1) - m_i(A_2)$$
$$\leqq m_a(A_1) + m_a(A_2) - m_a(A_1 + A_2).$$

Alles Bisherige gilt auch, wenn man „Maß“ durch „Inhalt“ ersetzt.

Aus den bei [415]) angegebenen Ungleichungen kann man noch folgern: Das innere bzw. das äußere Maß jeder (nicht abzählbaren) Menge stimmen genau überein mit dem inneren bzw. äußeren Maß ihrer totalen Inhärenz.

Ferner gelten die Sätze[416]):

Ist $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine aufsteigende Folge[417]) meßbarer Mengen, so ist auch ihre Vereinigungsmenge V meßbar und man hat

$$m(V) = \lim_{n=\infty} m(A_n).$$

Ist $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine absteigende Folge[418]) meßbarer Mengen, so ist auch ihr Durchschnitt D meßbar und man hat, wenn mindestens eine der Zahlen $m(B_n)$ endlich ist[419]),

$$m(D) = \lim_{n=\infty} m(B_n).$$

Ist $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine aufsteigende Folge beliebiger Mengen und ist V ihre Vereinigungsmenge, so hat man

$$m_a(V) = \lim_{n=\infty} m_a(A_n).$$

Ist $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine absteigende Folge beliebiger Mengen und

---

414a) *Hierbei gilt auch dann noch das Gleichheitszeichen, wenn nur eine der beiden Mengen A_1, A_2 meßbar ist; vgl. *W. Alexandrow* [390]), p. 67 (Formel 22 u. 21). Siehe auch den Text bei [405]).*

415) **W. H.* u. *G. Ch. Young,* Theory, p. 105, und [414]).*

415a) **C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 266.*

416) **W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 25/6, 28, 44/5; Theory, p. 93/4, 96, 104/5, 110. Siehe auch *F Hausdorff,* Mengenlehre, p. 411/2.

Ein Spezialfall des ersten dieser Sätze (für nirgends dichte, abgeschlossene Mengen) schon bei *W. F. Osgood,* Amer. J. of math. 19 (1897), p. 178.*

417) *D. h. jedes A_n ist in allen folgenden enthalten.*

418) *D. h. jedes B_n ist in allen vorhergehenden enthalten.*

419) *Dieser Satz gilt nicht mehr allgemein, wenn alle $m(B_n)$ [bzw. $m_i(B_n)$] unendlich sind.*

ist D ihr Durchschnitt, so ist, wenn mindestens eine der Zahlen $m_i(B_n)$ endlich ist[419]),

$$m_i(D) = \lim_{n=\infty} m_i(B_n).^{420)}$$

Dagegen[421]) ist (bei nichtmeßbaren Mengen) im allgemeinen der vorletzte dieser Sätze nicht mehr für innere Maße, der letzte nicht mehr für äußere Maße richtig.[421a])

Die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge und der Durchschnitt einer absteigenden Folge von Mengen sind nur Spezialfälle von den in Nr. **15** betrachteten oberen und unteren Limites beliebiger Mengenfolgen. Hierfür ergibt sich[422]) (unmittelbar aus der durch Summe und Durchschnitt ausdrückbaren Definition[273a])): Hat man eine unendliche Menge von meßbaren Mengen, so ist auch ihr oberer und ihr unterer Limes meßbar. Wenn speziell die Folge meßbarer Mengen $E_1, E_2, \ldots$, von denen mindestens eine von endlichem Maß ist, einen Limes E besitzt (d. h. oberer und unterer Limes zusammenfallen [Nr. **15**]), dann ist[422a])

$$m(E) = \lim_{n=\infty} m(E_n).$$

Hieraus und aus den unmittelbar vorhergehenden Sätzen folgt:[423])

420) *Diese vier Sätze gelten für den Inhalt bzw. den äußeren oder inneren Inhalt im allgemeinen nicht. Vgl. übrigens [428]).*

421) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 412, 418/9, hat dies [unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms] bewiesen.*

421a) *Doch gelten die betreffenden Sätze, wenn jede der Mengen A_n [bzw. B_n] der Durchschnitt einer beliebigen festen Menge A_0 [bzw. B_0] mit einer meßbaren Menge C_n ist; vgl. den Schluß von [406]) sowie *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 272/4.*

422) **E. Borel*, Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris 1905, p. 18.*

422a) **C. de la Vallée Poussin*, Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 437. [Wegen Verallgemeinerung dieses und anderer hier genannter Sätze auf beliebige absolut-additive Mengenfunktionen (Nr. **22**) siehe *J. Radon*[475]), erstes Zitat, p. 1317/18; *H. Hahn*, Reelle Funktionen I, p. 393/8, 407].*

423) **E. Borel*, Leçons[422]), p. 18/21. [Der erste der beiden Sätze ist ohne Beweis schon in C. R. Paris 137 (1903), p. 966 ausgesprochen.] Beide Sätze sind besonders einfach bewiesen bei *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse infinitésimale 1, 2. éd. (Louvain-Paris 1909), p. 251/2; 3. éd. (1914), p. 68/9. Weitere Beweise für den ersten der beiden Sätze: *L. Orlando*, Rendic. Acc. Lincei Roma (5) 21_1 (1912), p. 402/3; *G. Giorgi*, ibid., p. 630/33.

Einen speziellen, auf (lineare) Intervallmengen sich beziehenden Fall dieses ersteren Satzes hatte schon wesentlich früher *C. Arzelà* angegeben und bewiesen: Rendic. Acc. Lincei Roma (4) 1 (1885), p. 262/6; auch Mem. Acc. Bologna (5) 8 (1899/1900), p. 701/6; [ein anderer Beweis Mem. Acc. Bologna (5) 8 (1899/1900), p. 131/4 ist unrichtig, da die dort auftretenden Mengen $\delta^{(2)}, \delta^{(4)}, \delta^{(8)}, \ldots$ nicht abgeschlossen sind, ihr Durchschnitt also leer sein könnte]: Ist in einer end-

Wenn unter den meßbaren Mengen $E_1, E_2, \ldots$, die alle einem beschränkten Intervall (bzw. Gebiet) angehören[424]), unendlich viele ein Maß $\geqq k$ besitzen, so hat ihr oberer Limes ebenfalls ein Maß $\geqq k$.

Wenn unter den meßbaren Mengen $E_1, E_2, \ldots$ unendlich viele ein Maß $\leqq k$ besitzen, dann hat ihr unterer Limes ebenfalls ein Maß $\leqq k$

Ferner:[425])

Wenn unter den beliebigen Mengen $E_1, E_2, \ldots$, die alle einem beschränkten Intervall (bzw. Gebiet) angehören[426]), unendlich viele ein *inneres* Maß $\geqq k$ besitzen, so hat ihr oberer Limes ebenfalls ein *inneres* Maß $\geqq k$.

Wenn unter den beliebigen Mengen $E_1, E_2, \ldots$ unendlich viele ein *äußeres* Maß $\leqq k$ besitzen, so hat ihr unterer Limes ebenfalls ein *äußeres* Maß $\leqq k$.

Dieser letzte Satz ist im allgemeinen nicht für das *innere* Maß richtig, der vorletzte Satz nicht für das *äußere* Maß.[427]) Wenn man in den vorstehenden Sätzen „Maß“ durch „Inhalt“ ersetzt, gelten diese Sätze im allgemeinen nicht.[428])

In den vorstehenden Sätzen sind als Spezialfälle ebensolche Sätze über Vereinigungsmenge bzw. Durchschnitt von aufsteigenden bzw. absteigenden Mengenfolgen enthalten.

Noch einige spezielle Inhaltssätze von etwas anderem Charakter seien hier erwähnt.

---

lichen Strecke eine unendliche Folge von Intervallmengen J_ν, die aus je endlich vielen getrennten Intervallen bestehen, vorgelegt und ist die Längensumme jeder J_ν größer als eine positive Zahl k, so gibt es mindestens einen Punkt, der unendlich vielen J_ν angehört. [Beweise für diesen Satz auch bei *F. Hartogs*, H. A. Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, p. 55/57, und *L. Bieberbach*, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 155/7.]*

424) *Oder allgemeiner: die, wenigstens von einem gewissen Index ab, alle einer [nicht notwendig beschränkten] Menge von endlichem Maß angehören.*

425) **W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 25/8, 45/6; Theory, p. 94/6, 114/5. Die Formulierung dieser Sätze ist bei *W. H. Young* unrichtig. Richtige Formulierung und wieder besonders einfache Beweise bei *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse infinitésimale 1, 2. éd. (Louvain-Paris, 1909), p. 252.*

426) *Oder allgemeiner: die, wenigstens von einem gewissen Index ab, alle einer [nicht notwendig beschränkten] Menge von endlichem inneren Maß angehören.*

427) *Wie aus den Betrachtungen von *F. Hausdorff*[421]) folgt.*

428) *Doch gelten für den *Inhalt* wenigstens einige andere, allerdings sehr viel weniger besagende (im obigen enthaltene) Sätze, z. B.: Wenn unter den beliebigen Mengen $E_1, E_2, \ldots$, die alle einem beschränkten Intervall (Gebiet) angehören, unendlich viele einen *inneren Inhalt* $\geqq k$ besitzen, so hat ihr oberer Limes einen *äußeren Inhalt* $\geqq k$. Vgl. *F. Hartogs*, Münchener Habilitationsschrift (Leipzig 1905) = Math. Ann. 62 (1906), p. 4/7.*

Zunächst:[429]) Ist G eine im Intervall $[a, b]$ gelegene meßbare Punktmenge vom positiven Maß m und ist G_x die aus G durch Verschiebung um die Strecke x in Richtung $(a \to b)$ entstehende Menge, dann besitzen die Mengen G und G_x einen Durchschnitt, dessen Maß sich von m um weniger als eine vorgegebene Größe ε unterscheidet, vorausgesetzt, daß die Verschiebung x hinreichend klein ist.[429a])

Ferner:[429b]) Ist Q eine ebene abgeschlossene Menge vom Inhalt Null, so bilden diejenigen Geraden einer jeden Parallelschar, auf denen die Teilmengen von Q einen oberhalb einer Größe σ liegenden linearen Inhalt haben, eine nirgends dichte Menge vom Inhalt Null.

Und umgekehrt: Ist Q eine ebene abgeschlossene Menge und bilden diejenigen Geraden einer Parallelschar, auf denen die bezüglichen Teilmengen von Q einen oberhalb σ liegenden linearen Inhalt haben, für jedes σ eine nirgends dichte Menge vom Inhalt Null, so hat auch Q den Inhalt Null.

In ähnlicher Richtung liegt der folgende wichtige Satz von *G. Fubini*[331]): Eine ebene, (im *Lebesgue*schen Sinne) flächenhaft meßbare Menge M wird von jeder Geraden g einer Parallelschar in einer linear meßbaren Menge getroffen, ausgenommen höchstens eine Nullmenge von Geraden g. Und: Ist M vom Flächenmaß Null, so wird M von jeder Geraden g einer Parallelschar in einer Menge vom linearen Maß Null getroffen, ausgenommen höchstens eine Nullmenge von Geraden g. Wird M als flächenhaft meßbar vorausgesetzt, so gilt auch die Umkehrung hiervon.[430]) Siehe im übrigen hierüber Nr. 45.

Ferner ist der sogenannte *„Überdeckungssatz von Vitali"*[430a]) hervorzuheben:

---

429) *W. H. Young*, Proc. Royal Soc. (London) A, 85 (1911), p. 402/3.*

429a) *Hieraus folgen einige Sätze von *W. Sierpiński*, Giorn. di mat. 55 [= (3) 8] (1917), p. 272/7; Fundamenta math. 1 (1920), p. 116/19, und *H. Steinhaus*, Fundamenta math. 1 (1920), p. 93/104, die aussagen, daß es in meßbaren Mengen von positivem Maß stets Punkte (sogar unendlich viele Punkte) mit rationalen Entfernungen gibt. Dazu auch *H. Rademacher*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 30 (1921), p. 130/2.

In diesem Zusammenhang sei auch auf *A. Denjoy*, Rendic. Acc. Lincei 29_2 (1920), p. 291/4, 316/8, hingewiesen; [dazu auch: *D. Mirimanoff*, Fundamenta math. 4 (1923), p. 118/23].*

429b) **A. Schoenflies*, Bericht I 1900, p. 96/7; Bericht I 1913, p. 324/6. Siehe auch [430]).*

430) *Vgl. dazu auch *W. Sierpiński*, Fundamenta math. 1 (1920), p. 112/5, der [mit Hilfe des Wohlordnungssatzes] die Existenz ebener Mengen nachgewiesen hat, die auf *jeder* Geraden einen linearen Inhalt Null haben und trotzdem nicht (im *Lebesgue*schen Sinne) flächenhaft meßbar sind.*

430a) *Diese Bezeichnung rührt von *C. Carathéodory*[430d]) her.*

G. Vitali hat den folgenden Satz bewiesen[430b]): Es sei eine Folge S von linearen Intervallmengen $J_1, J_2, \ldots, J_\nu, \ldots$ gegeben, derart, daß die Intervalle von J_ν sämtlich kleiner als eine mit wachsendem ν gegen 0 konvergierende Größe ε_ν sind; wenn dann die innere Grenzmenge A von S ein endliches Maß m hat, dann existiert eine endliche oder abzählbare Menge von getrennten Intervallen von S, deren Längensumme mindestens gleich m ist.

H. Lebesgue[430c]) hat den Satz noch wesentlich verallgemeinert[430d]): A sei eine beliebige Punktmenge im n-dimensionalen Raum und U eine A enthaltende offene Punktmenge. Jedem Punkt p von A sei eine Folge von meßbaren Punktmengen $\sigma_1(p), \sigma_2(p), \ldots, \sigma_\nu(p), \ldots$ zugeordnet, derart, daß 1. $\sigma_\nu(p)$ ganz im Innern eines Würfels $W_\nu(p)$ mit dem Mittelpunkt p liegt, dessen Kantenlänge $\varepsilon_\nu(p)$ mit wachsendem ν gegen 0 konvergiert, 2. das Verhältnis der Maße von $\sigma_\nu(p)$ und $W_\nu(p)$

$$\frac{m(\sigma_\nu(p))}{m(W_\nu(p))} > \alpha(p) > 0$$

ist, (wobei $\alpha(p)$ von ν unabhängig ist).[430e]) Dann kann man endlich oder abzählbar unendlich viele Punktmengen

$$\sigma_{\nu_i}(p_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

finden, die alle innerhalb U liegen, keine gemeinsamen Punkte besitzen und deren Vereinigungsmenge V die ganze Punktmenge A mit Ausnahme von höchstens einer Nullmenge enthält; (wobei das äußere Maß von V das äußere Maß von A [wenn es endlich ist] um beliebig wenig übersteigt).

Des weiteren sei ein Überdeckungssatz erwähnt, den *H. Rademacher*[430f]) gibt: Jede Menge A läßt sich durch abzählbar viele Mengen, die aus einer meßbaren Menge M mit von Null verschiedenem Maß nur durch Translation hervorgehen, bis auf eine Nullmenge überdecken.

430b) **G. Vitali,* Atti Accad. Torino 43 (1907/08), p. 229/36. — Im Zusammenhang damit stehen Sätze von *W. H. Young* in den schon früheren, am Schlusse von [95]) zitierten Arbeiten.*

430c) **H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 365, 389/95.*

430d) *Die folgende Formulierung im wesentlichen im Anschluß an *C. Carathéodory* [Reelle Funktionen, p. 299/307]. der *H. Lebesgues* Resultat noch ein wenig allgemeiner gefaßt hat; siehe auch *H. Rademacher*[413b]), p. 184/95.*

430e) **H. Lebesgue*[430c]) [p. 390] nennt eine meßbare Menge σ *regulär* („régulier"), wenn für die kleinste, σ enthaltende Kugel K die Ungleichung

$$m(\sigma) > \alpha \cdot m(K)$$

gilt, wo $\alpha > 0$ ist; und er bezeichnet als *„famille régulière d'ensembles"* eine Gesamtheit von „regulären" Punktmengen σ mit konstantem, positivem α.*

430f) **H. Rademacher*[413b]), p. 194/5.*

Schießlich sei hier noch eine von *H. Lebesgue*[431]) stammende Begriffsbildung hervorgehoben: Sei E eine meßbare lineare Punktmenge und E_1 der im Intervall $[\alpha, \beta]$ enthaltene Bestandteil von E, dann bezeichnet er als (*mittlere*) *Dichte von E im* [oder *in bezug auf das*] *Intervall* $[\alpha, \beta]$ das Verhältnis $\frac{m(E_1)}{|\beta - \alpha|}$. Unter der *Dichte von E in einem Punkt a* versteht er den Grenzwert [falls er vorhanden ist] der (mittleren) Dichte von E in einem auf den Punkt a sich zusammenziehenden Intervall. Außerdem versteht er unter der *Dichte der Menge E rechts* (bzw. *links*) *von a* den Grenzwert [falls er vorhanden ist] der Dichte von E im Intervall $[a, \beta]$, wobei β von *rechts* (bzw. *links*) gegen a konvergiert.[432])

Wenn E nicht meßbar ist, so hat man im vorstehenden nur das Maß $m(E_1)$ durch das äußere Maß $m_a(E_1)$ zu ersetzen [„äußere Dichte" oder kurz ebenfalls „Dichte"].

H. Lebesgue[433]) beweist den folgenden Satz:

Die Dichte einer meßbaren Menge E ist in allen Punkten von E, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge, gleich 1; und in allen Punkten der Komplementärmenge von E, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge, gleich 0.[433a])

E. Jacobsthal u. *K. Knopp*[433]) sowie *E. Zermelo* u. *W. Alexandrow*[433b]) nennen eine Menge E *homogen* von der Dichte d in $[\alpha, \beta]$, wenn die

---

431) **H. Lebesgue,* Rend. Acc. Lincei Roma (5) 15_2 (1906), p. 8; Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 405/7.*

432) *Die Grenzwerte brauchen nicht für jeden Punkt zu existieren, sondern es kann ein Punkt auch von *unbestimmter* Dichte sein. *K. Knopp,* Math. Ann. 77 (1916), p. 438/54, hat lineare, perfekte, nirgends dichte Punktmengen näher untersucht in bezug auf Punkte bestimmter und unbestimmter Dichte und hat [p. 450/1] den Satz bewiesen, daß jede lineare, perfekte, nirgends dichte Menge, die in jedem (nicht in einem Lückenintervall enthaltenen) Intervall eine positive Dichte hat, in beliebiger Nähe eines jeden ihrer Punkte stets Punkte unbestimmter Dichte besitzt. —

A. Denjoy[433]), p. 130, und *H. Rademacher*[418b]), p. 192, definieren eine *„obere* und *untere Dichte"*, die in jedem Punkte existieren.*

433) **H. Lebesgue*[431]), insbes. zweites Zitat, p 407. Siehe auch *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Cours d'Analyse infinitésimale 2, 2. éd. (Louvain-Paris 1912), p. 114; *E. Jacobsthal* u. *K. Knopp,* Sitzgsber. Berlin. Math. Ges. 14 (1915), p. 121/5; *A. Denjoy,* J. de math. (7) 1 (1915), p. 132/43; *N. Lusin* u. *W. Sierpiński,* Rend. Circ. mat. Palermo 42 (1917), p. 167/72; *W. Sierpiński*[433a]), zweites Zitat.*

433a) *Der erste Teil des Satzes gilt auch für jede nicht-meßbare Menge E und „äußere Dichte", wie unmittelbar aus der Existenz der maßgleichen Hülle[391]) von E folgt; *C. Burstin,* Sitzgsber.[435]), p. 1534; *W. Sierpiński,* Paris C. R. 164 (1917), p. 993/4; Fundamenta math. 4 (1923), p. 167/71; *H. Blumberg,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 25 (1919), p. 350/3.*

433b) **W. Alexandrow*[390]), p. 76/8.*

Dichte von E in bezug auf jedes Teilintervall von $[\alpha, \beta]$ ein und denselben Wert d besitzt.[434]) Eine homogene Menge ist immer entweder von der Dichte 1 oder 0. Eine Menge E in $[\alpha, \beta]$, die in keinem Teilintervall homogen ist, bezeichnen *E. Jacobsthal* und *K. Knopp*[433]) als eine *in sich heterogene* Menge. Daß es solche in sich heterogene Mengen (die sogar meßbar sind) gibt, kann durch ein verhältnismäßig einfaches Beispiel gezeigt werden.[435])

Mit dem vorstehenden hängen noch einige Begriffs- und Wortbildungen von *E. Zermelo* und *W. Alexandrow*[435a]) zusammen.[435b])*

434) **E. B. Van Vleck*[398]) versteht unter einer in $[\alpha, \beta]$ *homogenen* Punktmenge etwas anderes. Eine nach *E. B. Van Vleck* homogene Menge ist es von selbst auch nach der Definition von *E. Jacobsthal* u. *K. Knopp,* aber im allgemeinen nicht umgekehrt. In einer noch anderen Bedeutung wird „homogen" bei *L. Leau,* Paris C. R. 165 (1917), p. 141/4; Ann. Éc. Norm. (3) 35 (1918), p. 313/92, verwendet.

Es sei hier noch erwähnt, was „*homogen* im Sinne der Analysis situs" oder „*topologisch homogen*" bedeutet: so heißt eine Menge M, wenn zu irgend zweien ihrer Punkte a, b eine umkehrbar eindeutige und beiderseits stetige Transformation von M in sich selbst existiert, welche a in b überführt. Vgl. hierüber *C. Kuratowski,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 14/19, sowie ib. 1 (1920), p. 233. [Vgl. ferner *L. E. J. Brouwer,* Proc. Akad. Amsterdam 20 (1917), p. 1192/4, und *B. P. Haalmeijer,* Math. Ztschr. 16 (1923), p. 92/102.]

In ganz anderer Bedeutung ist „homogen" in Nr. 6 benutzt worden.*

435) **E Jacobsthal* u. *K. Knopp*[433]), p. 126/7.

C. Burstin, Sitzgber. Ak. Wiss. Wien 123, IIa (1914), p. 1528 u. Monatsh. Math. Phys. 26 (1915), p. 232, hatte einen gerade entgegengesetzten Satz aufgestellt, welcher die Nichtexistenz meßbarer, in sich heterogener Mengen besagt; dieser Satz ist jedoch unrichtig, wie das eben erwähnte Beispiel zeigt; vgl. die Berichtigung: Monatsh. Math. Phys. 27 (1916), p. 163/5.*

435a) **W. Alexandrow*[390]), p. 71/6, sowie 6/7 und 54.*

435b) *Sie nennen eine Menge E „*maßhaltig*", wenn sie keine Nullmenge ist; „*diskrepant*", wenn die „Diskrepanz"[390]) nicht verschwindet, d. h. E nichtmeßbar ist; zwei Mengen, die nur eine Nullmenge gemeinsam haben, nennen sie „*maßfremd*". Ein Punkt p wird von ihnen als „*Maßpunkt*" von E bezeichnet, wenn die Menge E in der Umgebung von p „maßhaltig" ist, als „*Diskrepanzpunkt*", wenn sie in der Umgebung von p „diskrepant" ist. Die Menge der ersteren bzw. letzteren Punkte heißt dann „*Maßmenge*" bzw. „*Diskrepanzmenge*" von E. Die Diskrepanzmenge ist in der Maßmenge enthalten, und beide sind stets perfekte Mengen und gehören dem perfekten Bestandteil der Ableitung E' an. [Daß die „Maßmenge" perfekt ist, auch schon bei *C. Burstin,* Sitzgsber.[435]), p. 1529 u. 1534; die „Diskrepanzmenge" betrachtet auch *W. Wilkosz,* Fundamenta math. 1 (1920), p. 82/92.]

In ähnlicher Richtung liegen einige Bezeichnungen, die *A. Denjoy,* Paris C. R. 160 (1915), p. 765; [433]), p. 130/2, im Französischen eingeführt hat: Eine Menge von positivem Maß bezeichnet er als „*épais*", eine Nullmenge als „*ens. mince*", die Komplementärmenge einer Nullmenge als „*épaisseur pleine*" (sc. des Kontinuums); ist E in der Umgebung von p von positivem Maß, so nennt er E „*épais en p*"; ferner bezeichnet er eine Menge E als „*épais en lui-même*", wenn ihr Maß in keinem Intervall, das Punkte von E im Innern enthält, verschwindet.*

20 b. *Carathéodorys Meßbarkeitstheorie. *C. Carathéodory* hat auf axiomatischer Grundlage eine formale Meßbarkeitstheorie aufgestellt, die allgemeiner als die *Lebesgue*sche Theorie ist und diese als Spezialfall umfaßt.[436]) Er geht davon aus, daß das äußere Maß eine Mengenfunktion [siehe Nr. 22] ist, und er bezeichnet nun allgemein eine Mengenfunktion μ^*A der Mengen A des n-dimensionalen Raumes als *„äußeres Maß“* oder als *„Maßfunktion“*, wenn sie die folgenden vier Eigenschaften besitzt:[436a])

I. 1. Jeder beliebigen Punktmenge A ist eine Zahl μ^*A eindeutig zugeordnet. 2. Die Zahl μ^*A ist entweder Null, oder endlich und positiv oder gleich $+\infty$. 3. Es gibt Punktmengen, für welche diese Zahl $\neq 0$ und endlich ist. 4. Für leere Mengen ist diese Zahl gleich Null.[436b])

II. Für eine Teilmenge B von A ist stets:

$$\mu^*B \leqq \mu^*A.$$

III. Ist V die Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Punktmengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$, so ist stets:

$$\mu^*V \leqq \mu^*A_1 + \mu^*A_2 + \mu^*A_3 + \cdots.$$

IV. Sind A und B zwei Punktmengen, deren Entfernung $\delta \neq 0$ ist, so ist stets: $$\mu^*(A+B) = \mu^*A + \mu^*B.$$

C. Carathéodory definiert sodann die Meßbarkeit mit Hilfe der in Nr. **20** erwähnten, für die meßbaren Mengen charakteristischen Eigenschaft $(\mathfrak{A})$[406]); d. h.:

Eine Punktmenge A soll für eine gegebene Maßfunktion μ^* *meßbar* heißen, wenn für jede willkürliche Punktmenge W von endlichem[407]) μ^* die Gleichung[407a])

$$(\mathfrak{A}) \qquad \mu^*W = \mu^*(AW) + \mu^*(W - AW)$$

---

436) **C. Carathéodory*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1914, p. 404/20; Reelle Funktionen, p. 229/89, 359/69.*

436a) *Reelle Funktionen, p. 238/9. In Gött. Nachr.[436]) hebt er den Fall, daß nur I—IV erfüllt ist, noch nicht besonders hervor und bezeichnet daher dort als „äußeres Maß“ das, was er später „reguläres äußeres Maß“ nennt; vgl. [436d]) und [379]).

Eine etwas abweichende Bezeichnungsweise benutzt *H. Hahn*, Reelle Funktionen I, p. 424 ff.: er verwendet die Benennung „äußeres Maß“ und „Maßfunktion“ schon bei Erfüllung von I., II., III.; wenn außerdem auch IV. erfüllt ist, gebraucht er die Bezeichnung *„gewöhnliche* Maßfunktion“.*

436b) *Die Forderungen $I_{3,4}$ sind erst in Reelle Funktionen (p. 238) gestellt worden.*

erfüllt ist. Das äußere Maß $\mu^* A$ einer meßbaren Punktmenge A wird das Maß von A genannt und mit μA bezeichnet.[436c])

Mit Hilfe von I, II, III zeigt *C. Carathéodory*, daß IV äquivalent ist mit IVa:

IVa. Die offenen [n-dimensionalen] Intervalle sind meßbare Punktmengen.

Aus dem bisherigen ergeben sich bereits die meisten Fundamentaleigenschaften des Maßes, insbesondere: Die Komplementärmenge einer meßbaren Menge, ferner die Vereinigungsmenge und der Durchschnitt von endlich oder abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen sind wieder meßbar. Daraus folgt, daß *für jede Maßfunktion alle Borelschen Mengen meßbar* sind.

C. Carathéodory bezeichnet weiterhin $\mu^* A$ als *reguläre Maßfunktion* oder als *reguläres äußeres Maß*[436d]), wenn außer I—IV noch die folgende Aussage gilt:

V. Für jede beliebige Punktmenge A ist $\mu^* A$ gleich der unteren Grenze der Maße μB aller (für μ^*) meßbaren Punktmengen B, die A als Teilmenge enthalten.

Sodann definiert er für ein solches μ^* das zugehörige *innere Maß* $\mu_* A$ einer Punktmenge A als die obere Grenze der Maße aller (für μ^*) meßbaren Teilmengen von A.

Er beweist dann: Ist M eine meßbare Punktmenge von endlichem Maß und N eine beliebige Teilmenge von M, so ist stets:

$$\mu_* N = \mu M - \mu^*(M - N).$$

Und ferner: Eine Punktmenge A von endlichem äußeren Maß ist dann und nur dann meßbar, wenn ihr äußeres und ihr inneres Maß zusammenfallen.

Es fragt sich nun, ob man diese inneren Maße selbständig und unabhängig von den äußeren Maßen charakterisieren kann, so daß man dann auch umgekehrt, von dem inneren Maß μ_* ausgehend, zum äußeren Maß μ^* gelangen kann. Zunächst gelten für die inneren Maße die Eigenschaften I, II, IV, IVa, wenn man nur in deren Formulierung μ^* durch μ_* ersetzt. Auch in der Meßbarkeitsdefinition darf μ^* durch μ_* ersetzt werden, und die „für μ_* meßbaren" Mengen erweisen sich

436c) *Natürlich hängt demnach die Meßbarkeit einer gegebenen Punktmenge von der zugrunde gelegten Maßfunktion μ^* ab und ist daher ein relativer Begriff. — Außerdem sei hervorgehoben, daß es bei dieser Definition gleichgültig ist, ob A beschränkt ist oder nicht und ob μA endlich ist oder nicht.*

436d) *Reelle Funktionen, p. 258. Vgl. [436a]).*

als identisch mit den für μ^* meßbaren Mengen.[436e]) Aber an die Stelle von III und V treten bei den inneren Maßen III' und V':[436f])

III'. Ist S die Summe von endlich oder abzählbar unendlich vielen Punktmengen $A_1, A_2, \ldots$ *ohne gemeinsame Punkte*, so ist stets:

$$\mu_* S \geqq \mu_* A_1 + \mu_* A_2 + \cdots.$$

V'. Für jede beliebige Punktmenge A ist $\mu_* A$ gleich der oberen Grenze der $\mu_* B$ aller (für μ_*) meßbaren Teilmengen B von A.

Wie *C. Carathéodory*[436g]) gezeigt hat, genügen aber diese dem Definitionssystem der äußeren Maße analogen Eigenschaften I, II, III', IV, IVa, V' *nicht* zur vollständigen Charakterisierung der inneren Maße. Dagegen ist, wie *A. Rosenthal* bewiesen hat[437]), die selbständige Definition der inneren Maße mit Hilfe des folgenden Systems der (auf μ_* sich beziehenden) Eigenschaften

I, II, III', IVa, V', VI

möglich[437a]), wobei mit VI die Eigenschaft bezeichnet wird:

VI. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ abzählbar unendlich viele, elementenfremde, meßbare Mengen und ist S ihre Summenmenge, dann ist

$$(\mathrm{VI}_1) \qquad \mu_* S = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_* A_n$$

und es ist

(VI_2) S ebenfalls meßbar.

Die Definitionssysteme für die äußeren bzw. inneren Maße lassen sich noch reduzieren. Zunächst ist im System der äußeren Maße I—IV der Teil I_2 entbehrlich, während alle übrigen Eigenschaften voneinander unabhängig sind; ferner ist V von I—IV unabhängig, jedoch I_4 und II eine Folge von $\mathrm{I}_{1,3}$ und V.[437b]). Schließlich läßt sich noch das Definitionssystem der inneren Maße vereinfachen und, wenn man bei den äußeren Maßen die auf μ^* sich beziehende Eigenschaft VI hinzunimmt, so erhält man nach *A. Rosenthal*[437c]) die beiden folgen-

---

436e) *Reelle Funktionen, p. 269.*

436f) *Reelle Funktionen, p. 365.*

436g) *Reelle Funktionen, p. 364/9.*

437) **A. Rosenthal,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1916, p. 305/21.*

437a) *Dies wäre nicht mehr möglich, wenn man hier IVa durch IV ersetzen würde; vgl. *A. Rosenthal*[437]), p. 309.*

437b) **C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 359/64; *A. Rosenthal*[437]), p. 315, 316, 318. Daß I_4 unabhängig ist von den übrigen Eigenschaften I—IV, sieht man aus folgendem Beispiel: Für die leere Menge L sei $\mu^* L = 1$, für einen bestimmten Punkt P_0 sei $\mu^* P_0 = 2$, für alle übrigen Mengen A sei $\mu^* A = +\infty$.*

437c) **A. Rosenthal*[437]), p. 314/18.*

den (im wesentlichen symmetrischen) Definitionssysteme, die aus lauter voneinander unabhängigen Teilen bestehen:

für die (*regulären*) *äußeren Maße* μ^*: $I_{1,3}$; IVa; V; VI_1;
für die *inneren Maße* μ_*: $I_{1,3}$; IVa; V′; $VI_{1,2}$.

Es sei noch bemerkt, daß es für die äußeren Maße μ^* gleichgültig ist, ob man in der Meßbarkeitsdefinition unter W Mengen von endlichem μ^* oder ganz beliebige Mengen versteht[407]), daß es dagegen für die inneren Maße μ_* wesentlich ist, die Meßbarkeitsdefinition nur auf Mengen W von *endlichem* μ_* zu beziehen. Verstünde man in der Meßbarkeitsdefinition für μ_* unter W ganz beliebige Mengen, so würde das angegebene Definitionssystem für μ_* nicht ausreichen (man würde eine neue Grundeigenschaft benötigen).[437d])

C. Carathéodorys (reguläre) äußere und innere Maße haben alle wesentlichen Eigenschaften der spezielleren *Lebesgue*schen äußeren und inneren Maße des n-dimensionalen Raums. Bei *H. Lebesgue* sind noch die folgenden, bei *C. Carathéodory* nicht geforderten und im allgemeinen nicht erfüllten Eigenschaften vorausgesetzt: a) Die Intervalle sind von endlichem Maß. b) Kongruente Mengen haben gleiches Maß. c) Für jede beliebige Punktmenge A ist $\mu^* A$ gleich der unteren Grenze der Maße μB aller offenen Punktmengen B, die A als Teilmenge enthalten.[437e]) Man kann von jedem *Carathéodory*schen äußeren Maß μ^* aus (wenigstens wenn es Intervalle von endlichem Maß gibt) zu einem regulären äußeren Maß μ_L^* gelangen, das die Eigenschaft c) besitzt, indem man nämlich $\mu_L^* A$ als untere Grenze der $\mu^* B$ aller offenen, A einschließenden Mengen B definiert.[437f]) Die Frage, ob die Eigen-

437d) **A. Rosenthal*[437]), p. 319/21.*

437e) *Für die inneren Maße hätte man die obere Grenze der Maße der abgeschlossenen Teilmengen zu nehmen. —

Übrigens ist bei äußeren Maßen stets a) eine Folge von b) und c).

H. Hahn, Reelle Funktionen I, p. 444ff., bezeichnet eine (reguläre) Maßfunktion, welche die Bedingung c) erfüllt, als *„Inhaltsfunktion"* und untersucht diese eingehend; [speziell betrachtet er auch (p. 453/61) die „Inhaltsfunktionen", die sich ergeben, wenn man von „Intervallfunktionen" (d. h. Mengenfunktionen, die für alle abgeschlossenen Intervalle definiert sind) ausgeht].*

437f) *Analog läßt sich das innere Maß $\mu_{*L} A$ als obere Grenze der $\mu^* B$ aller abgeschlossenen, in A enthaltenen Mengen B definieren. Wenn a) erfüllt ist, dann ist μ_{*L} das zu μ_L^* zugehörige innere Maß.

Ebenso kann man zu jedem *Carathéodory*schen äußeren (wie oben, nicht notwendig regulären) Maß $\mu^* A$ ein $\mu_M^* A$ bzw. $\mu_N^* A$ als untere Grenze der $\mu^* B$ aller A einschließenden *Borel*schen bzw. meßbaren Mengen B definieren, und es sind dann μ_M^* und μ_N^* reguläre äußere Maße (jedenfalls, wenn sie I_3 erfüllen). [*F. Hausdorff*[445]), p. 158.] Wenn a) gilt, fallen μ_M^* und μ_L^* zusammen. — Entsprechend μ_{*M} und μ_{*N}.*

schaften a) und b) hinreichen, um das (reguläre) *Carathéodory*sche Maß mit dem *Lebesgue*schen Maß zusammenfallen zu lassen, also die Frage, ob bei Erfüllung von a) und b) das reguläre äußere Maß μ^* von dem zugehörigen μ_L^* verschieden sein kann oder nicht, ist bis jetzt wohl noch nicht beantwortet. Aber man kann zeigen, daß das reguläre äußere Maß μ^* selbst in dem Fall von dem zugehörigen μ_L^* verschieden sein kann, wenn beide für alle nach *Lebesgue* meßbaren Mengen mit dem *Lebesgue*schen Maß zusammenfallen.[437g])*

20c. $_*$**Das** m**-dimensionale Maß im** n**-dimensionalen Raum.** Wir haben bisher einer Punktmenge im n-dimensionalen Raum R_n einen Inhalt bzw. ein Maß beigelegt, die, von dieser Dimensionalzahl n abhängig, eine Verallgemeinerung des n-dimensionalen Volumens darstellen; [speziell ist für Punktmengen, die als Teile einer Geraden bzw. einer Ebene betrachtet werden, Inhalt und Maß die Verallgemeinerung von Länge bzw. Flächeninhalt]. Nun begnügt man sich aber sonst bei geometrischen Untersuchungen im n-dimensionalen Raum R_n nicht mit der Einführung einer einzigen Maßzahl, welche die Volumina der n-dimensionalen Körper mißt, sondern man betrachtet im n-dimensionalen Raum auch Längen von Kurven, Inhalte von Oberflächen usw. Man hat also bei den stetigen Raumgebilden des R_n nicht eine, sondern im ganzen n verschiedene Maßzahlen. Es liegt daher nahe, für beliebige Punktmengen die Verallgemeinerung auch dieser anderen Maßzahlen zu suchen. Man wird dann zweckmäßig allgemein die Bezeichnung *„m-dimensionaler Inhalt bzw. Maß im*

437g) $_*$Dies ergibt sich aus folgendem Beispiel: Es sei Ω die von *C. Carathéodory*[396]) angegebene Punktmenge, die mit ihrer Komplementärmenge Ω' im *Lebesgue*schen Sinn nicht-meßbar ist und außerdem (ebenso Ω') die Eigenschaft besitzt, daß

$$m^*(\Omega M) = m^*(M) \quad \text{und} \quad m_*(\Omega M) = m_* \Omega = 0$$

ist, wenn m^* bzw. m_* das *Lebesgue*sche äußere bzw. innere Maß bedeutet und M irgendeine für m^* meßbare Menge bezeichnet. Wir definieren nun μ_0^* dadurch, daß wir für jede Menge A setzen:

$$\mu_0^*(A) = m^*(A\Omega).$$

μ_0^* ist ein reguläres äußeres Maß und stellt ein Beispiel der gewünschten Art dar. Bemerken wir noch, daß für irgendein Intervall J die Menge $(\Omega' J)$ für μ_0^* meßbar, dagegen für m^* nicht meßbar ist, und daß $\mu_0^*(\Omega' J) = 0$ und $\neq m^*(\Omega' J)$ ist.

Ändert man dies Beispiel noch ein wenig ab, indem man setzt:

$$\mu_1^* A = \mu_0^*(AJ_0) + m^*(A - AJ_0),$$

wobei J_0 ein festes Intervall bedeutet, so ist μ_1^* wieder ein reguläres äußeres Maß und ein Beispiel gleicher Art; hier sieht man deutlich, daß für μ_1^* die Eigenschaft b) nicht erfüllt ist, obwohl sie hier bei allen im *Lebesgue*schen Sinn meßbaren Mengen gilt.*

n-dimensionalen Raum“ (für jedes ganzzahlige positive $m \leqq n$) gebrauchen; speziell wird der eindimensionale Inhalt bzw. Maß (d. h. die Verallgemeinerung der Bogenlänge) als „*linearer Inhalt*“ [„*Linearinhalt*“] bzw. „*lineares Maß*“ bezeichnet. Wir wollen übrigens im folgenden immer den Fall des *linearen* Maßes besonders hervorheben, da dabei das jeweils verwendete Prinzip recht einfach und klar kenntlich wird.

Zunächst hatte man auch hier an den *Cantor*schen Inhaltsbegriff angeknüpft. *H. Minkowski*[438]) hatte mit Benutzung des *Cantor*schen Inhaltsbegriffes eine allgemeine Definition der Kurvenlänge und der Oberfläche (im dreidimensionalen Raum) gegeben, die insbesondere von *W. H. Young*[439]) auf allgemeine (vor allem abgeschlossene) Mengen übertragen wurde. Man umgebe, wie bei *G. Cantor* [Nr. 18], jeden Punkt der im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum vorgelegten Menge E mit einer Kugel [in der Ebene mit einem Kreis] vom (für alle Punkte gleichen) Radius ϱ. Die Gesamtheit dieser Kugeln erfüllt einen Raumteil, der von denjenigen Punkten gebildet wird, deren Entfernung von der Menge $\leqq \varrho$ ist; das Volumen dieses Raumteils sei wieder mit $V(\varrho)$ bezeichnet. Als „*Minkowskischer linearer Inhalt*“ [eigentlich ein „*äußerer* linearer Inhalt“] der im dreidimensionalen Raum gelegenen Menge E werde dann für gegen 0 abnehmendes ϱ der Grenzwert oder, wenn dieser nicht existiert[439*]), der obere Limes[439**]) des Verhältnisses

$$\frac{V(\varrho)}{\pi\varrho^2}$$

definiert. Als „*Minkowski*scher zweidimensionaler Inhalt“ der im dreidimensionalen Raum gelegenen Menge E werde für gegen 0 abnehmendes ϱ der Grenzwert bzw. der obere Limes des Verhältnisses

$$\frac{V(\varrho)}{2\varrho}$$

definiert. Dieser letztere Grenzwert, gebildet für eine in der *Ebene* gelegene Menge E, werde als „*Minkowski*scher linearer Inhalt“ dieser ebenen Menge definiert.

---

438) *H. Minkowski,* Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 9 (1900 [1901]), p. 115/6 *= Gesammelte Abhandlungen (Leipzig-Berlin 1911), 2, p. 122.*

439) **W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 3 (1905), p. 461/77; Theory, p. 270/83.

Vgl. auch *A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 92/3 [der dort die Bezeichnungen „Längeninhalt“, „Oberflächeninhalt“ gebraucht; *W. H. Young* hat die Benennung „linear content I“]; außerdem *P. Painlevé*[257]); *D. Pompeiu,* Ann. Fac. sc. Toulouse (2) 7 (1905), p. 283/4 sowie 288/90.*

439*) *Der Grenzwert braucht selbst bei beschränkten, abgeschlossenen Mengen nicht zu existieren; siehe hierüber *W. Groß*[443a]).*

439**) **W. Groß*[443a]) nimmt hierfür den unteren Limes.*

Ebenso kann man übrigens allgemein im n-dimensionalen Raum für jedes ganzzahlige positive $m < n$ einen „*Minkowskischen m-dimensionalen Inhalt*" einführen durch den oberen Limes von

$$\frac{V(\varrho)}{J_{n-m}(\varrho)},$$

wenn ϱ gegen Null unbegrenzt abnimmt. Dabei ist $V(\varrho)$ analog wie oben mit Hilfe n-dimensionaler Kugeln zu bilden und unter $J_{n-m}(\varrho)$ ist der Inhalt der $(n-m)$-dimensionalen Kugel vom Radius ϱ[439a]) verstanden [wobei mit der zweidimensionalen Kugel die Kreisfläche, mit der eindimensionalen Kugel die Strecke von der Länge 2ϱ gemeint ist].

H. Minkowski[439b]) gibt noch Verallgemeinerungen, indem er die oben verwendeten Kugeln durch andere konvexe Körper (die zueinander ähnlich und ähnlich gelegen sind) ersetzt. Für unsere Zwecke kommt dies kaum in Betracht. Dagegen ist eine andere Verallgemeinerung, die *W. H. Young*[439]) angibt, zu erwähnen. Er ersetzt nämlich für in der Ebene gelegene Mengen den Kreis durch beliebige ebene Bereiche B_ϱ vom Durchmesser 2ϱ. Umgibt er jeden Punkt der in der Ebene vorgelegten Menge E mit einem solchen Bereich B_ϱ vom Durchmesser 2ϱ, so erhält er jedesmal ein von diesen Bereichen B_ϱ erfülltes Ebenenstück $\mathfrak{B}(\varrho)$. Er bildet nun für gegen 0 unbegrenzt abnehmendes ϱ den Grenzwert von

$$\frac{\mathfrak{B}(\varrho)}{4\varrho};$$

oder, wenn dieser Grenzwert nicht existiert, nehmen wir den oberen Limes dieses Verhältnisses. Dieser Grenzwert wird jedesmal noch von den benutzten Bereichen B_ϱ abhängen. Er nimmt sodann für alle möglichen Wahlen von B_ϱ die *obere Grenze* des jeweils erhaltenen Grenzwertes und bezeichnet diese als „linear content J" [auch eigentlich ein „*äußerer* linearer Inhalt"]; dieser „*Young*sche lineare Inhalt"

439a) *Der Inhalt der k-dimensionalen Kugel ist bekanntlich:

$$J_k(\varrho) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \cdot \varrho^k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \cdot \varrho^k,$$

d. h., wenn $k = 2\varkappa$:

$$J_{2\varkappa}(\varrho) = \frac{\pi^\varkappa \varrho^{2\varkappa}}{\varkappa!},$$

wenn $k = 2\varkappa - 1$:

$$J_{2\varkappa-1}(\varrho) = \frac{2^\varkappa \cdot \pi^{\varkappa-1} \varrho^{2\varkappa-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2\varkappa-1)}.*$$

439b) *A. a. O.[438]): Jahresb., p. 116/21; Abhandlungen, p. 123/7.*

kann von dem vorhin betrachteten „*Minkowski*schen linearen Inhalt“ verschieden sein.[439c]) — Analog alles für m-dimensionale Inhalte im Raum von n Dimensionen.

In ganz anderer Weise hat *O. Janzen*[440]) einen „linearen Inhalt“ [oder besser gesagt: ein (äußeres) lineares *Maß*] definiert. Man schließe die in der Ebene gelegene Menge E in abzählbar viele, nicht übereinandergreifende Rechtecke von den Seitenlängen $s \leqq \varrho$ ein, treffe über die Seiten der Rechtecke eine derartige Festsetzung, daß sie stets zu je einem und nur einem Rechteck zu rechnen sind, projiziere die in einem Rechteck $\mathfrak{R}_\nu$ enthaltene Teilmenge von E auf zwei zueinander senkrechte Achsen. Diese Projektionen mögen das eindimensionale Maß [oder, wenn es nicht existiert, das äußere Maß][441]) $m'_{\varrho\nu}$ und $m''_{\varrho\nu}$ haben; man bilde dann

$$J_\varrho = \sum_\nu \sqrt{m'^2_{\varrho\nu} + m''^2_{\varrho\nu}}$$

und definiere als „linearen Inhalt“ von E die Größe

$$J = \lim_{\varrho = 0} J_\varrho.$$

Ganz analog wird von ihm allgemein der m-dimensionale Inhalt einer Punktmenge E im n-dimensionalen Raum $(m < n)$ definiert: Man schließe E in abzählbar viele n-dimensionale rechtwinklige Parallelepipeda $\mathfrak{P}_\nu$ von den Kantenlängen $s \leqq \varrho$ ein, verfüge über die Punkte ihrer Begrenzung so, daß sie stets zu einem und nur einem $\mathfrak{P}_\nu$ zu rechnen seien, projiziere die in $\mathfrak{P}_\nu$ enthaltene Teilmenge von E auf sämtliche m-dimensionalen Koordinatenräume, bilde das m-dimensionale Maß [oder, wenn es nicht existiert, das äußere Maß][441]) dieser durch Projektion erhaltenen Punktmengen, verstehe unter $J_{\nu,m}$ die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate dieser Maßzahlen und bilde

$${}_mJ_\varrho = \sum_\nu J_{\nu,m}.$$

Dann definiert er als m-dimensionalen Inhalt von E

$$J_m = \lim_{\varrho = 0} {}_mJ_\varrho.$$

439c) *Wie wenig zweckentsprechend diese Begriffsbildungen sind, sieht man deutlich aus einigen bei *W. H. Young*[439]) gegebenen Beispielen, insbesondere aus einem Beispiel [a. a. O.: Proc., p. 467/73; Theory, p. 276/81] einer in der Ebene gelegenen, abzählbaren, abgeschlossenen Punktmenge (mit einem einzigen Häufungspunkt), die einen *positiven* (!) *Minkowski*schen sowie *Young*schen linearen Inhalt hat.*

440) **O. Janzen*, Über einige stetige Kurven, über Bogenlänge, linearen Inhalt und Flächeninhalt, Dissertation Königsberg 1907, p. 46/52; 58/9; 63/8; 69/70.*

441) **O. Janzen* zieht den Fall, wo dieses Maß nicht existiert, nicht in Betracht.*

Daß die *Janzen*sche Definition tatsächlich brauchbar ist, ergibt sich daraus, daß sie, wie man leicht sehen kann, die 5 Eigenschaften der *Carathéodory*schen Theorie [Nr. **20 b**] besitzt, also ein „reguläres äußeres Maß" ist.

In allgemein befriedigender Weise ist die Frage nach dem linearen Inhalt bzw. m-dimensionalen Inhalt erst von *C. Carathéodory* gelöst worden.[442] *C. Carathéordory* gelangt zu Begriffsbildungen, welche sich seiner Meßbarkeitstheorie [Nr. **20 b**] einordnen und daher im wesentlichen dieselben Eigenschaften besitzen wie das gewöhnliche *Lebesgue*sche Maß.

Betrachten wir zunächst das *lineare* Maß. *C. Carathéodory* definiert folgendermaßen ein *äußeres lineares Maß:*

Es sei E eine beliebige Punktmenge im n-dimensionalen Raum; mit $U_1, U_2, \ldots$ bezeichnen wir eine Folge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Punktmengen, die folgenden beiden Bedingungen genügen:

a) die gegebene Menge E ist eine Teilmenge der Vereinigungsmenge der U_k;

b) der Durchmesser d_k eines jeden U_k ist kleiner als eine vorgeschriebene Zahl ϱ.[443]

Wir betrachten $\sum\limits_k d_k$ und bilden von dieser Summe für alle den Bedingungen a) und b) genügenden Folgen $U_1, U_2, \ldots$ die untere Grenze, die mit $L_{(\varrho)}(E)$ bezeichnet werde (und die übrigens gleich $+\infty$ sein kann). Nimmt ϱ ab, so werden die Bedingungen, denen die Folgen $\{U_k\}$ genügen müssen, enger, und deshalb kann sich die Zahl $L_{(\varrho)}(E)$ dabei nicht verkleinern. Es existiert also stets der Grenzwert $\lim\limits_{\varrho=0} L_{(\varrho)}E$ und man bezeichne diesen Grenzwert als das *äußere lineare Maß* von E, in Zeichen: $L^*(E)$.[443a]

C. Carathéodory zeigt nun, daß das so definierte äußere lineare Maß die in seiner Meßbarkeitstheorie aufgestellten 5 Forderungen für das reguläre äußere Maß [Nr. **20 b**] erfüllt, so daß also, vom äußeren linearen Maß ausgehend, sich formal genau die gleiche Meßbarkeitstheorie aufbauen läßt. Man kommt so insbesondere zum Begriff der *linearen Meßbarkeit* und des *linearen Maßes.*

Hervorzuheben ist noch der Satz: Im n-dimensionalen Raum ($n > 1$) besitzt eine Punktmenge von endlichem äußeren linearen Maß das gewöhnliche *Lebesgue*sche Maß 0.

---

442) **C. Carathéodory*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1914, p. 404/26.*

443) *Man kann, ohne am Ergebnis etwas zu ändern, die U_k als konvexe[444] Bereiche oder Gebiete voraussetzen.*

443a) *An *C. Carathéodory* anknüpfend, hat *W. Groß*, Monatsh. Math. Phys. 29 (1918), p. 177/93, ein anderes äußeres lineares Maß aufgestellt und untersucht, wobei an Stelle der Durchmesser d_k der *Minkowski*sche lineare Inhalt der U_k benutzt wird.*

Ganz analog, wie das lineare Maß, kann man die Theorie des *m-dimensionalen Maßes im n-dimensionalen Raum* behandeln. Man behalte in der obigen Definition die Bedingungen a) und b) unverändert bei, ersetze aber bei der Bildung der unteren Grenze der Durchmessersummen die gewöhnlichen Durchmesser d_k der Punktmengen U_k durch die *„m-dimensionalen Durchmesser"* $d_k^{(m)}$ dieser Punktmengen. Darunter versteht *C. Carathéodory* folgendes: Man bilde die kleinste konvexe Punktmenge[444]) C_k, in welcher die betreffende Menge U_k enthalten ist; projiziert man C_k orthogonal auf eine m-dimensionale Ebene, so erhält man wieder eine konvexe Punktmenge, deren Inhalt von der Stellung dieser m-dimensionalen Ebene im n-dimensionalen Raum abhängt. Die obere Grenze dieses Inhaltes für alle möglichen m-dimensionalen Ebenen werde dann als der „m-dimensionale Durchmesser" $d_k^{(m)}$ der Punktmenge U_k bezeichnet.[444a])

Die vorstehenden Definitionen von *C. Carathéodory* sind durch *F. Hausdorff* noch wesentlich verallgemeinert worden:[445])

Es sei $\mathfrak{U}$ ein System von beschränkten Punktmengen U des n-dimensionalen Raumes R_n, derart, daß man jede Punktmenge E von R_n in endlich oder abzählbar unendlich viele Mengen U mit beliebig kleinen Durchmessern $d(U)$ einschließen kann. Jeder Menge U sei eine endliche, nicht-negative Zahl $l(U)$ zugeordnet. Man bilde für alle, den Bedingungen a) und b) genügenden Mengenfolgen von $\mathfrak{U}$ die untere Grenze von $\sum_k l(U_k)$ und bezeichne sie mit $L_{(\varrho)}(E)$. Dann existiert, wie oben,

$$L^*(E) = \lim_{\varrho = 0} L_{(\varrho)}(E)$$

und ist stets ein äußeres Maß, und, wenn die U *Borel*sche Mengen sind, sogar ein reguläres äußeres Maß. Ferner ist $L^*(E)$ stets ein reguläres äußeres Maß, wenn l eine für beschränkte U definierte, stetige [oder „abschließbare"[445a])] Mengenfunktion ist.[446])

444) *Eine Punktmenge heißt *konvex,* wenn sie die Verbindungsstrecke je zweier ihrer Punkte vollständig enthält.*

444a) *Das zweidimensionale Maß im dreidimensionalen Raum [*„Flächenmaß"*] ist von *W. Groß,* Monatsh. Math. Phys. 29 (1918), p. 145/76, eingehend betrachtet worden; er hat dort insbesondere auch andere (von *C. Carathéodory* abweichende) Definitionen gebildet und untersucht. Vgl. auch *W. Groß*[498]).*

445) **F. Hausdorff,* Math. Ann. 79 (1918), p. 157/79.*

445a) **F. Hausdorff*[445]) (p. 160) nennt eine Mengenfunktion $l(U)$ *„abschließbar"*, wenn für die abgeschlossene Hülle $\bar{U}$ von U stets

$$l(\bar{U}) = l(U)$$

ist.*

446) **F. Hausdorff*[445]) gibt (p. 161/2) eine Reihe von einfachen Beispielen für solche $l(U)$.*

Speziell ergibt sich ein einfaches m-dimensionales, äußeres Maß, wenn für die U n-dimensionale Kugeln $K_\varkappa$ vom Durchmesser $d_\varkappa$ genommen werden und $l(K_\varkappa) = c_m d_\varkappa^m$ gesetzt wird, wobei mit

$$c_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^m \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

das Volumen der m-dimensionalen Kugel vom Durchmesser 1 bezeichnet werde.[439a]) *F. Hausdorff* benutzt nun diesen Ansatz auch für *nicht ganzzahlige* m und verallgemeinert ihn noch für verfeinerte (z. B. logarithmische) Skalen, indem er $l(K_\varkappa) = \lambda(d_\varkappa)$ setzt, wobei $\lambda(x)$ eine positive, stetige, mit x wachsende und zugleich mit x gegen 0 konvergierende Funktion bezeichnet. [Dabei hängt natürlich das zugehörige äußere Maß nur von dem Verhalten von $\lambda(x)$ in der Nähe von $x = 0$ ab.]

Dies führt ihn zugleich zu einer *Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffs*[447]) [vgl. die ganz andersartigen „Dimensionstypen" von *M. Fréchet*[314]), Schluß von Nr. **17**]: Wenn das soeben mit Hilfe von $\lambda(x)$ definierte äußere Maß $L^*(E)$ endlich und $\neq 0$ ist, dann sagt *F. Hausdorff*, E sei von der „Dimension" $[\lambda(x)]$, wobei er die Dimension $[x^m]$ auch mit (m) bezeichnet.[448]) Die Dimensionen $[\lambda(x)]$ und $[\mu(x)]$ werden gleich genannt, wenn die zugehörigen äußeren Maße L^* und M^* *„von gleicher Ordnung"* sind, d. h. für jede Menge E gleichzeitig Null oder positiv oder unendlich sind; dann sind die Mengen von der Dimension $[\lambda]$ und $[\mu]$ identisch. Ferner wird $[\mu]$ die höhere, $[\lambda]$ die niedrigere Dimension genannt, wenn M^* *„von höherer Ordnung"* als L^* ist, d. h. M^* ist stets Null, sobald L^* endlich ist, und L^* stets unendlich, wenn $M^* \neq 0$ ist.

Wesentlich ist natürlich der Nachweis, daß nun wirklich Mengen solcher „Dimensionen" existieren (d. h., daß nicht etwa für alle nichtganzzahligen m immer $L^* = 0$ oder ∞ ist). Diesen Nachweis führt *F. Hausdorff* durch Konstruktion von geeigneten Beispielen, und zwar gelingt ihm dies für jedes beliebige (m) und sehr allgemeine $\lambda(x)$

447) **F. Hausdorff*[445]), p. 165/79.*

448) *An einer anderen Stelle (a. a. O.[445]), p. 158) gibt er einen gröberen „Dimensions"begriff: Es sei μ^* ein reguläres äußeres Maß, das für kongruente Mengen gleich ist; ist nun $\mu^*(B) = \varrho^m \mu^*(A)$ immer, wenn B zu A im Verhältnis $\varrho : 1$ ähnlich ist, dann nennt er μ^* ein äußeres Maß *„von der Dimension m"*. Einer Menge E, für die $0 < \mu^*(E) < +\infty$ ist, wäre dann die „Dimension" m beizulegen. Ist E nach der Definition des obigen Textes von der Dimension (m), so ist E auch im eben genannten Sinn von der Dimension m, aber nicht umgekehrt (vgl. [445]), p. 166/7).*

[im linearen Fall für alle konvexen $\lambda(x)$, worin die logarithmische Skala zwischen 0 und 1 enthalten ist] schon allein durch punkthafte, perfekte Mengen. Daraus folgt z. B., daß es in der Ebene [nicht quadrierbare] *Jordan*sche Kurven von jeder beliebigen zwischen 1 und 2 gelegenen „Dimension" gibt.

Da nun aber die beschränkten, punkthaften, perfekten Mengen sich sämtlich umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig aufeinander abbilden lassen [vgl. [256])], so ergibt sich, daß die *Hausdorff*schen „Dimensionen" 1. mit den *Fréchet*schen „Dimensionstypen" gar nichts gemeinsam haben und 2. (im Gegensatz zu diesen) *keineswegs Invarianten der Analysis situs* darstellen, wie allerdings von vorneherein zu erwarten war, da ja der Maßbegriff keine Invariante der Analysis situs ist [vgl. Nr. **20** Schluß].*

Anwendungen der Mengenlehre.

21. Anwendungen auf die allgemeine Funktionenlehre. Man findet in anderen Teilen der Encyklopädie[449]) zahlreiche Anwendungen der vorstehenden Theorien. Wir wollen hier vor allem darauf kurz hinweisen, welch enge Verwandtschaft zwischen den Problemen der Funktionenlehre und denen der Lehre von den Punktmengen besteht.

Betrachtet man die allmählichen Veränderungen, die der Funktionsbegriff [siehe II A 1, Nr. **1**—**3** (*A. Pringsheim*)] im Laufe der Zeit erfahren hat, so muß man feststellen, daß man erst zwischen 1870 und 1880 begann, sich von der Vielfältigkeit der Umstände Rechenschaft zu geben, die eintreten können, wenn man mit *G. Lejeune-Dirichlet* unter einer *Funktion* das allgemeinste Entsprechen zwischen zwei Veränderlichen versteht.

Die Existenz von stetigen Funktionen ohne Ableitungen zeigte, daß die einschränkende Bedingung der Stetigkeit diesen verwickelten Charakter nur in sehr geringem Maße mildert. Um die verschiedenen Fälle, die eintreten können, einigermaßen methodisch zu ordnen, wurde es unerläßlich, die möglichen Gruppierungen der Werte der Veränderlichen, für welche die Funktion eine gegebene Eigenschaft hat, oder auch die Gruppierungen der Funktionswerte, d. h. die Punktmengen zu studieren. Darum wurden auch die meisten Autoren, die sich zu jener Zeit mit der Funktionenlehre beschäftigten, wie *P. du Bois-Reymond*, *K. Weierstraß*, *U. Dini* notwendig dazu geführt, sich auch mit

449) Siehe insbesondere den zweiten und dritten Teil dieses Artikels [II C 9 b und 9 c], sowie auch die Artikel II A 1 (*A. Pringsheim*), III AB 2 (*H. v. Mangoldt*) *und II C 4 (*L. Bieberbach*)*.

den Punktmengen zu beschäftigen und, je nach ihren Bedürfnissen, einige Eigenschaften aufzustellen, die nur leider vereinzelt blieben.

Danach ist es leicht zu ermessen, welch ungeheuere Fortschritte die systematische Theorie *G. Cantor*s und seiner Schüler in der Funktionenlehre ermöglicht hat. *G. Cantor* hat gleich von Anfang an die Möglichkeit von Anwendungen dieser Theorien in einer großen Zahl verschiedener Richtungen klar eingesehen.

Die meisten gegenwärtig in der Analysis gebräuchlichen Definitionen verwenden Begriffe der Mengenlehre [z. B. Schwankung, obere Unbestimmtheitsgrenze usw. (siehe II A 1, *A. Pringsheim*)]. Der *Cours d'Analyse* von *C. Jordan* *sowie der von *Ch. J. de la Vallée Poussin** sind ein Beispiel dafür, welchen Vorteil man aus der Mengenlehre bloß für die einfache und strenge Darstellung der Elemente der Analysis ziehen kann. Einige Definitionen und einige sehr einfache Eigenschaften schaffen für diese eine zugleich bequeme und sichere Grundlage. Im Unterricht in der Analysis werden diese Begriffe immer mehr zu klassischen.

Vom Standpunkt der wissenschaftlichen Forschung betrachtet, sind die Fortschritte noch viel bedeutender gewesen, vor allem in den letzten Jahren, nachdem diese neuen Begriffe sich weiter verbreitet hatten.

22. Anwendungen auf die Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen. *Die Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen ist das hauptsächlichste Anwendungsgebiet der Mengenlehre, derart, daß man diese Theorie geradezu als bloße Weiterführung der Punktmengenlehre auffassen könnte.*

Es sei hier an erster Stelle das *Lebesgue*sche Integral und alles, was damit zusammenhängt, genannt; *doch man sehe hierüber die ausführliche Darstellung im zweiten Teil (II C 9b) dieses Artikels.*

*Weiterhin sei auf die Untersuchungen hingewiesen, die sich auf Reihenentwicklungen, Grenzfunktionen und Approximationen beziehen; insbesondere sei die Einteilung der Funktionen in die *Baire*schen Klassen erwähnt. Über diese Dinge wird der dritte Teil (II C 9c) dieses Artikels berichten.

In dieser Nr. sollen nur einige, neuere Arbeiten betreffende Ergänzungen zu dem Artikel II A 1 (*A. Pringsheim*) gegeben werden; insbesondere werden solche Begriffe besprochen, die für die beiden folgenden Teile unseres Artikels von Wichtigkeit sind.*

R. Baire[450]) hat zum Zweck seiner Untersuchung der unstetigen Funktionen die folgenden Begriffe gebildet:

450) *R. Baire*, *Pariser Thèse (1899) =* Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 1/122 [*dazu von vorläufigen Mitteilungen: Paris C. R. 125 (1897), p. 691/4; 126 (1898),

Man betrachte zunächst beschränkte Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen. Es sei $G(f, \delta)$ bzw. $g(f, \delta)$ die obere bzw. untere Grenze der Funktionswerte von $f(x)$ in dem Intervall δ. Die untere Grenze von $G(f, \delta)$ für alle den Punkt A enthaltenden Intervalle δ wird von *R. Baire*[451]) als *„maximum de la fonction f au point A“* $\mathfrak{M}(f, A)$ bezeichnet, ebenso die obere Grenze von $g(f, \delta)$ für alle A enthaltenden δ als *„minimum de f au point A“* $\mathfrak{m}(f, A)$. *Vorzuziehen ist die Bezeichnung *„oberer bzw. unterer Limes der Funktion f(x) im Punkt A“* oder (wenn diese Limites selbst wieder als Funktionen von A aufgefaßt werden) *„obere bzw. untere Limesfunktion von f(x)“*[452])[452a]).*

Die Differenz
$$\omega(f, A) = \mathfrak{M}(f, A) - \mathfrak{m}(f, A)$$
wird dann die *Schwankung* (oscillation) der Funktion f im Punkt A genannt.[452b])

Ist die Schwankung Null, dann ist die Funktion in A stetig. Ist sie nicht Null, dann ist die Funktion unstetig.

Ist in einem Punkte A
$$f(A) = \mathfrak{M}(f, A),$$
so wird die Funktion f an der Stelle A *nach oben halbstetig* [oder *aufwärts halbstetig*][453]) (semicontinue supérieurement) genannt. Ist in

p. 884/7*]; Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905, p. 1/22; 69/124. *Vgl. auch Acta math. 30 (1906), p. 1/47.*

451) *R. Baire,* *Paris C. R. 125 (1897), p. 691*; Thèse[450]), p. 4 ff.; Leçons[450]), p. 70/1.

452) *Vgl. *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 122; sowie *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 55; Quart. J. of math. 39 (1907), p. 68. *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 117 ff., benutzt hierfür die Bezeichnung „obere bzw. untere *Schrankenfunktion*“. [Vgl. auch daselbst p. 168/71.]*

452a) *Wollte man [etwa in Anlehnung an II A 1, Nr. 7 (*A. Pringsheim*)] unter *„oberem bzw. unterem Limes* von $f(x)$ in A“ die dem obigen entsprechend gebildeten Werte verstehen, welche unter Ausschließung des Funktionswertes $f(A)$ entstehen, so könnte man für die im Text definierten Begriffe sagen: *„obere bzw. untere Grenze von f(x) im Punkte A“* und *„obere bzw. untere Grenzfunktion von f(x)“*.*

452b) **W. Sierpiński,* Anzeiger Akad. Wiss. Krakau A 1910, p. 633/4, sowie im Anschluß daran auch *H. Blumberg,* Proc. National Acad. Amer. 2 (1916), p. 646/9; Ann. of math. (2) 18 (1917), p. 147/60; [vgl. auch Amer. Journ. of math. 41 (1919), p. 183/90] und *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 219/29, haben die Schwankung ω_2 der Schwankung ω sowie die k-fach iterierten Schwankungen ω_k untersucht. [Auch *L. R. Ford,* Proc. Edinburgh Math. Soc. 32 (1914/15), p. 139/42, gehört hierher.] Hervorzuheben ist, daß für Funktionen mit endlichem ω immer $\omega_k = \omega_2$ $(k > 2)$, bei beliebigen Funktionen immer $\omega_k = \omega_3$ $(k \geq 3)$ ist. Analogerweise hat *A. Denjoy,* Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 98/114, iterierte Limesfunktionen untersucht.*

453) **A. Schoenflies* [Bericht I 1900, p. 141] und mit ihm andere verwenden die Bezeichnung *„oberhalb stetig“* bzw. *„unterhalb stetig“*.*

einem Punkte A

$$f(A) = \mathfrak{m}(f, A),$$

so wird die Funktion f an der Stelle A *nach unten halbstetig* [oder *abwärts halbstetig*][453]) (semicontinue inférieurement) genannt.[451])

Damit eine Funktion in einem Punkte stetig sei, ist es notwendig und hinreichend, daß sie in diesem Punkte nach oben und nach unten halbstetig sei.

Eine Funktion heißt *in einem Intervalle* nach oben oder nach unten halbstetig, wenn sie es in jedem Punkte des Intervalls ist.

Die obere Limesfunktion

$$\mathfrak{M}(f, A)$$

einer in einem Intervall definierten Funktion f ist eine nach oben halbstetige Funktion. Ebenso ist

$$\mathfrak{m}(f, A)$$

eine nach unten halbstetige Funktion. Die Schwankung

$$\omega(f, A)$$

ist eine nach oben halbstetige Funktion.[454])

Die im vorstehenden gegebenen Definitionen und Aussagen lassen sich auf nicht-beschränkte Funktionen[455]), auf Funktionen von mehreren Veränderlichen, sowie auf den Fall ausdehnen, wo man, anstatt alle Punkte eines Intervalls, in dem die zu untersuchende Funktion definiert ist, nur eine beliebige, z. B. perfekte Punktmenge betrachtet.

Sei H eine solche Menge. Man kann *auf der Menge* H einen oberen bzw. unteren Limes sowie eine Schwankung von f in jedem Punkte A von H definieren. Bezeichnen wir diese Funktionen mit

$$\mathfrak{M}(f, H, A), \quad \mathfrak{m}(f, H, A), \quad \omega(f, H, A).$$

Ist ω in jedem Punkte A von H Null, so wird die Funktion auf der Menge H stetig genannt. Sie heißt auf H nach oben halbstetig, wenn man in jedem Punkte A von H

$$\mathfrak{M}(f, H, A) = f(A)$$

hat. Sie heißt auf H nach unten halbstetig, wenn man in jedem Punkt A von H

$$\mathfrak{m}(f, H, A) = f(A)$$

hat.[456])

454) *R. Baire*, *Thèse[450]), p. 10;* Leçons[450]), p. 73.

455) *Wenn man die Stetigkeit von f im Punkt A durch

$$f(A) = \mathfrak{M}(f, A) = \mathfrak{m}(f, A)$$

definiert, so erhält man für nicht-beschränkte Funktionen f einen erweiterten Stetigkeitsbegriff, der die Endlichkeit von f noch nicht einschließt.*

456) **R. Baire*, Thèse[450]), p. 4/10, 27/8; Leçons[450]), p. 83/4, 106/7, 121. Bei diesen Begriffen kann man im linearen Fall noch das Verhalten rechts

*_R. Baire_ benutzt weiterhin die von _H. Hankel_[457]) und _U. Dini_[458]) herrührende Einteilung der nicht stetigen Funktionen in _punktweise_ (oder _punktiert_) _unstetige_ und in _total unstetige_ Funktionen. [Näheres über diese Begriffe sehe man in II A 1, Nr. **19** (_A. Pringsheim_)].*

Eine in einem Intervall definierte unstetige Funktion ist punktweise unstetig, wenn ihre Stetigkeitspunkte in diesem Intervalle überall dicht liegen. Daraus folgt, daß in einem beliebigen Teilintervall des vorgelegten Intervalls das Minimum der Schwankung der Funktion Null ist. Also ist in jedem Punkte des Intervalls der untere Limes der Schwankung gleich Null.

Es existieren Funktionen, die nicht punktweise unstetig sind: z. B. die Funktion, die für jeden rationalen Wert der Veränderlichen Null, für jeden irrationalen gleich 1 ist. Beispiele punktweise unstetiger Funktionen bilden die Funktionen, deren Unstetigkeitspunkte eine endliche Menge bilden oder eine unendliche Menge mit endlicher Ableitung, oder noch allgemeiner eine unendliche Menge, für die irgendeine Ableitung (endlicher oder transfiniter Ordnung) endlich ist.

Die angegebene Definition läßt sich wieder auf eine Funktion übertragen, die auf einer beliebigen Punktmenge H definiert ist: Sie

---

und links vom Punkt unterscheiden [vgl. II A 1, Nr. 7 (_A. Pringsheim_): rechts- und linksseitige Grenzwerte] und kann analoge Unterscheidungen auch im mehrdimensionalen Fall vornehmen; dies hat _W. H. Young_ getan, Quart. J. of math. 39 (1907/08), p. 67/83, 263/5; Rendic. Acc. Lincei [Roma] (5) 17 (1908), p. 582/7; Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1909). p. 117/24; [auch _W. H._ u. _G. Chisholm Young_, Verhandl. Schweiz. Naturf. Ges. 1916_{II}, p. 108/10; Proc. London Math. Soc. (2) 16 (1917), p. 337/51; (2) 17 (1918), p. 1/16]. Insbesondere sei der Satz hervorgehoben (_W. H. Young_, erstes und drittes Zitat): Von einer höchstens abzählbaren Punktmenge abgesehen, stimmen die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte einer Funktion von einer Veränderlichen in jedem Punkt überein. Bei mehreren Veränderlichen bilden die entsprechenden Ausnahmestellen eine Menge von erster Kategorie (_W. H. Young_, viertes Zitat). Siehe auch _H. Hahn_, Reelle Funktionen I, p. 176/83, 188/90, 193/4, 197/8, 208/9, 228/9, sowie _G. Sannia_, Mem. Acc. Torino (2) 66 (1915), p. 1/22; _H. Blumberg_, Bull. Amer. Math. Soc. 24 (1917/18), p. 381/3; Proceed. National Acad. U. S. A. 8 (1922), p. 283/5. Vgl. ferner Nr. **40a** (und Nr. **57a**).

Es sei ferner noch erwähnt, daß man die hier im Text besprochenen Begriffe auch „bei Vernachlässigung der Mengen einer gewissen Mengengesamtheit" (z. B. der abzählbaren Mengen oder der Mengen von 1. Kategorie) bilden kann; siehe hierüber _R. Baire_, Thèse [450]), p. 72/4, 81/2; Acta math. 30 (1906), p. 21/2, sowie _H. Hahn_, Reelle Funktionen I, p. 173/6, 214, 227/8. Vgl. auch Nr. 38 bei [726]).*

457) *_H. Hankel_[351]), Math. Ann. 20 (1882), p. 91.*

458) *_U. Dini_, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878, (Dtsch. v. _J. Lüroth_ und _A. Schepp_ u. d. Titel: Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Größe, Leipzig 1892), § 62.*

heißt auf H *punktweise unstetig*, wenn die Stetigkeitspunkte der Funktion auf H überall dicht liegen; andernfalls *total unstetig.*

Jede in einem Intervall halbstetige Funktion ist punktweise unstetig. *Das gleiche gilt auch für jede auf einer abgeschlossenen oder offenen Punktmenge oder auf einer inneren Grenzmenge halbstetige Funktion.*[459])

Die Wichtigkeit dieser Unterscheidung zwischen den punktweise unstetigen und den total unstetigen Funktionen ergibt sich vor allem aus der wesentlichen Rolle, die diese Begriffe bei der Untersuchung der *Baire*schen Klassen spielen [*vgl. Nr. **53**, **54***].

*Mit dem vorstehenden hängen noch die folgenden Sätze zusammen: Die Stetigkeitspunkte einer in einem Intervall definierten Funktion bilden eine innere Grenzmenge. Und umgekehrt: Zu jeder inneren Grenzmenge J gibt es Funktionen, deren sämtliche Stetigkeitspunkte mit J identisch sind.[460]) Daraus ergibt sich eine Einteilung der (im Intervall definierten) Funktionen in 1. Funktionen ohne Stetigkeitspunkte, 2. Funktionen mit endlich oder abzählbar vielen, nirgends dichten Stetigkeitspunkten, 3. Funktionen mit Stetigkeitspunkten von der Mächtigkeit des Kontinuums (hierunter die stetigen und punktweise unstetigen Funktionen). [Siehe auch Nr. **57 a**, insbes. den Schluß.]*

*Der Begriff der *Funktionen von beschränkter Schwankung*[461]) (fonctions à variation bornée) ist bereits in II A 1, Nr. **19** (*A. Pringsheim*) besprochen worden. $f(x)$ heißt in einem linearen Intervall von beschränkter Schwankung, wenn für jede Wahl von endlich vielen Punkten $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ des Intervalls

$$\sum_{1}^{n-1} |f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)| \tag{1}$$

459) *R. Baire*, Thèse[450]), p. 64; *Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 179;* Leçons[450]), p. 77, 124. *Vgl. auch *H. Lebesgue*[460]), p. 233, und *H. Hahn*[460]), p. 215/6.*

460) *W. H. Young*, Sitzgber. Ak. Wiss. Wien 112 IIa (1903), p. 1312/16; Proc. London Math. Soc. (2) 3 (1905), p. 375/8 u. 379/80; *H. Lebesgue*, Bull. Soc. math. France 32 (1904), p. 235. [Vgl. auch *H. Hahn*, Reelle Funktionen I, p. 198/203.]*

461) *Neuerdings gebrauchen, im Anschluß an *G. Kowalewski*, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig u. Berlin 1909, p. 218, auch in Deutschland einige Autoren den Ausdruck: *Funktionen von beschränkter Variation*. *H. Hahn*, Reelle Funktionen I, Kap. VII, verwendet sogar die Bezeichnung: „Funktionen *endlicher* Variation".

Im übrigen sei auf die eingehende Untersuchung von *H. Hahn*, a. a. O., ausdrücklich hingewiesen; siehe dazu auch *Elisabeth Trilling*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 184/203.*

unter einer festen Schranke liegt.[462]) Die obere Grenze der Summe (1) wird als die *totale Variation* von $f(x)$ im Intervall bezeichnet.[463]) Jede Funktion von beschränkter Schwankung ist als Differenz von zwei monotonen, nicht abnehmenden Funktionen darstellbar.[464])

Dieser Begriff der Funktionen beschränkter Schwankung ist von *C. Arzelà*[465]), *G. H. Hardy*[466]) und *J. Pierpont*[466a]) in verschiedener Weise auf Funktionen von zwei oder n Veränderlichen übertragen worden. *H. Hahn*[466b]) bzw. *W. Küstermann*[467]) haben gezeigt, daß der Begriff von *J. Pierpont* umfassender ist als der von *C. Arzelà*, bzw. daß dieser letztere umfassender ist als der Begriff von *G. H. Hardy*.[467a])

Unter den stetigen Funktionen von beschränkter Schwankung ist von besonderer Wichtigkeit eine engere Klasse von Funktionen, die nach *G. Vitali*[468]) „*assolutamente continua*" (französisch: „absolument continue"), im Deutschen: „*absolut stetig*" oder auch „*total stetig*"[469]) heißen. Eine Funktion $f(x)$ wird in einem Intervall (a, b) so genannt, wenn stets die Summe der Funktionsdifferenzen

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n} (f(\beta_\nu) - f(\alpha_\nu))$$

---

462) *Oder auch (was auf dasselbe hinausläuft), wenn für jede solche Einteilung in endlich viele Teilintervalle die Summe der Schwankungen von $f(x)$ in diesen Teilintervallen unter einer festen Schranke liegt.*

463) *Siehe hierzu auch den Schluß von Nr. **41** [bei [771])].*

464) *Ein Analogon zu den Funktionen beschränkter Schwankung stellen die von *A. Winternitz*[544]) betrachteten und von ihm sogenannten „*Funktionen beschränkter Drehung*" dar.*

465) **C. Arzelà,* Rend. Accad. Bologna 9 (1904/5), p. 100/7.*

466) **G. H. Hardy,* Quart. J. of math. 37 (1905/6), p. 56/60. In ähnlicher Weise ist der Begriff auch von *G. Vitali*[472]), *H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 409, und von *M. Fréchet,* Nouv. Ann. de math. (4) 10 (1910), p. 241, definiert worden; nur daß bei ihnen eine von *G. H. Hardy* verwendete Bedingung fehlt.*

466a) **J. Pierpont,* Lectures on the theory of functions of real variables I, Boston 1905, p. 518.*

466b) **H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 546/7.*

467) **W. Küstermann,* Math. Ann. 77 (1916), p. 474/81.*

467a) *Es sei noch erwähnt, daß *N. Lusin,* Paris C. R. 155 (1912), p. 1475/7; Annali di mat. (3) 26 (1917), p. 99 ff., [vgl. auch *A. Denjoy,* Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), p. 162/7 u. Fußn. p. 168] zum Zweck der Untersuchung des speziellen *Denjoy*schen Integrals [vgl. Nr. **35c** u. **44**, sowie [737])] „*Funktionen von verallgemeinerter beschränkter Schwankung*" (f. à variation bornée *généralisée*) definiert hat.*

468) **G. Vitali,* Atti Accad. Torino 40 (1905), p. 1021. Vor ihm hatte schon *H. Lebesgue* [Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904, p. 129, Fußnote] diese Funktionen betrachtet.*

469) *Letztere Ausdrucksweise benutzt *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 513.*

in den Endpunkten α_ν, β_ν von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Teilintervallen gegen 0 konvergiert, sobald die Längensumme der Teilintervalle gegen 0 konvergiert.[469a])

Oder anders ausgedrückt: Seien α_ν, β_ν die Endpunkte von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Teilintervallen, deren Längensumme

$$\sum_1^n{}_\nu (\beta_\nu - \alpha_\nu) \leqq \lambda \tag{3}$$

ist; die bei festgehaltenem λ gebildete obere Grenze $\tau(\lambda)$ aller Zahlen

$$\sum_1^n{}_\nu |f(\beta_\nu) - f(\alpha_\nu)| \tag{4}$$

sei als „*λ-Variation*", der stets existierende $\lim_{\lambda=0} \tau(\lambda)$ als „*Nullvariation*" von $f(x)$ bezeichnet.[470]) Dann heißt $f(x)$ absolut oder total stetig, wenn die Nullvariation von $f(x)$ verschwindet.

Jede absolut stetige Funktion ist als Differenz zweier monoton wachsender, absolut stetiger Funktionen darstellbar.[471])

In entsprechender Weise ist der Begriff der absolut stetigen Funktionen auf den Fall von zwei (bzw. n) Veränderlichen übertragen worden.[472])

Den absolut stetigen Funktionen tritt in mancher Beziehung eine Klasse von Funktionen gegenüber, die *C. Carathéodory*[473]) als „*Funktionen von konstanter λ-Variation*" bezeichnet: $f(x)$ wird im Intervall (a, b) so genannt, wenn in jedem Teilintervall die λ-Variation einen von λ unabhängigen Wert besitzt. Eine Funktion von endlicher konstanter λ-Variation läßt sich wieder als Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen konstanter λ-Variation darstellen. Ferner: Eine in einem abgeschlossenen Intervall definierte Funktion $f(x)$ von beschränkter Schwankung kann auf eine und nur eine Weise dargestellt werden als Summe einer total stetigen Funktion und einer Funktion von konstanter λ-Variation, die im Anfangspunkt verschwindet. Die letztere Funktion kann nochmals in einen stetigen und einen unstetigen Bestandteil zerlegt werden. Diese Zerlegung der Funktionen

469a) *Vgl. auch die in Nr. 44 erwähnte Begriffsbildung der „fonction résoluble" von *A. Denjoy*[810]).*

470) *Diese beiden Bezeichnungen stammen von *C. Carathéodory*[469]), p. 511 u. 513.*

471) **G. Vitali*[468]), p. 1024.*

472) **G. Vitali,* Atti Accad. Torino 43 (1907/08), p. 245. Vgl. auch *C. Carathéodory*[469]), p. 651/6, und *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 541/2.*

473) **C. Carathéodory*[469]), p. 567/90.*

beschränkter Schwankung in ihre drei Bestandteile ist in etwas anderer Formulierung zuerst von *H. Lebesgue*[474]) ausgeführt worden; wir werden weiter unten darauf zurückkommen.*

*Für die neuere Entwicklung der Funktionentheorie reeller Veränderlichen war vielfach die möglichst allgemeine Fassung des Funktionsbegriffs von Bedeutung: Man hat nicht nur *„Punktfunktionen"* betrachtet, d. h. Funktionen, deren unabhängige Veränderliche durch Punkte eines Raumes dargestellt werden, sondern allgemeiner *„Mengenfunktionen"*, bei welchen den Punktmengen eines Raumes oder den Mengen einer gewissen Mengenkategorie Zahlen (oder noch allgemeiner: Mengen) zugeordnet werden.[474a]) Beispiele solcher Mengenfunktionen sind Inhalt bzw. Maß einer Menge, ferner das Integral. Insbesondere in der grundlegenden Abhandlung von *H. Lebesgue* [in den Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 316/450] und den damit zusammenhängenden Untersuchungen[475]) spielen diese Mengenfunktionen eine wesentliche Rolle.

Von den Definitionen *H. Lebesgues* seien hervorgehoben[476]): Eine für die meßbaren Mengen e definierte Mengenfunktion $F(e)$ heißt *absolut stetig* oder[477]) *total stetig*, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gefunden werden kann, so daß für alle meßbaren Punktmengen e vom Maß $m(e) \leqq \delta$ die Ungleichung $|F(e)| \leqq \varepsilon$ erfüllt ist.[478]) Als *stetig* schlechthin wird eine Mengenfunktion $F(e)$ be-

474) **H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 408/25. [Vgl. auch *G. Vitali,* Rend. Circ. mat. Palermo 46 (1922), p. 388/408, sowie [480a]).]*

474a) *Den allgemeinsten Funktionsbegriff hat, in unmittelbarer und naheliegender Verallgemeinerung des *Dirichlet*schen Funktionsbegriffs [siehe II A 1, Nr. 3 (*A. Pringsheim*)], *G. Cantor* [Math. Ann. 46 (1895), p. 486] gebildet: Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ irgend zwei Mengen mit beliebigen Elementen, so bezeichnet er als *„Belegung von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$"* eine Zuordnung, die jedem Element von $\mathfrak{P}$ ein Element von $\mathfrak{Q}$ entsprechen läßt. Die so entstehende Funktion der Elemente von $\mathfrak{P}$ nennt er *„Belegungsfunktion"*. *E. H. Moore* benutzt hierfür bei seinen in Nr. 26 angegebenen Untersuchungen die Bezeichnung *„function on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{Q}$"* (*„Funktion aus $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}$"*) [vgl. z. B. Introduction[535]), p. 24; *O. Bolza*[536]), p. 251].*

475) *Insbesondere *J. Radon,* Sitzgber. Ak. Wiss. Wien 122 IIa (1913), p. 1295/1438, [vgl. dazu noch 128 IIa (1919), p. 1083/1121]; *C. de la Vallée Poussin,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 435/501; Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire, Paris 1916; *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen; *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, Kap. VI—VIII; *Elisabeth Trilling,* Zur Theorie absolut-additiver Mengenfunktionen, Auszug aus d. Bonner Dissertation 1921, u. [461]); *M. Fréchet,* Fundamenta math. 4 (1923), p. 329/65.*

476) **H. Lebesgue,* a. a. O.[474]), p. 381.*

477) *Diese Bezeichnung wieder bei *C. Carathéodory*[469]), p. 475.*

478) *Man kann den Begriff der totalstetigen Mengenfunktion noch verallgemeinern, indem man das Maß $m(e)$ durch irgendeine (in einem „σ-Körper"

zeichnet, wenn $|F(e)|$ zugleich mit dem Durchmesser δ der Menge e nach 0 konvergiert.[478a]) Eine Mengenfunktion $F(e)$, die in einem gewissen „Körper" von Mengen e [vgl. Nr. 9b], z. B. für die meßbaren Mengen e, definiert ist, heißt *additiv* (im engeren Sinne), wenn für irgend zwei elementenfremde Mengen e_1 und e_2 des Körpers

$$F(e_1 + e_2) = F(e_1) + F(e_2)$$

ist; dann ist von selbst die analoge Beziehung für irgend endlich viele Summanden erfüllt. Besteht diese Beziehung auch für abzählbar unendlich viele, elementenfremde Mengen e_k eines „σ-Körpers" [der z. B. wieder aus den meßbaren Mengen bestehen kann], ist also

$$F(e_1 + e_2 + \cdots + e_k + \cdots) = F(e_1) + F(e_2) + \cdots + F(e_k) + \cdots,$$

so heiße die Funktion *additiv im weiteren Sinn* oder auch[478b]) [weil die rechte Seite einen von der Anordnung der Glieder unabhängigen Wert hat, also mit der Konvergenz zugleich absolute Konvergenz stattfindet] *absolut additiv.* Die total stetigen und im engeren Sinn additiven Mengenfunktionen sind zugleich auch im weiteren Sinn additiv. Ferner[478c]) ist jede endliche, absolut additive Mengenfunktion zugleich beschränkt und läßt sich als Differenz von zwei ebensolchen, nicht-negativen Mengenfunktionen darstellen. Ebenso[476]) lassen sich die additiven und total stetigen Mengenfunktionen als Differenz von zwei nicht-negativen Funktionen gleicher Eigenschaft darstellen. Die oben erwähnte Definition der totalen Stetigkeit für Punktfunktionen läßt sich auf die der additiven und total stetigen Mengenfunktionen zurückführen. Wegen der besonders wichtigen Bedeutung der additiven und total stetigen Mengenfunktionen für die Integrationstheorie sei auf Nr. 47 verwiesen.

Die absolut additiven Mengenfunktionen hängen aufs engste mit den Punktfunktionen von beschränkter Schwankung[478d]) zusammen: derart, daß jeder solchen, auf einem die Intervalle enthaltenden σ-Körper definierten, absolut additiven Mengenfunktion eine Punktfunktion be-

definierte) absolut additive [siehe unten] Mengenfunktion [die *„Basisfunktion"*] ersetzt; siehe *J. Radon*[475]), erstes Zitat, p. 1318/20, und *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 416 u. 461/2.*

478a) *Vgl. dazu *J. Radon*[475]), erstes Zitat, p. 1321; *C. de la Vallée Poussin*[475]), erstes Zitat, p. 487; *H. Hahn*[475]), p. 408/16; *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 240/6; [sowie *M. Fréchet*[475]), p. 339/40].*

478b) *Nach *J. Radon*[475]), erstes Zitat. — Dieser verlangt allerdings noch die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite, d. h. die Endlichkeit der Mengenfunktion $F(e)$, (was wir nicht in die Definition mit aufnehmen wollen).*

478c) **J. Radon*[475]), erstes Zitat, p. 1299/1303; vgl. auch *C. de la Vallée Poussin*[475]), zweites Zitat, p. 83/4; *M. Fréchet*[475]), p. 341/2.*

478d) *Bei mehreren Dimensionen werde die Definition[466]) zugrunde gelegt.*

schränkter Schwankung entspricht und umgekehrt. Der Übergang von der Mengenfunktion zur Punktfunktion vollzieht sich sehr einfach, indem man die Mengenfunktion auf Intervallen betrachtet. Tiefer liegt der umgekehrte Übergang, der durch die Untersuchungen von *J. Radon*[479]) [und auch durch spätere von *C. de la Vallée Poussin*[480])] erledigt worden ist; die Konstruktion der zur gegebenen Punktfunktion beschränkter Schwankung zugehörigen absolut additiven Mengenfunktion geschieht durch eine Verallgemeinerung des Prozesses, der, vom Inhalt der Intervalle ausgehend, zum *Borel-Lebesgue*schen Maß führt [vgl. Nr. 20].

Die genauere Analyse der Struktur der absolut additiven Mengenfunktionen, also damit auch der Punktfunktionen beschränkter Schwankung hat im wesentlichen bereits *H. Lebesgue*[474]) gegeben[480a]) (wovon wir schon oben in anderem Zusammenhang und in anderer Formulierung gesprochen haben). Die endliche, absolut additive Mengenfunktion $F(e)$ läßt sich auf eindeutige Weise in drei Bestandteile zerlegen (von denen natürlich jeder einzelne fehlen kann):

$$F = F_1 + F_2 + F_3;$$

nämlich: 1. die „Unstetigkeitsfunktion“ F_1, die nur für die abzählbare Menge A der Unstetigkeiten von $F(e)$ [d. h. derjenigen Punkte, in denen die Mengenfunktion $F(e)$ von Null verschiedene Werte annimmt] nicht verschwindet, während sie auf jeder zu A elementenfremden Menge gleich Null ist; 2. die „Singularitätsfunktion“ F_2, die stetig, aber nicht total stetig ist, und die mit einer Nullmenge B zusammenhängt, auf welcher F_2 von Null verschieden ist, während F_2 auf jeder zu B elementenfremden Menge verschwindet; 3. eine total stetige Funktion F_3.*

23. Anwendungen auf die Theorie der Funktionen komplexer Veränderlichen. Auch für die Funktionen der komplexen Veränderlichen ist das Eingreifen der Mengenlehre von größter Bedeutung gewesen.[481])

Hier sind vor allem zu nennen: die Arbeiten von *G. Mittag-Leffler*[482]) über das Existenzgebiet und die Entwicklungen der analytischen Funktionen, die von *P. Painlevé*[483]) über die singulären Linien,

479) *J. Radon*[475]), erstes Zitat, p. 1295/1322.*

480) *C. de la Vallée Poussin*[475]); siehe insbes. Intégrales de Lebesgue . . ., Chap. VI.*

480a) *Vgl. auch *J. Radon*[475]), erstes Zitat, p. 1321/2; *C. de la Vallée Poussin*[480]); *C. Carathéodory*[473]); *H. Hahn*[425]), p. 408/24, 461/4.*

481) *Vgl. etwa *A. Hurwitz* [„Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit“], Verh. des ersten intern. Math.-Kongr. Zürich 1897 (Leipzig 1898), p. 91/112.*

482) Acta math. 4 (1884), p. 1/79.

483) Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 2 (1888), mém. n° 2.

die von *E. Borel*[484]) über die verallgemeinerte analytische Fortsetzung; von neueren Arbeiten: die von *P. Montel*[485]) über die Reihen analytischer Funktionen und von *L. Zoretti*[486]) *und *W. Groß*[487])* über das Verhalten einer Funktion in der Umgebung gewisser Singularitäten, ferner die von *P. Painlevé*[488]) und *P. Boutroux*[489]) über die mehrdeutigen Funktionen.

*Weiterhin sind hervorzuheben: die bereits in Nr. **13** Schluß und in Fußnote[340]) zitierten Abhandlungen über konforme Abbildung; ferner die exakte Begründung der Theorie der *Riemann*schen Flächen, die *H. Weyl* durchgeführt hat[490]).

Die angegebenen Arbeiten sind natürlich nur einige besonders hervortretende Beispiele für die Anwendung der Mengenlehre auf die Fragen der Theorie der Funktionen komplexer Veränderlichen. Selbstverständlich wollen diese Beispiele nicht im entferntesten Anspruch auf Vollständigkeit machen; es ist vielmehr im Gegenteil hervorzuheben, daß neuerdings in beständig steigendem Grade die Mengenlehre für die Untersuchungen der komplexen Funktionentheorie herangezogen wird. Im übrigen sei auf den Artikel II C 4: „Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen" (*L. Bieberbach*) sowie auf den Artikel II C 3: „Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung" (*L. Lichtenstein*) hingewiesen.*

24. Anwendungen auf die Analysis situs. Als *G. Cantor* die umkehrbar eindeutige Abbildung eines ebenen Kontinuums auf ein lineares Kontinuum gegeben hatte, „fühlten", wie *A. Schoenflies*[491]) sagt, „die Geometer den Boden schwanken, der ihr Lehrgebäude trug". In der Tat wurden unzweifelhaft die ein wenig vagen Stetigkeitsschlüsse, mit denen man sich häufig begnügte, ja selbst die Begriffe der Kurve, der Fläche, die man benutzte, angesichts der Enthüllung solcher Möglichkeiten unzureichend. Nun sind aber diese Begriffe und die Sätze der Analysis situs in der Analysis häufig an-

---

484) Ann. Éc. Norm. (3) 12 (1895), p. 9/55; siehe auch Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, p. 80.

485) Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907), p. 307.

486) J. de math. (6) 1 (1905), p. 1/51.

487) *Monatsh. Math. Phys. 29 (1918), p. 3/47; Math. Zeitschr. 2 (1918), p. 242/94; 3 (1919), p. 43/64.*

488) Paris C. R. 131 (1900), p. 489/92; Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles (gehalten in Stockholm 1895), lithographiert, Paris 1897; Notice[168]).

489) Ann. Éc. Norm. (3) 25 (1908), p. 319.

490) **H. Weyl*, Die Idee der *Riemann*schen Fläche, Leipzig u. Berlin 1913.*

491) *A. Schoenflies*, Bericht II 1908, p. 149.

gewendet worden; sie bilden mit das Fundament der Funktionentheorie von *A. Cauchy* und *B. Riemann*; es war also unerläßlich, diese Theorien, auf die Mengenlehre gestützt, neu aufzunehmen.

Die Analysis situs ist *nach *F. Klein* und *A. Hurwitz*[492])* das Studium derjenigen Eigenschaften der Figuren (oder Punktmengen), die bei allen umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen erhalten bleiben.

*Es ist wohl vorzuziehen, hier die Invarianz gegenüber den umkehrbar eindeutigen und *beiderseits* stetigen Abbildungen zu fordern; doch kommt diese Unterscheidung nur für Gebilde, die *nicht* beschränkt und abgeschlossen sind, in Betracht [vgl. Nr. **17** bei [295])].*

*Demgemäß stellen die Ausführungen in Nr. **16—17b**, sowie **10—14** die Grundlagen der Analysis situs dar.[493])

Auch in anderen Teilen der Geometrie hat die Mengenlehre Anwendung gefunden (selbst wenn man von der unmittelbaren Benutzung von Resultaten der Analysis situs oder der reellen Funktionenlehre absieht); so z. B. bei Untersuchungen über abwickelbare Flächen und Minimalflächen[494]), bei der Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen[495]), bei Untersuchungen über Vektorfelder[496]), in der allgemeinen Kurvenlehre[497]) und Flächenlehre[497a]), sowie bei den Untersuchungen über konvexe Gebilde[498]).

---

492) *Vgl. hierzu *F. Klein,* Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm ..., Erlangen 1872, p. 30 = Math. Ann. 43 (1893), p. 85 = Gesammelte Mathematische Abhandlungen I (Berlin 1921), p. 482. Die obige scharfe Formulierung findet sich bei *A. Hurwitz*[481]), p. 102.*

493) *Es sei noch erwähnt, daß *R. L. Moore* eine axiomatische Begründung der Analysis situs in der Ebene gegeben hat: Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), p. 131/64; 20 (1919), p. 169/78; Proc. Nation. Acad. U. S. A. 2 (1916), p. 270/2.*

494) **H. Lebesgue*, Thèse[384]), p. 89/129.*

495) **D. Hilbert,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1902, p. 233/41; Math. Ann. 56 (1902/3), p. 381/422, abgedruckt in: Grundlagen der Geometrie (Leipzig u. Berlin, 3. Aufl. 1909, 4. Aufl. 1913) als Anhang IV; dazu *R. L. Moore* [„On the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert Problem of the Foundations of Geometrie"], Amer. J. of math. 41 (1919), p. 299/319; ferner insbesondere: *L. E. J. Brouwer* [„Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von *Lie*"], Math. Ann. 67 (1909), p. 246/67; 69 (1910), p. 181/203; auch Atti IV. Congr. intern. mat. Roma 1908, II (Rom 1909), p. 296/303.*

496) **L. E. J. Brouwer* [„Over continue vectordistributies op oppervlakken"], Verslag Ak. Amsterdam 17_2 (1909), p. 896/904; 18_2 (1909/10), p. 702/21; 19_1 (1910), p. 36/51 = Proceed. Ak. Amsterdam 11_2 (1909), p. 850/58; 12_2 (1909/10), p. 716/34; 13_1 (1910), p. 171/86.*

497) **J. Hjelmslev* [„Contribution à la géometrie infinitésimale de la courbe réelle"], Oversigt Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1911, p. 433/94; [„Om Grundlaget for Læren om simple Kurver"], Nyt Tidsskrift f. Mat. 18 B (1907), p. 49/70; *A. Rosenthal,* Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven, Münchener

Schließlich sei noch auf den Artikel III AB 2 (*H. v. Mangoldt*) sowie auf den in Aussicht genommenen Artikel III AB 13 (*H. Tietze*) über „Geometria situs" hingewiesen.*

Verallgemeinerungen.

25. Die Geradenmengen. Außer den Punktmengen hat man auch andere Arten von konkreten Mengen zu studieren gesucht, indem man sich von den oben entwickelten Hauptbegriffen leiten ließ. So weist z. B. *E. Borel*[499]) darauf hin, welches Interesse das Studium der Geraden- oder Ebenenmengen bietet. Er definiert die Grenzgerade von unendlich vielen Geraden mittels zweier Grenzpunkte und in analoger Weise die Grenzebene von unendlich vielen Ebenen. Man kann daher von der Ableitung einer Menge von Geraden oder Ebenen sprechen, von einer abgeschlossenen, perfekten Menge, usw. Eine beschränkte Menge ist eine Menge, deren sämtliche Geraden eine feste Kugel schneiden.

*Aber schon lange vor *E. Borels* Bemerkungen über die Geradenmengen sind von einigen italienischen Mathematikern, nämlich *G. Ascoli*[500]), *V. Volterra*[501]) und *C. Arzelà*[502]) eingehende Untersuchungen

Habil.-Schrift 1912 = Math. Ann. 73 (1912), p. 480/521; [„Über Gebilde mit einzigem Ordnungsindex"], Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. 1922, p. 221/40.*

497a) **B. P. Haalmeijer* [„Over elementairoppervlakken der derde orde"], Verslag Ak. Amsterdam 26 (1918), p. 58/74, 320/37, 755/67, 1274/81 = Proceed. Ak. Amsterdam 20 (1918), p. 101/18, 304/21, 736/48, 1246/53; *R. L. Moore* [„On the generation of a simple surface by means of a set of equicontinuous curves"], Fundamenta math. 4 (1923), p. 106/17.*

498) **W. Blaschke,* Kreis und Kugel, Leipzig 1916; außerdem: *H. Brunn* [„Über Kerneigebiete"], Math. Ann. 73 (1912), p. 436/40; *St. Straszewicz,* Beiträge zur Theorie der konvexen Punktmengen, Dissertation Zürich 1914; Prace matematyczno-fizyczne 27 (1916), p. 1/10; *S. Kakeya* [„On some properties of convex curves and surfaces"], Tôhoku Math. J. 8 (1915), p. 218/21; *A. Rosenthal* u. *O. Szász* [„Eine Extremaleigenschaft der Kurven konstanter Breite"], Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916), p. 278/82; *W. Groß* [„Die Minimaleigenschaft der Kugel"], Monatsh. Math. Phys. 38 (1917), p. 77/97; *M. Fujiwara* [„Über die Anzahl der Kantenlinien einer geschlossenen konvexen Fläche"], Tôhoku Math. Journ. 10 (1916), p. 164/6; [„Über Stützgeradefunktion der konvexen geschlossenen Kurven"], ib. 20 (1921), p. 51/59; *E. H. Neville* [„The field and the cordon of a plane set of points"], Trans. Cambridge Philos. Soc. 22 (1918), p. 215/57; *K. Reidemeister* [„Über die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers"], Math. Ann. 83 (1921), p. 116/8.*

499) *E. Borel,* Bull. Soc. math. France 31 (1903), p. 272/5. *Vgl. auch die viel älteren, hiermit sich berührenden Betrachtungen bei *F. Klein,* Math. Ann. 9 (1876), p. 480/2 = Ges. Math. Abhandlungen II (Berlin 1922), p. 73/6.*

500) *G. Ascoli,* Memorie Atti Acc. Lincei [Roma] (3) 18 (1883), p. 521/86; Rendic. Istit. Lombardo (2) 21 (1888), p. 226/39, 257/65, 294/300, *365/71*.

501) **V. Volterra,* Rendic. Atti Acc. Lincei [Roma] (4) 3_2 (1887), p. 97/105,

über den allgemeineren Begriff der *Kurvenmengen* und der *Funktionen von Linien*[503]) angestellt worden. Wir wollen über diese und die damit zusammenhängenden Dinge, soweit sie für uns hier in Betracht kommen, unter umfassenderen Gesichtspunkten erst in Nr. **26a** berichten.*

26. Die Funktionalrechnung. Allgemeine Räume. *M. Fréchet*[504]) hat sich die Verallgemeinerung aller jener Versuche zur Aufgabe gemacht. Anstatt sich an eine Kategorie von Mengen mit Elementen bestimmter Natur zu halten, sucht er zu allgemeinen Aussagen zu gelangen, ohne besondere Angabe der Natur der Elemente der betrachteten Mengen.

Sei e irgendein Element einer Menge $\mathfrak{M}$, $V(e)$ eine Zahl, die e in eindeutig bestimmter Weise zugeordnet ist, so nennt man diese Zuordnung eine in $\mathfrak{M}$ eindeutige *Funktionaloperation* (opération fonctionelle oder einfacher fonctionelle) und das Studium dieser Operationen die *Funktionalrechnung* (*calcul fonctionel*). [*Vgl. auch II A 11 (*S. Pincherle*).*]

Bemerkt man, daß die Definition des *Grenzelementes* oder *Häufungselementes* stets eine wesentliche Rolle spielte, welches auch die besondere Natur der bisher betrachteten Mengen war, so ist es natürlich, sich mit *M. Fréchet*[505]) auf Mengen zu beschränken, die die folgenden zwei Eigenschaften besitzen:

1. Man kann unterscheiden, ob zwei Elemente der Menge identisch sind oder nicht.

2. Man kann erkennen, ob eine Folge von Elementen ein (einziges) Grenzelement hat oder nicht.

Was die allgemeine Definition des Grenzelementes einer unendlichen Folge von Elementen betrifft, so sind die einzigen Beschränkungen, die *M. Fréchet* ihr auferlegt, die folgenden:

141/6, 153/60, 225/30, 274/81, 281/7; (4) 4_1 (1888), p. 107/15, 196/202; (4) 5_1 (1889), p. 158/65, 291/99, 599/611; Acta math. 12 (1888/9), p. 233/86. Dazu *Cornelia Fabri,* Atti Acc. Torino 25 (1889/90), p. 654/74. Vgl. im übrigen insbesondere *V. Volterra,* Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, Paris 1913, Chap. I; Leçons sur les fonctions de lignes, Paris 1913. Auch ein großer Teil der in Fußnote [544]) zitierten Arbeiten knüpft an die Untersuchungen *V. Volterras* an.*

502) *C. Arzelà,* Rendic. Atti Acc. Lincei [Roma] (4) 5_1 (1889), p. 342/8; Mem. Istit. Bologna (5) 5 (1895/6), p. 225/44, *257/70; (5) 6 (1896/7), p. 131/40; Rendic. Istit. Bologna (2) 1 (1896/7), p. 71/84.*

503) *Vgl. hierzu II A 11, Nr. **19** (*S. Pincherle*).*

504) *M. Fréchet,* *Pariser Thèse 1906 =* Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 1/74, *[dazu von vorläufigen Mitteilungen: Paris C. R. 139 (1904), p. 848/50; 140 (1905), p. 27/9, 772/4] und Rend. Circ. mat. Palermo 30 (1910), p. 1/26.*

505) *Thèse [504]), p. 4/6.*

1. Sind in der unendlichen Folge alle Elemente identisch, so gibt es ein Grenzelement, nämlich das gegebene Element.

2. Hebt man aus einer Folge von Elementen mit einem Grenzelement eine andere Folge heraus, die von ebenso angeordneten Elementen gebildet wird, so hat die neue Folge dasselbe Grenzelement.[506])

*Eine Klasse von Elementen, für die eine solche Definition des Grenzelementes festgelegt ist, nennt er eine „*Klasse* (*L*)".*

Man kann dann die Definitionen und einige wesentliche Eigenschaften der Punktmengen auf die abstrakten Mengen der Klassen (*L*) ausdehnen.[507]) Merken wir nur die folgenden Definitionen *M. Fréchets* an:

Eine Menge $\mathfrak{M}$ ist *kompakt*[508]), wenn sie sich entweder aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammensetzt, oder wenn jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{M}$ mindestens zu einem Grenzelement Anlaß gibt (das zur Menge gehören kann *oder auch nicht*). Eine *abgeschlossene kompakte* Menge wird als *extremale* oder neuerdings auch[508a]) als „*in sich kompakte*" Menge bezeichnet. *Eine Menge $\mathfrak{M}$ wird *verdichtet* („condensé")[508b]) genannt, wenn jede nicht abzählbare Teilmenge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ zu mindestens einem *Verdichtungselement* [siehe Nr. 5] Anlaß gibt; „Verdichtungselement" von $\mathfrak{N}$ ist dabei ein Häufungselement, das auch Häufungselement jeder Menge ist, die aus $\mathfrak{N}$ durch Weglassung irgendeiner abzählbaren Teilmenge entsteht.[508c])*

506) **F. Riesz*, Atti IV. Congr. internaz. mat. Roma 1908, II (Rom 1909), p. 18/24, hat eine andere, allgemeinere, den Begriff der Folge nicht benutzende Definition des Grenzelementes (oder, wie er sagt, der „Verdichtungsstelle") gegeben. *M. Fréchet.* Paris C. R. 165 (1917), p. 359/60; Bull. sc. math (2) 42 (1918), p. 138/56, hat (mit Hilfe einer geeigneten Umgebungsdefinition [vgl. [516b])], ebenfalls ohne Benutzung der Folgen) eine noch allgemeinere „Klasse ($\mathfrak{V}$)" definiert, welche die „Klasse ($\mathfrak{R}$)", in welcher die *Riesz*sche Definition gilt, umfaßt; zugleich gibt er notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß die Klasse ($\mathfrak{V}$) eine Klasse ($\mathfrak{R}$) ist. Vgl. ferner die Bemerkungen bei *M. Fréchet*[516a]), p. 365/7, sowie bei *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 176, über den Zusammenhang der [durch die Forderung der Abgeschlossenheit der Ableitung[509]) ergänzten] *Riesz*schen Definition des Grenzelements und der *Hausdorff*schen[519]) Umgebungsdefinition.*

507) *Siehe hierüber *M. Fréchet,* Thèse[504]), p. 6/17. Vgl. auch [314]).*

508) **A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 281, verwendet für „kompakt" das Wort „lückenlos"; doch ist in der Literatur fast ausnahmslos *M. Fréchets* Bezeichnung „kompakt" gebräuchlich.*

508a) *Vgl. *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 364, und *H. Tietze,* Math. Ztschr. 5 (1919), p. 288.*

508b) **M. Fréchet,* Thèse[504]), p. 19.*

508c) Nach *M. Fréchet,* Thèse[504]), p. 27; [516a]), p. 350/3, bzw. *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p 268/9, ist jede Menge einer separablen Klasse (*V*) [siehe unten] bzw. eines topologischen Raums mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom [siehe unten]

Wenn man ausschließlich die eben erwähnten Eigenschaften des Grenzelementes zugrunde legt, also allgemein die „Klassen (L)“ betrachtet, so kommt man zu der Folgerung, daß die Ableitungen nicht immer abgeschlossen sind.[509]) Um diesen Übelstand zu vermeiden, betrachtet *M. Fréchet*[510]) weiterhin Mengen *einer *Klasse* (V)* von folgenden Eigenschaften: 1. man kann zwei Elementen a und b eine nicht-negative Zahl

$$(1) \qquad (a, b) = (b, a) \geqq 0$$

zuordnen, die nur dann Null ist, wenn a und b zusammenfallen; 2. diese Zahl soll so beschaffen sein, daß die beiden simultanen Ungleichungen

$$(2) \qquad (a, b) < \varepsilon, \quad (a, c) < \varepsilon$$

verdichtet. Überhaupt haben in einer Klasse (V) die Begriffe separabel [im Sinn von [515a])] und verdichtet gleichen Umfang.

Mit dem Begriff „verdichtet“ hängt eine Begriffsbildung von *W. Groß* [Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien 123 IIa (1914), p. 805, vgl. auch p. 818] zusammen: Er nennt eine Menge *„𝔟-kompakt“*, wenn jede Teilmenge von höherer Mächtigkeit als der Mächtigkeit 𝔟 mindestens ein Häufungselement besitzt; und speziell bezeichnet er als *„𝔞-kompakt“* eine Menge, bei der jede nicht-abzählbare Teilmenge ein Häufungselement besitzt. Letzteren Begriff untersucht er näher und zeigt [p. 812 u. 805/6], daß in einer Klasse (V) [siehe unten] jede „𝔞-kompakte“ Menge verdichtet und separabel ist und umgekehrt.

Ferner ist hier noch der von *R. L. Moore*[532b]) eingeführte, (im Anschluß an *S. Janiszewski*) als *„vollständig kompakt“* [*„parfaitement compact“*] bezeichnete Begriff zu erwähnen: Es wird so eine Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet, wenn jede geordnete, monoton abnehmende Gesamtheit von ineinander geschachtelten, abgeschlossenen Teilmengen von $\mathfrak{M}$ (mindestens) ein gemeinsames Element besitzt. Vgl. dazu auch *M. Fréchet*[516a]), p. 342/3.*

509) **M. Fréchet,* Paris C. R. 140 (1905), p. 27/29; Thèse[504]), p. 15/17. — Auch wenn die Menge kompakt ist, braucht die Ableitung noch nicht abgeschlossen zu sein; vgl. hierüber eine (an *A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 282/3 anschließende) Bemerkung von *H. Hahn*[513]), p. 249. —

E. R. Hedrick, Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1911), p. 285/94, hat diejenigen Klassen (L) betrachtet, in denen die Ableitung jeder Menge abgeschlossen ist; nach einigen allgemeinen Ergebnissen fügt er zur weiteren Durchführung seiner Untersuchung als neue Forderung eine gewisse Umgebungseigenschaft, die er „enclosable property“ nennt, hinzu. *M. Fréchet,* Trans. Amer. Math. Soc. 14 (1913), p. 320/4, hat daraufhin gezeigt, daß eine Klasse (L), welche die „enclosable property“ und einige andere von *E. R. Hedrick* implizit benutzte Eigenschaften besitzt, immer eine normale Klasse (V) [siehe hierüber weiter unten] ist, und daß es daher überflüssig ist, in diesem Zusammenhang die Abgeschlossenheit der Ableitung ausdrücklich vorauszusetzen.

Neuerdings bezeichnet *M. Fréchet*[528]), zweites Zitat, p. 2; [512a]), p. 55, eine Klasse (L), in der die Ableitung jeder Menge abgeschlossen ist, als *„Klasse (S)“*. Vgl. ferner [528]).*

510) *Insbesondere Thèse[504]), p. 17ff.*

die Ungleichung

$$(3) \qquad (b, c) < f(\varepsilon)$$

nach sich ziehen, wo $f(\varepsilon)$ eine von a, b, c unabhängige, mit ε unendlich klein werdende Funktion von ε ist. Diese Zahl (a, b) heißt der *Distanzwert*[511]) (*voisinage*) von a und b.[512]) Die Aussage: „Eine Folge von Elementen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

konvergiert gegen das Element a", soll dann nach Definition bedeuten, daß der Distanzwert (a_n, a) gegen Null konvergiert.[512a])

Man kann mittels dieser Definitionen einem großen Teil der in den vorhergehenden Kapiteln ausgesprochenen Sätze eine allgemeinere Form geben, wobei diese sich natürlich auf die klassische reduziert, wenn die Elemente der Menge Punkte sind, und wenn man den *Distanzwert* durch den *Abstand* zweier Punkte ersetzt.

M. Fréchet[513]) hat ferner noch einen anderen derartigen Begriff eingeführt: den „*écart*" oder, wie wir sagen wollen, die *Entfernung* zweier Elemente; dieser Begriff ist eine Verschärfung des Begriffes „Distanzwert". Er setzt nämlich hierfür voraus, daß der Distanzwert von solcher Natur ist, daß

$$(4) \qquad (b, c) \leqq (a, b) + (a, c)$$

ist. *Eine Klasse von Elementen, für die sich in dieser Weise die Entfernung definieren läßt, bezeichnet er als „*Klasse* (E)"; *F. Haus-*

---

511) *Diese Übersetzung von *M. Fréchets* „*voisinage*" stammt von *A. Schoenflies,* Bericht II 1908, p. 284.*

512) **T. H. Hildebrandt,* Amer. J. of math. 34 (1912), p. 237/90, hat [in Anknüpfung an die Gedankengänge von *E. H. Moore*[535])] *M. Fréchets* „voisinage" durch eine noch allgemeinere Beziehung $K_{q_1 q_2 m}$ ersetzt und, darauf sich stützend, die entsprechenden Untersuchungen durchgeführt. Vgl. dazu auch *E. W. Chittenden,* Amer. J. of math. 39 (1917), p. 263/71; *E. W. Chittenden* u. *A. D. Pitcher*[524]).

Ferner haben *A. D. Pitcher* u. *E. W. Chittenden,* Trans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), p. 66/78, einen allgemeineren „Distanz"-Begriff untersucht, der nur der Bedingung 1. unterworfen ist. Dieser Begriff spielt auch in einer ungefähr gleichzeitigen Arbeit von *M. Fréchet*[512a]) eine wesentliche Rolle.*

512a) *Damit ergeben sich also die Klassen (V) als Spezialfälle der Klassen (L). —

Neuerdings hat *M. Fréchet,* Trans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), p. 53/65, die umgekehrte Frage zu untersuchen begonnen, d. h.: Unter welchen Bedingungen kann man in einer Klasse (L) einen „Distanzwert" bzw. eine „Entfernung" [siehe unten] definieren, ohne daß dadurch die in der Klasse (L) bereits vorhandenen Konvergenzbeziehungen sich ändern?*

513) **M. Fréchet,* Thèse[504]), p. 30/33; siehe dazu *H. Hahn,* Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), p. 247/57.*

dorff[514]) gebraucht hierfür die sehr treffende Bezeichnung *„metrischer Raum“*, eine Bezeichnung, die sich seitdem in Deutschland durchaus eingebürgert hat.[514a])*

*Neuerdings hat *E. W. Chittenden*[514b]) beweisen können, daß der „Distanzwert“ und die „Entfernung“ äquivalente Begriffe sind; d. h. in jeder Klasse (V) kann man eine „Entfernung“ so definieren, daß dabei alle Aussagen über konvergente Folgen und Grenzelemente ungeändert bleiben. Man kann also darnach sagen, daß die Klassen (V) und die Klassen (E) zusammenfallen.*

*Um einen möglichst umfassenden Teil der früheren Sätze in allgemeiner Form zu erhalten, nimmt *M. Fréchet*[515]) noch weitere Bedingungen hinzu und gelangt so zu der *„normalen Klasse (V)* [bzw. (E)]“ („classe (V) [bzw. (E)] normale“): Er nennt so eine Klasse (V) [bzw. (E)], wenn sie 1. *„separabel“* ist, d. h. als Ableitung[515a]) einer abzählbaren Teilmenge erhalten werden kann, und wenn außerdem 2. der *Cauchy*sche Konvergenzsatz gilt, d. h. wenn jede Fundamentalfolge[515b]) gegen ein Grenzelement konvergiert.[516])*

*Es ist recht bedauerlich, daß *M. Fréchet*[516a]) [hauptsächlich veranlaßt durch das eben erwähnte Resultat von *E. W. Chittenden*[514b])]

514) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 211 und 290.*

514a) *Es sei noch erwähnt, daß *E. H. Neville*[313b]), insbes. p. 68, einen Raum betrachtet, in dem eine „Entfernung“ derart definiert ist, daß die Forderung (4) nur für hinreichend benachbarte Punkte erfüllt ist und vor allem auch zwischen voneinander verschiedenen Punkten die „Entfernung“ Null zugelassen wird.*

514b) **E. W. Chittenden*, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), p. 160/6.*

515) **M. Fréchet*, Thèse[504]), p. 23/8; siehe auch Rendic. 30[504]), p. 1/10.*

515a) *Neuerdings hat *M. Fréchet*[516a]), p. 341, den Sinn des Wortes *„separabel“* etwas modifiziert, indem er so eine Menge bezeichnet, die in der *abgeschlossenen Hülle* einer abzählbaren Teilmenge enthalten ist. Vgl. auch [525]).*

515b) *Eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ heißt bekanntlich eine Fundamentalfolge, wenn $(a_{\nu+\varrho}, a_\nu)$ für hinreichend großes ν und jedes ϱ beliebig klein wird. [Vgl. I A 3, Nr. 5 (*A. Pringsheim*)].*

516) *Einige Sätze des n-dimensionalen Euklidischen Raumes gelten auch für die normalen Klassen (E) nicht allgemein; so hat *M. Fréchet*, Rendic. 30[504]), p. 15/22, gezeigt, daß im allgemeinen nicht mehr die Zerlegbarkeit des Gesamtraumes in abzählbar viele kompakte Mengen gilt. Vgl. dazu auch *E. W. Chittenden* u. *A. D. Pitcher*[524]), insbes. p. 230/3.*

516a) *M. Fréchet*[512a]); siehe auch Ann. Éc. Norm. [56 =] (3) 38 (1921), p. 341/88, sowie [506]).*

516b) *An Stelle seiner früheren Bezeichnungen „écart“, „Klasse (E)“, „voisinage“, „Klasse (V)“ benutzt er nunmehr (der Reihe nach) die Bezeichnungen *„distance“, „Klasse (D)“, „écart uniformément régulier“* bzw. *„Klasse (E_r)“*; während er nunmehr unter *„écart“* einen allgemeinen Entfernungsbegriff versteht, für welchen die Bedingung 2. des früheren „voisinage“ nicht erfüllt zu sein braucht,

neuerdings seine Bezeichnungen in vielen Punkten abgeändert hat, was leicht zu Verwechslungen Anlaß geben kann, zumal die ursprünglichen Bezeichnungen von *M. Fréchet*, die auch wir hier im vorstehenden benutzt haben, in zahlreichen Arbeiten vieler Mathematiker Anwendung gefunden haben.[516b])*

*_*M. Fréchet* u. a.[516c]) haben nach dem vorstehenden die allgemeine Theorie durchgearbeitet auf Grund der Begriffe Grenzelement bzw. Entfernung. Es besteht noch eine andere Möglichkeit, nämlich vom Begriff der „*Umgebung*" auszugehen. Dies hat zuerst *D. Hilbert*[517]) für den speziellen Fall der zweidimensionalen Ebene getan. In oben erwähnten Untersuchungen von *E. R. Hedrick*[509]) und *M. Fréchet*[509, Mitte]) hat der Umgebungsbegriff schon eine wesentliche Rolle gespielt. Eine allgemeine „Umgebungstheorie" ist aber erst von *R. E. Root*[518]) und insbesondere von *F. Hausdorff*[519]) aufgestellt und systematisch durchgeführt worden.[520])

F. Hausdorff hat, vom Umgebungsbegriff ausgehend, schrittweise die ganze Punktmengenlehre axiomatisch aufgebaut. Er bezeichnet als „*topologischen Raum*" eine Menge E, bei der den Elementen x gewisse Teilmengen U_x — die Umgebungen von x — zugeordnet sind, welche die folgenden „*Umgebungsaxiome*" erfüllen[521]):

vgl. [512]); entsprechend gebraucht er nun auch die Bezeichnung „*Klasse (E)*". Ferner verwendet er jetzt „*voisinage*" [und „*Klasse (V)*"] als Bezeichnung für einen *Umgebungsbegriff* (vgl. dazu auch *M. Fréchet*[506])): Zu jedem Element a existiere eine Folge von Mengen $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ so, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge $\{a_\nu\} \longrightarrow a$ darin besteht, daß die Elemente der Folge $\{a_\nu\}$ von einem gewissen Index ν_0 ab einem vorgegebenen U_n angehören. Es wird sich empfehlen, um Verwechslungen auszuschließen, bei einem Hinweis auf diese neuen Bezeichnungen von *M. Fréchet* ein unterscheidendes Merkmal zu verwenden (entweder deutsche Buchstaben zu benutzen oder einen * beizufügen).*

516c) *Es sei auch insbes. auf *H. Hahn*, Reelle Funktionen I, Kap. I, hingewiesen.

Wegen des Zusammenhangs der *Fréchet*schen Begriffsbildungen mit den umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen siehe *N. Wiener*, Bull. Soc. math. France 50 (1922), p. 119/34 [vorläufige Mitteilung: Publications of the Massachusetts Institute of Technology, Depart. of Math. (2) Nr. 20 (1921)].*

517) **D. Hilbert*[495]). Vgl. dazu auch *H. Weyl*[490]), p. 17/18, wo die zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Hilfe des Umgebungsbegriffs definiert wird.*

518) **R. E. Root*, Bull. Amer. Math. Soc. 17 (1910/11), p. 538/9; Amer. Journ. of math. 36 (1914), p. 79/104, 105/33; siehe auch Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), p. 51/71.*

519) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, Kap. VII u. Kap. VIII.*

520) *Auch die erwähnten neueren Arbeiten von *M. Fréchet*[506]) u. [512a]) betreffen den Umgebungsbegriff [in der Form, die in [516b]) angegeben ist].*

521) **F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 213. Vgl. im übrigen das ganze Kap. VII.*

(A) Jedem Element x entspricht mindestens eine Umgebung U_x; jede Umgebung U_x enthält das Element x.

(B) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Elementes x, so gibt es eine Umgebung W_x, die Teilmenge von beiden ist.

(C) Liegt das Element y in U_x, so gibt es eine Umgebung U_y, die Teilmenge von U_x ist.

(D) Für zwei verschiedene Elemente x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsames Element.

Für die topologischen Räume gilt bereits eine große Reihe von Punktmengensätzen[521a]; weitere Eigenschaften ergeben sich durch Spezialisierung des Raumes, d. h. durch Hinzufügung neuer axiomatischer Forderungen.[521b]

Zunächst kann es sein, daß in der zugrunde gelegten Menge E zwei verschiedene Systeme von Umgebungen, U_x und U_x^*, vorhanden sind, die beide den Axiomen (A)—(D) genügen. Wenn dann für jede Teilmenge von E alle im topologischen Raum entscheidbaren Aussagen in bezug auf beide Umgebungssysteme unverändert gelten, dann bezeichnet *F. Hausdorff*[522] die beiden Umgebungssysteme als *gleichwertig*; und zwar sind die beiden Systeme von Umgebungen U_x und U_x^* dann und nur dann gleichwertig, wenn jedes U_x ein U_x^* und jedes U_x^* ein U_x als Teilmenge enthält. Er spezialisiert nun den topologischen Raum dadurch, daß er nacheinander zwei „*Abzählbarkeitsaxiome*" hinzufügt (von denen das erste im zweiten enthalten ist). Er fordert nämlich die Existenz eines dem ursprünglichen Umgebungssystem der U_x gleichwertigen Systems von Umgebungen U_x^* (gegebenenfalls mit dem System der U_x identisch), das das erste bzw. zweite der folgenden beiden *Abzählbarkeitsaxiome* erfüllt:

(E) Für jedes Element x ist die Menge seiner verschiedenen Umgebungen U_x^* höchstens abzählbar.[523]

(F) Die Menge aller verschiedenen Umgebungen U^* ist abzählbar.

521a) *Insbesondere läßt sich der Begriff des Grenzelementes definieren auf Grund der naheliegenden Festsetzung: Das Element a ist Grenzelement der Folge $\{a_\nu\}$, wenn in jeder Umgebung von a „fast alle" a_ν enthalten sind.*

521b) *Es sei erwähnt, daß *L. Vietoris*[506], p. 173/5, und insbes. *H. Tietze*, Math. Ann. 88 (1923), p. 290/312, zum System (A)—(D) noch andere, an (D) anknüpfende „Trennbarkeitsaxiome" hinzugenommen haben (woraus aber die sogleich zu besprechenden *Hausdorff*schen „Abzählbarkeitsaxiome" noch nicht folgen; übrigens folgen auch umgekehrt jene in ihrer Gesamtheit nicht aus diesen).*

522) **F. Hausdorff*[519], p. 260.*

523) *Eine zu (E) analoge Abzählbarkeitsaussage über Umgebungen spielt auch schon bei *E. R. Hedrick*[509] und *M. Fréchet*[509, Mitte] eine wesentliche Rolle; vgl. [516b].*

Im weiteren Verlauf seiner Untersuchung nimmt dann *F. Hausdorff* (wie oben *M. Fréchet*) als neues Begriffselement noch den Begriff der „Entfernung" hinzu und betrachtet also die *metrischen Räume.*[524]) In jedem metrischen Raum gelten (wenn man die „Kugeln" als Umgebungen betrachtet) die Umgebungsaxiome und das erste Abzählbarkeitsaxiom; das zweite Abzählbarkeitsaxiom dann und nur dann, wenn der metrische Raum eine abzählbare, überall dichte Teilmenge enthält.[525]) Er bezeichnet weiterhin einen metrischen Raum als *„vollständig"*[526]), wenn jede Fundamentalfolge gegen ein Grenzelement konvergiert. [Jeder metrische Raum läßt sich durch Einführung uneigentlicher Elemente zu einem vollständigen Raum erweitern.] Er betrachtet dann noch insbesondere vollständige Räume mit abzählbarer, überall dichter Teilmenge (also im wesentlichen[525]) normale metrische Räume); einen Spezialfall hiervon bildet schließlich der n-dimensionale *Euklidische* Raum[526a]), bei dem die Entfernung der Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ durch

$$\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \cdots + (x_n - x_n')^2}$$

dargestellt wird.

Der stufenweise Aufbau, wie er insbesondere von *M. Fréchet* und *F. Hausdorff* durchgeführt wird, bietet den wesentlichen Vorteil, die axiomatische Grundlage der einzelnen Sätze und damit zugleich ihren Geltungsbereich für Räume bestimmten Charakters erkennen zu lassen. Die Anlage des Originals des vorliegenden Berichts war nun aber von vorneherein ganz und gar nur auf die Punktmengenlehre in n-dimensionalen Euklidischen Räumen zugeschnitten, so daß auch die Bearbeitung diesen Standpunkt nicht mehr verlassen konnte. Es soll aber an dieser Stelle als Beispiel wenigstens für einen grundlegenden Satz,

524) **F. Hausdorff*[519]), p. 290ff.

Es sei hier erwähnt, daß *M. Fréchet*[509, Mitte]) aus einem Umgebungsbegriff einen „Distanzwert" ableitet. Vgl. dazu auch *M. Fréchet*[512a]), p. 60/3, sowie *L. Vietoris,* Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 270/5. Ferner geben *E. W. Chittenden* u. *A. D. Pitcher*, Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), p. 213/33, insbes. p. 228/30, topologische, nur auf den Umgebungsbegriff sich beziehende Bedingungen an, welche einen topologischen Raum als einen kompakten metrischen charakterisieren.*

525) *Ein metrischer Raum, der „separabel" [in dem im obigen Text bei [515]) definierten Sinn] ist, ist etwas spezieller als ein solcher mit abzählbarer, überall dichter Teilmenge; denn letzterer kann isolierte Punkte enthalten, ersterer nicht. Wenn dagegen „separabel" in dem modifizierten Sinn von [515a]) genommen wird, so bedeutet dies dasselbe wie „mit abzählbarer, überall dichter Teilmenge".*

526) **F. Hausdorff*[519]), p. 315ff. [Es sei noch erwähnt, daß *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 108, eine Menge als *„relativ-vollständig"* bezeichnet, wenn sie in einer vollständigen Menge eine innere Grenzmenge ist].*

526a) *Vgl. dazu auch *R. L. Moore*[493]).*

nämlich für den *Borel*schen Überdeckungssatz, angegeben werden, auf welcher Stufe er sich bereits beweisen läßt: Der *Borelsche Überdeckungssatz* (für eine kompakte, abgeschlossene [überdeckte] Menge) gilt a) bei abzählbar vielen überdeckenden Mengen: in den Klassen (V)[527]; in denjenigen Klassen (L), für welche der Satz von der Abgeschlossenheit der Ableitung jeder Menge richtig ist[528]; in den topologischen Räumen[529]; b) bei irgend unendlich vielen überdeckenden Mengen: in den topologischen Räumen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom[530]; also auch speziell in den separablen metrischen Räumen, aber auch schon in den „perfekten"[531] Klassen (V)[532] und noch allgemeiner in beliebigen Klassen (V)[532a]; schließlich auch in denjenigen Klassen (L), für welche der Satz von der Abgeschlossenheit der Ableitung jeder Menge richtig ist und in welcher jede abnehmende Gesamtheit von ineinander geschachtelten, abgeschlossenen Mengen einen nicht-leeren Durchschnitt besitzt[532b].[532c]

Übrigens werden in den verschiedenen Klassen und Räumen nicht nur die Sätze der Punktmengenlehre untersucht, sondern darüber hinaus natürlich auch die zur Funktionenlehre reeller Veränderlichen analogen Begriffe und Sätze aufgestellt[533]; so die Begriffe der Funktion,

---

527) ***M. Fréchet,* Thèse[504], p. 22/3.*

528) ***E. R. Hedrick*[509], p. 286. Vgl. dazu *M. Fréchet,* Paris C. R. 162 (1916), p. 870/1; Bull. Soc. math. France 45 (1917), p. 1/5, der hier beweist, daß die Gültigkeit des *Borel*schen Überdeckungssatzes (mit abzählbar vielen Überdeckungsmengen) für die Klassen (L) der angegebenen Art charakteristisch ist.
Siehe ferner *E. W. Chittenden,* Bull. Amer. Math. Soc. 21 (1914/5), p. 179/83; 25 (1918/19), p. 60/5, und *M. Fréchet,* Bull.[506], p. 151/6.*

529) ***F. Hausdorff*[519], p. 231.*

530) ***F. Hausdorff*[519], p. 272.*

531) *D. h.: mit der eigenen Ableitung identischen. —
Eine separable Klasse (V) ist stets perfekt, aber nicht notwendig umgekehrt. Vgl. *M. Fréchet,* Thèse[504], p. 23/4.*

532) ***M. Fréchet,* Thèse[504], p. 26, hatte zuerst den Satz für die normalen Klassen (V) bewiesen; die Verschärfung auf perfekte Klassen (V) rührt von *T. H. Hildebrandt* her; vgl. *M. Fréchet,* Trans.[509], p. 320 Fußn.*

532a) ***W. Groß*[508c], p. 810/12; *M. Fréchet*[528], zweites Zitat, p. 5/8.*

532b) ***R. L. Moore,* Proceed. Nation. Acad. U. S. A. 5 (1919), p. 206/10. Vgl. dazu auch *M. Fréchet*[516a], p. 342/9.*

532c) *Vgl. auch *C. Kuratowski* u. *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 172/8, sowie *S. Saks,* ib., p. 1/3.*

533) *Siehe hierüber insbesondere *M. Fréchet,* Thèse[504], p. 7/15, 28/33 [dazu von den vorläufigen Mitteilungen: Paris C. R. 139 (1904), p. 848/50; 140 (1905), p. 27/9, 772/4]; *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 358/69, 384/99; *H. Hahn,* Reelle Funktionen I; [außerdem *H. Tietze,* J. f. Math. 145 (1914/15), p. 9/14; *K. P. Williams,* Annals of math. (2) 17 (1915/16), p. 72/3].*

speziell der stetigen Funktion, der Funktionenfolge und deren Konvergenz oder gleichmäßige Konvergenz, usw., sowie die diesbezüglichen Sätze. Z. B. heißt die eindeutige Funktion f, die für eine Menge $\mathfrak{M}$ einer Klasse (L) definiert ist, im Element a *stetig*, wenn für jede gegen a konvergierende Folge von (zu $\mathfrak{M}$ gehörenden) Elementen

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$$

auch die Folge der entsprechenden Funktionswerte

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_\nu), \ldots$$

gegen den Funktionswert $f(a)$ konvergiert.[534]) Insbesondere hat als erster *H. Hahn* in seiner „Theorie der reellen Funktionen" die gesamte reelle Funktionentheorie im metrischen Raum [und zum Teil, soweit dies möglich ist, in der Klasse (L)] systematisch und vollständig aufgebaut.*

*Mit allem vorhergehenden stehen in engstem Zusammenhang die weitgehenden Untersuchungen von *E. H. Moore*[535]) und seinen Schülern[536]) über die *„General Analysis"*. *E. H. Moore* sucht stets den allgemeinsten Standpunkt einzunehmen und nach Möglichkeit über die unabhängige Veränderliche überhaupt keine einschränkenden Voraussetzungen zu machen. Die „General Analysis" besteht dann aus Definitionen und Sätzen, bei denen die (oder eine) unabhängige Veränderliche in diesem Sinne als völlig allgemein angenommen werden kann. Er verwendet seine Untersuchungen insbesondere dazu, um Analogien,

534) **H. Hahn*[513]) hat gezeigt, daß es Klassen (L) gibt, in denen jede stetige Funktion sich auf eine Konstante reduziert; daß dagegen bei den Klassen (V) die Konstanten sicher nicht die einzigen stetigen Funktionen sein können.*

535) *Insbesondere *E. H. Moore* [„Introduction to a form of general analysis"], The New Haven Mathematical Colloquium, New Haven 1910, p. 1—150; ferner: Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1905/6), p. 280, 283/4 [nur vorläufige Mitteilung]; Atti IV. congr. internaz. matem. Roma 1908, II (Rom 1909), p. 98/114; Bull. Amer. Math. Soc 18 (1911/12), p. 334/62; Proceed. 5. internat. congr. mathemat. Cambridge 1912, I (Cambridge 1913), p. 230/55; Proceed. National Acad. U. S. A. 1 (1915), p. 628/32; Math. Ann. 86 (1922), p. 30/9.

Siehe ferner die „Einführung in *E. H. Moores* General Analysis . . ." von *O. Bolza*, Jahresb. Deutsch Math.-Ver. 23 (1914), p. 248/303.*

536) *Außer den schon erwähnten Arbeiten von *T. H. Hildebrandt*[512]), *E. W. Chittenden*[512]), *R. E. Root*[518]) und *E. W. Chittenden* u. *A. D. Pitcher*[524]) (die mit *M. Fréchet*'s Untersuchungen in direktem Zusammenhang stehen) sind insbesondere anzuführen: *A. D. Pitcher*, Bull. Amer. Math. Soc. 19 (1912/3), p. 468/72; The Kansas University Science Bulletin 7 (1913), p. 1/67; *E. W. Chittenden*, Rendic. Circ. mat. Palermo 39 (1915), p. 81/108; *A. A. Bennett*, Proceed. National Acad. U. S. A 2 (1916), p. 592/8; *T. H. Hildebrandt*, Trans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), p. 73/96, 97/108; Annals of math. (2) 21 (1919/20), p. 323/30; *Ch. N. Moore*, Proc. National Acad. U.S.A. 8 (1922), p. 288/93; vgl. auch *G. C. Evans*[544]).*

die sich in verschiedenen Teilen der Analysis zeigen, jeweils einer möglichst umfassenden allgemeinen Theorie unterzuordnen.[537]) Den Prozeß der Zurückführung der speziellen Analogien auf die allgemeine Theorie nennt er *„Unifizierung“* („unification“). Er sucht dabei zunächst das formale System der Veränderlichen, Funktionenklassen und Funktionaloperationen, die in die allgemeine Theorie des betreffenden Problems eingehen, und bezeichnet dieses System als die *„Basis“* des Problems; den Bestandteilen dieser „Basis“ (insbesondere den Funktionenklassen und Funktionaloperationen) werden dann solche Bedingungen auferlegt, daß die Verallgemeinerungen der speziellen Sätze, von denen ausgegangen wird, noch gelten.

Ein ausführlichere Darstellung von *E. H. Moore*s „General Analysis“ gehört nicht hierher, sondern vielmehr in Bereich des (allerdings schon vor den angegebenen Arbeiten *E. H. Moore*s entstandenen) Artikels über Funktionaloperationen und -gleichungen. Auf diesen Artikel II A 11 (*S. Pincherle*) sei auch an und für sich wegen des vielfachen Zusammenhangs mit den in dieser Nr. behandelten Dingen hier noch ausdrücklich verwiesen.*

26a. ***Raum von unendlich vielen Dimensionen, Funktionenraum und andere spezielle Räume.** Die in der vorigen Nr. auseinandergesetzten allgemeinen Begriffsbildungen und Untersuchungen erweisen sich nun als besonders fruchtbar bei der Anwendung auf spezielle Fälle, also auf Räume bestimmter konkreter Elemente, die sich analog verhalten wie die gewöhnlichen n-dimensionalen Euklidischen Räume.*

Betrachten wir zunächst den Begriff eines *Raumes R_ω von abzählbar unendlich vielen Dimensionen.* Ein Punkt dieses Raumes R_ω wird dargestellt durch die geordnete Reihe der Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Um R_ω zu einem metrischen Raum zu machen, genügt es, eine geeignete Definition der Entfernung (écart) zweier Punkte

x mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

und

x' mit den Koordinaten $x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$

zu geben; *M. Fréchet*[538]) setzt als Entfernung

$$(x, x') = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - x_n'|}{1 + |x_n - x_n'|}$$

537) *Speziell behandelt er die Auflösung von Systemen linearer Gleichungen mit endlich bzw. abzählbar unendlich vielen Unbekannten und die Auflösung linearer Integralgleichungen.*

538) **M. Fréchet,* Thèse[504]), p. 40 [auch Paris C. R. 140 (1905), p. 567/8 u. 772]. — Eine hieran anschließende Untersuchung der Funktionentheorie

und zeigt, daß man auf diese Weise einen normalen metrischen Raum erhält. Es ist dann leicht, die allgemeinen Sätze auf dieses spezielle Beispiel anzuwenden. Offenbar ist in diesem Falle bei der Definition der Entfernung eine gewisse Willkür möglich; von Wichtigkeit ist, daß man eine solche Definition geben kann.

Eine andere Bildung eines Begriffes des Raumes von unendlich vielen Dimensionen verdankt man *D. Hilbert*[539]. Man schließt diejenigen Punkte aus, für welche die Reihe

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \cdots$$

nicht konvergiert, und nimmt als *Entfernungs*definition

$$(x, x') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \cdots}.$$

*Der so entstehende Raum wird häufig als der *Hilbertsche Raum* bezeichnet; er ist wieder ein normaler metrischer Raum.* Die Sätze von *M. Fréchet* bleiben demnach anwendbar.[540]

*Des weiteren ist der „*Funktionenraum*" (oder „*Funktionalraum*") viel untersucht worden, d. h. der Raum, dessen Elemente die in einem abgeschlossenem Intervall $[a, b]$ definierten eindeutigen, *stetigen Funktionen* $f(x)$ sind. Als Entfernung (f, g) der beiden stetigen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ werde das Maximum von $|f(x) - g(x)|$ in $[a, b]$ genommen. [Vgl. auch Nr. 49b.] Man erhält auf diese Weise nach *M. Fréchet* wieder einen normalen metrischen Raum.[541]

Eine andere brauchbare Entfernungsdefinition hat *F. Riesz*[542] gegeben; er definiert nämlich als Entfernung von $f(x)$ und $g(x)$ den Ausdruck:

$$\sqrt{\int_b^a [f(x) - g(x)]^2 dx}.$$

Der Raum der stetigen Funktionen wird dann ein separabler metrischer

---

in einem solchen Raum R_ω bei *R. Gateaux*, Bull. Soc. math. France 47 (1919), p. 70/96.*

539) *D. Hilbert*, Rendic. Circ. mat. Palermo 27 (1909), p. 59/74.

540) Eine ausführliche Darstellung der Geometrie des *Hilbert*schen unendlich-dimensionalen Raumes gibt *M. Fréchet*, Nouv. Ann. math. (4) 8 (1908), p. 97/116, 289/317. [*Einen anderen unendlich-dimensionalen Raum, der dem *Hilbert*schen nahesteht, betrachtet *K. Ogura*, Tôhoku Math. J. 18 (1920), p. 9/22.*]

*Speziellere Untersuchungen über den *Hilbert*schen Raum bei: *W. L. Hart*, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), p. 125; 23 (1922), p. 30/50; *E. W. Chittenden*, Rendic. Circ. mat. Palermo 45 (1921), p. 265/70.*

541) **M. Fréchet*, Thèse[504], p. 36/8.*

542) **F. Riesz*, Paris C. R. 143 (1906), p. 738/41. — Noch eine andere Definition bei *M. Fréchet*, Paris C. R. 162 (1916), p. 154/5.*

Raum, der aber jetzt nicht mehr vollständig ist. — Dieser Entfernungsausdruck kann nicht nur für stetige Funktionen gebraucht werden, sondern allgemeiner auch für Funktionen, die in $[a, b]$ summierbar und von summierbarem Quadrat [siehe Nr. **30**] sind; dabei werden dann allerdings zwei Funktionen nicht unterschieden, wenn sie bis auf eine Nullmenge übereinstimmen.[543]) Der in solcher Weise erhaltene Funktionenraum stellt einen normalen metrischen Raum dar. Vgl. dazu auch Nr. **57**.[543a])

Über die Funktionenräume und über die in ihnen geltende Funktionentheorie sind zahlreiche spezielle Untersuchungen angestellt worden.[544])*

---

543) *Zwei solche Funktionen, die sich nur in einer Nullmenge unterscheiden, bezeichnet man nach *H. Lebesgue,* Ann. Fac. sc. Toulouse (3) 1 (1909), p. 38, als *„äquivalente"* Funktionen.*

543a) *Es sei noch erwähnt, daß *H. Steinhaus,* Math. Ztschr. 5 (1919), p. 186/221, auch den Raum der in $[a, b]$ summierbaren Funktionen sowie den Raum der in $[a, b]$ meßbaren Funktionen untersucht hat, unter Benutzung von

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

als Definition der Entfernung von $f(x)$ und $g(x)$.*

544) *Vgl. II A 11 (*S. Pincherle*), vor allem Nr. 19. — Abgesehen von den in [500]), [501]), [502]) zitierten Abhandlungen (und Büchern) von *G. Ascoli, V. Volterra* und *C. Arzelà* sind hier insbesondere die folgenden Arbeiten zu nennen: *J. Hadamard,* Paris C. R. 136 (1903), p. 351/4; Leçons sur le calcul des variations, Bd. 1 (Paris 1910), Chap. VI; *M. Fréchet,* Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904), p. 493/9; 6 (1905), p. 134/40; 15 (1914), p. 135/61; 16 (1915), p. 215/34; Paris C. R. 148 (1909), p. 155/6, 279/80; 150 (1910), p. 1231/3; 152 (1911), p. 845/7; Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 193/216; *P. Montel,* Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907), p. 233/64; *E. Schmidt,* Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), p. 56/65; *F. Riesz,* Paris C. R. 149 (1909), p. 974/7; Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 33/62; (3) 31 (1914), p. 9/14; Acta math. 41 (1916), p. 71/98; *H. Lebesgue,* Paris C. R. 150 (1910), p. 86/8; *G. Kowalewski,* Sitzgber. Ak. Wiss. Wien 120_1 IIa (1911), p. 77/109; 120_2 IIa (1911), p. 1435/72; Paris C. R. 151 (1910), p. 1338/40; 153 (1911), p. 1452/4; *E. Helly,* Sitzgber. Ak. Wiss. Wien 121 IIa (1912), p. 265/97; *J. Radon* [475]), erstes Zitat (insbesondere p. 1332/42), sowie zweites Zitat; *R. Gateaux,* Paris C. R. 157 (1913), p. 325/7; Rendic. Atti Acc. Lincei [Roma] (5) 22_2 (1913), p. 646/8; 23_1 (1914), p. 310/5, 405/13, 481/6; Bull. Soc. math. France 47 (1919), p. 47/70; 50 (1922), p. 1/37; *P. Lévy,* Sur les équations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes, Pariser Thèse 1911 = J. Éc. Polyt. (2) 17 (1913), p. 1/120; Paris C. R. 151 (1910), p. 373/5, 977/9; 152 (1911), p. 178/80; 156 (1913), p. 1515/17, 1658/60; 168 (1919), p. 149/52, 732/5; 169 (1919), p. 375/7; 172 (1921), p. 1283/5; Rend. Circ. mat. Palermo 33 (1912), p. 281/312; 37 (1914), p. 113/168; Bull. Soc. math. France 48 (1920), p. 13/27; Leçons d'Analyse fonctionelle, Paris 1922; *Ch. A. Fischer,* Amer. J. of math. 35 (1913), p. 369/94; 36 (1914), p. 289/306; 38 (1916), p. 259/66; 39 (1917), p. 123/34; Annals of math. (2) 19 (1917), p. 37/43; Proc. National Acad. U. S. A. 3 (1917), p. 637/40;

*Die Elemente des Funktionenraums, die eindeutigen, stetigen Funktionen $f(x)$, kann man als Kurven (Linien) auffassen und kommt so zu einem Raum von Kurven und Kurvenmengen und zu *Funktionen von Linien* („*fonctions de lignes*").[545] Aber dies sind nur spezielle Kurven, die sich nämlich auf die x-Achse eindeutig projizieren. Will man die allgemeinen stetigen Kurven zugrunde legen, so muß man von ihrer Parameterdarstellung ausgehen:*

Seien zwei stetige Kurven c und C durch die Gleichungen

$$x = f(t), \quad y = g(t);$$
$$X = F(t), \quad Y = G(t)$$

gegeben[546]); wir wollen annehmen, daß der Parameter t zwischen 0 und 1 variiert. Dieselbe Kurve, z. B. c, kann aber auch durch unendlich viele andere Paare stetiger Funktionen f und g erhalten werden.

Bilden wir die Zahl

$$d(t) = \sqrt{[f(t) - F(t)]^2 + [g(t) - G(t)]^2},$$

so hat $d(t)$, wenn t von 0 bis 1 variiert, ein Maximum d. *M. Fréchet*[547]) nennt Entfernung (écart) die untere Grenze aller dieser Maxima d, falls man für $f(t), \ g(t), \ F(t), \ G(t)$

8 (1922), p. 26/9; *L. Tonelli,* Atti Acc. Torino 49 (1913/14), p. 4/14; Rendic. Acc. Lincei (5) 23_1 (1914), p. 28/33; *E. Pascal,* Rendic. Acc. sc. Napoli [53 =] (3) 20 (1914), p. 40/8, 68/77, 85/91, 104/111 = Giorn. di mat. (3) 53 (1915), p. 318/48; *E. Daniele,* Rendic. Acc. Lincei (5) 24_1 (1914), p. 319/24, 496/8; Giorn. di mat. (3) 53 (1915), p. 162/8; *Ph. Frank* u. *G. Pick,* Paris C. R. 158 (1914), p. 104/5; Math. Ann. 76 (1915), p. 354/75; *G. Pick,* Paris C. R. 158 (1914), p. 549/51; *W. Blaschke,* Paris C. R. 158 (1914), p. 778/80, 1149/51; *W. Blaschke* u. *G. Pick,* Math. Ann. 77 (1916), p. 277/300; *Ph. Frank,* Math. Ann. 77 (1916), p. 301/2; *G. A. Bliss,* Proc. National Acad. U. S. A. 1 (1915), p. 173/7; *Elena Freda,* Rendic. Acc. Lincei (5) 24_1 (1915), p. 1035/39; *A. Winternitz,* Ber. Ges. Wiss. Leipzig 69 (1917), p. 349/90; *S. Kakeya,* Science Reports Tôhoku Univers. 6 (1917), p. 341/58; 7 (1918), p. 177/96; *G. C. Evans,* Functionals and their applications. Selected topics including integral equations, Amer. Math. Soc. Colloquium V 1, New-York 1918; *H. Steinhaus*[543a]); *L. L. Dines,* Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), p. 45/65; *Elizabeth Le Stourgeon,* ibid. 21 (1920), p. 357/83; *I. A. Barnett,* Proceed. National Acad. U. S. A. 6 (1920), p. 200/4; *F. Tricomi,* Atti Acc. Napoli (3) 26 (1920), p. 160/69, 193/202; *E. W. Chittenden*[540]); *Pia Nalli,* Rend. Circ. mat. Palermo 46 (1922), p. 49/90; *St. Banach,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 133/81; *T. H. Hildebrandt,* Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1922), p. 53/8; *G. D. Birkhoff* u. *O. D. Kellog*[349]); *H. Hahn*[712]); *G. Bouligand,* Paris C. R. 176 (1922), p. 822/3; *N. Wiener,* Fundamenta math. 4 (1923), p. 136/43.*

545) *Vgl. [501]), [503]) und auch [544]).*

546) *Entsprechend im drei- oder mehrdimensionalen Raum.*

547) **M. Fréchet,* Paris C. R. 140 (1905), p. 772/3, und 141 (1905), p. 873/5; Thèse [504]), p. 51/67.*

alle möglichen Funktionen von t nimmt, welche die Kurven c und C darstellen. *Der Raum dieser Kurven ist wieder ein normaler metrischer Raum.*

*Einen weiteren Spezialfall der in der vorigen Nr. besprochenen allgemeinen Theorie stellt eine Begriffsbildung von *R. Baire*[548]) dar, die er [wenig zweckmäßig] als *„nulldimensionaler Raum“*[549]) (*„Nullraum“*) bezeichnet und die er bei seinen Untersuchungen über seine Funktionenklassen verwendet.*

Dieselbe Rolle, wie sonst die Punkte, spielen hier im „Nullraum“ die Folgen ganzer, positiver Zahlen; also das Element des „Nullraums“ ist eine geordnete Folge

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),$$

wobei jeder Buchstabe irgeneine der positiven ganzen Zahlen 1, 2, ..., n, ... bezeichnet. Die Menge *aller* dieser Folgen ganzer Zahlen bildet den „Nullraum“.

Das Grenzelement wird dann folgendermaßen definiert: Das Element

$$A_0 = [(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots, (a_n)_0, \ldots]$$

heißt Grenzelement des veränderlichen Elements

$$A_p = [(a_1)_p, (a_2)_p, \ldots, (a_n)_p, \ldots],$$

wenn man für jedes n eine ganze Zahl h finden kann, so daß man für die Werte von $p > h$

$$(a_i)_p = (a_i)_0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n$$

hat.

*Der naheliegendste Entfernungsbegriff, der zu dieser Definition des Grenzelementes führt, entsteht, wenn man als Entfernung zweier Elemente A_0 und A_1 den reziproken Wert des Index der ersten in beiden Zahlenfolgen nicht übereinstimmenden Stellen nimmt. Der *Baire*sche „Nullraum“ ist dann ein normaler metrischer Raum.[550])*

548) *R. Baire,* *Paris C. R. 129 (1899), p. 946/9, 1010/13, und insbes.* Acta math. 32 (1909), p. 97 ff.

549) **R. Baires* sog. „nulldimensionaler Raum“ hat unter den Dimensionstypen von *M. Fréchet* [vgl. Nr. 17 Schluß] den größten Typus, der kleiner als 1 ist (nämlich den Typus aller irrationalen Zahlen). Der Name „null-dimensionaler Raum“ läßt sich deshalb im Rahmen der *Fréchet*schen Theorie der Dimensionstypen nicht aufrechterhalten. Vgl. *M. Fréchet,* Math. Ann. 68 (1910), p. 155.*

550) *Entgegen einer (wegen fehlender Entfernungsdefinition allerdings nicht eindeutigen) Angabe von *M. Fréchet,* Rendic. 30[504]), p. 26, daß der *Baire*sche „Nullraum“ nicht eine normale, sondern nur eine separable Klasse (E) sei. — Bei dieser Gelegenheit sei (im Hinblick auf Fußn.[549])) hervorgehoben, daß die Eigenschaft der Vollständigkeit eines Raumes keine Invariante der Analysis situs ist.*

*Auch auf die Gesamtheit der im Innern eines Gebietes 𝔊 *analytischen Funktionen* lassen sich die allgemeinen Untersuchungen anwenden[551]); ebenso auf die Gesamtheit von *Potenzreihen,* deren Koeffizienten einem vorgelegten Körper angehören[552]), oder die im Einheitskreis konvergieren.[553])

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß *A. Haar* und *D. König*[554]) sowie *H. Hahn*[555]) die wichtigsten Punktmengensätze auf die *einfach geordneten Mengen*[556]) übertragen haben.*

---

551) **M. Fréchet,* Thèse [504]), p. 45/51.*

552) **J. Kürschák*, Nieuw Archief v. Wiskunde (2) 10 (1912/3), p. 362/9; siehe auch Proceed. 5. internat. congr. mathem. Cambridge 1912, I (Cambridge 1913), p. 285/9.*

553) **G. Pólya,* Acta math. 41 (1917), p. 99/118; *M. Fréchet,* Paris C. R. 165 (1917), p. 669/70; *F. Hausdorff,* Math. Ztschr. 4 (1919), p. 98/103.*

554) **A. Haar* u. *D. König,* J. f. Math. 139 (1911), p. 16/28.*

555) **H. Hahn,* Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien 122 IIa (1913), p. 945/67.*

556) *Über die Theorie der geordneten Mengen siehe *A. Schoenflies,* Bericht I 1913, p. 68ff. [vgl. hier auch den Abschnitt über mehrfach geordnete Mengen, p. 84/7] und *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 69ff.*

II C 9b. INTEGRATION UND DIFFERENTIATION.

Nach dem französischen Artikel von **P. MONTEL** in Paris
bearbeitet von **A. ROSENTHAL** in Heidelberg.

*Literatur.

(Zusammenfassende Darstellungen.)

C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig u. Berlin 1918 [abgekürzt: *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen].

U. Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878 [abgekürzt: *U. Dini,* Fondamenti].

— Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Größe, dtsch. bearb. von *J. Lüroth* u. *A. Schepp,* Leipzig 1892 [abgekürzt: *Dini-Lüroth,* Grundlagen].

E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambridge 1907 [abgekürzt: *E. W. Hobson,* Theory].[556a])

C. Jordan, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, I. Bd., 2. éd. Paris 1893, 3. éd. [nur sehr wenig verändert] 1909; II. Bd., 2. éd. 1894, 3. éd. 1913.

G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig u. Berlin 1909.

H. Lebesgue, Intégrale, Longueur, Aire, Pariser Thèse 1902 (Mailand 1902) = Annali di mat. (3) 7 (1902), p. 231/359 [abgekürzt: *H. Lebesgue,* Thèse = Annali].

— Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904 [abgekürzt: *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration].

E. Pascal, Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale, Milano 1895. — 2ª u. 3ª ediz. mit dem Titel: Esercizi critici di calcolo differenziale e integrale, 1909 bzw. 1921.

J. Pierpont, Lectures on the theory of functions of real variables, Bd. 1, Boston 1905; Bd. 2, 1912 [abgekürzt: *J. Pierpont,* Lectures].

A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Bericht, erstattet der Deutsch. Math.-Ver.), I. Teil, Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900) [abgekürzt: *A. Schoenflies,* Bericht I 1900].

O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, I. Theil, Leipzig 1893; III. Theil, 1899 [abgekürzt: *O. Stolz,* Grundzüge].

Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, Louvain-Paris, I. Bd., 2. éd. 1909, 3. éd. 1914; II. Bd., 2. éd. 1912.

— Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire, Paris 1916 [abgekürzt: *C. de la Vallée Poussin,* Intégrales de Lebesgue].

W. H. Young, The fundamental theorems of the differential calculus (Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., Nr. 11), Cambridge 1910.

Im übrigen sei auf das ausführliche Literaturverzeichnis des Artikels II A 2 (*A. Voß*) hingewiesen.*

556a) *Vgl. Fußnote †) auf p. 855.*

Bestimmtes Integral der beschränkten Funktionen einer Veränderlichen.

27. Das Integral nach Cauchy. Sei eine Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x vorgelegt, die in einem Intervall $[a, b]$ definiert und in diesem Intervall beschränkt ist: dann existiert eine Zahl M derart, daß $|f(x)|$ für jeden in $[a, b]$ genommenen Wert von x kleiner als M ist.

Setzen wir $f(x)$ als in $[a, b]$ *stetig* voraus; teilen wir dieses Intervall $[a, b]$ mit Hilfe der Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ (wobei $a_0 = a$, $a_n = b$ ist) in Teilintervalle und bilden wir die Summe

$$S = (a_1 - a_0)f(x_1) + (a_2 - a_1)f(x_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})f(x_n),$$

in der x_i eine dem Intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ [einschließlich der Endpunkte] angehörige Zahl ist. Wächst die Zahl der Teilungspunkte derart über alle Grenzen, daß das Maximum von $|a_i - a_{i-1}|$ den Grenzwert Null hat, so besitzt die Zahl S einen Grenzwert, den man das *bestimmte Integral* der Funktion im Intervalle $[a, b]$ oder: das bestimmte Integral der Funktion zwischen den Grenzen a und b nennt und mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

Diese Zahl genügt den folgenden Gleichungen:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$$

und den Ungleichungen:

$$g \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq G,$$

wenn G bzw. g die obere bzw. die untere Grenze von $f(x)$ im Intervalle $[a, b]$ sind. Hieraus leitet man die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\alpha)$$

ab, in der α eine Zahl des Intervalles (a, b) bedeutet. Das so definierte Integral ist *das Integral nach Cauchy*[557]).

557) **A. L. Cauchy*, Résumé des leçons données à l'École roy. Polytechnique sur le calcul infinitésimal, I, Paris 1823 = Œuvres (II) 4, p. 122/29. Siehe auch II A 2 (*A. Voß*), Nr. 31.*

28. Das Riemannsche Integral. Es sei $f(x)$ eine beliebige im Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion und wir bilden wieder, wie in Nr. 27, die Summe

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} (a_i - a_{i-1}) f(x_i);$$

sind die Teilungspunkte festgelegt, so haben die Zahlen S die obere bzw. untere Grenze $\overline{S}$ bzw. $\underline{S}$

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{i=n} G_i (a_i - a_{i-1}),$$

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{i=n} g_i (a_i - a_{i-1}),$$

wobei G_i bzw. g_i die obere bzw. untere Grenze der Funktionswerte $f(x)$ im i^{ten} Teilintervall bezeichnen.

Wächst die Zahl der Teilungspunkte über alle Grenzen und konvergiert das Maximum von $|a_i - a_{i-1}|$ gleichzeitig gegen Null, so haben die Zahlen $\overline{S}$ und $\underline{S}$ gleichfalls gewisse Grenzwerte, die von den verwendeten Einteilungen unabhängig sind. Sind diese Grenzwerte einander gleich, so nennt man die Funktion *integrabel* oder *integrierbar*; in diesem Falle haben alle Summen S beständig diesen selben Grenzwert, den man durch das Symbol

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

darstellt. Dies ist der *Riemann*sche Integralbegriff[558]).

W. H. Young*[575]) und *J. Pierpont*[576]) haben noch allgemeinere Formen für die *Riemann*sche Integraldefinition angegeben. Siehe hierüber Nr. **29 Schluß. In ganz anderer Weise ist ferner das *Riemann*sche Integral von *W. H. Young*[645]) und von *F. Riesz*[649]) definiert worden; siehe hierüber Nr. **35a**.*

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine beschränkte Funktion integrierbar ist, besteht darin, daß man das Intervall $[a, b]$ derart in Teilintervalle einteilen kann, daß die Summe aller Teilintervalle, in denen die Schwankung größer als irgendeine willkürlich angenommene positive Zahl ε ist, beliebig klein gemacht werden kann. Diese Integrierbarkeitsbedingung stammt ebenfalls von *B. Riemann*[558]).

---

558) *B. Riemann,* Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Habilitationsschrift Göttingen 1854, publiziert: Abh. Ges. Wiss. Göttingen 13 (1867), p. 101/4 = Werke, 1. Aufl., Leipzig 1876, p. 225/7; 2. Aufl., Leipzig 1892, p. 239/41. *Vgl. auch II A 2 (*A. Voß*), Nr. **31**, Fußn. [189]), [192]) u. [193]), sowie außerdem *H. J. St. Smith*[573]), p. 140/44.*

Man kann sie in eine andere Form bringen, die die Verteilung der Unstetigkeitspunkte der Funktion hervorhebt:

Damit eine beschränkte Funktion integrierbar sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Menge aller Punkte, in denen die Schwankung[559]) *größer als eine positive Zahl ε ist, für jedes beliebige ε vom (Jordanschen) Inhalt Null sei.*[560])

H. Lebesgue hat andere Formen dieser Bedingungen gegeben, indem er den Begriff der mittleren Schwankung und seine Definition des Maßes einer Menge benutzt.

H. Lebesgue[561]) definiert die *mittlere Schwankung* einer im Intervall $[a, b]$ beschränkten Funktion $f(x)$ folgendermaßen: Teilen wir dieses Intervall mit Hilfe der Teilungspunkte $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ (wobei $a_0 = a$, $a_n = b$ ist) in n Teilintervalle und berechnen wir den Ausdruck

$$\Omega = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{i=n} (a_i - a_{i-1})\, \omega_i,$$

wobei ω_i die Schwankung der Funktion im Intervall $[a_{i-1}, a_i]$ bedeutet; wächst die Zahl der Teilungspunkte derart über alle Grenzen, daß das Maximum von $|a_i - a_{i-1}|$ den Grenzwert Null hat, so hat die Zahl Ω eine bestimmte Zahl als Grenzwert, die mittlere Schwankung von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.

Bemerkt man, daß

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_{i=1}^{i=n} (a_i - a_{i-1})\, \omega_i$$

ist, so ist ohne weiteres klar, *daß eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine beschränkte Funktion integrierbar ist, darin besteht, daß ihre mittlere Schwankung Null ist.*

Führen wir jetzt die Definition einer Menge vom Maße Null ein: d. i. eine Menge von Punkten, die in eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Strecken mit beliebig kleiner Längensumme eingeschlossen werden können. [Vgl. Nr. 20.]

559) *Wegen des Begriffs „Schwankung einer Funktion in einem Punkt" siehe Nr. 22 Anfang.*

560) **V. Volterra*, Giorn. di mat. 19 (1881), p. 85; *A. Harnack,* Die Elemente der Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1881, p. 262; Math. Ann. 19 (1882), p. 242;* *P. du Bois-Reymond*[362]). Letzterer bezeichnet in diesem Zusammenhang eine solche Menge vom Inhalt Null als *„integrierbares Punktsystem"*.

561) *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 22. Siehe auch *G. Robin,* Œuvres scientifiques, publ. par *L. Raffy* 1, Théorie nouvelle des fonctions, Paris 1903, p. 47/9.

Man erhält dann den folgenden Satz[562]): *Damit eine beschränkte Funktion integrierbar sei, ist es notwendig und hinreichend, daß ihre Unstetigkeitspunkte eine Menge vom Maß Null bilden*[563]).

Das *Riemann*sche Integral genügt den folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0,$$

---

562) **H. Lebesgue,* Thèse, p. 24 = Annali, p. 254; Leçons sur l'intégration, p. 29.* Siehe hierüber auch *G. Vitali*, Rend. Ist. Lomb. (2) 37 (1904), p. 69/73.

563) *Beispiele:* Sei (x) die Differenz zwischen x und der nächsten ganzen Zahl und setzen wir $(x) = 0$, wenn $x = p + \frac{1}{2}$ ist, wobei p eine ganze Zahl darstellt. Dann ist die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

stetig, ausgenommen für $x = \frac{2p+1}{2q}$; in einem Punkte, dessen Abszisse einen solchen Wert hat (wobei $2p+1$ und $2q$ als relativ prime ganze Zahlen vorausgesetzt sind), hat die Funktion eine Unstetigkeit erster Art, und die Größe des Sprunges ist $\frac{\pi^2}{8q^2}$. *B. Riemann**[558]), Abh. Ges. Wiss. Gött., p. 105 = Werke, 1. Aufl., p. 228; 2. Aufl., p. 242,* gibt diese Funktion als Beispiel einer integrierbaren Funktion.

Sei ferner E eine perfekte, nirgends dichte Menge vom Inhalte Null auf der Strecke $[a, b]$, so ist die Funktion $\varphi(x)$, die für die Punkte von E gleich 1 und für die übrigen Punkte von $[a, b]$ Null ist, integrierbar.

Aus dem letzteren Beispiel kann man ein anderes Beispiel einer integrierbaren Funktion $\psi(x)$ bilden, bei der die Menge der Unstetigkeitspunkte zugleich nicht-abzählbar und überall dicht ist: Es sei

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2}\,\varphi\left(\frac{x}{n}\right),$$

wo $\varphi(x)$ eine nach dem vorstehenden im Intervall $[0, 1]$ definierte Funktion ist; außerhalb des Intervalles $[0, 1]$ sei $\varphi(x)$ durch die Bedingung

$$\varphi(x+1) = \varphi(x)$$

bestimmt.

*In der obigen allgemeinen, notwendigen und hinreichenden Integrierbarkeitsbedingung ist als bemerkenswerter Spezialfall noch der Satz von *U. Dini* [Fondamenti, p. 246; *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 335; vgl. auch *L. Tonelli,* Rend. Ist. Lomb. (2) 41 (1908), p. 773/5] enthalten, daß die beschränkten Funktionen, die nur „Unstetigkeiten 1. Art" besitzen, integrierbar sind; sowie die Aussage, daß die Funktionen von beschränkter Schwankung (als Differenz zweier monotoner Funktionen) integrierbar sind.*

$$g \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq G,$$

in denen die Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie in den entsprechenden, auf das *Cauchy*sche Integral bezüglichen Gleichungen und Ungleichungen der vorigen Nr. Aus der letzten Formel kann man aber nicht schließen, daß das Integral gleich

$$(b-a)f(\alpha)$$

ist; denn die Funktion $f(x)$ braucht nicht stetig zu sein und nimmt daher nicht notwendig alle zwischen g und G enthaltenen Werte an.

Fügen wir noch die folgenden Eigenschaften hinzu:

Die Summe zweier integrablen Funktionen ist eine integrable Funktion, und das Integral der Summe ist gleich der Summe der Integrale.

Die Summe einer gleichmäßig konvergenten Reihe von integrablen Funktionen ist eine integrable Funktion, und das Integral der Summe ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder.

Das Produkt und der als beschränkt vorausgesetzte Quotient zweier integrablen Funktionen ist eine integrable Funktion.

Ist f integrabel, so ist auch $\sqrt[m]{f}$ integrabel, wenn diese Funktion einen Sinn hat; ist f positiv und integrabel und ist φ integrabel, so ist auch $[f(x)]^{\varphi(x)}$ integrabel.

*Allgemein gilt nach *P. du Bois-Reymond*[564]): *Eine stetige Funktion von einer oder von endlich vielen integrierbaren Funktionen ist gleichfalls integrierbar.**

Dagegen liefert die allgemeine Operation $f(\varphi)$, wo f und φ integrabel sind, nicht immer wieder integrierbare Funktionen, wie *H. Lebesgue*[565]) bemerkt, der hierfür das folgende Beispiel gibt:

Sei $f(x)=1$, wenn x von 0 verschieden ist, und $f(0)=0$; sei ferner $\varphi(x)=0$ für ein irrationales x und $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}$ (p und q relativ prim). Die Funktion $f(\varphi)$ ist dann für jedes irrationale x Null und für jedes rationale x gleich 1; sie ist also die Funktion $\chi(x)$ *Dirichlets*[566]), die man durch den analytischen Ausdruck

$$\chi(x) = \lim_{m=+\infty}\left[\lim_{n=+\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}\right]$$

564) *P. du Bois-Reymond,* Math. Ann. 16 (1880), p. 112; 20 (1882), p. 122/4 = Sitzgsber. Ak. Wiss. München 12 (1882), p. 240/2; [vgl. auch J. f. Math. 79 (1874), p. 24/6]*

565) Leçons sur l'intégration, p. 30.

566) **G. Lejeune-Dirichlet*, Werke 1, p. 132;* vgl. II A 1 (*A. Pringsheim*), Nr. 3, Fußn. [31]).

darstellen kann; alle Werte von x sind Unstetigkeitspunkte, also ist diese Funktion nicht integrabel[567]).

29. Das obere und untere Integral nach Darboux. Die Zahlen $\overline{S}$ und $\underline{S}$, die für eine im Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion definiert sind, haben jede einen von der Art der Einteilung unabhängigen Grenzwert, wenn die Zahl der Teilungspunkte über alle Grenzen wächst und das Maximum von $|a_i - a_{i-1}|$ gegen Null konvergiert

Diese Grenzwerte, die man durch die Symbole

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx, \quad \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$$

bezeichnet[568]), heißen bzw. das *obere Integral* (i. par excès) und das *untere Integral* (i. par défaut) von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$. Sie sind in strenger Weise von *G. Darboux* definiert worden[569]); *ungefähr gleichzeitig auch von *J. Thomae*[570]), *G. Ascoli*[571]), *P. du Bois-Reymond*[572]), *H. J. St. Smith*[573]).*

Das obere Integral hat folgende Eigenschaften:

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx + \int_b^{\overline{a}} f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx + \int_b^{\overline{c}} f(x)\,dx + \int_c^{\overline{a}} f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^{\overline{b}} [f(x) + \varphi(x)]\,dx \leqq \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx + \int_a^{\overline{b}} \varphi(x)\,dx, \text{ wenn } b - a > 0,$$

567) Eine Funktion kann integrabel sein, ohne durch einen analytischen Ausdruck darstellbar zu sein. *H. Lebesgue* hat meßbare Mengen vom Inhalte Null angeben können, die nach der Methode von *E. Borel* nicht meßbar sind. *Vgl. Nr. **20** bei [395]).* Eine beschränkte Funktion, die in allen Punkten einer solchen Menge gleich 1 und in allen übrigen Punkten Null ist, ist integrabel, kann aber nicht durch einen analytischen Ausdruck dargestellt werden. [Siehe *H. Lebesgue*, J. de math. (6) 1 (1905), p. 216]. *Vgl. Nr. 55.*

568) *Diese Schreibweise geht auf *V. Volterra* [Giorn. di mat. 19 (1881), p. 340] zurück.*

569) *G. Darboux*, Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875), p. 64/71; *vgl. hierzu II A 2 (*A. Voß*), Nr. **31**, insbes. Fußn. [194–196b]).*

570) **J. Thomae*, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, Halle 1875, p. 12/13.*

571) **G. Ascoli*, Atti Acc. Lincei (2) 2 (1875), p. 862/72.*

572) **P. du Bois-Reymond*, Ztschr. Math. Phys. 20 (1875), Hist.-Lit. Abt., p. 123/5.*

573) **H. J. St. Smith*, Proc. London Math. Soc. 6 (1874/5), p. 151/2.*

und entsprechende Eigenschaften kommen dem unteren Integral zu. [*Bei der letzten Ungleichung ist für das untere Integral $\leqq$ durch $\geqq$ zu ersetzen.*]

Man hat weiter:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (b-a)\varpi_* = \overline{\int_a^b} \omega(x)\,dx^*,$$

wo $_*\omega(x)$ die Schwankung von $f(x)$ im Punkt x und* ϖ die mittlere Schwankung von $f(x)$ in $[a, b]$ ist. Das obere und untere Integral ist der obere bzw. untere Limes der Summen S [siehe Nr. 28]; weiter ist jede zwischen diesen beiden Limites enthaltene Zahl Grenzwert einer Folge von Summen S[574]).

$_*$W. H. Young[575]) und *J. Pierpont*[576]) haben andere Formulierungen für die Definition des *Darboux*schen oberen und unteren Integrals und damit auch des *Riemann*schen Integrals angegeben.[577]) Im wesentlichen kommen diese Formulierungen darauf hinaus, die Teilintervalle, in die zerlegt wird, durch Teilmengen zu ersetzen. Die *Young*sche Formulierung wird wohl erst im Zusammenhang mit seiner allgemeineren („*ersten*") Integraldefinition [Nr. **35a**] recht verständlich sein und soll auch erst dort in Nr. **35a** angegeben werden. Dagegen schließt sich die *Pierpont*sche Formulierung so eng an die *Riemann*sche bzw. *Darboux*sche Definition an, daß sie am besten schon an dieser Stelle gebracht wird.

J. Pierpont[576]) zerlegt das Integrationsintervall $[a, b]$ in endlich viele, nach *Jordan* meßbare Teilmengen[578]) α_ν, die elementenfremd sind oder höchstens Mengen vom Inhalt Null gemeinsam haben; er multipliziert den Inhalt jeder Teilmenge α_ν mit der in α_ν genommenen

574) *H. Lebesgue*, Leçons sur l'intégration, p. 35. *Vgl. auch [601]).*

575) *$_*$W. H. Young*, Philos. Trans. Roy. Soc. London A 204 (1905), p. 221/39, insbes. p. 230; [eine vorläufige Mitteilung in Proc. Roy. Soc. 73 (1904), p. 445/9]. Dort hat er auch die *Darboux*schen Integrale auf einer beliebigen meßbaren Menge untersucht.*

576) *$_*$J. Pierpont*, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 423/8; Lectures II, p. 1/4, dazu I, p. 519, 521, 528. Er definiert dort das Integral auf einer beliebigen Menge E, indem er ausschließlich die zu den Punkten von E gehörenden Funktionswerte in Betracht zieht.*

577) *Diese Formulierungen sind zeitlich nach dem *Lebesgue*schen Integral entstanden und zeigen auch Spuren der Beeinflussung durch *Lebesgue*sche Gedanken.*

578) *Der Übergang zu abzählbar vielen, nach *Lebesgue* meßbaren Teilmengen führt zu einer Verallgemeinerung des *Riemann*schen Integralbegriffs und der *Darboux*schen Integrale [nämlich im wesentlichen zum *Lebesgue*schen Integral]; vgl. Nr. **35a**.*

oberen [bzw. unteren] Grenze G_ν [bzw. g_ν] der Funktionswerte von $f(x)$ und summiert alle diese Produkte; er läßt dann die Anzahl der Teilmengen α_ν über alle Grenzen wachsen und gleichzeitig das Maximum des Durchmessers der α_ν gegen Null abnehmen; der so entstehende Grenzwert der Summen liefert dann wieder das obere [bzw. untere] *Darboux*sche Integral.

W. H. Young[579]) gibt auch eine Darstellung der oberen und unteren Integrale durch *Riemann*sche Integrale.[580])

Außerdem hat *W. H. Young* noch eine völlig andere Art der Definition der *Darboux*schen Integrale und des *Riemann*schen Integrals angegeben, die auf der Heranziehung monotoner Folgen halbstetiger Funktionen beruht; siehe hierüber Nr. 35a, 2. Definition von *W. H. Young* [insbes. bei Fußn.[648])].*

30. Das Lebesguesche Integral.[581]) Bei der Bildung der Summen S [vgl. Nr. 27 u. 28] teilt man das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle und wählt in jedem Teilintervall $[a_{i-1}, a_i]$ einen Wert $f(x_i)$ der Funktion; diese Werte $f(x_i)$ können wenig oder viel voneinander verschieden sein, je nach dem Werte der Schwankung von $f(x)$ in diesem Intervall; es werden so oft Werte von $f(x)$ vereinigt, deren Differenz einen absoluten Wert hat, der nicht unter eine gewisse Grenze heruntergehen kann.

579) *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 53, 57/9 u. [575]), insbes. Phil. Trans., p. 240/3 [Proc. Roy. Soc., p. 448].*

580) *Ist s das Integrationsintervall und σ seine Länge [oder die meßbare Menge, über die integriert wird, bzw. deren Maß], so ist

$$\overline{\int_s} f(x)\, dx = \sigma \cdot g + \int_g^G J\, dy, \tag{1}$$

wobei g bzw. G die untere bzw. obere Grenze von $f(x)$ in s ist und J das Maß derjenigen Punktmenge darstellt, für welche die obere Limesfunktion von $f(x) \geq y$ ist. Analog für das untere Integral:

$$\underline{\int_s} f(x)\, dx = \sigma \cdot G - \int_g^G \mathit{J}\, dy, \tag{2}$$

wobei J das Maß derjenigen Punktmenge darstellt, für welche die untere Limesfunktion von $f(x) \leq y$ ist.

Die rechts auftretenden Integrale sind *Riemann*sche Integrale, weil J und J monotone Funktionen von y sind.

Würde man hier statt der oberen bzw. unteren Limesfunktion die Werte von $f(x)$ selbst einsetzen, so käme man (bei den „summierbaren" Funktionen) durch (1) und (2) jedesmal zum *Lebesgue*schen Integral; siehe Nr. 30.*

581) *H. Lebesgue,* Thèse, p. 18/30 = Annali di mat. (3) 7 (1902), p. 248/60 [dazu als vorläufige Mitteilung: Paris C. R. 132 (1901), p. 1025/8]; Leçons sur l'intégration, p. 98/129.*

Das Prinzip der Methode von *H. Lebesgue* besteht darin, das Schwankungsintervall $[g, G]$ der Funktionswerte durch dazwischenliegende Werte

$$g = l_0, l_1, l_2, \cdot, \cdot, l_{n-1}, l_n = G$$

in Teilintervalle zu teilen und die Menge derjenigen Werte von x zu betrachten, für die $f(x)$ zwischen l_{i-1} und l_i enthalten oder einer dieser beiden Grenzen gleich ist. Das (*Lebesgue*sche) Maß einer jeden dieser Mengen spielt die gleiche Rolle wie die Länge der Teilintervalle im *Riemann*schen Integral. Man vereinigt also benachbarte Werte von $f(x)$. Wenn $f(x)$ nicht abnimmt oder nicht wächst, d. h. also monoton ist, so sind die beiden Verfahren identisch.

*Es muß aber hier ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die Durchführbarkeit des angedeuteten Verfahrens die Verschärfung des *Jordanschen Inhalts* zum *Borelschen oder Lebesgueschen Maß* voraussetzt. Wollte man das Integral aufbauen mit Hilfe der angedeuteten *Lebesgue*schen Zerlegung in Horizontalstreifen unter gleichzeitiger Benutzung des *Jordan*schen Inhalts (oder des äußeren und inneren Inhalts), so käme man im allgemeinen nicht einmal zur Integration der stetigen Funktionen; man sehe hierüber Fußn.[593]). Als das Wesentlichste am *Lebesgueschen Integral* erweist sich demnach die Verwendung des *Lebesgueschen Maßes.*[581a]) Noch deutlicher wird dies und überhaupt der Unterschied zwischen dem *Lebesgue*schen und *Riemann*schen Integral durch die geometrische Definition des Integrals; vgl. Nr. **31.***

H. Lebesgue nimmt[582]) als Ausgangspunkt gewisse Grundeigenschaften des *Riemann*schen Integrals und will möglichst für jede in $[a, b]$ beschränkte Funktion eine Zahl von diesen Eigenschaften definieren. Er hat gezeigt, daß das Problem [wenigstens in einem gewissen Umfang] auf eine einzige Weise lösbar ist, und gibt die Operationen an, die auszuführen sind, um die gesuchte Zahl zu erhalten: mit anderen Worten, er geht von einer deskriptiven Definition einer Zahl zur konstruktiven Definition derselben Zahl über.

Die für die Definition des Integrals gewählten Eigenschaften sind die folgenden:

1. Man hat immer, was auch a, b, h sein mögen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx.$$

581a) *Vgl. auch die in [578]) gemachte Bemerkung.*

582) *In seinen Leçons sur l'integration, dagegen nicht in seiner Thèse. Vgl. [584]).*

2. Man hat immer, was auch a, b, c sein mögen:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

3. Man hat:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

4. Ist $f(x) \geqq 0,\ b > a,$ so hat man:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$$

5. Man hat:

$$\int_0^1 1 \times dx = 1.$$

6. Wenn die Folge $f_n(x)$ monoton wachsend gegen $f(x)$ konvergiert, so konvergiert das Integral von $f_n(x)$ gegen das Integral von $f(x)$.[583][584]

Das zu lösende Problem [*H. Lebesgue* nennt es das „*Integrationsproblem*“*] besteht also darin, möglichst jeder beschränkten Funktion

583) *Auch die Eigenschaft 6. ist für das *Riemann*sche Integral stets erfüllt, wenn die Funktionen $f(x)$ und $f_n(x)$ nach *Riemann* integrierbar sind. Aber wenn die Funktionen $f_n(x)$ als nach *Riemann* integrierbar vorausgesetzt sind, braucht $f(x)$ nicht nach *Riemann* integrierbar zu sein, wogegen *H. Lebesgue* in 6. die Integrierbarkeit von $f(x)$ fordert. Vgl. im übrigen Nr. 36 u. 37.*

584) Die ersten fünf Bedingungen sind voneinander unabhängig; man wußte zunächst nicht, ob es alle sechs sind; *natürlich ist wegen [583]) wenigstens ein Teil von 6. unabhängig von den übrigen Bedingungen; ganz neuerdings hat *St. Banach* [404a]) gezeigt, daß 6. völlig unabhängig von 1.—5. ist.* *H. Lebesgue* gibt in seiner Thèse [581]) die konstruktive Definition seines Integrals und zeigt, daß sie gewissen Bedingungen genügt, die sie als berechtigt und natürlich erscheinen lassen. Die deskriptive Definition findet sich in *H. Lebesgues* Leçons sur l'intégration, p. 98.

*In Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 368/9, 374/5, 377 gibt *H. Lebesgue* eine deskriptive Definition in abgeänderter Form (die auch unmittelbar für mehrfache Integrale anwendbar ist): Er definiert die Integration nicht für Intervalle, sondern allgemeiner für beliebige beschränkte, meßbare Mengen E und formuliert dementsprechend die definierenden Eigenschaften; indem er außerdem die so entstehende Bedingung 2. statt für endlich viele gleich für endlich oder abzählbar unendlich viele, elementenfremde Teilmengen formuliert, also

$$(2^*) \qquad \int_{E_1+E_2+\cdots} f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx + \cdots$$

fordert, wird die Bedingung 6. überflüssig.*

$f(x)$ eine endliche Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

zuzuordnen, die man das Integral von $f(x)$ in $[a, b]$ nennt, und die den Bedingungen 1, 2, 3, 4, 5, 6 genügt[585]).

H. Lebesgue definiert zuerst die *meßbaren Funktionen* [oder ausführlicher gesagt: „*die nach Lebesgue meßbaren Funktionen*"]: eine beschränkte oder nicht beschränkte, endliche Funktion heißt *meßbar* (mesurable)[586]), wenn die Menge $E[\alpha < f(x) < \beta]$ im *Lebesgue*schen Sinn meßbar ist, was auch α und β seien.

Man bezeichnet dabei mit

$$E[\alpha < f(x) < \beta]$$

die Menge derjenigen Punkte von $[a, b]$, für die $f(x)$ zwischen α und β enthalten ist, und mit

$$m\{E[\alpha < f(x) < \beta]\}$$

das Maß dieser Menge.

Aus dieser Definition folgt, daß die Menge

$$E[f(x) = \alpha]$$

der Werte von x, für die $f(x)$ gleich α ist, gleichfalls meßbar ist; denn sie ist der Limes der Mengen E_n

$$E_n = E\left[\alpha - \frac{1}{n} < f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right]$$

für $n = \infty$.

*Dagegen gilt nicht das Umgekehrte; d. h. es kann für jeden

---

585) Es ist auch von Interesse, daß dieses Integral mit dem *Riemann*schen zusammenfällt, wenn die Funktion $f(x)$ nach *Riemann* integrabel ist; es läßt sich nämlich aus den aufgestellten Bedingungen [*sogar ohne Benutzung von 6.*] ableiten, daß die gesuchte Zahl notwendig zwischen dem oberen und dem unteren *Darboux*schen Integral liegen muß; also fällt sie, wenn beide einander gleich sind, mit jedem von ihnen, d. i. mit dem *Riemann*schen Integral zusammen.

*Ferner zeigt *H. Lebesgue* [Leçons sur l'intégration, p. 100/102], daß das Integrationsproblem mit Hilfe der Bedingungen 1.—5. sich zurückführen läßt auf die Aufsuchung des Integrals von Funktionen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen, also auf das lineare Maß der linearen Mengen.*

*Es sei noch erwähnt, daß *St. Banach*[404a]) Integrale definiert, die für die Gesamtheit *aller* beschränkten Funktionen $f(x)$ in $[a, b]$ den Bedingungen 1.—5. genügen.*

586) **H. Lebesgue,* Leçons sur l'integration, p. 111. — In seiner Thèse, insbes. p. 20/22 u. 28 = Annali, insbes. p. 250/2 u. 258, sowie in Paris C. R.[581]) gebraucht er hierfür die Bezeichnung „sommable", während er später dem Ausdruck „fonction sommable" eine etwas engere Bedeutung beilegt. Siehe hierüber den Schluß dieser Nr.*

Wert α die Menge $E[f(x) = \alpha]$ meßbar sein und trotzdem braucht $f(x)$ keine meßbare Funktion zu sein[587]).

Ferner sind bei einer meßbaren Funktion $f(x)$ die (nach dem gleichen Prinzip bezeichneten) Mengen

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{llll} E[\alpha \leqq f(x) \leqq \beta], & E[\alpha < f(x) \leqq \beta], & E[\alpha \leqq f(x) < \beta], & \\ E[\alpha < f(x)], & E[f(x) < \beta], & E[\alpha \leqq f(x)], & E[f(x) \leqq \beta] \end{array}$$

für jedes α, β meßbar; und umgekehrt kann man irgendeine von diesen Mengensorten an Stelle von $E[\alpha < f(x) < \beta]$ ohne sachliche Änderung in der Definition der meßbaren Funktionen verwenden.

Wir wollen noch besonders bemerken: Wenn $f(x)$ nicht als endlich vorausgesetzt wird, dann ist in der Definition der meßbaren Funktionen die Menge $E[\alpha < f(x) < \beta]$ durch irgendeine andere der eben angegebenen Mengensorten (a) zu ersetzen, wenn man haben will, daß die Menge $E[f(x) = \alpha]$ stets meßbar ist, auch für unendliches α. Denn bei Verwendung von $E[\alpha < f(x) < \beta]$ würde sich zwar die Menge aller Unendlichkeitsstellen von $f(x)$ als meßbar ergeben, dagegen könnte die Menge der Punkte, in denen $f(x) = +\infty$ ist, nicht-meßbar sein.[588])*

Die Summe, das Produkt, die Potenzen meßbarer Funktionen sind meßbare Funktionen.

Der Grenzwert einer konvergenten Folge von meßbaren Funktionen ist eine meßbare Funktion.

Eine Konstante und die Funktion $f(x) = x$ sind meßbar; daher ist jedes Polynom meßbar; also auch jede stetige Funktion, da nach einem Satze von *K. Weierstraß*[589]) jede stetige Funktion der Limes einer konvergenten Folge von Polynomen ist. Jede Grenzfunktion von stetigen Funktionen ist meßbar, also sind auch die Funktionen der ersten Klasse von *R. Baire* meßbar; man leitet daraus sofort ab, daß die Funktionen einer beliebigen *Baire*schen Klasse meßbar sind[590]). *Vgl. Nr. **53** u. **54**.*

*Da nach dem obigen ein Polynom von endlich vielen meßbaren Funktionen wieder eine meßbare Funktion ist, so schließt man ana-

587) *Vgl. *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 375.*

588) *Es sei hier ferner noch erwähnt, daß *L. L. Tardini,* Giorn. di mat. 49 (1911), p. 31/32 gezeigt hat: Für die Meßbarkeit von $f(x)$ ist es notwendig und hinreichend, daß bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ das Definitionsintervall sich in endlich oder abzählbar unendlich viele meßbare, elementenfremde Teilmengen zerlegen läßt, auf deren jeder die Schwankung von $f(x)$ kleiner als ε ist.

Außerdem sei auf eine von *L. E. J. Brouwer* in seiner „Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ [130]), p. 6/19, verwendete Meßbarkeitsdefinition hingewiesen.*

589) *Vgl. Nr. 50.*

590) *Wegen allgemeiner Beziehungen zwischen den meßbaren Funktionen und den Funktionen der niedrigsten *Baire*schen Klassen siehe Nr. 57a.*

log, wie soeben, daß auch jede stetige[591]) und allgemeiner jede *Baire*sche Funktion von endlich vielen, meßbaren und endlichen Funktionen selbst wieder eine meßbare Funktion ist.[592])*

Nichtmeßbare Funktionen $f(x)$ erhält man aus nichtmeßbaren Mengen M [vgl. Nr. 20] einfach, indem man $f(x)$ für die Punkte von M gleich 1, für die übrigen Punkte gleich 0 setzt.*

*Nimmt man in der obigen Definition der meßbaren Funktionen statt des *Lebesgue*schen Maßes das *Borel*sche Maß, so erhält man die *„nach Borel meßbaren Funktionen“* („fonctions mesurables B“), die in Nr. **54**, **54a** und **55** eine besonders wichtige Rolle spielen und, wie vorgreifend erwähnt sei, mit den Funktionen der *Baire*schen Klassen zusammenfallen.[593])

Allgemeiner kann man irgendeine *Carathéodory*sche Maßfunktion μ^* [siehe Nr. **20b**] zugrundelegen und mit Hilfe der für μ^* meßbaren Mengen entsprechend die „für μ^* meßbaren“ Funktionen definieren.

---

591) *Für eine stetige Funktion ist der obige Satz direkt, d. h. ohne Benutzung des *Weierstraß*schen Satzes, von *E. W. Hobson,* Theory, p. 393, und allgemeiner für eine halbstetige Funktion von *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 377 bewiesen worden. (Vgl. hier auch die übrigen Sätze, p. 374/85.)*

592) *Eine (ohne Beweis gegebene) Behauptung von *H. Lebesgue,* Thèse, p. 27 = Annali, p. 257, daß eine meßbare Funktion von einer meßbaren Funktion wieder eine meßbare Funktion sei, ist unrichtig. Nach *W. Sierpiński*[418]) und *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 379, gibt es sogar (beschränkte) meßbare Funktionen $\varphi(u)$ und monoton wachsende stetige Funktionen $f(x)$, so daß $\varphi(f(x))$ nicht meßbar ist.*

593) *Durch Benutzung des *Jordan*schen Inhalts an Stelle des *Lebesgue*schen Maßes könnte man ferner zu Funktionen kommen, die „nach *Jordan* meßbar“ wären. Diese Begriffsbildung erweist sich aber als zwecklos, da bereits sehr einfache *stetige* Funktionen *nicht* unter diesen Begriff fallen würden. Beispiel: Auf einer Parallelen zur x-Achse, $y = h\ (> 0)$, sei eine beschränkte, perfekte Menge A von *positivem* Maß gegeben. Über der linken bzw. rechten Hälfte jedes von A bestimmten Lückenintervalls errichte man ein gleichseitiges Dreieck nach oben bzw. unten. —

Dieses Beispiel zeigt ferner, daß selbst bei stetigen Funktionen das Integral sich im allgemeinen nicht mit Hilfe der *Lebesgue*schen Zerlegung in Horizontalstreifen bei gleichzeitiger Verwendung des *Jordan*schen Inhalts definieren läßt, da hierbei auftretende Mengen gar nicht nach *Jordan* meßbar zu sein brauchen. Man könnte aber weiter vermuten, daß vielleicht die Benutzung des stets anwendbaren äußeren und inneren Inhalts etwas Brauchbares lieferte (etwa zum oberen bzw. unteren Integral [Nr. 29] führte). Jedoch auch dies ist selbst bei stetigen Funktionen nicht der Fall, wie dasselbe Beispiel zeigt: Wenn man die Gerade $y = h$ als Teilungslinie verwendet, so führt die Horizontalstreifenzerlegung bei Benutzung des äußeren [bzw. inneren] Inhalts zu einem Wert, der um $h \cdot m(A)$ größer [bzw. kleiner] als das bestimmte Integral der betreffenden stetigen Funktion ist.*

Man kann mit *J. Radon*[594]) sogar einen noch viel allgemeineren Standpunkt einnehmen, indem man von einer beliebigen absolut-additiven Mengenfunktion φ [siehe Nr. 22] ausgeht: Eine Funktion f heißt „*meßbar bezüglich* φ" [oder auch „φ-*meßbar*"], wenn die Mengen $E[\alpha \leqq f(x) \leqq \beta]$[595]) für alle α, β zum Definitionsbereich von φ gehören.[596]) Diese „φ-meßbaren" Funktionen (nebst den Spezialisierungen, die sich ergeben, wenn z. B. φ eine Maßfunktion μ^* ist) sind neuerdings von *H. Hahn*[597]) eingehend untersucht worden; es ergeben sich hierbei die wesentlichsten Aussagen, die für die gewöhnlichen meßbaren Funktionen gelten.

Nach diesen Bemerkungen über die Verallgemeinerungen wenden wir uns wieder den im *Lebesgue*schen Sinn meßbaren Funktionen und dem *Lebesgue*schen Gedankengang zu.*

Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$, $(a < b)$ beschränkte meßbare Funktion; schieben wir zwischen ihre untere Grenze g und ihre obere Grenze G in $[a, b]$ wachsende Zwischenwerte

$$g = l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n = G$$

ein und bilden wir nach *H. Lebesgue*[581]) die Summen[598])

$$\sigma = \sum_{i=0}^{i=n} l_i m\{E[l_i \leqq f(x) < l_{i+1}]\},$$

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{i=n} l_i m\{E[l_{i-1} < f(x) \leqq l_i]\}.$$

Lassen wir die Zahl der Werte l_i in der Weise durch Einschiebung von Zwischenwerten über alle Grenzen wachsen, daß das Maximum von $l_i - l_{i-1}$ Null zur Grenze hat. Die Summen σ wachsen, die Summen Σ nehmen ab und die Differenz $\Sigma - \sigma$ konvergiert gegen Null. Also haben σ und Σ einen gemeinsamen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist von der Art der Einteilung des Intervalles $[g, G]$ unabhängig. Wir nennen ihn das *Lebesguesche Integral* von $f(x)$ in $[a, b]$ und wollen ihn mit

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

---

594) *J. Radon,* Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien 122 IIa (1913), p. 1325.*

595) *Oder $E[\alpha < f]$ für alle α; nur für endliche f kann man wieder $E[\alpha < f < \beta]$ verwenden.*

596) *Zur Fußn. 593) sei noch bemerkt, daß der *Jordan*sche Inhalt natürlich nicht eine absolut-additive Mengenfunktion ist.*

597) **H. Hahn,* Theorie der reellen Funktionen I, Berlin 1921, p. 548/70.*

598) *Unter l_{n+1} sei dabei eine beliebige Zahl $> l_n$, unter l_{-1} eine beliebige Zahl $< l_0$ verstanden.*

bezeichnen.[599]) Ist $a > b$, so setzt man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

*Zur Unterscheidung des *Lebesgue*schen vom *Riemann*schen Integral führt *J. Pierpont*[600]) für das *Lebesgue*sche Integral die folgende sehr zweckmäßige Bezeichnung ein:

$$\underset{a}{\overset{b}{\mathcal{L}\!\!\int}} f(x)\,dx.^*$$

Man verifiziert, daß das so definierte Integral den sechs ihm auferlegten Bedingungen wirklich genügt.

Das *Lebesgue*sche Integral läßt sich, wie jede zwischen dem oberen und unteren *Darboux*schen Integral enthaltene Zahl, als Grenzwert *Riemann*scher Summen S [vgl. Nr. 28 Anfang und 29 Schluß] darstellen.[601])

*Es sei hier noch erwähnt, daß *W. H. Young* das *Lebesgue*sche Integral durch ein *Riemann*sches Integral darstellt, allerdings unter Benutzung des linearen *Lebesgue*schen Maßes. [S. hierüber Fußn.[580]).] [601a])*

H. Lebesgue[602]) definiert auch das Integral einer beschränkten Funktion, genommen auf (oder über) einer beschränkten Menge E. Das Integral der Funktion $f(x)$ auf der Menge E ist, nach Defini-

---

599) *Man kann das im Text Gesagte auch so ausdrücken: $f(x)$ wird durch „endlichwertige" [$(n+1)$-wertige] Funktionen $\varphi_n(x)$ gleichmäßig approximiert, und zugleich wird

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

gesetzt. [Vgl. *F. Riesz*, Math. Ann. 69 (1910), p. 449/97, sowie *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 385/9 u. 424/6.]

Den Gedanken der Approximation durch endlichwertige Funktionen hat *F. Riesz*[649]) noch weiterhin benutzt, um das *Lebesgue*sche Integral als Grenzwert gewisser einfacher *Riemann*scher Integrale darzustellen und so zu einer neuen Definition des *Lebesgue*schen Integrals zu gelangen. Siehe hierüber Nr. **35a**.*

600) **J. Pierpont,* Lectures II, p. 372.

Manchmal werden die beiden Integrale, um sie zu unterscheiden, durch

$$\int_R \quad \text{und} \quad \int_L \qquad \text{oder:} \quad (R)\!\int \quad \text{und} \quad (L)\!\int$$

bezeichnet.*

601) *Vgl. den Text bei [574]).* Nähere Untersuchungen hierüber bei *H. Lebesgue,* Ann. Fac. sc. Toulouse (3) 1 (1909), p. 30/34, *und *H. Hahn*, Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien 123 II a (1914), p. 713/43.*

601a) *Vgl. dazu auch *G. A. Bliss,* Bull. Amer. Math. Soc. 24 (1917/18), p. 28/9.*

602) **H. Lebesgue,* Thèse, p. 25 = Annali, p. 225; Leçons sur l'intégration, p. 116; vgl. auch [584]) Schluß.*

tion, das über ein E enthaltendes Intervall $[a, b]$ erstreckte Integral einer Funktion $f_1(x)$, die in den Punkten von E gleich $f(x)$ und in den übrigen Punkten von $[a, b]$ Null ist. *Oder man kann das Integral über E direkt definieren, indem man in der obigen Definition des *Lebesgue*schen Integrals den Integranden $f(x)$ überhaupt nur an den der Menge E angehörenden Stellen betrachtet.[603])* Ist eine Menge E die Summe endlich oder abzählbar unendlich vieler meßbarer, elementenfremder Mengen E_k, so hat man

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Man nennt[604]) *summierbar* (sommable) [oder auch gelegentlich: „*nach Lebesgue integrierbar*"] jede Funktion $f(x)$, für die das *Lebesgue*sche Integral existiert. Die im vorstehenden zunächst ausschließlich für die beschränkten Funktionen gegebene Definition des *Lebesgue*schen Integrals zeigt, daß *jede meßbare beschränkte Funktion summierbar ist.* *Erst die in Nr. **33** zu gebende Übertragung der Definition des *Lebesgue*schen Integrals auf nichtbeschränkte Funktionen wird ergeben, daß für nicht-beschränkte Funktionen der Umfang der Begriffe „meßbare" und „summierbare" Funktion sich nicht deckt. — Die oben angegebene nicht-meßbare Funktion stellt zugleich ein Beispiel einer beschränkten, nicht-summierbaren Funktion dar.[605])*

31. Geometrische Definition des Integrals.[606]) Sei $f(x)$ eine im Intervalle $[a, b]$ beschränkte Funktion, sei A der Punkt mit den Koordinaten $[a, f(a)]$, B der Punkt mit den Koordinaten $[b, f(b)]$. Nennen wir $E(f)$ die Menge der Punkte, deren Koordinaten den Bedingungen

$$a \leqq x \leqq b, \quad y = \Theta f(x), \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1$$

genügen, und setzen wir $f(x)$ zunächst als positiv und stetig voraus.

---

603) *Auch für nicht-beschränkte Mengen E ist eine entsprechende Übertragung der Integraldefinition möglich, sofern sich ein endlicher Wert ergibt.*

604) *Nach *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 115; vgl. auch [586]).*

605) Für eine nicht meßbare, beschränkte Funktion $f(x)$ definiert *H. Lebesgue* [Thèse, p. 25 = Annali, p. 255] das obere und das untere (*Lebesgue*sche) Integral. Sei $\varphi(x)$ eine meßbare Funktion derart, daß in $[a, b]$

$$\varphi(x) \leqq f(x)$$

ist. Dann haben die (über $[a, b]$ erstreckten) Integrale der Funktionen $\varphi(x)$ eine obere Grenze gleich dem Integrale einer meßbaren beschränkten Funktion $\psi(x)$: dies ist das *untere Lebesguesche Integral* von $f(x)$ in $[a, b]$. In ähnlicher Weise definiert man das *obere Lebesguesche Integral.* *Vgl. auch Nr. **31** u. **35a**.*

606) **H. Lebesgue,* Thèse, p. 18/20 = Annali, p. 248/50; Leçons sur l'intégration, p. 45/8 u. 116/20.*

Dann stellt das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

den nach *Jordan* bestimmten Flächeninhalt des Bereiches $E(f)$ oder des krummlinigen Trapezes $aABb$ dar. Es sind nämlich $\overline{S}$ und $\underline{S}$ die Zahlen, die (für $a < b$) zur Definition des äußeren und des inneren Inhaltes des Bereiches dienen; diese Zahlen haben einen gemeinsamen Grenzwert, den Flächeninhalt des Bereiches.

Ist $f(x)$ nicht beständig positiv, so stellt das Integral die Summe der Flächeninhalte der über der x-Achse gelegenen Bereiche, vermindert um die Summe der Flächeninhalte der unter der x-Achse gelegenen, dar. Das Umgekehrte findet für $a > b$ statt.

Die vorstehenden Eigenschaften geben eine geometrische Definition des nach *A. L. Cauchy* gebildeten Integrales.

Nehmen wir jetzt an, daß $f(x)$ integrabel und $a < b$ ist. Wir setzen dann:

$$E(f) = E_1(f) + E_2(f);$$

$E_1(f)$ ist die Menge aller Punkte von E, die oberhalb der x-Achse, $E_2(f)$ die Menge aller Punkte von E, die unterhalb dieser Achse liegen. Diejenigen Punkte von E, die auf der x Achse liegen, können nach Belieben in $E_1(f)$ oder in $E_2(f)$ untergebracht werden.

Damit die Funktion $f(x)$ integrabel sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Mengen $E_1(f)$ und $E_2(f)$ nach Jordan meßbar seien[607]. Bezeichnet man mit $i(E)$ den Flächeninhalt von E, so hat man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = i[E_1(f)] - i[E_2(f)].$$

Sind die Mengen $E_1(f)$ und $E_2(f)$ nicht nach *Jordan* meßbar, so haben sie einen äußeren Inhalt i_a und einen inneren Inhalt i_i. Man erhält alsdann für die *Darboux*schen oberen und unteren Integrale die Werte:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = i_a[E_1(f)] - i_i[E_2(f)],$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = i_i[E_1(f)] - i_a[E_2(f)].$$

Das Vorstehende liefert eine geometrische Definition des *Rie-*

607) Übrigens, wenn $E_1(f)$ und $E_2(f)$ meßbar sind, ist es $E(f)$ gleichfalls und umgekehrt.

*mann*schen und der *Darboux*schen Integrale. Man erhält entsprechende Resultate für das *Lebesgue*sche Integral, wenn man den *Lebesgue*schen Maßbegriff einer Menge einführt. Nennen wir $m(E)$ das *Lebesgue*sche Flächenmaß einer beschränkten Menge E. Ist die Funktion $f(x)$ meßbar und beschränkt, so sind die Mengen $E_1(f)$ und $E_2(f)$ meßbar, und man hat:

$$\int_a^b f(x)\,dx = m[E_1(f)] - m[E_2(f)],$$

für $a < b$.

*In entsprechender Weise wird (im Hinblick auf die nicht-summierbaren Funktionen) das *obere* bzw. *untere Lebesguesche Integral* (int. supérieure bzw. inférieure) definiert[608]) durch

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = m_a[E_1(f)] - m_i[E_2(f)],$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = m_i[E_1(f)] - m_a[E_2(f)],$$

wobei m_a und m_i das äußere bzw. innere *Lebesgue*sche Flächenmaß bedeuten.[609]) Die beiden so definierten Integrale liegen zwischen den oberen und unteren *Darboux*schen Integralen. [Vgl. auch [605]).]*

*Der Unterschied zwischen dem *Riemann*schen und dem *Lebesgue*schen Integral besteht demnach einfach darin, daß die zur Funktion gehörende Ordinatenmenge bei ersterem mit Hilfe des *Jordanschen Inhalts*, bei letzterem mit Hilfe des *Lebesgueschen Maßes* ausgemessen wird.*

Das *Lebesgue*sche Integral ist auch eng mit dem linearen Maß von Punktmengen auf einer Geraden verknüpft. *Die in der vorigen Nr. besprochene *Lebesgue*sche Zerlegung in Horizontalstreifen führt ja das *Lebesgue*sche Integral auf das lineare Maß linearer Punktmengen zurück.*

*Über weitere Möglichkeiten, das *Lebesgue*sche Integral zu definieren, siehe Nr. **35a**.*

---

608) **H. Lebesgue*, Thèse, p. 20 = Annali, p. 240.*

609) *Haben bei einer beschränkten Funktion $f(x)$ dieses obere und untere Integral denselben Wert, so ist $f(x)$ summierbar, und man wird wieder auf das zuvor definierte *Lebesgue*sche Integral geführt. Dies gilt auch für nicht-beschränkte Funktionen $f(x)$ [vgl. Nr. **33**], wenn das obere und untere *Lebesgue*sche Integral denselben *endlichen* Wert haben; stimmen dagegen oberes und unteres *Lebesgue*sches Integral überein, haben aber einen *unendlichen* Wert, so ist $f(x)$ sicher nicht summierbar und braucht nicht einmal meßbar zu sein.*

Bestimmtes Integral nicht beschränkter Funktionen.

32. Uneigentliche Integrale.[610]) Ist x eine Zahl des Intervalles $[a, b]$, in dem die beschränkte Funktion $f(x)$ ein Integral besitzt, so wird die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist, das *unbestimmte Integral* der Funktion $f(x)$ genannt. Die Funktion $F(x)$ ist stetig, und man hat, wenn α und β zwei beliebige Punkte von $[a, b]$ sind,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Diese Eigenschaften des unbestimmten Integrales sind bisweilen zur Definition des bestimmten Integrales einer beschränkten oder unbeschränkten Funktion $f(x)$ benutzt worden.

Sei zunächst eine Funktion $f(x)$ gegeben, die in $[a, b]$, $a < b$, stetig ist, außer im Punkte c (wo die Funktion nicht beschränkt, ja nicht einmal endlich zu sein braucht). Besitzt dann jedes der beiden Integrale

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx$$

einen endlichen Grenzwert, wenn ε und η gegen Null konvergieren, so definiert *A. L. Cauchy*[611]) als Integral von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ die Summe dieser Grenzwerte, also

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx.$$

Das kommt darauf hinaus, daß die unbestimmten Integrale

$$\int_a^x f(x)\,dx \ (x < c) \quad \text{und} \quad \int_x^b f(x)\,dx \ (x > c)$$

für $x = c$ stetig sind.

*Integrale, die [wie (1)] als Grenzwerte eigentlicher Integrale definiert sind, werden *„uneigentliche Integrale“* genannt.

Es kann sein, daß die Grenzwerte in (1) nicht existieren, daß

610) *Vgl. II A 2 (*A. Voß*), Nr. 37 und II A 3 (*G. Brunel*), Nr. 2—5.*

611) **A. L. Cauchy*, Résumé des leçons (1823)[557]) = Œuvres (II) 4, p. 140/50; J. Éc. polyt., cah. 19 = tome 12 (1823), p. 572/3. Diese Begriffsbildung des uneigentlichen Integrals hat er schon 1814 angewendet; siehe hierüber das letztgenannte Zitat sowie Œuvres (I) 1, p. 325, 335, 394.*

dagegen

$$(2) \qquad \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right]$$

existiert; *A. L. Cauchy*[611]) bezeichnet (2) als den *Hauptwert* (*„valeur principale“*) von $\int_a^b f(x)\,dx$.[612])*

Diese Definitionen lassen sich unmittelbar auf das *Riemann*sche Integral übertragen: Ist die Funktion $f(x)$ in den Intervallen $[a, c-\varepsilon]$ und $[c+\eta, b]$ integrierbar, ohne es im ganzen Intervall $[a, b]$ zu sein[613]), so kann es wieder vorkommen, daß die Grenzwerte in (1) existieren, und man kann sodann durch (1) wieder

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

definieren.

A. L. Cauchy hat seine Definition des uneigentlichen Integrals in einer ohne weiteres ersichtlichen Weise auf den Fall angewendet, wo $f(x)$ irgendeine endliche Zahl von „singulären Stellen“[614]) besitzt. Seine Definition läßt sich aber auch auf diejenigen Funktionen $f(x)$ ausdehnen, für welche die Ableitung der Menge E der singulären Stellen aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht. Diesen Fall scheint zuerst *G. Lejeune-Dirichlet* betrachtet zu haben.[615]) *Allgemeiner läßt sich die *Cauchy*sche Definition ausdehnen auf diejenigen Funktionen, für welche die Menge E der singulären Stellen reduzibel ist, d. h. eine der Ableitungen von E verschwindet [vgl. Nr. 5].[616])*

612) *Den *Cauchy*schen Hauptwert hat *G. H. Hardy*, Proc. London Math. Soc. (1) 34 (1901/2), p. 16/40, 55/91; (1) 35 (1902/3), p. 81/107; (2) 7 (1908/9), p. 181/208 eingehend untersucht.*

613) Das kann nur dann der Fall sein, wenn $f(x)$ in $[a, b]$ nicht beschränkt ist.

614) *D. h. die Stellen, in deren Umgebung das zugrunde gelegte Integral nicht existiert oder nicht unmittelbar definiert ist. Also wenn man von dem nach *Cauchy* für die stetigen Funktionen definierten Integral ausgeht, so ist jede Unstetigkeitsstelle von $f(x)$ oder jeder Häufungspunkt von solchen eine „singuläre Stelle“ von $f(x)$. Wenn dagegen (was im folgenden hauptsächlich für uns in Betracht kommt) der *Riemann*sche Integralbegriff zugrunde gelegt ist, so sind die „singulären Stellen“ die Punkte, in deren Umgebung $f(x)$ nicht beschränkt ist, in denen also die Schwankung ω von $f(x)$ unendlich ist. Natürlich ist die Menge E der „singulären Stellen“ immer abgeschlossen.*

615) Vgl. *P. Lipschitz*, J. f. Math. 63 (1864), p. 296/308.

616) **P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 79 (1875), p. 36/7 und *U. Dini*, Fondamenti, p. 300/1 [= *Dini-Lüroth*, Grundlagen, p. 406/7] für den Fall, wo eine Ableitung endlicher Ordnung von E verschwindet; *A. Schoenflies*, Bericht I 1900,

Immer soll dabei $f(x)$ in jedem Intervall, das keinen Punkt von E enthält, integrierbar sein. *Wir wollen dieses Verfahren als das *Cauchy-Dirichlet*sche Verfahren bezeichnen.*

Betrachten wir den Fall, wo die Ableitung von E aus endlich vielen Punkten besteht, und sei $[a, b]$ das gesamte Integrationsintervall. Sei nun $[a', b']$ ein von zwei aufeinanderfolgenden Punkten der Ableitung begrenztes Intervall; dann gibt es im Intervalle $[a' + h, b' - h]$ nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen: man kann also das Integral in diesem Intervall definieren; man geht hierauf zu $[a', b']$ über, indem man h gegen Null konvergieren läßt, und zu $[a, b]$, indem man die Integrale der verschiedenen Intervalle $[a', b']$, wenn sie existieren, addiert. *In ähnlicher Weise kann man, schrittweise zu Mengen E mit höheren Ableitungen aufsteigend, auch den allgemeinen Fall der reduziblen Mengen E behandeln.*

*Dem Vorigen ist gleichwertig die folgende, im wesentlichen auf *O. Hölder*[617]) zurückgehende, allgemeine Definition:* *Man sagt, daß $f(x)$ im Intervalle $[a, b]$ ein Integral besitzt, wenn in $[a, b]$ eine und, bis auf eine additive Konstante, nur eine stetige Funktion $F(x)$ existiert, derart, daß man in jedem Teilintervall $[\alpha, \beta]$, in dem $f(x)$ beschränkt und integrierbar ist,*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha) \tag{3}$$

hat. Man setzt dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Für die Anwendbarkeit dieser Definition ist notwendig und hinreichend, daß die Menge E der singulären Stellen[614]) *der Funktion $f(x)$ reduzibel ist (d. h. daß eine Ableitung von E verschwindet), daß $f(x)$ in jedem Intervall $[\alpha, \beta]$, das keinen Punkt von E enthält, integrierbar ist, und daß eine stetige Funktion $F(x)$ existiert, die in jedem solchen Intervall $[\alpha, \beta]$ der Gleichung* (3) *genügt*[618]).

---

p. 185, allgemein für reduzibles E. — Gelegentlich wird hierfür die Bezeichnung „*Dini*sches Integral" verwendet.

Wegen der Abgeschlossenheit von E[614]) ist es übrigens gleichbedeutend, ob man E als abzählbar oder als reduzibel annimmt.*

617) **O. Hölder,* Math. Ann. 24 (1884), p. 192/3, 207;* vgl. ferner *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 10/14, sowie die Zitate von [618]).

618) *Das *Hölder*sche Verfahren läßt sich, genau wie im obigen Text, auch anwenden, wenn die reduzible Menge E nicht aus singulären Stellen, sondern aus irgendwelchen Punkten besteht, sofern nur die Integrationsintervalle $[\alpha, \beta]$ keine Punkte von E enthalten.

Man bemerke, daß sowohl das *Cauchy-Dirichlet*sche als auch dieses *Hölder*sche Verfahren dazu dienen kann, um, ausgehend von der *Cauchy*schen

*Andere Definitionen des uneigentlichen Integrals, bei denen die Menge der singulären Stellen[614]) nicht abzählbar zu sein braucht, haben *A. Harnack, Ch. J. de la Vallée Poussin* und *J. Pierpont* angegeben.

Die Definition von *A. Harnack*[619]) besteht in folgendem: Im Inte-

Integraldefinition für stetige Funktionen, das Integral für Funktionen mit einer reduziblen Menge von Unstetigkeitspunkten zu erhalten.* Beispiel: Sei x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ eine reduzible Menge; $\sin\frac{1}{x}$ ist eine für jedes x beschränkte Funktion, die den einzigen Unstetigkeitspunkt $x = 0$ hat. Man kann nun

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{1}{x - x_n}$$

setzen; denn $\int_0^x \sin\frac{1}{x}\,dx$ hat einen Sinn. —

Man kann beim *Hölder*schen Verfahren leicht sehen, daß $F(x)$ nicht die einzige Funktion wäre, falls die Menge E der Ausnahmepunkte nicht reduzibel ist. In diesem Falle ist eine der Ableitungen H von E perfekt: diese Menge H ist notwendig in $[a, b]$ nirgends dicht; denn E kann in keiner Teilstrecke von $[a, b]$ überall dicht sein, weil sonst $F(x)$ auf dieser Strecke nicht definiert wäre. Man erhält also H, indem man aus $[a, b]$ eine abzählbar unendliche Menge von Intervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p, \ldots$ ausschließt.

Definieren wir die Funktion $\varphi(x)$ durch folgende Bedingungen: $\varphi(a) = 0$; $\varphi(b) = 1$; $\varphi(x) = \frac{1}{2}$, wenn x in δ_1 liegt; $\varphi(x) = \frac{1}{4}$ in δ_2, falls δ_2 zwischen 0 und δ_1 liegt; $\varphi(x) = \frac{3}{4}$ in δ_2, falls δ_2 zwischen δ_1 und b liegt; allgemein habe $\varphi(x)$ im Intervalle δ_k einen konstanten Wert $\varphi(\delta_k)$, der durch die Gleichung

$$\varphi(\delta_k) = \tfrac{1}{2}[\varphi(\delta_i) + \varphi(\delta_j)]$$

gegeben ist. In dieser Gleichung sind δ_i und δ_j die beiden Intervalle der Folge $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}$, die δ_k einschließen. Man definiert so eine stetige Funktion $\varphi(x)$, die in $[a, b]$ nicht konstant, dagegen in jedem von E freien Intervall $[\alpha, \beta]$ konstant ist. Wenn also $F(x)$ der Gleichung (3) genügt, so tut es $F(x) + \varphi(x)$ auch. Solche nirgends abnehmenden, streckenweise konstanten, stetigen Funktionen haben zuerst *G. Cantor,* Acta math. 4 (1884), p. 385/7 und *A. Harnack,* Math. Ann. *23 (1884), p. 287/88;* 24 (1884), p. 224/9 angegeben und in ähnlicher Weise wie hier verwendet. Siehe hierüber ferner: *L. Scheeffer,* Acta math. 5 (1884), p. 287/91; *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 11/14. *Vgl. im übrigen Nr. **42**.*

619) *A. Harnack,* Math. Ann. *21 (1883), p. 324/6;* 24 (1884), p. 220/32 [*einige von *A. Harnack* angegebene Eigenschaften seines Integrals treffen nicht zu*]; *im wesentlichen dieselbe Definition (in etwas anderer Form) gab später, offenbar unabhängig von *A. Harnack,* auch* *C. Jordan,* Cours d'Analyse 2 (2. éd.), Paris 1894, p. 50 [*dort fehlt die Bedingung, daß E vom Inhalt Null ist, vielleicht nur versehentlich*]. Siehe hierüber auch *O. Stolz,* Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien 107 IIa (1898), p. 207/24; *108 IIa (1899), p. 1234/8 und Grundzüge, III. Theil, p. 273/90,* sowie insbesondere *E. H. Moore,* Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 296/330, 459/75. *Vgl. ferner Nr. **35c**.*

grationsintervall $[a, b]$ sollen die singulären Stellen der Funktion $f(x)$ irgendeine abgeschlossene[614]) Menge E vom Inhalt Null bilden. In jedem Teilintervall $[\alpha, \beta]$, das keinen Punkt von E enthält, sei $f(x)$ integrierbar. Man schließe E in eine Summe Δ von endlich vielen Intervallen ein. Über die endlich vielen, nach Wegnahme von Δ aus $[a, b]$ übrigbleibenden Intervalle integriere man $f(x)$ und bilde die Summe $\mathfrak{S}$ dieser Integrale. Läßt man nun die Längensumme von Δ gegen 0 konvergieren und ergibt sich dabei ein von der Wahl der Δ unabhängiger, endlicher Grenzwert $\mathfrak{S}_0$ von $\mathfrak{S}$, so werde $\mathfrak{S}_0$ als

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

Ch. J. de la Vallée Poussin[620]) verfährt so: Er bildet aus $f(x)$ eine Funktion $f_*(x)$, indem er, wenn M und N zwei positive Zahlen sind,

$$\begin{aligned} f_*(x) &= f(x) \quad \text{setzt für} \quad -M < f(x) < N, \\ f_*(x) &= -M \qquad \text{für} \qquad f(x) \leqq -M, \\ f_*(x) &= N \qquad\quad \text{für} \qquad f(x) \geqq N. \end{aligned}$$

Er definiert dann das uneigentliche Integral durch

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{M=\infty \\ N=\infty}} \int_a^b f_*(x)\,dx,$$

wenn, für jede Wahl von M und N, $f_*(x)$ in $[a, b]$ integrierbar ist und der rechtsstehende Limes einen bestimmten, endlichen Wert hat.

Um diese Definition zu ermöglichen, müssen[621]) in $[a, b]$ die singulären Stellen von $f(x)$ eine Menge vom Inhalt Null bilden und $f(x)$ muß, wo es beschränkt ist, auch integrierbar sein. [*Ch. J. de la Vallée Poussin* hatte dies in die Voraussetzung mitaufgenommen.] In diesem Fall ist dann (für jedes M, N) $f_*(x)$ in $[a, b]$ integrierbar.

Das Verfahren von *J. Pierpont*[622]) steht dem vorigen ziemlich nahe und kann, nur unwesentlich modifiziert, folgendermaßen darge-

---

620) *Ch. J. de la Vallée Poussin*, J. de math. (4) 8 (1892), p. 427/31. *Eine formale Vereinfachung läßt sich dadurch erzielen [vgl. *Ch. J. de la Vallée Poussin*[631])], daß man die positiven und negativen Werte von $f(x)$ gesondert betrachtet, d. h. zuerst $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ setzt (beide $\geqq 0$) und dann $f_1(x)$ sowie $f_2(x)$ für sich behandelt; man hat so in (5) nur je einen einfachen Grenzübergang.*

621) *Nach einer Bemerkung von *A. Schoenflies*, Bericht I 1900, p. 187/8.*

622) **J. Pierpont*, Lectures 2, p. 30/62; im wesentlichen ebenso auch bei *B. Levi*, Rend. Ist. Lomb. (2) 39 (1906), p. 775/6.*

stellt werden: Man gehe von der Funktion $f(x)$ zu einer Funktion $f_{**}(x)$ über, indem man bei positivem M, N

$$f_{**}(x) = f(x) \text{ setzt für } -M \leqq f(x) \leqq N,$$
$$f_{**}(x) = 0 \qquad \text{für alle anderen Werte von } f(x).$$

Es werde dann das untere und obere uneigentliche Integral von $f(x)$ durch

$$(6) \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{M=\infty \\ N=\infty}} \underline{\int_a^b} f_{**}(x)\,dx,$$

$$(7) \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{M=\infty \\ N=\infty}} \overline{\int_a^b} f_{**}(x)\,dx$$

definiert. Wenn die Werte von (6) und (7) zusammenfallen und endlich sind, werde der gemeinsame Wert mit

$$(8) \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

Für alle Untersuchungen über uneigentliche Integrale ist folgende Unterscheidung wesentlich: Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *absolut* (oder *unbedingt*) *konvergent* bzw. *nicht-absolut* (oder *bedingt*) *konvergent*, je nachdem auch

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

einen bestimmten endlichen Wert hat oder nicht.[623]) [Vgl. II A 3 (*G. Brunel*), Nr. 2—4.]

Die Verfahren von *Ch. J. de la Vallée Poussin* und *J. Pierpont*[624]) führen nur zu absolut konvergenten Integralen. Für absolute Konvergenz führen die Definitionen von *A. Harnack*, *Ch. J. de la Vallée Poussin* und *J. Pierpont* zu völlig übereinstimmenden Resultaten, sofern bei der letztgenannten Definition die singulären Stellen eine Menge vom Inhalt Null bilden.[625]) Das Verfahren von *A. Harnack* läßt sich [ebenso wie das *Cauchy-Dirichlet*sche und das *Hölder*sche

623) *Diese Unterscheidung findet sich vielleicht zuerst bei *P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 69 (1868), p. 73.*

624) *Letzteres allerdings nur, wenn *beide* Werte (6) und (7) endlich sein sollen; vgl. *J. Pierpont*[622]), p. 46/7.*

625) *Dies ist nicht mehr der Fall, wenn die singulären Stellen nicht eine Menge vom Inhalt Null bilden; beim *Pierpont*schen Verfahren kann auch dann noch ein Integral (8) existieren; vgl. *J. Pierpont*[622]), p. 32/3.*

Verfahren] auch auf nicht-absolut konvergente Integrale anwenden, ist also umfassender als die Verfahren von *Ch. J. de la Vallée Poussin* und *J. Pierpont.* Das *Cauchy-Dirichlet*sche Verfahren ist im Falle absoluter Konvergenz selbstverständlich spezieller als das *Harnack*sche Verfahren; dagegen greifen diese beiden Verfahren im Falle nicht-absoluter Konvergenz übereinander, ohne daß eines das andere enthält: Beim *Harnack*schen Verfahren braucht die Menge der singulären Stellen nicht abzählbar zu sein; bei abzählbar vielen singulären Stellen hingegen kann das *Cauchy-Dirichlet*sche Verfahren zum Ziel führen, auch wenn das *Harnack*sche Verfahren versagt, was daran liegt, daß beim letzteren Verfahren die singulären Stellen gleichzeitig, beim ersteren hingegen in bestimmter Ordnung nacheinander eingeführt werden. — Es sei noch erwähnt, daß für nicht-absolute Konvergenz *Ch. J. de la Vallée Poussin*[626]) zu seinem Verfahren noch das *Cauchy-Dirichlet*sche hinzunimmt, wobei er naturgemäß die singulären Stellen nicht-absoluter Konvergenz als reduzible Menge voraussetzt.[627])

Bezüglich der uneigentlichen Integrale mit unendlichem Integrationsbereich siehe II A 3 (*G. Brunel*), Nr. 2—4.*

33. Das Lebesguesche Integral für nicht beschränkte Funktionen.[628]) Sei $f(x)$ eine in $[a, b]$, $(a < b)$, nicht beschränkte, meßbare Funktion und

$$\ldots, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots$$

eine Folge von wachsenden Zahlen, die von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, derart, daß für jeden beliebigen Wert der ganzen Zahl i

$$l_i - l_{i-1} < \varepsilon$$

sei.

Wir bilden die beiden Reihen:

$$\sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_i m\{E[l_i \leqq f(x) < l_{i+1}]\},$$

$$\Sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_i m\{E[l_{i-1} < f(x) \leqq l_i]\};$$

diese beiden Reihen konvergieren entweder gleichzeitig absolut oder sie divergieren beide; sind sie konvergent, so konvergieren σ und Σ

626) *a. a. O.[620]), p. 453/5.*

627) *Im übrigen sei wegen des Vergleichs der verschiedenen Definitionen des uneigentlichen Integrals und einiger Verallgemeinerungen auf *E. H. Moore*[619]), insbes. p. 459 ff., sowie auf *J. Pierpont*[622]), p. 59/62, und *Ph. Freud,* Monatsh. Math. Phys. 16 (1905), p. 11/24, hingewiesen.*

628) **H. Lebesgue,* Thèse, p. 28/9 = Annali, p. 258/9; Leçons sur l'intégration, p. 114/6.*

gegen einen gemeinsamen Grenzwert, wenn ε der Null zustrebt. Dieser Grenzwert ist das *Lebesgue*sche Integral von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

bezeichnet. Ist $a > b$, so setzt man ferner:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Existiert das *Lebesgue*sche Integral von $f(x)$ in $[a, b]$, so heißt die Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ *summierbar* (sommable). *Mit $f(x)$ ist stets zugleich auch $|f(x)|$ summierbar.*

*Es sei hervorgehoben, daß diese *Lebesgue*sche Definition sich nur auf solche nicht-beschränkte Funktionen bezieht, die im Integrationsintervall überall *endlich* sind; denn die Stellen, wo die Funktionswerte von $f(x)$ [nicht etwa nur die Schwankung von $f(x)$] unendlich sind, werden in den Summen σ und Σ überhaupt nicht berücksichtigt. Will man auch Werte $f(x) = \pm\infty$ zulassen, wenigstens sofern die betreffenden Stellen eine Menge vom Maß Null bilden, so muß noch besonders hinzugefügt werden, daß eine Nullmenge auch dann keinen Beitrag zum *Lebesgue*schen Integral liefern soll, wenn in ihr die Funktionswerte unendlich groß sind. Die Zweckmäßigkeit dieser Festsetzung wird bei Beachtung der geometrischen Definition des *Lebesgue*schen Integrals [Nr. 31] evident.*

Während für die beschränkten Funktionen der Umfang der Begriffe „meßbar" und „summierbar" zusammenfällt, ist dies bei nicht-beschränkten Funktionen keineswegs der Fall. Es gibt nicht-beschränkte, endliche, meßbare Funktionen, die nicht summierbar sind; z. B. ist die Funktion, die für jedes von Null verschiedene x gleich

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

und für $x = 0$ Null ist, nicht summierbar[629]). Dagegen ist sie nach dem *Cauchy-Dirichlet*schen Verfahren integrabel.

*Für solche Fälle nicht absolut integrierbarer Funktionen empfiehlt es sich, die Verfahren von *Cauchy-Dirichlet*, *O. Hölder* oder *A. Harnack*, wie in Nr. 32 auf das *Riemann*sche Integral, so jetzt auf das *Lebesgue*sche Integral anzuwenden[630]); kurz: statt eines vertikalen

629) *H. Lebesgue*, Leçons sur l'intégration, p. 115.*

630) *Die durch *A. Harnack*s Verfahren hier entstehenden uneigentlichen Integrale bezeichnet *W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910/11), p. 421/33, als *„Harnack-Lebesgue'sche Integrale"*. Vgl. auch *E. W. Hobson*, Theory, p. 557/9, sowie *H. Hake*[631a]).*

einen horizontalen Grenzübergang zu machen. Dabei hat man hier unter „singulären Stellen" diejenigen Punkte zu verstehen, die keinem Intervall angehören, in dem die Funktion summierbar ist.

Benutzt man das Verfahren von *Ch. J. de la Vallée Poussin* [Nr. 32], (das auch vorhin nur absolut konvergente Integrale geliefert hat), um von dem *Lebesgue*schen Integral beschränkter Funktionen [Nr. 30] zur Integration unbeschränkter Funktionen überzugehen[631]), so erhält man dasselbe Resultat wie mittels der hier angegebenen, durch die Bemerkung über die Unendlichkeitsstellen ergänzten *Lebesgue*schen Definition. Ebenso liefert das Verfahren von *J. Pierpont* [Nr. 32], in gleicher Weise hier angewendet, dasselbe Ergebnis wie die Methode von *H. Lebesgue.* Ein Vorzug des Verfahrens von *Ch. J. de la Vallée Poussin* besteht darin, daß es keiner besonderen Festsetzung bezüglich der Stellen bedarf, für welche $f(x) = \pm\infty$ ist, und daß der Einfluß dieser Stellen sofort deutlich wird: Das Integral konvergiert nur dann, wenn diese Stellen eine Nullmenge bilden; in diesem Fall liefern sie auch keinen Beitrag zum Wert des Integrals.*

34. Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals. Der erste Mittelwertsatz[632]) gilt auch für das *Lebesgue*sche Integral[633]):

Sind $f(x)$, $\varphi(x)$ *und* $f(x)\varphi(x)$ *im Intervall* (a, b), $a < b$, *summierbar,* $\varphi(x)$ *nicht-negativ und* $f(x)$ *den Ungleichungen*

$$m \leqq f(x) \leqq M$$

unterworfen, so kann man schreiben:

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Der zweite Mittelwertsatz[634]) lautet hier so[635]):

631) *So verfahren: *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (2) 4 (1905/6), p. 143/5; *C. Severini,* Atti Acad. Gioenia [Catania] (4) 20 (1907), mem. XII. p. 1/15; *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Cours d'Analyse infinitésimale, 2. éd., Bd. 2 (Louvain-Paris 1912), p. 108/9; 3. éd., Bd. 1 (1914), p. 260.*

632) *Vgl. II A 2, Nr. 34 (*A. Voß*).*

633) *Z. B. *H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 442; hier für beliebige Dimensionen und beliebige meßbare Mengen als Integrationsbereich.*

634) *Vgl. II A 2, Nr. 35 (*A. Voß*).*

635) *E. W. Hobson*, Proc. London Math. Soc. (2) 7 (1908/9), p. 14/23; *H. Lebesgue,* Ann. Fac. sc. Toulouse (3) 1 (1909), p. 36, 38; *ferner *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910/11), p. 43/6.* Die Ausdehnung auf den Fall nicht monotoner Funktionen und die Verallgemeinerung für eine beliebige Zahl von Dimensionen *und für eine beliebige meßbare Menge als Integrationsbereich* finden sich bei *H. Lebesgue*[633]), p. 442/6; *vgl. ferner *B. H. Camp*[842]) und [842a]); *W. H. Young*[842]); [sowie für 2-fache *Riemann*sche Integrale: *C. Arzelà*, Memorie Ist. Bologna (5) 10 (1902), p. 99/108; *M. Krause,* Berichte Ges. Wiss. Leipzig 55 (1903), p. 177/85, 239/63].*

Ist $f(x)$ im Intervall (a, b) beschränkt und monoton und ist $\varphi(x)$ in (a, b) summierbar, so ist auch $f(x)\varphi(x)$ dort summierbar, und man hat:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx,$$

wobei $a \leqq \xi \leqq b$ ist. *Übrigens kann man hierbei $f(a+0)$ bzw. $f(b-0)$ durch irgendeine untere bzw. obere Schranke von $f(x)$ in (a, b) ersetzen.*

Ebenso erhält man als *Schwarz*sche Ungleichung:

$$\left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2 \leqq \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, daß f^2 und φ^2 im Intervall (a, b) summierbar sind; $f\varphi$ ist dann dort gleichfalls summierbar[636]).

Endlich sind auch[637]) die Integration durch Substitution[638]) und die partielle Integration[639]), sowie die Differentiation unter dem Integralzeichen[640]) unter gewissen Bedingungen auf das *Lebesgue*sche Integral anwendbar.

35. Andere Verallgemeinerungen des Integralbegriffs. *Außer den bisher besprochenen *Cauchy*schen, *Riemann*schen und *Lebesgue*schen Integraldefinitionen, den zugehörigen oberen und unteren Integralen und den auf jene Integraldefinitionen sich stützenden, verschiedenen Arten von „uneigentlichen Integralen" sind noch eine Reihe von anderen Integraldefinitionen gegeben worden, die zum Teil nur eine andere Fassung einer der früheren Definitionen [Nr. **35a**], zum Teil aber auch wesentliche Verallgemeinerungen derselben darstellen [insbes. Nr. **35c—35f**].

Zunächst geben wir in Nr. **35a** mehrere Integraldefinitionen, die sich im wesentlichen mit dem *Lebesgue*schen Integral decken, die aber entweder (1. *Young*sche sowie *Pierpont*sche Definition) dem *Riemann*-

636) *Vgl. *H. Lebesgue*[635]), p. 37, 39; [633]), p. 442; *W. H. Young*[635]), p. 36/7.* Siehe auch *E. Fischer,* Paris C. R. 144 (1907), p. 1023. Verallgemeinerungen dieser Formel verdankt man *F. Riesz,* Math. Ann. 69 (1910), p. 455/7.

637) *Vgl. II A 2, Nr. 36 (*A. Voß*).*

638) *H. Lebesgue,* Ann. Fac. sc. Toulouse (3) 1 (1909), p. 44/6; *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1910), p. 10/21; **W. H. Young*[635]), p. 47/50; *W. Wilkosz,* Rend. Acc. Lincei (5) 23_2 (1914), p. 478/80, und insbesondere *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 465/8; ferner *M. Picone,* Atti Acc. Torino 55 (1919/20), p. 31/45.*

639) *H. Lebesgue*[635]), p. 46/7; **W. H. Young*[630]); *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Cours d'Analyse 1 (3. éd.), p. 279/80.*

640) *L. Tonelli,* Rend. Atti R. Accad. Linc. (5) 19 I (1910), p. 84/9; **G. Fichtenholz,* Quart. J. of math. 48 (1917/20), p. 142/7.*

schen Integralbegriff nachgebildet sind, wobei an Stelle der Intervalleinteilungen eine Zerlegung in Teilmengen tritt, oder (2. *Young*sche und *Riesz*sche Definition) darauf beruhen, daß man, von einfachen Funktionen und ihren Integralen ausgehend, durch geeignete Approximation zu komplizierteren Funktionen gelangt.

Das in Nr. **35 b** besprochene *Borel*sche Integral knüpft ebenfalls an die *Riemann*sche Form der Integraldefinition an und verwendet zugleich den Gedankengang des *Harnack*schen Verfahrens.

A. Denjoy [Nr. **35 c**] geht vom *Lebesgue*schen Integral aus und kommt insbesondere durch ganz systematische Verwendung der *Cauchy-Dirichlet*schen sowie der *Harnack*schen Methode zu seinem neuen Integralbegriff, der viel umfassender als das *Lebesgue*sche Integral ist (auch wenn man auf dieses noch die verschiedenen Methoden der „uneigentlichen" Integration anwendet).

Die *Stieltjes*schen und daran anschließend die *Hellinger*schen Integrale [Nr. **35 d** und **e**] erzielen eine Verallgemeinerung in ganz anderer Richtung, nämlich dadurch, daß die Integrationsveränderliche durch geeignete Funktionen ersetzt wird.

Schließlich ist das besonders weittragende *Perron*sche Integral [Nr. **35 f**] ganz anders gebildet als die übrigen hier besprochenen Integralbegriffe, nämlich nicht mittels eines Summationsverfahrens, sondern direkt durch Umkehrung des Differentiationsprozesses.

Wir besprechen nun in Nr. **35 a—f** alle diese Integraldefinitionen ausführlicher.*

35 a. Integraldefinitionen von W. H. Young, *J. Pierpont und F. Riesz.* Das Prinzip einer *ersten* Methode von *W. H. Young*[641]) ist folgendes: wir teilen das Intervall $[a, b]$ (oder die meßbare Menge A, über die integriert werden soll) in endlich oder abzählbar unendlich viele elementenfremde, meßbare Mengen; wir multiplizieren das Maß einer jeden von ihnen mit der oberen Grenze von $f(x)$ auf dieser Menge und nehmen die Summe S aller so erhaltenen Produkte: teilt man das Intervall so auf alle möglichen Weisen in lauter meßbare Mengen, so besitzen die Zahlen S eine untere Grenze, die als das „obere Integral" von $f(x)$ in $[a, b]$ bezeichnet wird. Das „untere Inte-

641) *W. H. Young,* Philos. Transact. Roy. Soc. London 204 A (1905), p. 221/52, *insbes. p. 227/30, 243, 245/7 [eine vorläufige Mitteilung in Proc. Roy. Soc. London 73 (1904), p. 445/9].* — *Eine Modifikation dieser Definition [Zerlegung in endlich viele, statt in abzählbar viele Teilmengen] bei *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 437/42, und *W. Sierpiński,* Prace matematyczno-fizyczne 30 (1919), p. 163/73 [polnisch]; vgl. auch *L. Tonelli*[1077a]), p. 143/50.*

*Wegen Übertragung dieser Definition auf allgemeine Räume mit beliebigen Elementen siehe *M. Fréchet*[670]), zweites Zitat, insbes. p. 253/8.*

gral" wird in analoger Weise definiert. Die Funktion $f(x)$ heißt „integrierbar", wenn das „obere Integral" gleich dem „unteren Integral" ist: ihr gemeinsamer Wert ist das „Integral" der Funktion.

W. H. Young hat seine Definition nur für beschränkte Integranden verwendet; sie läßt sich aber offenbar auch für nicht-beschränkte Funktionen ohne weiteres benutzen, wenn man nur wieder von der in Nr. **33** gemachten Bemerkung bezüglich der Unendlichkeitsstellen Gebrauch macht.*

*Das *Young*sche obere (bzw. untere) Integral deckt sich, wie leicht zu sehen ist, völlig mit dem *Lebesgue*schen oberen (bzw. unteren) Integral [vgl. [605]) und Nr. **31**]; und zwar ist dies sowohl für beschränkte wie für nicht-beschränkte Funktionen der Fall. Es stimmen also [von dem in [609]) angegebenen trivialen Fall *unendlichen* oberen und unteren Integrals *abgesehen*] die nach der Definition von *W. H. Young* integrierbaren Funktionen mit den *Lebesgue*schen summierbaren Funktionen überein.*

*Wird in der vorstehenden *Young*schen Definition statt der Funktion $f(x)$ die obere [bzw. untere] Limesfunktion (siehe Nr. 22) von $f(x)$ verwendet, so erhält man nach *W. H. Young* [vgl. [575])] das obere [bzw. untere] *Darboux*sche Integral von $f(x)$ in $[a, b]$ (oder in der meßbaren Menge A). Dies ergibt sich, weil das *Lebesgue*sche Integral einer beschränkten, nach oben [unten] halbstetigen Funktion mit ihrem oberen [unteren] *Darboux*schen Integral übereinstimmt.*

Die Definition von *W. H. Young* läßt sich auf die Funktionen mehrerer Variablen übertragen sowie auf Funktionen, die nur für die Punkte einer meßbaren Menge definiert sind.

*In recht ähnlicher Weise (aber offenbar ohne Kenntnis der betreffenden *Young*schen Arbeiten) hat *J. Pierpont*[642]) das Integral definiert: Die einzige Abweichung ist die, daß das Integrationsintervall $[a, b]$ oder die nicht mehr als meßbar vorausgesetzte Menge A, über die integriert werden soll, in endlich oder abzählbar unendlich viele Teilmengen zerlegt wird, deren meßbare Hüllen nur Nullmengen gemeinsam haben, und daß an Stelle des Maßes das äußere Maß dieser (im allgemeinen nicht meßbaren) Teilmengen verwendet wird.

Ist A meßbar, so stimmt, wie leicht ersichtlich, das obere (untere) Integral von *J. Pierpont* völlig mit dem von *W. H. Young* und also auch mit dem *Lebesgue*schen überein. Wenn dagegen A nicht

642) **J. Pierpont,* Lectures II, p. 371/414, insbes. p. 371/2 [hier gleich für Funktionen mehrerer Veränderlichen, also für mehrfache Integrale]. Vgl. dazu auch Nr. 29 bei [576]) u. [578]); ferner: *J. K. Lamond,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 387/98.*

meßbar ist, so kann die Definition von *J. Pierpont* etwas anderes liefern als die von *H. Lebesgue.*[643])

Wie *J. Pierpont*[576]) speziell die oberen und unteren *Darboux*schen Integrale bzw. das *Riemann*sche Integral erhält, haben wir schon in Nr. **29** angegeben.

J. Pierponts Integraldefinition ist (wie die von *W. H. Young*) unmittelbar auch auf nicht-beschränkte Funktionen anwendbar; die vorstehenden Bemerkungen behalten dabei ihre Gültigkeit. *J. Pierpont* selbst benutzt aber seine Integraldefinition direkt nur für beschränkte Funktionen und schreitet von da zu den Integralen nicht-beschränkter Funktionen mit Hilfe seines in Nr. **32** angegebenen Grenzübergangs fort.[644])*

***W. H. Young*[645]) hat noch eine *zweite* Integraldefinition gegeben, die wir hier nur für beschränkte Funktionen explizit anführen wollen[646]):

643) *Beispiel: Sei $\mathfrak{A}$ eine im Intervall $[0, 1]$ gelegene, nicht meßbare Menge, für die $m_a(\mathfrak{A}) = 1$, $m_i(\mathfrak{A}) = 0$ ist [vgl. Nr. **20**]; und sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für die Punkte von } \mathfrak{A}, \\ 0 & \text{für die übrigen Punkte.} \end{cases}$$

Dann ist nach der Definition von *J. Pierpont*:

$$\overline{\int_{\mathfrak{A}}}_P f(x)\,dx = \int_{\underline{\mathfrak{A}}}{}_P f(x)\,dx = \int_{\mathfrak{A}}{}_P f(x)\,dx = 1;$$

dagegen nach der Definition von *H. Lebesgue:*

$$\overline{\int_{\mathfrak{A}}}_L f(x)\,dx = 1, \qquad \int_{\underline{\mathfrak{A}}}{}_L f(x)\,dx = 0;$$

(wobei die Integraldefinition von *J. Pierpont* und *H. Lebesgue* durch beigesetzte Buchstaben P bzw. L unterschieden werden).

Für $f(x) \geqq 0$ stimmt, wie ersichtlich, auch bei nicht-meßbarem A das obere *Pierpont*sche Integral mit dem oberen *Lebesgue*schen immer überein, was bei beliebigem $f(x)$ dagegen nicht der Fall ist. Sondern hierfür ergibt sich leicht:

$$\overline{\int_A}_L f(x)\,dx \geqq \overline{\int_A}_P f(x)\,dx \geqq \int_{\underline{A}}{}_P f(x)\,dx \geqq \int_{\underline{A}}{}_L f(x)\,dx,$$

wobei in der ersten und dritten Relation für meßbare Mengen A nur Gleichheitszeichen stehen, während für nicht-meßbare Mengen A auch $>$ auftreten kann.*

644) *Vgl. *J. Pierpont*[642]), p. 402/14.*

645) **W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910), p. 15/50, insbes. p. 25/35; vgl. auch: Proc. Roy. Soc. London 88 A (1913), p. 170/8; Paris C. R. 162 (1916), p. 909/12, sowie [648]).*

646) *Bei nicht-beschränkten Funktionen, die als monotone Folgen beschränkter Funktionen dargestellt werden, ist die obige Definition ein wenig zu modifizieren; vgl. *W. H. Young*[645]), erstes Zitat, p. 33/5.*

Er geht aus von dem [etwa nach *A. L. Cauchy* definierten[647])] Integral der stetigen Funktionen; er definiert sodann das Integral einer nach oben (bzw. unten) halbstetigen Funktion $f(x)$ als den Grenzwert der Integrale einer monoton abnehmenden (bzw. wachsenden) Folge stetiger Funktionen, die gegen die gegebene Funktion f konvergiert. Bei einer beliebigen beschränkten Funktion f betrachtet er die untere Grenze der Integrale derjenigen nach unten halbstetigen Funktionen, die durchweg größer sind als f, sowie die obere Grenze der Integrale derjenigen nach oben halbstetigen Funktionen, die durchweg kleiner sind als f; erstere Zahl nennt er das obere Integral, letztere das untere Integral der Funktion f; wenn beide gleich sind, heißt die Funktion wieder integrierbar und der gemeinsame Wert das Integral von f. Dieses Integral stimmt wieder völlig überein mit dem *Lebesgue*schen Integral. — Wendet man diese zweite *Young*sche Definition auf die obere bzw. untere Limesfunktion von f an, so erhält man [wie schon in Nr. 29 Schluß angedeutet] eine neue Definition der *Darboux*schen oberen und unteren Integrale sowie des *Riemann*schen Integrals.[648])*

*Wie die eben besprochene Definition von *W. H. Young* beruht auch eine besonders durchsichtige Integraldefinition von *F. Riesz*[649]) auf der Approximation durch passende einfache Funktionen: *F. Riesz* geht aus von *„fonctions simples"* oder, wie wir mit größerer Deutlichkeit sagen wollen, *„einfachen Treppenfunktionen"*, d. h. von Funktionen, die nach Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle jedem von diesen einen bestimmten konstanten Wert zuordnen. Für diese einfachen Treppenfunktionen werde das Integral, wie gewöhnlich, geometrisch definiert. Er bezeichnet dann als „summierbare Funktion" jede beschränkte Funktion $f(x)$, die fast überall Grenzfunktion einer (in ihrer Gesamtheit) beschränkten Folge von einfachen Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ist; und er definiert als Wert des Integrals von $f(x)$ den Grenzwert der Integrale von $\varphi_n(x)$; dieser

---

647) *Oder man kann mit Hilfe des *Weierstraß*schen Satzes [Nr. 50] die Integration der stetigen Funktionen auf die Integration der Polynome zurückführen.*

648) **W. H. Young*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 14 (1908), p. 520/9.*

649) **F. Riesz*, Paris C. R. 154 (1912), p. 641/3; Acta math. 42 (1919/20), p. 191/205. Vgl. auch [599]). Etwa gleichzeitig mit (und sogar kurz vor) *F. Riesz* hat auch *E. Borel*, Paris C. R. 154 (1912), p. 413/5; J. de math. (6) 8 (1912), p. 191/99 [= Leçons sur la théorie des fonctions, 2. éd., Paris 1914, Note VI, p. 242/48] eine ähnliche Integraldefinition (für beschränkte Funktionen) angegeben, die auf der Approximation durch asymptotisch konvergente [siehe [1062])] Folgen von Polynomen beruht, und die für beschränkte Funktionen sich ebenfalls mit dem *Lebesgue*schen Integral deckt.*

Grenzwert existiert hierbei immer und ist unabhängig von der Wahl der $\varphi_n(x)$. Nicht-beschränkte Funktionen $f(x)$ definiert er dann als „summierbar“ mit Hilfe des auf beschränkte „summierbare“ Funktionen angewendeten Grenzübergangs von *Ch. J. de la Vallée Poussin*[620]) [siehe Nr. 32]. Diese summierbaren Funktionen und ihre Integrale decken sich völlig mit den betreffenden *Lebesgue*schen Begriffen. Ferner kann insbesondere jede im *Riemann*schen Sinn integrierbare Funktion durch eine beschränkte, fast überall konvergente Folge von einfachen Treppenfunktionen approximiert werden, derart, daß die Konvergenz, abgesehen höchstens von einer Nullmenge, in jedem Punkt gleichmäßig ist.[650]) Und umgekehrt: Ist $f(x)$ fast überall Grenzfunktion einer derartigen Folge, dann ist sie nach *Riemann* integrierbar.*

35 b. Das Borelsche Integral. Man verdankt auch *E. Borel*[651]) eine neue Verallgemeinerung des Integralbegriffes. Diese Definition von *E. Borel* besteht in folgendem: Sei die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ definiert, *sei in $[a, b]$ eine Menge $\mathfrak{A}$ von (singulären) Punkten vom Maß Null[651a]) gegeben* und schließen wir aus $[a, b]$ abzählbar unendlich viele, *$\mathfrak{A}$ enthaltende,* elementenfremde Teilintervalle (α_n, β_n) aus, deren Längensumme gleich σ ist; bilden wir die *Riemann*sche Summe S [Nr. 28] mit Hilfe von Punkten a_i und x_i, die den ausgeschlossenen Intervallen nicht angehören, indem wir in dieser Summe die Länge des Intervalls $[a_{i-1}, a_i]$ durch die Differenz zwischen dieser Länge und der Summe der Längen aller in ihm enthaltenen Intervalle (α_n, β_n) ersetzen; diese Differenz nennen wir die reduzierte Länge von $[a_{i-1}, a_i]$. Haben die Summen S_r einen Grenzwert, wenn das Maximum der reduzierten Längen von $[a_{i-1}, a_i]$ gegen Null konvergiert, während die Intervalle (α_n, β_n) unverändert bleiben, und

650) *Über „gleichmäßige Konvergenz in einem Punkt“ siehe Nr. 49.*

651) *E. Borel,* Paris C. R. 150 (1910), p. 375/7, 508/11; *J. de math. (6) 8 (1912), p. 200/2 [= Leçons[649]), p. 248/50].*

*Diese *Borel*sche Integraldefinition hat zu einer (teilweise heftigen) Diskussion zwischen *H. Lebesgue* [Ann. Éc. Norm. (3) 35 (1918), p. 191/250; (3) 37 (1920), p. 255/57] und *E. Borel* [Ann. Éc. Norm. (3) 36 (1919), p. 71/91; (3) 37 (1920), p. 461/2] Anlaß gegeben.*

651 a) **E. Borel*[651]), J. de math. 1912 [= Leçons], setzt diese Menge $\mathfrak{A}$ ausdrücklich als abzählbar voraus; man kann aber, wie beim *Harnack*schen Verfahren, $\mathfrak{A}$ allgemeiner als Nullmenge annehmen; vgl. etwa *H. Hahn*[652]).

Eine Modifikation des *Borel*schen Integralbegriffs, die sich mit dem *Lebesgue*schen Integral deckt, ist bei *E. Borel*[651]), Paris C. R., zweites Zitat, implizit enthalten und von *Pia Nalli*[653]), p. 84/97, *H. Hahn*[652]), p 9/10, und *T. H. Hildebrandt,* Bull. Amer. Math. Soc. 24 (1917/18), p. 135/8 u. 201/2, genauer betrachtet worden. — Vgl. auch *N. Lusin*[652]), p. 117 Fußnote.*

hat dieser Grenzwert selbst wieder einen Grenzwert, wenn σ gegen Null konvergiert, so sagen wir, die Funktion f ist *nach der Methode von Borel integrierbar.*

*Für beschränkte Funktionen $f(x)$ ist die *Borel*sche Integraldefinition enger als die *Lebesgue*sche.[652]) Bei nicht-beschränkten Funktionen dagegen ist die *Borel*sche Definition auch in Fällen nicht-absoluter Konvergenz des Integrals anwendbar, was ja für die *Lebesgue*sche Definition unmöglich ist. Immer, wenn die Integrale auf Grund der beiden Definitionen existieren, stimmen sie ihrem Werte nach überein. Ferner sei noch bemerkt: Wenn das *Borel*sche Integral von $f(x)$ für zwei verschiedene Ausnahmemengen $\mathfrak{A}$ existiert, so hat es in beiden Fällen denselben Wert.[652a])*

35c. *Das Denjoysche Integral. Besonders wichtig ist der Integralbegriff, den als wesentliche Verallgemeinerung des *Lebesgue*schen Integrals *A. Denjoy* aufgestellt hat. Diese Definition hat im Laufe der Zeit gewisse Wandlungen erfahren und die ihr ursprünglich von *A. Denjoy*[653]) erteilte Form ist später (etwa gleichzeitig) von *A. Khintchine*[654]) sowie von *A. Denjoy*[655]) selbst noch etwas verallgemeinert worden. Wir wollen den ursprünglichen spezielleren Integralbegriff als *„spezielles Denjoysches Integral"*, die spätere allgemeine Integraldefinition als *„allgemeines Denjoysches Integral"* oder auch kurzweg als *„Denjoysches Integral"* bezeichnen und hierfür schreiben:

$$\text{fürs erstere } \int_{D_*}, \quad \text{bzw. fürs letztere } \int_D;$$

oder auch [in Anlehnung an die *Pierpont*sche Schreibweise[600]) $\int_{\mathfrak{L}}$ des *Lebesgue*schen Integrals]:

$$\int_{\mathfrak{D}_*} \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathfrak{D}}.$$

A. Denjoy gebraucht für die in seinem Sinn ausgeführte Integration den Ausdruck *„totalisation"*; er bezeichnet eine in seinem Sinn integrierbare Funktion als *„totalisable"* und benutzt später[655]) für das in

652) *Siehe hierüber *H. Hahn*, Monatsh. Math. Phys. 26 (1915), p. 3/18; *N. Lusin*, Annali di mat. (3) 26 (1917), p. 110/18 [insbes. p. 112]; *H. Lebesgue*[651]), erstes Zitat, p. 206/15.*

652a) **H. Hahn*[652]).*

653) **A. Denjoy*, Paris C. R. 154 (1912), p. 859/62 [siehe auch ib., p. 1075/8]. Weitere Ausführungen hierzu bei *Pia Nalli*, Esposizione e confronto critico delle diverse definizioni proposte per l'integrale definito di una funzione limitata o no, Dissertazione per la libera docenza, Palermo 1914, p. 114/60.*

654) **A. Khintchine*, Paris C. R. 162 (1916), p. 287/91.*

655) **A. Denjoy*, Paris C. R. 162 (1916), p. 377/80; Ann. Éc. Norm. (3) 34 (1917), p. 181/238.*

seinem Sinn genommene Integral von $f(x)$ die Bezeichnung „*totale*" von f [wofür er gelegentlich schreibt: Tf]. Mit diesen (ursprünglich zum Teil für seine spezielle Definition gebildeten) Ausdrücken meint er jetzt stets seine allgemeine Integraldefinition, während er zum Unterschied davon für seine spezielle Integraldefinition die Bezeichnungen „*totalisation complète*" und „*complètement totalisable*" verwendet.

Wir besprechen zuerst das „allgemeine *Denjoy*sche Integral" und dann die geringen Abänderungen, die hieraus das ursprüngliche „spezielle *Denjoy*sche Integral" entstehen lassen. Das erstere wird mit Hilfe der folgenden Konstruktionsprinzipien definiert[656]):

1. In einem Intervall, in dem $f(x)$ summierbar ist, soll das *Denjoy*sche Integral von f mit dem *Lebesgue*schen Integral von f übereinstimmen; und dasselbe soll allgemein der Fall sein für irgendeine perfekte Menge, auf der f summierbar ist.

2. Ist $\int_{D\,\alpha'}^{\beta'} f\,dx$ für alle $\alpha' < \beta'$, die innerhalb eines Intervalls (α, β) enthalten sind, bekannt, dann sei

$$\int_{D\,\alpha}^{\beta} f\,dx = \lim_{\substack{\alpha' = \alpha \\ \beta' = \beta}} \int_{D\,\alpha'}^{\beta'} f\,dx.$$

3. Ist $\int_D f\,dx$ für endlich viele, aufeinanderfolgende Intervalle $[\alpha_1 \alpha_2]$, $[\alpha_2 \alpha_3]$, ... $[\alpha_{n-1} \alpha_n]$ bekannt, dann soll sein:

$$\int_{D\,\alpha_1}^{\alpha_n} f\,dx = \int_{D\,\alpha_1}^{\alpha_2} f\,dx + \int_{D\,\alpha_2}^{\alpha_3} f\,dx + \cdots + \int_{D\,\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} f\,dx.$$

4. Es sei P eine nirgends dichte, perfekte Menge eines Intervalls $[\alpha, \beta]$ und es seien u_n die von P punktfreien Intervalle in $[\alpha, \beta]$; auf P sei f summierbar und für jedes u_n lasse sich

$$\int_{D\,u_n} f\,dx$$

berechnen. Wenn dann

(a) $$\sum_1^{\infty}{}_n \int_{D\,u_n} f\,dx$$

656) *Es sei erwähnt, daß *A. Denjoy* in [655]), zweites Zitat, diese Konstruktionsprinzipien und die zugehörigen Bedingungen aus charakteristischen Eigenschaften ableitet, die er für sein Integral fordert; siehe Nr. 44, insbes. Fußn. [811]). — Übrigens ist ersichtlich, daß diese Konstruktionsprinzipien [insbes. 2) und 4)] eine Verallgemeinerung der in Nr. 32 angegebenen Verfahren von *A. L. Cauchy* und *A. Harnack* darstellen.*

absolut konvergiert, so werde definiert:

(𝔟)
$$\int_{D\,\alpha}^{\beta} f\,dx = \sum_1^{\infty} {}_n \int_{D\,u_n} f\,dx + \int_{L\,P} f\,dx.$$

Um durch wiederholte, kombinierte Anwendung dieser Konstruktionsprinzipien die Definition des *Denjoy*schen Integrals von f im Intervall $[a, b]$ zu ermöglichen, muß die Funktion f in $[a, b]$ den folgenden drei Bedingungen A), B), C) genügen [die der Reihe nach mit den Konstruktionsprinzipien 1., 2., 4. zusammenhängen]:

A) Ist P eine beliebige, in $[a, b]$ enthaltene, perfekte Menge, dann sei die Menge derjenigen Punkte p von P, in deren Umgebung f nicht auf P summierbar ist, nirgends dicht in P. Dabei heiße f in der Umgebung von p nicht auf P summierbar, wenn p im Innern keines Intervalles liegt, für das f auf P summierbar ist.[657])

B) Ist $\int_{D\,\alpha'}^{\beta'} f\,dx$ für alle $\alpha' < \beta'$, die innerhalb eines Intervalls (α, β) enthalten sind, bekannt, so soll ein eindeutig bestimmter Grenzwert

$$\lim_{\substack{\alpha'=\alpha\\ \beta'=\beta}} \int_{D\,\alpha'}^{\beta'} f\,dx$$

existieren.

C) Ist P eine nirgends dichte, perfekte Menge und ist $\int_L f\,dx$ für die durch P bestimmten Lückenintervalle u_n bekannt, dann sei die Menge derjenigen Punkte q von P, in deren Umgebung die Reihe

(𝔞)
$$\sum_1^{\infty} {}_n \int_{D\,u_n} f\,dx$$

nicht absolut konvergiert, nirgends dicht auf P. Dabei soll die Aussage: „die Reihe (𝔞) konvergiert in der Umgebung von q nicht absolut“ bedeuten: q gehört keinem Intervall i an, in welchem die mit den in i enthaltenen u_n gebildete Teilreihe von (𝔞) absolut konvergiert.

Genügt f in $[a, b]$ diesen drei Bedingungen, so ist es möglich, durch wiederholte Anwendung der angegebenen Konstruktionsprinzipien

$$\int_{D\,a}^{b} f\,dx$$

zu berechnen und zwar, indem in bestimmter Ordnung abzählbar oft

657) *Diese Bedingung A) ist z. B. sicherlich für jede endliche Funktion der ersten *Baire*schen Klasse erfüllt, da deren Stetigkeitsstellen auf P überall dicht liegen [vgl. Nr. 53].*

die den Konstruktionsprinzipien entsprechenden Operationen ausgeführt werden; also letzten Endes wird es darauf ankommen, in bestimmter Aufeinanderfolge abzählbar oft *Lebesgue*sche Integrale, Grenzwerte stetiger Funktionen und Summen absolut konvergenter Reihen zu bilden.

Man kann nämlich in folgender Weise das *Denjoy*sche Integral von f in $[a, b]$ erhalten:

Es sei Π_1 die Menge der Punkte von $[a, b]$, in deren Umgebung f nicht summierbar ist. Wegen A) ist Π_1 nirgends dicht; ferner ist Π_1 abgeschlossen und besteht aus dem perfekten Kern P_1 und einem abzählbaren (in jedem Lückenintervall von P_1 reduziblen) Rest. Durch 1. und 2. kann man $\int_D f\,dx$ in jedem von Π_1 punktfreien Intervall erhalten; wegen 3. und 2. dann auch in jedem Lückenintervall der ersten Ableitung Π_1' von Π_1 und, sukzessive so weitergehend, in jedem Lückenintervall irgendeiner höheren Ableitung von Π_1, also schließlich nach abzählbar vielen Operationen in jedem von P_1 punktfreien Intervall.[658]) Man bezeichne nun mit Π_2 die Teilmenge derjenigen Punkte von P_1, in deren Umgebung entweder f auf P_1 nicht summierbar ist oder die mit den Lückenintervallen von P_1 gebildete Reihe (α) nicht absolut konvergiert. Wegen A) und C) ist die abgeschlossene Menge Π_2 auf P_1 nirgends dicht. P_2 sei wieder der perfekte Kern von Π_2. Mit Hilfe von 4. und 2. kann man $\int_D f\,dx$ für jedes Lückenintervall von Π_2 berechnen und dann, wie vorhin, auch für jedes Lückenintervall von P_2. Wie soeben Π_2 und P_2 auf P_1, so kann man nun Π_3 und P_3 auf P_2 definieren und allgemein Π_α und P_α für die endlichen und transfiniten Ordnungszahlen α der ersten und zweiten Zahlenklasse. Da aber die perfekten Mengen P_α auf jeder vorhergehenden derartigen Menge nirgends dicht liegen, so muß [vgl. Nr. **5** Schluß] eine Zahl β der ersten oder zweiten Zahlenklasse existieren, für die $P_\beta = 0$ ist. Wenn man bis zu diesem Index β gelangt ist, was abzählbar viele Operationen in bestimmter, wohlgeordneter Aufeinanderfolge erfordert, so ist $\int_{D\,a}^{b} f\,dx$ berechnet.

A. Denjoy[659]) hat noch gezeigt, daß es nicht möglich ist, mit wohlgeordneten Folgen von Operationen auszukommen, deren Indizes unterhalb einer ein für allemal festen Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse bleiben, wenn man für alle möglichen totalisierbaren

658) *Dies ist nichts anderes als das *Cauchy-Dirichlet*sche Verfahren von Nr. **32**.*

659) **A. Denjoy*[655]), zweites Zitat, p. 206/36.*

Funktionen oder auch nur für alle endlichen Ableitungen das *Denjoysche* Integral aufstellen will.

Es sei ferner erwähnt, daß eine in einem Intervall ihr Vorzeichen nicht wechselnde Funktion daselbst stets gleichzeitig totalisierbar und summierbar ist.[660])

Statt des allgemeinen *Denjoy*schen Integrals erhält man das *„spezielle Denjoysche Integral"*, wenn man in 4. und C) statt der absoluten Konvergenz von (a) noch mehr, nämlich die Konvergenz der Reihe

$$(\mathfrak{a}^*) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_n W(u_n)$$

fordert, wobei $W(u_n)$ die Schwankung des (speziellen) *Denjoy*schen Integrals im Intervall u_n bezeichnet, d. h. die obere Grenze von

$$\left| \int_{u_n'} {}_{D_*} f\,dx \right|$$

für alle Teilintervalle u_n' eines bestimmten u_n.[661])

Die Definition des „speziellen *Denjoy*schen Integrals" ist von *A. Denjoy* so eingerichtet worden, daß es das Problem der Umkehrung der Differentiation weitgehend zu erledigen gestattet (und darin beruht ein wesentlicher Teil seiner Bedeutung), d. h.: Bei Verwendung des speziellen *Denjoy*schen Integrals wird jede endliche[661a]) Ableitung f einer stetigen Funktion F integrierbar und man erhält (bis auf eine additive Konstante) die primitive Funktion F; ferner stimmt [wie beim *Lebesgue*schen Integral] die Ableitung des speziellen *Denjoy*schen Integrals einer Funktion f, abgesehen vielleicht von einer Nullmenge, wieder mit f selbst überein. Vgl. hierüber Nr. **40, 41** und **43.**

A. Khintchine[654]) hat das spezielle *Denjoy*sche Integral noch etwas verallgemeinert: In 4. und in C) ersetzt er die Konvergenz der Reihe ($\mathfrak{a}^*$) durch eine allgemeinere Bedingung, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß ($\mathfrak{b}$) und überhaupt das über $[a, b]$ erstreckte Integral von f überall, außer vielleicht in einer Nullmenge, f zur Ableitung hat. Die so entstehende Integraldefinition ist aber noch immer spezieller als das „allgemeine *Denjoy*sche Integral". Für das letztere gilt

660) $_*$*A. Denjoy*[655]), zweites Zitat, p. 202. — Also sind die Funktionen, die ihr Vorzeichen nicht wechseln und nicht summierbar sind, gleichzeitig Beispiele für Funktionen, die nicht nach *Denjoy* integrierbar sind.*

661) $_*$Eine Bedingung ähnlicher Art tritt auch bei Untersuchungen von *E. H. Moore*[619]) (insbes. p. 324) auf, die er über das *Harnack*sche Verfahren bei uneigentlichen Integralen angestellt hat.*

661a) $_*$Das *Lebesgue*sche Integral leistet das Entsprechende nur für *beschränkte* Ableitungen; vgl. Nr. **40, 41** und **43.***

allerdings im allgemeinen nicht mehr der Satz, daß das unbestimmte Integral fast überall eine Ableitung besitzt. Man kann aber auch hier noch die Gültigkeit eines entsprechenden Satzes dadurch erreichen, daß man nunmehr den Begriff der Ableitung einer Funktion in geeigneter Weise verallgemeinert, was *A. Khintchine*[654]) und *A. Denjoy*[655]) getan haben. So ergibt sich: Das allgemeine *Denjoy*sche Integral von f besitzt fast überall f als „approximative Ableitung"; siehe hierüber Nr. **44 b**.

Für Funktionen mehrerer Veränderlichen ist ein der *Denjoy*schen Integration entsprechendes „Totalisationsverfahren" neuerdings von *H. Looman*[661b]) definiert und untersucht worden.

W. H. Young[662]) hat das *Denjoy*sche Integral noch weiter verallgemeinert und ein Integral definiert, das im allgemeinen keine stetige Funktion mehr ist. Wesentlich ist hierbei, daß er bei Verwendung von 2. und B) den Grenzübergang nicht in allgemeiner Weise vollzieht, sondern speziell unter ausschließlicher Benutzung der in (α, β) enthaltenen, durch den vorhergehenden Verlauf des Definitionsprozesses zugänglich gewordenen Punkte von Π_1; nur dann tritt diese Spezialisierung des Grenzüberganges nicht ein, wenn (α, β) keinen Punkt von Π_1 im Innern enthält.

Ferner hat *A. Denjoy*[662a]) neuerdings in mehreren Noten einen anderen integralartigen Prozeß angegeben und untersucht, der nicht von zwei, sondern von drei Grenzen abhängt, im übrigen aber in ähnlicher Weise wie seine Totalisation durch abzählbar häufige, wohlgeordnete Anwendung von 4 (bzw. 6) Grundoperationen sich aufbaut. Dieses neue Verfahren steht zu einer zweiten Ableitung [nämlich zu der von ihm so genannten „2. gewöhnlich-approximativen Ableitung", d. h. der „approximativen" Ableitung der gewöhnlichen Ableitung der gegebenen Funktion] in einer ähnlichen Beziehung wie die Totalisation zu der ersten („approximativen") Ableitung. Er bezeichnet diesen neuen Prozeß als *„totalisation symétrique à deux degrés"* oder als „Operation $(T_{2,s})$", und er führt die Untersuchung aus, um einen integralartigen Prozeß zu erhalten, welcher die Koeffizienten einer beliebigen konvergenten trigonometrischen Reihe zu berechnen gestattet, wenn die Summe dieser Reihe gegeben ist.

---

661 b) **H. Looman*, Fundamenta math. 4 (1923), p. 246/85. Vgl. auch [869a]).*

662) **W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 16 (1916), p. 175/218.*

662 a) **A. Denjoy*, Paris C. R. 172 (1921), p. 653/5, 833/2, 903/6, 1218/21; 173 (1921), p. 127/9. [Diese 5 Noten sind auch zusammen separat erschienen unter dem Titel: Calcul des coefficients de la série trigonométrique convergente la plus générale dont la somme est une fonction donnée, Paris 1921].*

Schließlich sei noch erwähnt, daß *A. Denjoy*[663]) gelegentlich noch drei ganz andere Integraldefinitionen angegeben hat, die die *Riemann*sche Methode in Verbindung mit dem Maßbegriff verwenden und die mindestens die gleiche Tragweite wie das *Lebesgue*sche Integral haben, zum Teil allgemeiner als dieses sind.*

35 d. Das Stieltjessche Integral. Die Integraldefinition von *T. J. Stieltjes*[664]) kann auch als eine Verallgemeinerung des Begriffes des bestimmten Integrals angesehen werden. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, von denen die erste stetig ist, und bilden wir die Summe

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} f(a_i)[g(a_{i+1}) - g(a_i)],$$

die sich auf irgendeine Einteilung $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ bezieht. *T. J. Stieltjes* hat bewiesen, daß diese Summe, sofern $g(x)$ von beschränkter Schwankung in $[a, b]$ ist, einen Grenzwert besitzt, wenn die Zahl der Teilungspunkte unbegrenzt derartig wächst, daß das Maximum von $|a_i - a_{i-1}|$ gegen Null konvergiert. Dieser Grenzwert wird mit $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ bezeichnet. *H. Lebesgue*[665]) hat den Zusammenhang aufgedeckt, der zwischen den *Stieltjes*schen Integralen und den *Lebesgue*schen Integralen besteht, indem er jedes *Stieltjes*sche Integral in ein *Lebesgue*sches Integral einer summierbaren Funktion transformiert hat. *Die umgekehrte Transformation jedes *Lebesgue*schen in ein *Stieltjes*sches Integral hat *E. B. Van Vleck*[665a]) ausgeführt. Zugleich gelingt es *H. Lebesgue*[665]) mittels des von ihm bemerkten Zusammenhangs und durch Anwendung seines Satzes über die gliedweise Integrabilität das *Stieltjes*sche Integral für den Fall *unstetiger* Funktionen $f(x)$ zu verallgemeinern (nämlich für den Fall, wo $f(x)$ eine beliebige *Baire*sche Funktion ist).*

**M. Fréchet*[666]) hat das *Stieltjes*sche Integral auf den Fall mehrerer Veränderlichen (mehrfache Integrale) ausgedehnt.

663) **A. Denjoy,* Paris C. R. 169 (1919), p. 219/21. Weitere Ausführungen zu der zweiten dieser Methoden (bzw. einer Modifikation derselben) hat *T. J. Boks,* Rend. Circ. mat. Palermo 45 (1921), p. 211/64 gegeben.*

664) *T. J. Stieltjes,* Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 8 (1894), mém. n° 10, p. 1/122; insbes. p. 68/75.

665) *H. Lebesgue,* Paris C. R. 150 (1910), p. 86/8.

665a) **E. B. Van Vleck,* Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), p. 326/30; vgl. dazu auch *G. A. Bliss*[601a]).*

666) **M. Fréchet,* Nouv. Ann. math. (4) 10 (1910), p. 241/56; vgl. auch [672a]) und *W. H. Young,* Proc. Roy. Soc. London A 93 (1917), p. 28/41.*

W. H. Young[667]) hat ebenfalls und sogar ganz direkt[668]) das *Stieltjes*sche Integral für den Fall unstetiger Funktionen f verallgemeinert, und zwar mit Hilfe des gleichen Verfahrens, das er bei seiner zweiten in Nr. **35a** angegebenen Definition verwendet hat; d. h. er geht von dem *Stieltjes*schen Integral für stetige Funktionen f (oder einfache Treppenfunktionen, die halbstetig sind) aus und definiert, genau wie dort, mittels monoton wachsender und monoton abnehmender Folgen von derartigen Funktionen das verallgemeinerte *Stieltjes*sche Integral.

J. Radon[669]) hat schon vorher das *Stieltjes*sche Integral auf zwei verschiedene Weisen verallgemeinert, indem er die Funktionen beschränkter Schwankung $g(x)$ durch absolut additive Mengenfunktionen $g(e)$ [s. Nr. 22] ersetzt. Mit deren Hilfe hat er erstens unter Voraussetzung einer im Integrationsbereich gleichmäßig stetigen Punktfunktion f die Definition des *Stieltjes*schen Integrals direkt verallgemeinert. Zweitens hat er das *Stieltjes*sche Integral dadurch verallgemeinert, daß er die Definition des *Lebesgue*schen Integrals [Nr. **30** und **33**] nachgebildet hat, wobei er nur, wenn $E[l_i \leqq f < l_{i+1}]$ mit E_i bezeichnet wird, an Stelle von $m(E_i)$ den Wert $g(E_i)$ setzt; er erhält auf diese Weise ein verallgemeinertes *Stieltjes*sches Integral, wobei dann f nicht als (gleichmäßig) stetig vorausgesetzt zu werden braucht, sondern nur als „summierbar bezüglich g“. Ist f auf dem Integrationsbereich gleichmäßig stetig, so sind die beiden Integraldefinitionen von *J. Radon* gleichwertig. Nach *M. Fréchet*[670]) läßt sich die zweite (allgemeinere) Integraldefinition von *J. Radon* [die dieser für Punktfunktionen f des gewöhnlichen n-dimensionalen Raumes gegeben hat] fast unmittelbar auf allgemeine Räume mit ganz beliebigen Elementen übertragen.

An die deskriptive Integraldefinition von *H. Lebesgue* [Nr. **30** Anfang] und den eben angegebenen Gedankengang von *W. H. Young* anknüpfend, gibt auch *P. J. Daniell*[671]) eine Verallgemeinerung des

667) **W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 13 (1914), p. 109/50; [ein kurzer Überblick über seine Untersuchung in: L'enseignement math. 16 (1914), p. 81/92]; ferner: Proc. London Math. Soc. (2) 15 (1915), p. 35/63.*

668) *D. h. ohne erst in ein *Lebesgue*sches Integral umzuformen.*

669) **J. Radon,* Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien IIa, 122 (1913), p. 1322/32. [Vgl. dazu auch *T. H. Hildebrandt*[651a]), p. 185/94.]*

670) **M. Fréchet,* Paris C. R. 160 (1915), p. 839/40; Bull. Soc. math. France 43 (1915), p. 248/65. [Siehe auch *T. H. Hildebrandt*[669]).]*

671) **P. J. Daniell,* Ann. of math (2) 19 (1918), p. 279/94; (2) 21 (1919/20), p. 203/20; vgl. auch (2) 20 (1919), p. 281/8; (2) 21 (1919/20), p. 30/8.*

*Stieltjes*schen Integrals für allgemeine Räume von beliebigen Elementen.[671a])

W. H. Young[671b]) und *P. J. Daniell*[671c]) haben auch den Zusammenhang des *Stieltjes*schen Integrals und eines zugehörigen Differentiationsprozesses untersucht (der aus einem Differenzenquotienten entsteht, dessen Nenner mit der [im *Stieltjes*schen Integral auftretenden] Funktion $g(x)$ gebildet ist). Dabei ergeben sich die wesentlichsten Aussagen, die für den Zusammenhang des *Lebesgue*schen Integrals mit der Differentiation [siehe Nr. **40—44**] gelten.*

Es sei noch hervorgehoben, daß die *Stieltjes*schen Integrale von *F. Riesz* und anderen[672]) zur Darstellung der linearen Funktionaloperationen verwendet worden sind.[672a])

35 e. ***Die Hellingerschen Integrale.** In einer gewissen Verwandtschaft zu den *Stieltjes*schen Integralen stehen die integralartigen Grenzwerte, die von *E. Hellinger*[673]) [zum Zweck von Untersuchungen über die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen] eingeführt worden sind: Es sei $f(x)$ in $[a, b]$ stetig, $g(x)$ stetig und monoton wachsend; ferner sei in jedem Teilintervall von $[a, b]$, in welchem $g(x)$ konstant ist, auch $f(x)$ konstant. Man bilde nun für jede beliebige Einteilung $\mathfrak{E}$ von $[a, b]$ durch end-

671a) *Eine systematische Übersicht über das *Stieltjes*sche Integral und seine Verallgemeinerungen gibt *S. Pollard*, Quart. J. of math. 49 (1920), p. 73 ff. — Weitere Einzelfragen, die sich auf das *Stieltjes*sche Integral beziehen, behandeln ferner: *H. E. Bray,* Annals of math. (2) 20 (1918), p. 177/86; *G. H. Hardy,* Messenger of math. 48 (1918), p. 90/100; *R. D. Carmichael,* Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1919/20), p. 97/102; *H. Hahn*[712]), p. 52/88; *T. H. Hildebrandt,* Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1922), p. 53/8.

Außerdem sei hervorgehoben die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Existenz des *Stieltjes*schen Integrals bei unstetigem $f(x)$ durch: *G. A. Bliss,* Proceed. National Acad. U. S. A. 3 (1917), p. 633/7; *R. D. Carmichael*, ib. 5 (1919), p. 551/5.*

671b) **W. H. Young*[667]), letztes Zitat.*

671c) **P. J. Daniell,* Trans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), p. 353/62.*

672) *F. Riesz,* Paris C. R. 149 (1909), p. 974/7 [*vgl. auch [1064]), p. 22/6*]; *Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 33/62, insbes. p. 36/43; (3) 31 (1914), p. 9/14. Ferner: *H. Lebesgue*[665]); *E. Helly,* Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien IIa, 121 (1912), p. 265/97; *J. Radon*[669]), p. 1332/48. Vgl. auch die in [544]) angegebene Literatur.*

672a) *Ebenso hat *M. Fréchet,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 215/34, ein *Stieltjes*sches Doppelintegral zur Darstellung von bilinearen Funktionaloperationen verwendet. Vgl. dazu auch *Ch. A. Fischer*[544]), 5. u. 6. Zitat; *Elizabeth Le Stourgeon*[544]), sowie [666]); ferner: *C. de la Vallée Poussin,* Bull. sc. math. [55_1 =] (2) 44_1 (1920), p. 294.*

673) **E. Hellinger,* Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variabelen, Diss. Gött. 1907, insbes. p. 25/51; J. f. Math. 136 (1909), p. 234/40; vgl. auch *H. Hahn*[675]), p. 170/2.*

lich viele, aufeinanderfolgende Punkte a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$, wobei $a_0 = a$, $a_n = b$) die Summe

$$S_{\mathfrak{E}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(f(a_\nu) - f(a_{\nu-1}))^2}{g(a_\nu) - g(a_{\nu-1})} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\Delta f_\nu)^2}{\Delta g_\nu}.$$

Haben diese Zahlen $S_{\mathfrak{E}}$ eine endliche obere Grenze S, so bezeichnet *E. Hellinger* diese mit

$$\int_a^b \frac{(d f(x))^2}{d g(x)}.$$

Unter gewissen Bedingungen (z. B. wenn $(\Delta f)^2 \leqq \Delta g \cdot \Delta h$ ist, wobei $h(x)$ ebenfalls eine stetige, monoton wachsende Funktion in $[a, b]$ ist) existiert diese endliche obere Grenze S und es ergibt sich für jede Folge immer feinerer Einteilungen ein mit S zusammenfallender Grenzwert von $S_{\mathfrak{E}}$.[674])

H. Hahn[675]) hat die *Hellinger*schen Integrale auf *Lebesgue*sche Integrale zurückgeführt.

J. Radon[676]) hat die *Hellinger*schen Integrale noch wesentlich verallgemeinert, indem er Grenzwerte betrachtet, die als

$$\int \frac{(df)^p}{(dg)^{p-1}} \qquad (\text{für } p > 1)$$

zu schreiben sind, und indem er die Untersuchungen für Mengenfunktionen (in n-dimensionalen Räumen) durchführt.[676a])*

35 f. *Das Perronsche Integral.* Der von *O. Perron*[677]) angegebene Integralbegriff beruht auf ganz anderer Grundlage als die übrigen Integraldefinitionen; er knüpft nämlich unmittelbar an die Auffassung der Integration als Umkehrung der Differentiation an. Es sei $f(x)$ die gegebene, im Intervall $[a, b]$ zu integrierende Funktion, die zunächst als beschränkt vorausgesetzt werde. Jede stetige Funktion $\psi(x)$, für die $\psi(a) = 0$ ist und für die im Intervall $[a, b]$ die untere Derivierte[678]) $\underline{D}\psi(x) \geqq f(x)$ ist, nennt er eine *zu* $f(x)$ *im Intervall*

674) *In ähnlicher Weise hat *E. Hellinger*[673]) noch andere derartige integralartige Grenzwerte definiert, insbesondere solche, die er mit

$$\int_a^b \sqrt{df \cdot dg}$$

bezeichnet.*

675) **H. Hahn*, Monatsh. Math. Phys. 23 (1912), p. 170/83.*

676) **J. Radon*[669]), p. 57/87, 118/23; vgl. auch Nr. 44 Schluß.*

676a) *Wegen einer anderen, von *E. H. Moore* herrührenden Verallgemeinerung *Hellinger*scher Integrale siehe *T. H. Hildebrandt*[651a]), p. 196, 198/201.*

677) **O. Perron*, Sitzgsber. Heidelberg Ak. Wiss. 1914 A, 14. Abhandl., p. 1/16.*

678) *D. h. $\lim\limits_{\xi = x} \dfrac{\psi(\xi) - \psi(x)}{\xi - x}$; vgl. hierüber Nr. 38, Fußn. [717]).*

$[a, b]$ *adjungierte Oberfunktion*; ebenso bezeichnet er jede stetige Funktion $\varphi(x)$, für die $\varphi(a) = 0$ ist und für die im Intervall $[a, b]$ die obere Derivierte $\overline{D}\varphi(x) \leq f(x)$ ist, als eine *zu* $f(x)$ *im Intervall* $[a, b]$ *adjungierte Unterfunktion.*[678a]) Nun besitzen die Werte $\psi(b)$ eine endliche untere Grenze G und die Werte $\varphi(b)$ eine endliche obere Grenze g, wobei stets $G \geq g$. Ist hier $G = g$, so nennt *O. Perron* die Funktion $f(x)$ integrierbar im Intervall $[a, b]$ und setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = G = g.$$

Nachdem *O. Perron* selbst gezeigt hat, daß sein Integralbegriff für beschränkte Funktionen f mindestens ebenso weittragend ist wie der *Lebesgue*sche, hat *H. Bauer*[679]) für beschränkte Integranden die völlige Übereinstimmung des *Perron*schen Integrals mit dem *Lebesgue*schen bewiesen.

Bei nicht-beschränktem Integranden $f(x)$ muß die Existenz der adjungierten Ober- und Unterfunktionen besonders vorausgesetzt werden, und man hat ferner noch vorauszusetzen[680]), daß in $[a, b]$ $\overline{D}\varphi(x) < +\infty$ und $\underline{D}\psi(x) > -\infty$ bleibt. Man erhält hierbei auch bedingt konvergente Integrale. Da andererseits, wie *H. Bauer*[681]) gezeigt hat, jede (nach *Lebesgue*) summierbare Funktion auch nach *Perron* integrierbar ist, so ergibt sich, daß für nicht-beschränkte Integranden der *Perron*sche Integralbegriff umfassender ist als der *Lebesgue*sche. Wird von den Ober- und Unterfunktionen noch Totalstetigkeit verlangt, so erhält man nach *H. Hake*[681a]) einen Integralbegriff, dessen Umfang sich genau mit dem *Lebesgue*schen deckt. Ferner hat *H. Hake*[681a]) gezeigt, daß sogar jede Funktion, die ein spezielles *Denjoy*sches Integral besitzt, auch nach der geeignet verallgemeinerten[681b]) *Perron*schen Integraldefinition integrierbar ist, während über die Umkehrung dieser Aussage noch nichts bekannt ist.

678a) *Diese Ober- und Unterfunktionen stehen in engstem Zusammenhang zu den zuerst von *Ch. J. de la Vallée Poussin* [Cours d'Analyse 1, 2. éd. 1909, p. 270/71; 3. éd. 1914, p. 269/72; [638]); Intégrales de Lebesgue, p. 74/6] eingeführten *„Majoranten"* und *„Minoranten"* der unbestimmten *Lebesgue*schen Integrale.*

679) **H. Bauer*, Monatsh. Math. Phys. 26 (1915), p. 153/9.*

680) *Nach einem Vorschlag von *W. Groß*; vgl. *H. Bauer*[679]), p. 155 u. 186.*

681) **H. Bauer*[679]), p. 186/92.*

681a) **H. Hake*, Math. Ann. 83 (1921), p. 119/42.*

681b) *Insbesondere brauchen die definierenden Ungleichungen nur bis auf Nullmengen zu gelten.*

Es sei noch bemerkt, daß *H. Bauer*[682]) den *Perron*schen Integralbegriff und seine Eigenschaften auf Funktionen mehrerer Veränderlichen (mehrfache Integrale) ausgedehnt hat.*

Integration von Reihen.

36. Integrierbarkeit der Grenzfunktionen. Ist eine konvergente Reihe von Funktionen gegeben, so können wir uns die beiden folgenden Fragen stellen:

I. Unter welchen Bedingungen ist die Reihensumme integrabel, wenn die Glieder der Reihe integrabel sind?

II. Unter welchen Bedingungen ist die Reihensumme summierbar, wenn die Glieder der Reihe summierbar sind?

Die erste Frage ist von *C. Arzelà*[683]) beantwortet worden.

Erinnern wir zunächst an die von *C. Arzelà* herrührende Definition der quasi-gleichmäßigen (oder streckenweise gleichmäßigen) Konvergenz[684]); nehmen wir an, daß die Folge von Funktionen $f_n(x)$ den Grenzwert $f(x)$ habe, daß also die Reihe

$$f_1(x) + \sum_{n=1}^{n=+\infty} [f_{n+1}(x) - f_n(x)]$$

$f(x)$ zur Summe habe; man sagt dann, daß die Konvergenz in $[a, b]$ *quasi-gleichmäßig* ist, wenn man, wie klein auch ein positives ε und wie groß auch ein positives N gewählt sein mögen, eine solche Zahl $N' > N$ finden kann, daß für jeden Wert x von $[a, b]$ eine zwischen N und N' gelegene ganze Zahl n_x existiert, für die

$$|f(x) - f_{n_x}(x)| < \varepsilon$$

ist.

Nehmen wir an, daß man aus $[a, b]$ eine gewisse Anzahl von Strecken ausschließt, deren Längensumme η ist, und daß die Konvergenz im übrigbleibenden Teile quasi-gleichmäßig ist; wenn die Zahl η beliebig klein gemacht werden kann, so sagen wir mit *C. Arzela*[683]), daß die Konvergenz *im allgemeinen quasi-gleichmäßig* ist, oder auch, daß die Konvergenz *im allgemeinen streckenweise gleichmäßig* ist [„con-

682) **H. Bauer*[679]), p. 159/98.*

683) *C. Arzelà*, *Rend. Acc. Linc. (4) 1 (1885), p. 321/6; auch* Memorie Ist. Bologna (5) 8 (1899/1900), p. 706/12, *und Rend. Ist. Bologna (2) 10 (1905/6), p. 32/40*. [*Ein gegen *C. Arzelàs* Beweis von *E. W. Hobson*, Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1903/4), p. 386/7, erhobener Einwand ist ganz unberechtigt.*]

684) *C. Arzelà* sagt *streckenweise gleichmäßige* Konvergenz (convergenza uniforme [oder auch in egual grado] a tratti); der Ausdruck *quasi-gleichmäßige* Konvergenz (c. quasi-uniforme) stammt von *E. Borel*. *Siehe hierüber Nr. **52**; vgl. ferner II A 1, Nr. **17**, Fußnote 189 (*A. Pringsheim*).*

vergenza uniforme a tratti in generale"]. *C. Arzelà* hat sodann den Satz aufgestellt: *eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in* $[a, b]$ *die beschränkte Summe einer Reihe von integrablen Funktionen selbst integrabel sei, besteht darin, daß deren Konvergenz im allgemeinen quasi-gleichmäßig sei.*[684a])

Was die Frage II betrifft, so ergibt sich nach *H. Lebesgue* das folgende Resultat: *Hat eine Reihe von summierbaren Funktionen eine beschränkte Funktion zur Summe, so ist diese Funktion summierbar;* denn jede Grenzfunktion von meßbaren Funktionen ist eine meßbare Funktion [vgl. Nr. 30], und jede beschränkte meßbare Funktion ist summierbar.

37. Gliedweise Integrierbarkeit. Wenn die Grenzfunktion $f(x)$ einer konvergenten Folge von integrierbaren oder summierbaren Funktionen $f_n(x)$ selbst integrierbar oder summierbar ist, in welchem Fall kann man dann die Reihenfolge von Integration und Grenzübergang vertauschen, d. h.

$$\int f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int f_n(x)\,dx \tag{1}$$

setzen? Oder, was dasselbe besagt: Wenn die Summe einer konvergenten Reihe integrabel oder summierbar ist, in welchem Fall ist dann das Integral der Summe der Glieder gleich der Summe der Integrale dieser Glieder? *Die (in alle Lehrbücher übergegangene) Erkenntnis, daß im Intervall $[a, b]$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe integrierbarer Funktionen eine hinreichende Bedingung für die Integrabilität der Summe und für die Zulässigkeit der gliedweisen Integration ist, dürfte wohl auf *K. Weierstraß* zurückgehen.[685]) Das erste Beispiel einer nicht-gleichmäßig konvergenten Reihe, die nicht gliedweise integriert werden darf, hat *G. Darboux*[686]) angegeben.* Ein wesentlich allgemeineres Resultat verdankt man *C. Arzelà*[687]). Er hat

---

684a) *Eine etwas andere, übrigens besonders naheliegende Form dieser Bedingung (einfach-gleichmäßige Konvergenz [Nr. 52] der Reihe in jedem Punkte von $[a, b]$, abgesehen von einer Nullmenge) bei *W. Wilkosz*, Fundamenta math. 2 (1921), p. 136/9.*

685) *Siehe hierüber z. B. *E. Heine*, J. f. Math. 71 (1870), p. 353. Vgl. auch II A 3, Nr. 6, Fußnote 11 (*G. Brunel*).*

686) **G. Darboux*, Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875), p. 84. Dieses erste (klassisch gewordene) Beispiel ist:

$$f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}; \quad f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = 0.^*$$

687) *C. Arzelà*, *Rend. Acc. Linc. (4) 1 (1885), p. 537 [diese Stelle bildet zusammen mit dem Hilfssatz[423]) von p. 262/7 und den Betrachtungen von p. 322

bewiesen: wenn Funktionen $f_n(x)$, die im Intervall $[a, b]$ integrabel und in ihrer Gesamtheit beschränkt[688]) sind, eine integrable Funktion zur Grenze haben, so kann man die Reihenfolge von Integration und Grenzübergang vertauschen; mit anderen Worten, wenn die Funktionen $f_n(x)$ in ihrer Gesamtheit beschränkt sind, so erlaubt die im allgemeinen quasi-gleichmäßige Konvergenz die Reihenfolge von Integration und Grenzübergang zu vertauschen.[689])

Für den speziellen Fall, daß die Funktionen f_n und f in $[a, b]$ stetig sind, ist der *Arzelà*sche Satz noch einmal von *W. F. Osgood*[690]) gefunden und bewiesen worden.

Der Satz von *C. Arzelà* ist in dem folgenden allgemeineren Satz von *H. Lebesgue*[691]) enthalten (der übrigens, wie die nachher zu erwähnenden Sätze, nicht nur in einem Intervall $[a, b]$, sondern auch auf einer beliebigen meßbaren Menge E gilt): *Wenn summierbare Funktionen f_n, die in ihrer Gesamtheit beschränkt sind, eine Grenzfunktion f haben, so ist auch f summierbar und das Integral von f_n hat das Integral von f zum Grenzwert.* Dies kann man auch so

---

einen vollständigen Beweis des Satzes]; ausführlicher:* Memorie Ist. Bologna (5) 8 (1899/1900), p. 723/5.

*Es sei noch darauf hingewiesen, daß das, was zu dem Hilfssatz[423]) (der den eigentlichen Kern der Überlegungen bildet) noch hinzukommt, sich im wesentlichen bereits in einer Bemerkung von *L. Kronecker*, Monatsber. Ak. Wiss. Berlin 1878, p. 54, findet.*

688) Man sagt, daß die Funktionen $f_n(x)$ „*in ihrer Gesamtheit* im Intervall $[a, b]$ *beschränkt*" oder auch „*gleichmäßig beschränkt*" sind, wenn eine solche Zahl M existiert, daß in $[a, b]$ die Ungleichung

$$|f_n(x)| < M$$

erfüllt ist, was auch n und x sind.

689) *Eine dem *Lebesgue*schen Resultat[693]) analoge Erweiterung des *Arzelà*schen Satzes für *nicht* notwendig beschränkte, absolut integrable Funktionen f_n und f hat neuerdings *M. v. Pidoll,* Math. Ztschr. 8 (1920), p. 299/302, elementar bewiesen.*

690) *W. F. Osgood,* Amer. J. of math. 19 (1897), p. 155/90; insbes. p. 173/82. *Andere Beweise gaben hierfür: *F. Riesz,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 26 (1917/18), p. 274/8 [auch Mathem. és phys. lapok 26 (1917), p. 67/73]; *L. Bieberbach,* Math. Ztschr. 2 (1918), p. 155/7 [letzterer Beweis im wesentlichen wie bei *C. Arzelà*[687])]; vgl. auch *E. Landau,* Math. Ztschr. 2 (1918), p. 350/1.*

Ferner hat sich *W. H. Young* [Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1903/4), p. 89/102] mit der gliedweisen Integration von Reihen punktweise unstetiger Funktionen beschäftigt, deren Summe punktweise unstetig ist. Er hat für diesen Fall den *Arzelà*schen Satz bewiesen. Vgl. auch *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (1) 34 (1901/2), p. 245/59.

691) **H. Lebesgue,* Thèse, p. 29/30 = Annali, p. 259/60;* Leçons sur l'intégration, p. 114

aussprechen: sind die sämtlichen Partialsummen (d. h. die Summen der n ersten Glieder) einer konvergenten Reihe in ihrer Gesamtheit beschränkt und sind die Glieder der Reihe summierbar, so kann man gliedweise integrieren. Falls die Glieder der Reihe und ihre Summe integrierbar sind, wird aus dem *Lebesgue*schen Integral das *Riemann*sche Integral, und man wird auf den vorhergehenden *Arzelà*schen Satz zurückgeführt[692]).

*Wie steht es nun, wenn die Funktionen $f_n(x)$ *nicht* in ihrer Gesamtheit beschränkt sind? Der Satz von *H. Lebesgue* läßt sich hierfür sofort so verallgemeinern[693]): Wenn die summierbaren Funktionen f_n gegen die Funktion f konvergieren und ihre absoluten Beträge sämtlich unterhalb einer summierbaren Funktion φ bleiben, so ist auch f summierbar und das Integral von f_n hat das Integral von f zum Grenzwert. Damit ist folgende Formulierung gleichwertig:* Die gleiche Aussage gilt, wenn die summierbaren Funktionen f_n gegen die Funktion f konvergieren und dabei die absoluten Beträge der Reste: $|f - f_n|$ in ihrer Gesamtheit beschränkt sind *oder unterhalb einer festen summierbaren Funktion bleiben*. Ferner beweist man[694]): *Sind die Funktionen f_n summierbar und konvergieren sie gegen eine summierbare Funktion f, so gilt (1), sofern die Funktionen $|f - f_n|^{1+q}$ summierbar sind (wobei q eine feste, von n unabhängige Zahl > 0 ist) und deren Integrale in ihrer Gesamtheit beschränkt sind. Eine andere hinreichende Bedingung für die gliedweise Integrabilität hat *B. Levi*[695]) gegeben: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ eine Reihe summierbarer Funktionen auf der meßbaren Menge E und konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |u_n(x)|\, dx,$$

---

692) Jedes Polynom ist summierbar, also ist auch jede Funktion der *Baire*schen Funktionenklasse 1, wenn sie beschränkt ist, summierbar; daraus folgt, daß jede beschränkte Funktion irgendeiner *Baire*schen Klasse summierbar ist. Übrigens ist schon oben [Nr. 30] der Satz ausgesprochen worden, daß diese Funktionen meßbar sind.

693) *H. Lebesgue*[691]); *Bull. Soc. math. France 36 (1908), p. 12;* Ann. Fac. sc. Toulouse [23 =] (3) 1 (1909), p. 49 u. 50. *Vgl. auch *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Cours d'Analyse infin. 1 (3. éd. 1914), p. 263/5, sowie [694]).*

694) Der Fall $q = 1$ geht auf *F. Riesz,* Paris C. R. 144 (1907), p. 617 zurück; *vgl. auch die beiden letzten Zitate von [693]). Der allgemeinere Satz bei *C. de la Vallée Poussin,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 452/3.*

695) *B. Levi,* Rend. Ist. Lomb. (2) 39 (1906), p. 775/80. Ein spezieller Fall davon auch bei *C. Severini,* Atti Accad. Gioenia Catania (4) 20 (1907), mem. n° 12, p. 13/15, *sowie bei *R. G. D. Richardson,* Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 370. Vgl. auch *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1910), p. 27/9, sowie Fußn. [707]).*

dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ auf E, abgesehen höchstens von einer Nullmenge, und man darf diese Reihe auf E gliedweise integrieren.*

*Bei einer konvergenten Folge von nicht gleichmäßig-beschränkten Funktionen $f_n(x)$ ist naturgemäß die Untersuchung derjenigen Stellen X wichtig, in deren Umgebung $|f(x) - f_n(x)|$ nicht mehr in ihrer Gesamtheit beschränkt sind; noch genauer gesagt: X sei ein solcher Wert, daß, wie klein auch h und wie groß auch n_0 ist, die Funktionen $|f(x) - f_n(x)|$ für $n \geqq n_0$ im Intervall $[X - h, X + h]$ nicht in ihrer Gesamtheit beschränkt sind. Diese Stellen X sollen „*Punkte von unendlichem Ungleichmäßigkeitsgrad*" genannt werden.[696]) Aus dem klassischen Beispiel von *G. Darboux*[686]) geht hervor, daß schon eine einzige Stelle „von unendlichem Ungleichmäßigkeitsgrad" der Partialsummen die gliedweise Integrabilität ausschließen kann.*

*In solchen Fällen nicht gleichmäßig-beschränkter f_n kann man als neuen Gesichtspunkt die Stetigkeit der Grenzfunktion von $\int_a^x f_n(x)\,dx$ einführen. *W. F. Osgood*[697]) hat hierüber bewiesen: Konvergiert im Intervall $[a, b]$ die Folge stetiger Funktionen $f_n(x)$ gegen eine stetige Funktion $f(x)$, ist ferner

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^x f_n(x)\,dx$$

696) *Wegen des Begriffs „Ungleichmäßigkeitsgrad" sowie bezüglich der Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz siehe Nr. **49** u. **49a**.

Übrigens sei bemerkt: Wenn jedes einzelne der $f_n(x)$ und insbesondere $f(x)$ beschränkt ist, dann sind die Punkte X „von unendlichem Ungleichmäßigkeitsgrad" identisch mit den Punkten, in deren Umgebung die $f_n(x)$ nicht in der Gesamtheit beschränkt sind.*

W. H. Young, Paris C. R. 136 (1903), p. 1632/4 hat gezeigt, daß die Reihe der Integrale, wenn gliedweise Integration möglich ist, gleichmäßig konvergiert außer vielleicht in den Punkten X von unendlichem Ungleichmäßigkeitsgrad.

697) **W. F. Osgood*[690]), p. 183/88. [Vorläufige Mitteilung: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1896, p. 289 u. 291.] — Diesen Satz hat *C. Arzelà*[683]), zweites Zitat, p. 729/33 verallgemeinert für den Fall, daß die $f_n(x)$ sowie $f(x)$ nur als beschränkt und integrierbar vorausgesetzt werden. Eine weitere Verallgemeinerung des ersten Teiles dieses Satzes findet sich bei *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1909/10), p. 115: es wird hier die Existenz von

$$\lim_{n=\infty} \int_a^x f_n(x)\,dx$$

nicht ausdrücklich vorausgesetzt, sondern nur die Stetigkeit der oberen und unteren Limites der Folge dieser Integrale und die übrigen Bedingungen; dann folgt daraus die Existenz jenes Limes und der Satz gilt.*

eine stetige Funktion von x, dann gilt (1), wenn die (stets abgeschlossene) Menge M der Punkte von unendlichem Ungleichmäßigkeitsgrad *abzählbar* ist. Ist dagegen diese Menge M nicht abzählbar, so gibt es zugehörige Folgen stetiger Funktionen $f_n(x)$, welche in M von unendlichem Ungleichmäßigkeitsgrad sind und die übrigen Bedingungen erfüllen, *ohne* daß (1) gilt.[698] Damit ist zugleich eine frühere Behauptung von *C. Arzelà*[699] widerlegt, der geglaubt hatte, beweisen zu können, daß die Stetigkeit von $F(x)$ nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (1) darstelle. Übrigens ist es an sich verständlich, daß hier-

698) Hierfür hat *W. F. Osgood*[690] folgendes Beispiel angegeben: Konstruieren wir auf der Strecke [0, 1] eine perfekte Menge E, indem wir aus dieser Strecke die inneren Punkte einer abzählbar unendlichen Menge von Intervallen ausschließen: Das Intervall δ_1 möge seine Mitte x_1^1 in der Mitte der Strecke [0, 1] haben und die Länge

$$\delta_1 = \tfrac{2}{3}\lambda \qquad (0 < \lambda \leqq 1)$$

besitzen; die Strecken δ_2^1, δ_2^2 haben als Mittelpunkte die Mitten x_2^1, x_2^2 der nach dem ersten Schritt übrig bleibenden Strecken, und ihre gemeinsame Länge δ_2 genüge der Gleichung:

$$\delta_1 + 2\delta_2 = \tfrac{3}{4}\lambda.$$

Die Strecken $\delta_n^1, \delta_n^2, \delta_n^3, \ldots, \delta_n^{2^{n-1}}$ mögen die Mitten $x_n^1, x_n^2, x_n^3, \ldots, x_n^{2^{n-1}}$ der nach der vorhergehenden Operation verbleibenden Strecken als Mittelpunkte haben und δ_n als gemeinsame Länge besitzen, so daß

$$\delta_1 + 2\delta_2 + 2^2\delta_3 + \cdots 2^{n-1}\delta_n = \frac{n+1}{n+2}\lambda$$

ist, usw. Man setze dann:

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\varphi_n(x - x_n^1, \delta_n) + \varphi_n(x - x_n^2, \delta_n) + \cdots + \varphi_n(x - x_n^{2^{n-1}}, \delta_n)\right\},$$

wo:

$$\varphi_n(x, \delta) = \begin{cases} \dfrac{n\pi}{2\delta}\sin\dfrac{2\pi x}{\delta}\, e^{-n\cos^2\frac{\pi x}{\delta}} & \text{für } 0 \leqq x \leqq \dfrac{\delta}{2} \\ -\dfrac{n\pi}{2\delta}\sin\dfrac{2\pi x}{\delta}\, e^{-n\cos^2\frac{\pi x}{\delta}} & \text{für } -\dfrac{\delta}{2} \leqq x \leqq 0 \\ 0 & \text{für die übrigen Werte von } x \end{cases}$$

ist.

Der Grenzwert der stetigen Funktionen $f_n(x)$ ist 0. Dagegen hat das Integral

$$\int_0^x f_n(x)\,dx$$

zum Grenzwert eine stetige (streckenweise konstante) Funktion, die im Intervall [0, 1] nicht abnimmt und für $x = 0$ Null, für $x = 1$ Eins ist.

*Ein viel einfacheres Beispiel dieser Art hat *G. Vitali* angegeben; siehe [700]. [Vgl. ferner *G. H. Hardy*, Messenger of math. 45 (1915), p. 145/9.]*

699) **C. Arzelà*[687], Rend. (1885), p. 532/7; er hat selbst auf die Unrichtigkeit seiner Behauptung hingewiesen, nachdem er *W. F. Osgoods* Beispiel kennen gelernt hatte: Rend. Acc. Linc. (5) 6_2 (1897), p. 290/2.*

für die Stetigkeit von $F(x)$ im allgemeinen nicht ausreicht, da nach Nr. **44** nicht die Stetigkeit, sondern erst die Totalstetigkeit [siehe hierüber Nr. **22**] eine für die *Lebesgue*schen Integrale charakteristische Eigenschaft ist. Aber *noch nicht einmal die Totalstetigkeit von* $F(x)$ *ist für die Gültigkeit von* (1) *hinreichend; G. Vitali* hat darauf zuerst mittels eines sehr einfachen Beispiels aufmerksam gemacht, bei welchem die Reihe der Integrale gegen eine totalstetige Funktion konvergiert, ohne daß gliedweise Integration erlaubt ist.[700]*

Jedoch kann *G. Vitali* hierüber den folgenden Satz beweisen: Bilden bei einer konvergenten Reihe summierbarer Funktionen im Intervall $[a, b]$ die Punkte von unendlichem Ungleichmäßigkeitsgrad eine *Menge vom Maß Null,* so besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der gliedweisen Integration im *Lebesgue*schen Sinn (einschließlich der Existenz des Integrals der Reihensumme) darin, daß die Reihe der Integrale in $[a, b]$ gegen eine *totalstetige* Funktion konvergiert.[701]

In engem Zusammenhang hiermit hat *G. Vitali*[702] noch einige andere, für die betrachteten Fragen wichtige Begriffe eingeführt:

Er sagt von einer konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, deren Glieder auf

---

700) **G. Vitali*[702], p. 155. Dieses Beispiel [viel einfacher als das von [698]] ist folgendes: Es sei in [0, 1] definiert:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 \text{ für die Intervalle } \left[\frac{n^2 k}{n^3}, \frac{n^2 k + 1}{n^3}\right], \text{ wobei } k = 0, 1, \ldots, n-1; \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Folge $f_n(x)$ konvergiert gegen 0 überall, außer in einer Nullmenge N. Ferner ist

$$\lim_{n=\infty} \int_0^x f_n(x)\, dx = x,$$

also eine totalstetige, von 0 verschiedene Funktion. —

Will man erreichen, daß die Folge ausnahmslos überall konvergiert, so braucht man nur die Definition von $f_n(x)$ dadurch abzuändern, daß man auch für die Punkte von N

$$f_n(x) = 0$$

setzt. —

Das Beispiel [698] ist, wenn dort $\lambda = 1$ ist, nicht totalstetig.*

701) *Vgl. auch *G. Fichtenholz,* Rend. Circ. mat. Palermo 40 (1915), p. 153/66. Er zeigt insbesondere (p. 162/5): Setzt man in $[a, b]$ (statt der Integrierbarkeit nach *Lebesgue*) die Integrierbarkeit nach *Riemann* für die Reihenglieder sowie auch für die Reihensumme voraus und fordert man, daß die Reihe der Integrale gegen ein *Riemann*sches Integral konvergiere, so kann man gliedweise integrieren [ohne über die Menge der Punkte von unendlichem Ungleichmäßigkeitsgrad etwas voraussetzen zu müssen].*

702) *G. Vitali,* Rend. Circ. mat. Palermo 23 (1907), p. 137/55

einer meßbaren Menge E von endlichem Maß summierbar sind, sie sei auf E *„vollständig gliedweise integrierbar“* oder kürzer *„vollständig integrierbar“*[703]) [*„integrabile completamente per serie“*], wenn für jede meßbare Teilmenge $\mathfrak{E}$ von E die gliedweise Integration der Reihe zulässig ist, d. h. wenn für jedes solche $\mathfrak{E}$ die beiden folgenden Ausdrücke existieren und einander gleich sind:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathfrak{E}} u_n(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{E}}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx.$$

Daß die vollständige gliedweise Integrierbarkeit wirklich wesentlich mehr besagt als die gewöhnliche gliedweise Integrierbarkeit, zeigt er durch ein einfaches Beispiel[704]) einer Reihe, die in einem Intervall im gewöhnlichen Sinn gliedweise integrierbar ist, ohne vollständig integrierbar zu sein. Dagegen stimmen die beiden Begriffe überein, wenn die Partialsummen der Reihe nach oben oder nach unten in ihrer Gesamtheit beschränkt sind.

Ist ferner eine Menge F von summierbaren Funktionen gegeben, so sagt er, daß ihre Integrale[705]) in einer meßbaren Menge E *„gleichgradig totalstetig“* oder *„gleichgradig absolutstetig“* [*„equi-assolutamente continui“*][705a]) sind, wenn jeder positiven Zahl σ eine positive Zahl μ entspricht, derart, daß der absolute Betrag des Integrals jeder Funktion aus F kleiner als σ ist, sofern das Integral erstreckt wird über eine beliebige meßbare Teilmenge von E, deren Maß kleiner als μ ist.

G. Vitali beweist sodann den folgenden Satz[706]): Für die vollständige gliedweise Integrierbarkeit einer konvergenten Reihe endlicher und summierbarer Funktionen auf einer meßbaren Menge E von endlichem Maß ist notwendig und hinreichend, daß die Integrale der Partialsummen dieser Reihe auf E gleichgradig totalstetig sind.

*Ferner kann man in dem oben angegebenen Satz von *B. Levi*[695]) „gliedweise integrierbar“ durch „vollständig gliedweise integrierbar“ ersetzen.[707])

H. Hahn[708]) hat noch gezeigt: Für die vollständige Integrierbarkeit einer gegen eine summierbare Funktion $f(x)$ konvergierenden Folge summierbarer Funktionen $f_n(x)$ in einer meßbaren Menge E von end-

703) *Letztere Ausdrucksweise ist auch für Funktionenfolgen geeignet.*

704) **G. Vitali*[702]), p. 147/8.*

705) *Analog allgemein für Gesamtheiten totalstetiger Mengenfunktionen.*

705a) *Vgl. auch Nr. 49 b.*

706) **G. Vitali*[702]), p. 140/7; vgl. auch die Darstellung bei *C. de la Vallée Poussin*[694]), p. 445/53.*

707) **G. Vitali*[702]), p. 150/2; vgl. hierzu auch *W. H. Young*[709]), 3. Zitat, p. 58/60.*

708) **H. Hahn*, Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien IIa, 127 (1918), p. 10/14.*

lichem Maß ist notwendig und hinreichend, daß

$$\lim_{n=\infty}\int_E |f(x)-f_n(x)|\,dx = 0$$

ist.*

*Im Bereich der hier besprochenen Fragen hat *W. H. Young*[709]) auch den Fall *nicht konvergenter*[710]) Folgen $\{f_n(x)\}$ (bzw. Reihen) und nicht konvergenter Folgen von Integralen der $f_n(x)$ untersucht. Seien $L(x)$ bzw. $l(x)$ die oberen bzw. unteren Limites der Folge der summierbaren Funktionen $f_n(x)$; dann hat er z. B. Bedingungen dafür aufgestellt, daß

$$\int_a^x L(x)\,dx \geqq \overline{\lim_{n=\infty}}\int_a^x f_n(x)\,dx$$

bzw.

$$\int_a^x l(x)\,dx \leqq \underline{\lim_{n=\infty}}\int_a^x f_n(x)\,dx$$

ist [was sicherlich zutrifft, wenn die $f_n(x)$ in ihrer Gesamtheit nach oben bzw. nach unten beschränkt sind[711])].*

*Ferner sei noch erwähnt, daß auch genauer die Bedingungen untersucht worden sind, unter denen

$$\int_E f(x)\cdot g(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\int_E f_n(x)\cdot g(x)\,dx$$

ist, wenn die Folge $\{f_n(x)\}$ gegen $f(x)$ konvergiert.[712])*

*Zum Schluß fügen wir diesen Ausführungen über die gliedweise Integration der unendlichen Reihen noch ein paar Bemerkungen über die *gliedweise Differentiation der unendlichen Reihen* bei, die zweckmäßig hier, unmittelbar ans Vorhergehende anschließend, ihren Platz finden, obwohl sie eigentlich bereits zum folgenden Abschnitt gehören.

709) *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1909/10), p. 99/116; *(2) 9 (1910/11), p. 286/324; (2) 11 (1912), p. 43/95.*

710) *Der einfachste Fall, daß nämlich die Folge oder Reihe nur in einer Nullmenge nicht konvergiert, übt natürlich auf die früheren Resultate keinen wesentlichen Einfluß aus.*

711) **W. H. Young*[709]), erstes Zitat, p. 111.*

712) *Siehe insbesondere *U. Dini,* Fondamenti, p. 392/5 = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 525/30; *T. J. I'a. Bromwich,* An introduction to the theory of infinite series, London 1908, p. 448/55; *H. Lebesgue,* Ann. Fac. sc. Toulouse (3) 1 (1909), p. 52; *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910/11), p. 463/85; (2) 11 (1912), p. 43/95; (2) 18 (1919), p. 367/74; *B. H. Camp,* Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), p. 87/106; *H. Hahn,* Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 3/88, insbes. p. 38 ff. [Vgl. auch *T. Kojima,* Tôhoku Math. J. 14 (1918), p. 64/79; 18 (1920), p. 37/45.]*

Die Sätze über gliedweise Differentiation der unendlichen Reihen ergeben sich nämlich zumeist durch einfache Anwendung der oben angegebenen Resultate über gliedweise Integrabilität, zum Teil allerdings unter Vermeidung von Integrationen. Wir wollen hier die folgenden Sätze hervorheben:

Im Intervall $[a, b]$ sei die Reihe der dort differentiierbaren Funktionen $u_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x) \tag{2}$$

konvergent und die Reihe der Ableitungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \varphi(x) \tag{3}$$

gleichmäßig konvergent; dann ist $f(x)$ dort differentiierbar und es ist dort

$$f'(x) = \varphi(x).\text{[713]} \tag{4}$$

Ferner[714]) gilt die gleiche Aussage für jeden Wert x, in dem $\varphi(x)$ stetig ist, wenn statt der gleichmäßigen Konvergenz nur die Konvergenz von (3) sowie die gleichmäßige Beschränktheit der Reste der Reihe (3) vorausgesetzt wird.

Außerdem[715]): Ist (2) gleichgradig totalstetig, so kann man, abgesehen vielleicht von einer Nullmenge, gliedweise differentiieren, wenn (3) konvergiert.

Ebenso[715a]) kann eine konvergente Reihe (2) monoton wachsender Funktionen $u_n(x)$ fast überall gliedweise differentiiert werden.*

---

713) *Mit Voraussetzung der *Stetigkeit* von $u_n'(x)$ dürfte der Satz auf *K. Weierstraß* zurückgehen. Unter der Voraussetzung der Integrierbarkeit der $u_n'(x)$ findet sich der Satz bei *G. Darboux,* Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875), p. 83; in der angegebenen Fassung wurde der Satz (ohne Benutzung der Integration) von *U. Dini* bewiesen [Fondamenti, p. 112/7 = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 150/6]. Vgl. auch Nr. 43 bei [801]). Der analoge Satz ist für die k^{ten} Ableitungen von *E. Landau,* Arch. Math. Phys. 26 (1917), p. 69/70 bewiesen worden.

Der Satz des Textes mit „einfach-gleichmäßiger Konvergenz" [siehe Nr. 52] statt „gleichmäßiger Konvergenz" bei *J. Bendixson,* Öfversigt af Vetensk. Akad. Förhandl. 54 (1897), p. 605/22. Vgl. dazu auch *J. Wolff,* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 13 (1920), p. 185/86.*

714) *Dies ergibt sich durch direkte Anwendung des bei [691]) und [693]) zitierten *Lebesgue*schen Satzes über gliedweise Integration. Vgl. dazu auch *W. F. Osgood*[690]), p. 188/9; *C. Arzelà*[687]), zweites Zitat, p. 726/7 u. 733/4; *E. W. Hobson,* Theory, p. 562/3.*

715) **G. Vitali*[703]), p. 140.*

715a) **G. Fubini,* Rend. Atti Acc. Lincei [Rom] (5) 24_1 (1915), p. 204/6; Verallgemeinerungen bei *L. Tonelli,* ibid. (5) 25_1 (1916), p. 22/30, 85/91; *A. Ver-*

Ableitungen und primitive Funktionen.

38. Eigenschaften der vier Derivierten[716]. Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ definierte Funktion; betrachten wir das Verhältnis (den Differenzenquotienten)

$$r(x, x+h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Wenn h von der positiven Seite gegen Null konvergiert, so heißt der obere Limes D^+ [ausführlicher $D^+f(x)$] und der untere Limes D_+ von $r(x, x+h)$ die *obere* bzw. *untere rechte* (*vordere*) *Derivierte* von $f(x)$ im Punkte x. Ist h negativ, so definiert man in entsprechender Weise die *obere* bzw. *untere linke* (*hintere*) *Derivierte* D^- bzw. D_- von $f(x)$.[717] *Die so definierten vier Zahlen heißen *die vier Derivierten* von $f(x)$ im Punkte x.[718]*

Ist $D^+ = D_+$, so hat die Funktion eine *rechte* (*vordere*) *Ableitung*

---

gerio, ibid. (5) 25_2 (1916), p. 65/8. Vgl. ferner *A. Rajchman*, Fundamenta math. 2 (1921), p. 50/63; 3 (1922), p. 113/8, 321; *A. Rajchman* u. *S. Saks*, ibid. 4 (1923), p. 211/13.*

716) *Vgl. hierüber: II A 2, Nr. 5 (*A. Voß*), wo sich auch die nötigen Literaturangaben finden.*

717) *Diese Begriffe gehen auf *U. Dini*, Fondamenti, p. 190/2 [= *Dini-Lüroth*, Grundlagen, p. 260/2] zurück; die Namen [„vordere obere Derivierte (Ableitung)" usw.] und die im Text verwendete Schreibweise D^+, D_+, D^-, D_- rühren von *L. Scheeffer*, Acta math. 5 (1884), p. 52 sowie 183, her. *U. Dini*, a. a. O., hatte hierfür die nicht mehr gebräuchlichen, weniger charakteristischen Zeichen Λ_x, λ_x, Λ'_x, λ'_x benutzt, sowie die Benennung *„estremi oscillatorii superiori e inferiori destro e sinistro"*. Eine an *L. Scheeffer* anknüpfende, aber doch davon abweichende Schreibweise von *M. Pasch*, Math. Ann. 30 (1887), p. 135, hat sonst kaum Verwendung gefunden. Von neueren Schreibweisen seien die folgenden zwei hervorgehoben (von denen die eine an *U. Dini*, die andere an *L. Scheeffer* anknüpft): die in Frankreich verbreiteten Zeichen [siehe etwa *H. Lebesgue*, Thèse, p. 42 = Annali, p. 272]: $\Lambda_d, \lambda_d, \Lambda_g, \lambda_g$, die im Deutschen mit Λ_r, λ_r, Λ_l, λ_l wiederzugeben wären; ferner die von *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 517 ff., benutzte Schreibweise: $\overline{D}_+$, $\underline{D}_+$, $\overline{D}_-$, $\underline{D}_-$. [Letzterer bezeichnet jeden Grenzwert von $r(x, x+h_\nu)$, der mittels einer positiven (bzw. negativen), gegen Null konvergierenden Folge $\{h_\nu\}$ erhalten wird, als rechte (bzw. linke) Derivierte D_+ (bzw. D_-).]

Der größere der beiden Werte D^+ und D^- wird auch als die *„obere Derivierte"* $\overline{D}$, der kleinere der beiden Werte D_+ und D_- als die *„untere Derivierte"* $\underline{D}$ bezeichnet; vgl. [677]) und [678]).

Gelegentlich wird die Ableitung als *„die Derivierte"* bezeichnet; doch wollen wir hier, um jede Verwechslung zu vermeiden, den Ausdruck „Derivierte" ausschließlich für die „vier Derivierten" verwenden. Im Französischen ist es allgemein üblich, in entsprechender Weise zwischen *„dérivée"* (Ableitung) und *„nombre dérivé"* (Derivierte) zu unterscheiden.*

718) **C. Carathéodory*[717]) bezeichnet sie als *„die vier Hauptderivierten"*.

[oder: einen *vorderen Differentialquotienten*] $f'_+(x)$; ist $D^- = D_-$, so hat sie eine *linke* (*hintere*) *Ableitung* [oder: einen *hinteren Differentialquotienten*] $f'_-(x)$. Die Funktion $f(x)$ heißt dann *nach rechts* bzw. *nach links differentiierbar* (oder *vorn* bzw. *hinten differentiierbar*). Sind alle vier Derivierten einander gleich, so hat die Funktion im Punkte x eine *Ableitung* (*Differentialquotient*) $f'(x)$[719]; in diesem Fall heißt die Funktion $f(x)$ im Punkt x *differentiierbar.*[720])

$_*$Als Maß für die Unterschiede der vier Derivierten von $f(x)$ an der Stelle x kann man zweckmäßig die als „*Richtungsschwankung*“[721]) oder als „*Grenzsekantenwinkel*“[722]) bezeichnete größte Differenz zwischen den $\overline{\text{arctg}}$ der vier Derivierten in x benutzen.*

Die vier Derivierten können über das Verhalten der Funktion $f(x)$ an der betreffenden Stelle x Aufschluß geben. Ist

$$D_+ > 0, \quad D_- > 0,$$

so wächst die Funktion in x; ist

$$D_+ > 0,$$

so wächst die Funktion in x zur Rechten; ist

$$D^- < 0, \quad D_+ > 0,$$

so hat die Funktion im Punkte x ein Minimum.

Setzen wir jetzt $f(x)$ als stetig voraus. Der folgende ($_*$von *U. Dini*[723]) herrührende*) Satz ist grundlegend:

In irgendeinem Intervalle haben die vier Derivierten dieselbe obere Grenze und dieselbe untere Grenze; diese Grenzen sind diejenigen des Verhältnisses $r(x, x')$, *wenn* x *und* x' *in dem betrachteten Intervalle variieren.*

---

719) Auch wenn der gemeinsame Wert der vier Zahlen $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

720) $_*$Es sei hier erwähnt, daß *L. E. J. Brouwer,* Verslag Akad. Amsterdam 17 (1908), p. 38/45 = Proceed. Acad. Amsterdam 11 (1908), p. 59/66, Beziehungen zwischen den Eigenschaften der zu festgehaltenem h gehörenden Differenzenquotienten $r(x, x+h)$ und der Existenz des Differentialquotienten untersucht hat.

Ferner sei noch erwähnt, daß *W. Groß* [siehe Monatsh. Math. Phys. 30 (1920), p. 80/2] als Seitenstück zu den vier Derivierten (durch Bildung gewisser Mittelwerte des Differenzenquotienten) „*Steigungszahlen*“ definiert hat und, wenn diese zusammenfallen, eine „*Steigung*“; letztere kann existieren, auch wenn keine Ableitung an der betr. Stelle vorhanden ist.*

721) $_*$*L. Scheeffer*[717]), p. 53.*

722) $_*$*A. Rosenthal*[743]), Hab.-Schrift, p. 11 = Math. Ann., p. 488. Siehe hierüber auch den in Hab.-Schrift, p. 36/7 = Math. Ann., p. 511/12 angegebenen Satz.*

723) $_*$*U. Dini,* Fondamenti, p. 192/4 = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 262/5. Vgl. auch *P. du Bois-Reymond*, Math. Ann. 16 (1880), p. 119 u. 123/4. Verallgemeinerungen des Satzes bei *W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 15 (1915), p. 42/5.*

Hieraus folgt: wenn im Punkte x eine der vier Derivierten stetig ist, so sind es die drei übrigen auch; die Funktion hat dann in diesem Punkte eine Ableitung. Sind die obere und untere Grenze der vier Derivierten in einem Intervalle endlich, so sagt man, daß die Funktion in diesem Intervall beschränkte Derivierte besitzt; man hat dann, wie auch x und x' im Intervalle gewählt werden:

$$|r(x, x')| < M,$$

wo M eine feste Zahl ist[724]).

Hat eine Funktion in einem Intervalle beschränkte Derivierte, so ist die Funktion auch von beschränkter Schwankung [*und zwar ist die totale Variation der Funktion in einem Intervall von der Länge δ höchstens gleich $M\delta$*]; dagegen ist die Umkehrung nicht richtig[725]).

Führen wir nun den von *R. Baire*[726]) herrührenden Begriff der „oberen bzw. unteren Grenze einer Funktion bei Vernachlässigung der Mengen einer bestimmten Gattung“ (z. B. der abzählbaren Mengen, der Mengen vom Maß Null) ein. Die obere Grenze G von $f(x)$ in $[a, b]$ ist eine Zahl derart, daß keine Punkte existieren, für welche $f(x) > \lambda$, wenn $\lambda > G$, daß dagegen solche Punkte existieren, wenn $\lambda < G$ ist. Die obere Grenze von $f(x)$ in $[a, b]$ bei Vernachlässigung der Mengen vom Maß Null ist eine Zahl G_1 derart, daß die Menge der Punkte, für die $f(x) > \lambda$ ist, das Maß Null hat, wenn $\lambda > G_1$, und ein von Null verschiedenes Maß besitzt, wenn $\lambda < G_1$ ist. *H. Lebesgue*[727]) hat die folgenden Sätze aufgestellt: *Die obere und die untere Grenze einer beschränkten Derivierten bleibt unverändert, gleichviel ob man die Mengen vom Maß Null vernachlässigt oder nicht. Die obere und die untere Grenze einer beliebigen Derivierten bleibt unverändert, gleichviel ob man die abzählbaren Mengen vernachlässigt oder nicht.*

724) Diese letzte Bedingung, häufig die „*Lipschitz*sche Bedingung“ genannt, kommt in vielen Schlüssen über die Reihenentwicklungen von Funktionen und die Existenztheoreme der Differentialgleichungen vor. *Vgl. z. B. II A 4 a, Nr. 4 (*P. Painlevé*).*

725) Z. B. ist die Funktion

$$x^2 \sin \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

*oder noch einfacher: die Funktion

$$\sqrt{|x|}\,*$$

von beschränkter Schwankung, obgleich ihre Derivierten in der Nähe des Punktes $x = 0$ nicht beschränkt sind.

726) *Thèse, Paris 1899 =* Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 72/3. *Vgl. auch [456]), Schluß.*

727) **H. Lebesgue*, Leçons sur l'intégration, p. 80. — Vgl. dazu auch *F. Bernstein*[782]), p. 332/5; *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 536/9.*

Wenn die in $[a, b]$ stetige und in (a, b) differentiierbare Funktion $f(x)$ in a und b Null ist, so wird bekanntlich die Ableitung, sofern sie endlich bleibt, an mindestens einer Stelle im Intervalle (a, b) Null [Mittelwertsatz der Differentialrechnung[728])]; für die vier Derivierten existiert ein entsprechender Satz: wenn eine stetige Funktion $f(x)$ für $x = a$ und $x = b$ Null ist, ohne in $[a, b]$ beständig Null zu sein, so existieren Punkte von (a, b), für die

$$D^+ > 0,\ D_+ > 0 \quad (\text{oder } D^- > 0,\ D_- > 0),$$

und Punkte von (a, b), für die

$$D^+ < 0,\ D_+ < 0 \quad (\text{oder } D^- < 0,\ D_- < 0)$$

ist. Hat man umgekehrt beständig

$$\text{entweder } D^+ \cdot D_+ \leqq 0 \quad \text{oder} \quad D^- \cdot D_- \leqq 0,$$

so ist $f(x)$ eine Konstante.

Ferner hat *H. Lebesgue*[729]) bewiesen: *Die vier Derivierten einer stetigen Funktion sind Funktionen von höchstens der zweiten Baireschen Klasse. Sie sind also meßbare Funktionen.* *Außerdem hat *W. H. Young*[730]) gezeigt, daß die oberen (bzw. unteren) Derivierten einer stetigen Funktion nach oben (bzw. unten) *halbstetig* sind, außer vielleicht in einer Menge erster Kategorie.*

39. Eigenschaften der Ableitungen. Setzen wir voraus, daß $f(x)$ in $[a, b]$ eine Ableitung $f'(x)$ besitzt. *G. Darboux*[731]) hat bewiesen: *eine Ableitung kann von einem Werte A nicht zu einem anderen B übergehen, ohne alle zwischen A und B liegenden Werte anzunehmen.* Diese Eigenschaft (α) kommt den stetigen Funktionen zu, aber genügt nicht zur Charakterisierung einer stetigen Funktion. Eine Funktion kann die Eigenschaft (α) besitzen und dennoch punktiert oder sogar total unstetig sein. Ersteres tritt, wie aus dem zu Ende dieser Nr. Gesagten hervorgeht, bei jeder nicht stetigen Ableitung ein[732]); ein Beispiel für den zweiten Fall hat *H. Lebesgue*[733]) gegeben:

728) *Vgl. hierüber II A 2, Nr. 7 (*A. Voß*).*

729) *Leçons sur l'intégration, p. 121; besser dargestellt in* Atti Accad. Linc. Rend. (5) 15 II (1906), p. 4. [*Wegen der Derivierten unstetiger Funktionen siehe *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 123/7; *St. Banach,* ibid., p. 128/32.*]

730) **W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), p. 304.*

731) *G. Darboux,* Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875), p. 109/10.

732) *Auf Beispiele derartiger nicht-stetiger Ableitungen hat zuerst *G. Darboux*[731]) aufmerksam gemacht; ein besonders einfaches Beispiel dieser Art ist:

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{für } x = 0.* \end{cases}$$

733) *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 90. *Ein anderes derartiges

Sei x eine Zahl zwischen 0 und 1, und $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ die Folge ihrer Dezimalstellen, so kann man schreiben:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots;$$

betrachten wir die Folge

$$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n+1}, \ldots;$$

ist sie nicht periodisch, so setzen wir $\varphi(x) = 0$; ist sie periodisch und beginnt die Periode mit a_{2n-1}, so setzen wir:

$$\varphi(x) = 0, a_{2n} a_{2n+2} a_{2n+4} \ldots$$

Die Funktion $\varphi(x)$ nimmt dann in jedem noch so kleinen Intervall alle zwischen 0 und 1 gelegenen Werte an.

Besitzen zwei endliche Funktionen die Eigenschaften (α), so besitzt ihre Summe nicht notwendig gleichfalls diese Eigenschaft[734]), aber die Summe von zwei endlichen Ableitungen besitzt die Eigenschaft (α), da sie selbst wieder eine Ableitung ist.[734a])

Während die vier Derivierten einer stetigen Funktion von (höchstens) 2. *Baire*scher Klasse sind [Nr. 38], sind die Ableitungen sogar Funktionen von (höchstens) 1. Klasse; mit anderen Worten, *eine Ableitung ist auf jeder perfekten Menge höchstens punktiert unstetig* [*vgl. Nr. 53*]: in der Tat ist sie der Grenzwert der Folge von stetigen Funktionen:

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$$

für $n = \infty$. Z. B. ist die eben definierte Funktion $\varphi(x)$ von *H. Lebesgue,* da sie total unstetig ist, keine Ableitung, obzwar sie die Eigenschaft (α) besitzt.

**W. H. Young*[735]) hat eine notwendige und hinreichende Bedin-

---

Beispiel ist schon vorher von *E. Cesàro,* Bull. sc. math. [32 =] (2) 21 (1897), p. 258 angegeben worden.*

*Von den beschränkten, total unstetigen Funktionen $f(x)$ mit der Eigenschaft (α) hat *F. Apt,* Arch. Math. Phys. (3) 20 (1912/13), p. 189/91, gezeigt, daß die Punkte $x, y = f(x)$ zusammen mit ihren Häufungspunkten ein ganzes Flächenstück von nicht verschwindendem Maß erfüllen.*

734) *H. Lebesgue* gibt a. a. O.[733]) das folgende Beispiel:

Ist $f_1(x) = \sin\frac{1}{x}$ für ein von 0 verschiedenes x; $f_1(0) = 1$,

$f_2(x) = -\sin\frac{1}{x}$ für ein von 0 verschiedenes x; $f_2(0) = 1$,

so hat man

$f_1(x) + f_2(x) = 0$ für ein von 0 verschiedenes x; $f_1(0) + f_2(0) = 2$.

734a) *Dagegen braucht das Produkt zweier Ableitungen nicht gleichfalls eine Ableitung zu sein; vgl. *W. Wilkosz,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 145/54, 287.*

735) **W. H. Young,* Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 187/92; Übertragung auf den Fall einer Funktion von mehreren Veränderlichen: Messenger

gung dafür angegeben, daß eine Funktion $f(x)$ von 1. Klasse die Eigenschaft (α) besitzt: in jedem Punkt x soll $f(x)$ gemeinsamer Grenzwert mindestens einer von rechts und mindestens einer von links kommenden Folge von Funktionswerten sein.*

40. Existenz der Ableitungen. *Über das klassische *Weierstraß*sche Beispiel einer stetigen, nirgends differentiierbaren Funktion ist schon im Artikel II A 2, Nr. 4 (*A. Voß*) berichtet worden [vgl. auch II A 1, Nr. 18 (*A. Pringsheim*)].[735a]) Nach dem Bekanntwerden dieses Beispiels sind teils in engem Anschluß daran, teils mittels anderer Konstruktionen (von denen einige in durchsichtiger geometrischer Form auftreten) zahlreiche weitere derartige Beispiele stetiger, nirgends differentiierbarer Funktionen gegeben und untersucht worden.[736])*

---

of math. (2) 39 (1910), p. 69/72. — Vgl. dazu auch *A. Denjoy,* Bull. Soc. math. France 43 (1915), p. 179/85; Paris C. R. 162 (1916), p. 868/70; Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), p. 198/9, wo gewisse Kategorien von Funktionen $f(x)$ angegeben werden, die der 1. Klasse angehören und zugleich die Eigenschaft (α) besitzen; hierunter befinden sich insbesondere die „approximativ stetigen" Funktionen und die „approximativen Ableitungen" [siehe Nr. **44 b**].

Weiteres über die Eigenschaft (α) bei *D. C. Gillespie,* Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1922), p. 245/50.*

735a) *Ein erstes Beispiel einer nicht-differentiierbaren stetigen Funktion hat (bereits 30 Jahre vor *K. Weierstraß*) *B. Bolzano* gekannt, wobei er allerdings nur die Nichtdifferentiierbarkeit an einer überall dichten Menge von Stellen bemerkt zu haben scheint. Siehe hierüber *M. Jašek* [„Aus dem handschriftlichen Nachlaß *Bernard Bolzanos*"], Sitzgsber. d. kön. böhm. Ges. d. Wiss. 1920/21, Cl. II, p. 1/32. [Vgl. dazu auch *G. Kowalewski,* Berichte Ges. Wiss. Leipzig 74 (1922), p. 91/5.]*

736) *Abgesehen von den in II A 2, Nr. 4 (*A. Voß*) schon erwähnten, auf das *Weierstraß*sche Beispiel sich beziehenden Literaturangaben [wozu man etwa noch *G. Chisholm Young*[763]), 1. Zitat, p. 153/71, sowie die bei *M. Pasch,* Veränderliche und Funktion, Leipzig u. Berlin 1914, p. 122/9 gemachten historischen Bemerkungen vergleiche], ist hier noch auf folgende Arbeiten hinzuweisen: *G. Darboux,* Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875), p. 107/8; (2) 8 (1879), p. 195/202; *U. Dini,* Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 121/37; Fondamenti, p. 147/66 = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 205/29; *M. Lerch,* J. f. Math. 103 (1888), p. 126/38; *Ch. Cellérier,* Bull. d. scienc. math. (2) 14 (1890), p. 152/5 [siehe dazu auch: *B. N. Prasad,* Proceed. Benares Math. Soc. 3 (1921), p. 1/4; Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 31 (1922), p. 174/5]; *G. Peano,* Math. Ann. 36 (1890), p. 160; *D. Hilbert,* Math. Ann. 38 (1891), p. 460; *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Ann. Soc. scientif. Bruxelles 16 A (1891/2), p. 57/62; *A. Tauber,* Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 330/40; *T. Brodén,* J. f. Math. 118 (1897), p. 1/60; Arkiv för mat., astr. och fysik 2 (1905/6), Nr. 2, p. 1/12; *E. Steinitz,* Math. Ann. 52 (1899), p. 58/69; *E. H. Moore,* Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 81/90; *T. Takagi,* Proceed. Tokyo Math.-Phys. Soc. [Tōkyō Sūgaku-Buturigakkwai Hōkoku] 1 (1901/03), p. 176/7; J. of the Physical School in Tokyo 14 (1904), p. 1/2 (abgedruckt in *Y. Mikami,* Mathematical Papers from the Far East [Abhandl. zur Geschichte d. math. Wissensch. 28], Leipzig 1910, p. 108/9); *A. Heß,* Dissertation[286]),

Die Erkenntnis der Existenz stetiger, nirgends differentiierbarer Funktionen führt naturgemäß zu der folgenden allgemeinen Frage: In welchen Fällen und für welche Menge von Werten x kann man behaupten, daß eine Funktion $f(x)$ eine Ableitung besitzt? Die wichtigste Antwort auf diese Frage wird durch folgenden Satz von *H. Lebesgue*[737]) gegeben: *Jede Funktion* $f(x)$[738]) *von beschränkter Schwankung*

p. 40/5; *H. v. Koch,* Arkiv för mat., astr. och fysik 1 (1903/4), p. 681/702; 2 (1905/6), Nr. 27, p. 1/2; Acta math. 30 (1906), p. 145/74 [vgl. dazu auch: *F. Apt,* Math. Ztschr. 13 (1922), p. 217/22]; *E. Cesàro,* Atti Accad. Napoli (2) 12 (1905), Nr. 15, p. 1/12; Arch. Math. Phys. (3) 10 (1906), p. 57/63; *A. Broglio,* Giorn. di mat. 44 [= (2) 13], (1906), p. 168/80, 354/69; *A. Sellerio,* Rend. Circ. mat. Palermo 28 (1909), p. 153/84; *S. Fukuzawa,* Proceed. Tokyo Math.-Phys. Soc. [Tōkyō Sūgaku-Butsurigakkwai Kizi] (2) 4 (1907/8), p. 202/7; *G. Faber,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 16 (1907), p. 538/40; Math. Ann. 66 (1908), p. 81/94; 69 (1910), p. 372/81; *G. Landsberg,* Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 17 (1908), p. 46/51; *W. Sierpiński,* Anzeiger Ak. Wiss. Krakau 1914 (A), p. 162/81; Wektor 3 (1914), p. 337/43; *A. Denjoy,* J. de math. (7) 1 (1915), p. 209/23; *G. H. Hardy,* Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), p. 301/25; *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 590/94; *H. Hahn,* Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 26 (1917 [1918]), p. 281/4; *K. Knopp,* Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 26 (1917 [1918]), p. 278/80; Arch. Math. Phys. (3) 26 (1917), p. 103/115; Sitzgsber. d. Berl. Math. Ges. 16 (1917), p. 97/106; Math. Ztschr. 2 (1918), p. 1/26. Die beiden letztgenannten Arbeiten von *K. Knopp* bieten zugleich eine gute zusammenfassende Übersicht über den Gegenstand. Es sei noch erwähnt, daß *W. H. Young,* Messenger of math. (2) 38 (1908), p. 65/9, ein paar allgemeine Eigenschaften der nirgends differentiierbaren Funktionen angegeben hat. — *C. Carathéodory* und *H. Hahn* (a. a. O.) haben darauf hingewiesen, daß bis jetzt noch nichts über die Existenz solcher Funktionen bekannt ist, die an keiner Stelle eine bestimmte rechtsseitige Ableitung besitzen. Vgl. dazu auch *G. Prasad,* Bull. Calcutta Math. Soc. 3 (1915), p. 53/4.*

737) *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 128. *Andere Beweise für diesen Satz (die im Gegensatz zu *H. Lebesgues* ursprünglichen Beweis ohne Benutzung des Integralbegriffs geführt werden) bei *G. Faber*[755]), *L. Tonelli*[755a]) und Rend. Acc. Lincei (5) 25_1 (1916), p. 163/70, sowie bei *W. H. Young* und *G. Chisholm Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910/11), p. 325/32; *A. Rajchman* u. *S. Saks*[715a]), p. 204/10. —

Den analogen Satz hat *N. Lusin,* Paris C. R. 155 (1912), p. 1475/7; Annali di mat. (3) 26 (1917), p. 99/110 (insbes. p. 105/7) für die stetigen Funktionen „von verallgemeinerter beschränkter Schwankung" aufgestellt [die er (wie in [467a]) erwähnt) mit Rücksicht auf das spezielle *Denjoy*sche Integral definiert hat]; übrigens ist für den hierin enthaltenen Fall des speziellen *Denjoy*schen Integrals die betr. Aussage kurz vorher von *A. Denjoy*[757]) bewiesen worden. Vgl. dazu auch *A. Denjoy,* Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), p. 163 u. 168.*

738) *Es ist nicht nötig, $f(x)$ als stetig vorauszusetzen; vgl. *W. H. Young*[771]), p. 79/80. —

Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß *F. Lukács,* Math. Ann. 70 (1911), p. 561/2, ein Beispiel einer Funktion angegeben hat, die in einer überall dichten Menge unstetig, aber doch in einer überall dichten Menge differentiierbar ist;

in einem Intervall $[a, b]$ besitzt eine endliche Ableitung in jedem Punkte x von $[a, b]$, außer vielleicht für die Punkte einer Menge vom Maß Null.

Dieser Satz läßt sich insbesondere auf Funktionen mit in einem Intervall $[a, b]$ beschränkten Derivierten anwenden.[738a]) *P. Montel*[739]) hat diesen Satz auch für die Funktionen bewiesen, deren Derivierte in jedem Punkt von $[a, b]$ *endlich* sind; d. h. er hat auch von diesen Funktionen gezeigt, daß sie fast überall in $[a, b]$ eine endliche Ableitung besitzen.[740])*

B. Levi hat ferner folgenden Satz bewiesen[741]): *Die Menge der Punkte x eines Intervalls (a, b), für welche eine in (a, b) stetige Funktion eine vordere und eine hintere Ableitung besitzt, die beide voneinander verschieden sind, ist abzählbar.*[742])

*Besitzt die Funktion an der Stelle x eine vordere und hintere Ableitung, die beide voneinander verschieden sind, so haben wir den Typus einer *Ecke* bzw. *Spitze*; als deren *Größe* ist der Winkel zwischen der vorderen und hinteren Halbtangente, d. h. das Supplement des Grenzsekantenwinkels, zu bezeichnen. Gewissermaßen als Verschärfung des vorstehenden Satzes zeigt nun *A. Rosenthal*[743]), daß *bei einer stetigen Funktion, die überall im Intervall (a, b) eine vordere und eine hintere Ableitung besitzt, die Spitzen und die Ecken, deren Größe unter einer festen Zahl $\eta < \pi$ bleibt, in (a, b) nur eine separierte Menge bilden.* Natürlich kann die Gesamtmenge aller Ecken bei einer derartigen

siehe auch *W. D. A. Westfall*, Bull. Amer. Math. Soc. 15 (1908/9), p. 225/6; *W. Sierpiński*, Wektor 3 (1913), p. 145/7; *L. Narayan*, Bull. Calcutta Math. Soc. 2 (1915), Nr. 2, p. 21/6.*

738a) *Entsprechendes für Funktionen von zwei Veränderlichen bei *H. Rademacher*, Math. Ann. 79 (1919), p. 341/8; 81 (1920), p. 52/63.*

739) **P. Montel*, Paris C. R. 155 (1912), p. 1478/80.*

740) *Einen noch weitergehenden Satz hat *A. Denjoy*, J. de math. (7) 1 (1915), p. 188/9 u. 190/2, bewiesen [ist auch in seinem in Nr. **40a** angegebenen, allgemeinen Resultat enthalten]: Hat die stetige Funktion $f(x)$ in jedem Punkt einer Menge M von positivem Maß auf einer Seite endliche (obere und untere) Derivierte, so besitzt $f(x)$, von einer Nullmenge abgesehen, überall auf M eine (endliche) Ableitung.*

741) *B. Levi*, Atti Accad. Linc. Rend. (5) 15_1 (1906), p. 437/8. *Diesen Satz hat viel später auch *W. Sierpiński*, Anzeiger Ak. Wiss. Krakau 1912 (A), p. 850/5 gefunden. [Für den Spezialfall der konvexen Funktionen hat *F. Bernstein*, Math. Ann. 64 (1907), p. 425/6 einen anderen, sehr einfachen Beweis gegeben.] Bezüglich wesentlicher Verallgemeinerungen dieses Satzes siehe [752]) und insbes. den Anfang von Nr. **40a**. Vgl. übrigens auch [456]).*

742) *Der Satz gilt auch, wenn die betrachtete Funktion nicht als stetig vorausgesetzt wird; vgl. *G. Chisholm Young*[760]), p. 147/8.*

743) **A. Rosenthal*, Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven, Münch. Habil.-Schr. 1912 (Lpz. 1912), p. 37/8 = Math. Ann. 73 (1912), p. 512/13.*

Funktion [sogar bei einer konvexen Funktion[744])] in (a, b) überall dicht liegen und bei einer stetigen Funktion, die nicht mehr der Einschränkung unterworfen ist, durchweg vorn und hinten differentiierbar zu sein, können sogar die Spitzen überall dicht liegen.[745])

Die Spitzen einer stetigen Funktion gehören zu der Menge M derjenigen Stellen, für die mindestens eine Derivierte unendlich ist. Von dieser Menge M hat *W. H. Young*[746]) bewiesen, daß sie stets eine innere Grenzmenge [siehe Nr. 9 b] ist. Ähnliche Sätze hat *C. Carathéodory*[747]) für die Menge derjenigen Stellen einer stetigen Funktion bewiesen, in denen eine bestimmte Derivierte $+\infty$ (bzw. $-\infty$) wird, und insbesondere festgestellt, daß jede solche Menge endlich oder abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält. Werden nun an einer Stelle alle vier Derivierten gleichzeitig $+\infty$ oder gleichzeitig $-\infty$, so hat man in diesem Punkt eine unendliche Ableitung.[748]) Hierüber haben *B. Levi*[748a]) und *N. Lusin*[749]) den folgenden Satz auf-

744) *Einfache Beispiele solcher konvexer Funktionen mit überall dicht liegenden Ecken haben *J. L. W. V. Jensen*, Acta math. 30 (1906), p. 191 und *F. Bernstein*, Arch. Math. Phys. (3) 12 (1907), p. 285/6 gegeben.*

745) *Derartige Beispiele in II A 1, Nr. 20, Fußn. [228]) (*A. Pringsheim*); vgl. auch daselbst Fußnote [226]). Bezüglich der stetigen Funktionen mit überall dicht liegenden Spitzen ist der folgende auf *J. König*, Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 7/12, zurückgehende Satz hervorzuheben [vgl. auch *A. Schoenflies*, Bericht I 1900, p. 148 u. 160]: Es existiert hier zu jeder beliebig vorgeschriebenen reellen Zahl c eine überall dicht liegende Menge von Punkten, in denen entweder die Ableitung existiert und den Wert c hat, oder nicht existiert, wobei dann c zwischen der größten und kleinsten Derivierten der betr. Stelle liegt. Nach *A. Rosenthal*[743]) muß hier stets eine Menge 2. Kategorie von nicht vorn und hinten differentiierbaren Stellen vorhanden sein.*

746) **W. H. Young*, Arkiv för mat., astr. och fysik 1 (1903/4), p. 201/4. Einen Spezialfall dieses Satzes, der sich auf eine überall dichte Menge M bezieht, hat schon *T. Brodén* bewiesen [Öfversigt af Vet.-Akad. Förhandl. (Stockholm) 53 (1896), p. 583/602; Acta Univ. Lund. 33_2 (1897), p. 30/7; vgl. auch *A. Schoenflies*, Bericht I 1900, p. 148/9]. Übrigens ist der Satz von *W. H. Young* seinerseits wieder in einem viel umfassenderen (auf beliebige, nicht notwendig vertikale Richtungen sich beziehenden) Satz von *A. Rosenthal*[743]) [Hab.-Schr., p. 35/6 = Math. Ann., p. 510/11] enthalten; vgl. dazu auch die Untersuchungen von *A. Denjoy*, Paris C. R. 160 (1915), p. 763/6; J. de math. (7) 1 (1915), p. 149/58.*

747) **C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 528/30 u. 535. Ein Teil seiner Resultate auch schon bei *A. Denjoy*[746]), insbes. J. de math. (7) 1 (1915), p. 155/6.*

748) *Beispiele von (sogar monotonen) stetigen Funktionen mit überall dicht liegenden Stellen, in denen die Ableitung $+\infty$ oder $-\infty$ ist, sind in II A 1, Nr. 20, Fußn. [225]) (*A. Pringsheim*) angegeben.*

748a) **B. Levi*, Rend. Acc. Lincei (5) 15_2 (1906), p. 410/15. *B. Levi* betrachtet nur den Fall, daß die stetige Funktion $f(x)$ überall eine bestimmte Ableitung besitzt.*

gestellt: *Eine stetige Funktion $f(x)$ kann eine unendliche Ableitung nur höchstens in einer Menge vom Maß Null besitzen.*[749a]) Ein noch weitergehendes Resultat hat *A. Denjoy*[750]) erhalten, der denselben Satz für unendliche rechtsseitige (bzw. linksseitige) Ableitungen bewiesen hat [vgl. Nr. **40a**].

Endlich gehört hierher noch der folgende Satz von *A. Rosenthal*[751]): *Die Menge der nichtdifferentiierbaren Stellen einer stetigen Funktion ist endlich, abzählbar oder von Mächtigkeit des Kontinuums.**

*Die meisten der vorstehenden Sätze lassen sich (teils ungeändert, teils mit gewissen Einschränkungen) auf beliebige stetige (Parameter-) Kurven (vor allem in der Ebene) übertragen.[752]) Insbesondere gibt der obige Satz von *H. Lebesgue* hierbei Anlaß zu einer entsprechenden Aussage über *rektifizierbare* Kurven:* Für die Rektifizierbarkeit einer Kurve ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionen einer Veränderlichen, welche die Koordinaten der Punkte dieser Kurven definieren, von beschränkter Schwankung sind[753]); eine rektifizierbare Kurve besitzt deshalb Tangenten, ausgenommen vielleicht für die Kurvenpunkte, die einer Parametermenge vom Maß Null entsprechen.[754]) *G. Faber*[755]) *sowie *L. Tonelli*[755a])* haben Beweise dieses Satzes gegeben, die vom Integralbegriff keinen Gebrauch machen.

Endlich wollen wir hier noch eine andere mit dem obigen *Lebesgue*schen Satz aufs engste zusammenhängende Frage betrachten,

749) **N. Lusin,* Matematischeskij Sbornik [Recueil math. de la Soc. math. de Moscou] 28 (1911/12), p. 266/94 u. 544 [russisch]; Paris C. R. 154 (1912), p. 1688/90; Annali di mat. (3) 26 (1917), p. 81/88 [siehe hier auch p. 88/95].*

749a) **N. Lusin*[749]) konnte ferner noch zeigen, daß die in seinem Satz enthaltene Aussage geradezu charakteristisch für die Ableitungen ist; er hat nämlich beweisen können: Ist eine in $[a, b]$ definierte, meßbare Funktion $\varphi(x)$ fast überall endlich, so unterscheidet sich $\varphi(x)$ in $[a, b]$ höchstens auf einer Nullmenge von der Ableitung einer gewissen stetigen Funktion $f(x)$. [Vgl. auch Nr. 43 Schluß, bei [805]).]*

750) **A. Denjoy,* J. de math. (7) 1 (1915), p. 187; siehe auch *St. Banach,* Paris C. R. 173 (1921), p. 457/9. Vgl. ferner *G. Chisholm Young*[763]).*

751) **A. Rosenthal*[743]), Habil.-Schr., p. 38/9 = Math. Ann., p. 513/4.*

752) *Siehe hierüber insbesondere *A. Rosenthal*[743]), § 3.*

753) **C. Jordan,* Cours d'Analyse I, 2. éd. Paris 1893 (ebenso 3. éd. Paris 1909), p. 100.

Für Flächen und Funktionen mehrerer Veränderlichen ist das Entsprechende von *Elise Bloch,* Monatsh. Math. Phys. 30 (1920), p. 105/22, untersucht worden.*

754) **H. Lebesgue*[737]), p. 125/7.

Zugleich ergibt sich aus diesem Satz, daß kein Stück einer nirgends differentiierbaren Funktion rektifizierbar sein kann.*

755) *G. Faber,* Math. Ann. 69 (1910), p. 381/95; *vgl. auch [737]).*

755a) **L. Tonelli,* Rend. Acc. Linc. (5) 25_1 (1916), p. 22/30.*

nämlich die Differentiierbarkeit eines unbestimmten Integrals. Das unbestimmte (*Lebesgue*sche) Integral einer summierbaren Funktion ist eine Funktion von beschränkter Schwankung [siehe Nr. **44**]: es besitzt also „im allgemeinen" eine Ableitung; genauer formuliert, hat man den folgenden Satz, den man wieder *H. Lebesgue* verdankt[756]): *Das unbestimmte Lebesguesche Integral einer summierbaren Funktion besitzt diese Funktion zur Ableitung, außer vielleicht für eine Punktmenge vom Maß Null.*

Übrigens ist dieser Satz ziemlich selbstverständlich, wenn es sich nur um eine beschränkte, integrierbare Funktion $f(x)$ handelt. In diesem Fall ist nämlich das unbestimmte Integral $F(x)$ eine stetige Funktion mit beschränkten Derivierten, die $f(x)$ in allen Stetigkeitspunkten von $f(x)$ zur Ableitung hat. Da die Unstetigkeitspunkte von $f(x)$ eine Menge vom Maße Null bilden müssen, so besitzt also $F(x)$ fast überall die Ableitung $f(x)$.

*Der analoge Satz gilt auch für das spezielle *Denjoy*sche Integral [Nr. **35 c**]; d. h. *das unbestimmte spezielle Denjoysche Integral von* $f(x)$ *besitzt,* wie *A. Denjoy*[757]) bewiesen hat, *wieder* $f(x)$ *fast überall als Ableitung.* Dieser Satz bleibt auch noch richtig für die von *A. Khintchine* gegebene Erweiterung des speziellen *Denjoy*schen Integrals[758]); dagegen *nicht* für das *allgemeine Denjoy*sche Integral; siehe hierüber Nr. **35 c** und **44 b**.*

40 a. *Beziehungen zwischen den vier Derivierten. Schon in Nr. 38 [insbes. bei [723])] ist von Zusammenhängen zwischen den vier Derivierten die Rede gewesen; von noch spezielleren Beziehungen zwischen den vier Derivierten haben die Sätze in Nr. **40** (z. B. der Satz von *B. Levi*) gehandelt. Wir wollen nun die Fragestellungen, die durch diese Sätze der letzten Nr. angeschnitten sind, noch weiter verfolgen: Welche Beziehungen bestehen zwischen den verschiedenen Derivierten, wenn man von Ausnahmemengen bestimmter Art (abzählbaren Mengen, Nullmengen, Mengen 1. Kategorie) absieht?

Hier ist vor allem ein Satz hervorzuheben, der zuerst von *A. Rosenthal*[759]) und etwas später auch von *G. Chisholm Young*[760])

756) **H. Lebesgue*[737]), p. 124/5; Rend. Acc. Linc. (5) 15_2 (1906), p. 6/8; Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 407/8. Vgl. auch *B. Levi*[741]), p. 438 u. 674/9.

Weitere Beweise für diesen Satz hat *A. Denjoy,* Bull. Soc. math. France 43 (1915), p. 204/8 gegeben.*

757) **A. Denjoy,* Paris C. R. 154 (1912), p. 1075/8. Vgl. auch [737]).*

758) **A. Khintchine,* Paris C. R. 162 (1916), p. 287/90.*

759) **A. Rosenthal*[743]), Hab.-Schr., p. 26/9 = Math. Ann., p. 501/4; hier ist der Satz in der im obigen Text sogleich anzugebenden geometrischen Einkleidung formuliert.*

aufgestellt worden ist: *Bei einer in* (a, b) *stetigen*[761]) *Funktion* $f(x)$ *ist an jeder Stelle, von höchstens abzählbar vielen Stellen abgesehen, die untere Derivierte der einen Seite nicht größer als die obere Derivierte der anderen Seite, d. h.*

$$D^+ \geqq D_- \quad \textit{und} \quad D^- \geqq D_+ .$$

Durch geometrische Einkleidung kann man diesem Satz eine noch größere Anschaulichkeit verleihen. Man definiere zunächst (in Verallgemeinerung der in Nr. **40** benutzten Ausdrucksweise) folgendermaßen eine Stelle als „*Ecke*“: Man betrachte an der Stelle x vorn bzw. hinten die zwischen den Richtungen der oberen und unteren Derivierten eingeschlossenen Winkel ϑ_v bzw. ϑ_h $(0 \leqq \vartheta \leqq \pi)$. Es sei nun η die Größe des kleinsten Winkels, der gleichzeitig ϑ_v und ϑ_h enthält. Ist $\eta = 0$, so hat man eine *Spitze*; ist η positiv, aber $< \pi$, so bezeichne man die Stelle x als „Ecke von der Größe η“[762]). Man kann dann den vorstehenden Satz so formulieren (wodurch er deutlich als einfache Verallgemeinerung des Satzes von *B. Levi*, Nr. **40**, erscheint): *Die Punkte, in denen Ecken oder Spitzen einer stetigen Funktion liegen, bilden eine höchstens abzählbare Menge.* In dieser Form gilt der Satz auch wieder für beliebige stetige Kurven der Ebene.[759])

Die Beziehungen, die zwischen den Derivierten bestehen, wenn man Ausnahmemengen vom Maß Null zuläßt, hat *A. Denjoy*[763]) systematisch untersucht. Er erhält hier das folgende zusammenfassende und abschließende Resultat [in dem auch einige der Sätze von Nr. **40** mitenthalten sind[764])]: *Bei einer in* (a, b) *stetigen Funktion* $f(x)$ *sind, wenn man von einer passenden Nullmenge absieht, an den verschiedenen Stellen* x *nur noch die folgenden vier Fälle möglich:*

---

760) **G. Chisholm Young*, Acta math. 37 (1914), p. 141/8. — Vgl. auch *A. Denjoy*, Paris C. R. 160 (1915), p. 707/9; J. de math. (7) 1 (1915), p. 147/8, der diesen Satz ebenfalls gefunden und einen anderen Beweis dafür gegeben hat.*

761) *Nach *G. Chisholm Young*[760]) gilt der Satz auch für endliche nichtstetige Funktionen; vgl. auch *G. Chisholm Young*[763]), 2. Zitat, wo der Satz auf nicht endlich bleibende Funktionen übertragen wird.*

762) **A. Rosenthal*[743]), Hab.-Schr., p. 5 = Math. Ann., p. 482.*

763) **A. Denjoy*, Paris C. R. 161 (1915), p. 124/7; J. de math. (7) 1 (1915), p. 105/240, insbes. p. 174/95. — Vgl. dazu übrigens auch *G. Chisholm Young*, Quart. J. of math. 47 (1916), p. 148/53; Paris C. R. 162 (1916), p. 380/2; Proc. London Math. Soc. 15 (1916), p. 360/84; [ferner: *L. E. J. Brouwer*[588]), p. 19/24].*

764) *Nämlich der Satz von *B. Levi*[748a]) und *N. Lusin*[749]) und seine von *A. Denjoy*[750]) gegebene Verallgemeinerung, sowie die *Montel*sche Ergänzung des *Lebesgue*schen Satzes [siehe [739]) u. [740])].*

1. $D^+ = D^- = +\infty$; $D_+ = D_- = -\infty$;
2. $D^+ = D_+ = D^- = D_-$ *endlich;*
3. $D^+ = +\infty$; $D_- = -\infty$; $D_+ = D^-$ *endlich;*
4. $D^- = +\infty$; $D_+ = -\infty$; $D_- = D^+$ *endlich.*

Also: Alle sonstigen sich auf die Derivierten einer Stelle x beziehenden Vorkommnisse können sich nur in einer Nullmenge ereignen. Jeder dieser vier Hauptfälle kann einzeln realisiert werden, d. h. man kann Funktionen angeben, für die fast überall ein bestimmter dieser vier Fälle eintritt. Ferner gibt es Funktionen, bei denen zugleich jeder dieser vier Fälle in je einer Menge von positivem Maß vorkommt; noch genauer: Wenn man das Linearkontinuum beliebig in vier elementenfremde Mengen E_1, E_2, E_3, E_4 zerlegt, von denen jede von positivem Maß ist, dann ist es nach *A. Denjoy*[765]) möglich, eine stetige Funktion $f(x)$ zu bilden, für welche die vier Hauptfälle 1., 2., 3., 4. beziehungsweise in den entsprechend bezeichneten vier Mengen E_1, E_2, E_3, E_4 realisiert sind, jedesmal abgesehen von einer Nullmenge.

Schließlich gehört hierher noch ein (schon aus dem Jahr 1908 stammendes) Ergebnis von *W. H. Young*[766]). Aus der bereits in Nr. 38 angegebenen Tatsache, daß die oberen (bzw. unteren) Derivierten einer stetigen Funktion nach oben (bzw. unten) halbstetig sind, außer vielleicht in einer Menge 1. Kategorie, folgt der Satz: *Bei einer stetigen Funktion unterscheiden sich, abgesehen vielleicht von einer Menge 1. Kategorie, die Derivierten der rechten und der linken Seite nicht voneinander;* d. h., *abgesehen vielleicht von einer Menge 1. Kategorie ist stets*

$$D^+ = D^- \quad \text{und} \quad D_+ = D_-.$$

Hierin ist übrigens speziell noch enthalten, daß die Fälle 3. und 4. des *Denjoy*schen Satzes nur in Mengen 1. Kategorie auftreten können.[767])*

41. Integrierbarkeit der Ableitung und der vier Derivierten. Da die vier Derivierten in einem Intervall dieselbe obere Grenze und dieselbe untere Grenze haben, so haben sie auch dasselbe obere Integral und dasselbe untere Integral in einem Intervall, in dem sie beschränkt sind. Ist eine von ihnen integrabel, so sind es die drei übrigen auch, und alle vier haben dasselbe Integral. In diesem Falle bilden die Unstetigkeitspunkte jeder der vier Derivierten eine Menge vom Maß Null; hieraus folgt, daß die Funktion eine Ableitung besitzt, außer

---

765) *A. Denjoy*[763]), insbes. 2. Zitat, p. 196/204.*

766) *W. H. Young*[730]), p. 305/8.*

767) *Dabei ist zu bedenken, daß eine Menge 1. Kategorie tatsächlich auch Komplementärmenge einer Nullmenge sein kann.*

vielleicht für eine Punktmenge vom Maß Null; *d. h. in diesem Fall einer Funktion mit beschränkten, integrierbaren Derivierten gelangt man ohne weiteres zu der Aussage des *Lebesgue*schen Satzes vom Anfang von Nr. 40.*

Nehmen wir an, daß die Ableitung $f'(x)$ in allen Punkten eines Intervalls existiert und in diesem Intervalle beschränkt ist. *V. Volterra*[768]) hat gezeigt, daß dann $f'(x)$ nicht immer integrabel ist: sei in der Tat E eine lineare perfekte Menge mit von Null verschiedenem Maß, die im Intervalle $[a, b]$ ihrer Endpunkte nirgends dicht ist, und sei (α, β) ein von E punktfreies Intervall; betrachten wir die Funktion

$$\varphi(x, y) = (x - y)^2 \sin \frac{1}{x - y}.$$

*Die nach x genommene Ableitung $\varphi'_x(x, \alpha)$ hat im Intervall $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ unendlich viele Nullstellen; sei $\alpha + \gamma$ die letzte und setzen wir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x, \alpha) && \text{für } \alpha \leqq x \leqq \alpha + \gamma, \\ f(x) &= \varphi(\alpha + \gamma, \alpha) && \text{für } \alpha + \gamma \leqq x \leqq \beta - \gamma, \\ f(x) &= \varphi(\beta, x) && \text{für } \beta - \gamma \leqq x \leqq \beta, \\ f(x) &= 0 && \text{für die Punkte von } E. \end{aligned}$$

Die Ableitung $f'(x)$ existiert dann in allen Punkten von (a, b); sie ist beschränkt, aber die Punkte von E sind für $f'(x)$ Unstetigkeitspunkte, und ihre Menge hat ein von Null verschiedenes Maß; also ist $f'(x)$ nicht integrabel.

Andere Beispiele von nicht integrablen Ableitungen werden uns durch die Funktionen geliefert, die in jedem Intervalle unendlich viele Maxima und Minima haben und eine beschränkte Ableitung (mit Nullstellen in jedem Intervalle) besitzen[769]): diese Ableitung ist nicht integrabel.[770])

Führen wir jetzt das *Lebesgue*sche Integral ein: jede Ableitung ist meßbar, jede der vier Derivierten ist meßbar; also: *jede beschränkte Ableitung ist summierbar; jede beschränkte Derivierte ist summierbar.*

---

768) *V. Volterra,* Giorn. di mat. (1) 19 (1881), p. 333/37. *Schon vorher hatte *U. Dini* [Fondamenti, p. 276 u. 281/3 = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 375 u. 381/4] eine dahingehende Vermutung geäußert und Gründe dafür beigebracht; vgl. [770]).*

769) Die Existenz solcher Funktionen hat zuerst *A. Köpcke* durch Konstruktion eines Beispiels bewiesen. Vgl. II A 1, Nr. **11**, Fußn. [116]) und Nr. **20**, Fußn. [223]) (*A. Pringsheim*); [*sowie außerdem *T. Brodén,* Öfversigt af Vet.-Akad. Förhandl. (Stockholm) 57 (1900), p. 423/41, 743/61; *A. Schoenflies,* Bericht I 1900, p. 163/6; Math. Ann. 54 (1901), p. 553/63; *A. Denjoy,* Paris C. R. 158 (1914), p. 1003/6; Bull. Soc. math. France 43 (1915), p. 210/37.*]

770 *Dies hat schon *U. Dini*[768]) bewiesen.*

Eine nicht beschränkte (selbst durchweg endliche) Ableitung ist dagegen nicht immer summierbar; z. B. ist die schon genannte Funktion [siehe Nr. **33**] $\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right)$ in jedem die Null enthaltenden Intervalle nicht summierbar.

H. Lebesgue hat bewiesen[771]): *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine endliche Derivierte der stetigen Funktion* $f(x)$ *im Intervall* $[a, b]$ *summierbar sei, besteht darin, daß* $f(x)$ *in* $[a, b]$ *eine Funktion von beschränkter Schwankung ist.* Die totale Variation der Funktion $f(x)$ ist gleich dem Integral des absoluten Wertes der Derivierten.

*Dieser *Lebesgue*sche Satz gilt auch, wenn man eine reduzible Menge von Stellen zuläßt, an denen die betr. Derivierte unendlich ist[772]), und sogar, wenn man eine beliebige abzählbare Menge derartiger Stellen zuläßt.[773]) Auch wenn man gar keine Voraussetzung bezüglich der Endlichkeit der Derivierten macht, kann man noch immer aussagen, daß die beschränkte Schwankung von $f(x)$ in $[a, b]$ *hinreichend* für die Summierbarkeit der Derivierten ist[774]); aber sie ist *nicht* mehr *notwendig.*[775])

Die Frage, wann nun im Fall der Summierbarkeit der Derivierten die Funktion $f(x)$ wirklich ein unbestimmtes *Lebesgue*sches Integral der Derivierten ist, soll erst in Nr. **43** erörtert werden. Vorgreifend möge gleich hier nur bemerkt werden, daß bei beschränkten Derivierten oder bei endlichen summierbaren Derivierten immer $f(x)$ als unbestimmtes Integral dieser Derivierten sich ergibt.

Zusammenfassend können wir also sagen: Die Einführung des *Lebesgue*schen Integrals gestattet es, bei *beschränkter* Ableitung (oder Derivierter) die Integration als inversen Prozeß der Differentiation aufzufassen; aber dieses gegensätzliche Verhalten wird gestört, sobald man einen Schritt weiter geht, da eben endliche, nicht-beschränkte Ableitungen gar nicht mehr summierbar zu sein brauchen.

---

771) *H. Lebesgue,* *Thèse, p. 35/8 = Annali, p. 265/8;* Leçons sur l'integration, p. 122/3; *Rend. Acc. Linc. (5) 15_2 (1906), p. 5/6 [auch (5) 16_1 (1907), p. 92/100]; siehe dazu auch *B. Levi,* ib. (5) 15_2 (1906), p. 359/65, sowie* *W. H. Young,* Quart. J. of math. 42 (1910/11), p. 74/81.

772) **B. Levi* [771]).*

773) *Dies folgt mit Rücksicht auf die im obigen Text unmittelbar folgende Bemerkung aus dem in Nr. **43** unter 3. angegebenen Satz von *W. H. Young* und *C. Carathéodory.**

774) **H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 128/9; vgl. auch *G. P. Horton,* Ann. of math. (2) 20 (1918), p. 1/8, sowie [775]).*

775) *Siehe *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 589/90.*

Dieser Umstand hatte *A. Denjoy* veranlaßt, nach einer Verallgemeinerung des *Lebesgue*schen Integralbegriffs zu suchen, um mit Hilfe einer solchen jede endliche Ableitung (oder Derivierte) integrieren zu können, und er ist so zu seinem in Nr. **35c** besprochenen Integralbegriff geführt worden, der das Gewünschte leistet[776]): *Jede endliche Ableitung (oder Derivierte) einer stetigen Funktion besitzt ein spezielles (oder allgemeines) Denjoysches Integral.**

42. Bestimmung einer Funktion mit Hilfe ihrer Ableitung oder einer ihrer vier Derivierten. Genügt die Kenntnis der Ableitung oder einer der vier Derivierten einer stetigen Funktion in einem Intervalle (a, b), um diese Funktion dort bis auf eine additive Konstante zu bestimmen? Mit anderen Worten, unterscheiden sich zwei stetige Funktionen, welche in allen Punkten eines Intervalles eine gleiche Derivierte besitzen, nur durch eine Konstante? *Der Satz, der die Antwort auf diese Frage gibt, wird als der *Fundamentalsatz der Integralrechnung* bezeichnet.[777])*

Die Antwort fällt verschieden aus, je nachdem die Derivierte im Intervall beständig endlich ist oder nicht.

Eine stetige Funktion ist im Intervalle (a, b) bis auf eine additive Konstante durch die Kenntnis einer ihrer Derivierten bestimmt, wenn diese für jeden Wert x von (a, b) endlich bleibt.[778])

Eine stetige Funktion ist in einem Intervalle (a, b) nicht notwendig bis auf eine additive Konstante durch die Kenntnis einer ihrer Derivierten bestimmt, wenn diese nicht beständig endlich bleibt.[779])

---

776) *A. Denjoy[757]); dazu eine Ergänzung: Paris C. R. 158 (1914), p. 99/101. Ferner: Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), p. 167/87; (3) 34 (1917), p. 181/201. Vgl. auch *Pia Nalli*[653]), p. 134/45.*

777) *Vielfach wird noch die in Nr. **43** besprochene Darstellung der primitiven Funktion als Integral der Derivierten mit in den „Fundamentalsatz" hineingenommen; vgl. II A 2, Nr. 36 (*A. Voß*).*

778) Diesen Satz hat *L. Scheeffer,* Acta math. 5 (1884), p. 183/5, bewiesen; [dort, p. 183/94 *und 279/96*, finden sich auch verschiedene Verallgemeinerungen, die zum Teil weiter unten besprochen werden]. — *Schon vorher hatten einige andere Mathematiker den Beweis für speziellere Fälle dieses Satzes erbracht, insbesondere für den Fall beschränkter und integrierbarer Derivierten*: *P. du Bois-Reymond,* *Abhandl. Bayer. Ak. Wiss. 12_1 (1875), p. 161/6;* Math. Ann. 16 (1880), p. 115/28; *U. Dini,* Fondamenti, p. *73/5, 84/5,* 200/1, *273/81, 285* = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. *95/7, 99/100, 113/4,* 273/4, *370/81, 386* [*insbes. Fondamenti, p. 278/80 = Grundlagen, p. 377/80*]; *A. Harnack,* Math. Ann. 19 (1882), p. 244/5; *Math. Ann. 24 (1884), p. 235/6*.

*Vgl. dazu auch *A. Denjoy,* Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), p. 176/7, 179, 187; ferner [auf Nr. **44b** sich beziehend] p. 196/222.*

779) *H. Hahn,* Monatsh. Math. Phys. 16 (1905), p. 161/6, hat ein Beispiel

Nehmen wir an, daß eine der Derivierten von $f(x)$ in (a, b) endlich ist, außer für eine Punktmenge E, in der wir über das Verhalten dieser Derivierten überhaupt nichts als bekannt voraussetzen wollen. Von welcher Beschaffenheit muß E sein, damit $f(x)$ in (a, b) bis auf eine additive Konstante bestimmt ist?

L. Scheeffer[780]) hat den Satz bewiesen: *eine stetige Funktion ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn eine Derivierte dieser Funktion in (a, b), abgesehen von den Punkten einer abzählbaren Menge E, endlich und dem Werte nach bekannt ist.*[781]) Die abzählbaren Mengen entsprechen also der Forderung. $_*$Übrigens gilt der Beweis von

---

dafür gegeben, daß unendlich viele, wesentlich verschiedene, stetige Funktionen in allen Punkten des Intervalles $[0, 1]$ die gleiche (nicht überall endliche) Ableitung besitzen.

Sei E eine perfekte Menge vom Maß Null, die durch die punktfreien Intervalle δ_n (von der Längensumme 1) definiert ist. Wählen wir eine positive Zahl $k < 1$ derart, daß die Reihe

$$\delta_1^k + \delta_2^k + \cdots + \delta_n^k + \cdots$$

konvergiert. Wir setzen

$$f(x) = 2^{1-k} \sum_{(n)} \delta_n ,$$

wenn x ein Punkt von E ist, wobei die Summe $\sum_{(n)}$ sich über alle Intervalle links von x erstreckt. In dem von E punktfreien Intervall (α, β), wo $\alpha < \beta$ ist, setzen wir:

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)^k \quad \text{für } \alpha < x \leqq \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$f(x) = f(\beta) - (\beta - x)^k \quad \text{für } \frac{\alpha + \beta}{2} \leqq x < \beta .$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt eine Ableitung, die in allen Punkten von E gleich $+\infty$ ist.

Sei $\varphi(x)$ eine in $[0, 1]$ nicht abnehmende und in jedem von E punktfreien Intervall konstante stetige Funktion [vgl. [618])]; dann haben die beiden stetigen Funktionen $f(x)$ und $f(x) + \varphi(x)$ in jedem Punkte von $[0, 1]$ dieselbe Ableitung.

$_*$Vgl. auch *St. Ruziewicz*, Fundamenta mathematicae 1 (1920), p. 148/51, wo ein anderes derartiges (übrigens auf demselben Prinzip beruhendes) Beispiel angegeben ist.*

780) *L. Scheeffer*, Acta math. 5 (1884), p. 282/7. — [$_*$Spezialfälle dieses Satzes, bei denen aber die Ausnahmemenge E nur eine Menge 1. Gattung ist, schon bei *U. Dini*[778]).*]

H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, p. 78, hat einen Beweis gegeben, der einfacher ist als der von *L. Scheeffer.* $_*$Vgl. dazu auch *G. Chisholm Young*[760]), p. 150.*

781) Eine stetige Funktion ist also bestimmt, wenn man die endlichen Werte ihrer Ableitung für alle irrationellen Werte von x kennt; sie ist es dagegen nicht, wenn man die Ableitung nur für alle rationalen x kennt. [$_*$Vgl. *L. Scheeffer*[780]), p. 291/6.*]

L. Scheeffer auch für den möglicherweise allgemeineren Fall, daß die Ausnahmemenge E nicht von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.*

F. Bernstein[782]) hat den Satz von *L. Scheeffer* verallgemeinert für den Fall, daß die Ausnahmemenge E eine abzählbare oder nicht-abzählbare Menge *ohne perfekten Bestandteil* ist.[783]) Dies ist die umfassendste Klasse von Mengen E, für welche der Fundamentalsatz noch gelten kann. Denn bereits *L. Scheeffer*[784]) hat auf Grund der [zuerst von *G. Cantor* angegebenen] nirgends abnehmenden, streckenweise konstanten, stetigen Funktionen [vgl. [618])] darauf hingewiesen, daß sein Satz nicht mehr für eine Ausnahmemenge E gelten kann, welche einen perfekten Bestandteil enthält. [Vgl. [779])].*

*Man kann die vorhin gestellte Frage noch ein wenig modifizieren, indem man annimmt, daß eine Derivierte der stetigen Funktion $f(x)$ in (a, b) endlich ist, abgesehen von einer Punktmenge E, in deren sämtlichen Punkten diese Derivierte wirklich unendlich ist. Von welcher Beschaffenheit muß E sein, damit $f(x)$ in (a, b) bis auf eine additive Konstante bestimmt ist? Die wichtigste Antwort auf diese Frage gibt natürlich wieder der *Scheeffer*sche Satz. Aber noch mehr: Hier bilden bereits die *abzählbaren* Mengen die umfassendste Klasse von Mengen E, die zulässig sind. Denn da nach Nr. **40**, [747]) die Menge der Stellen, in denen eine bestimmte Derivierte $+\infty$ oder $-\infty$ wird, endlich oder abzählbar ist oder einen perfekten Bestandteil enthält, so ist wegen der Beispiele von [779]) die stetige Funktion $f(x)$ nicht mehr bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn man eine Derivierte von ihr kennt, die in den Punkten einer nicht-abzählbaren Menge E unendlich wird.[785])*

*Die oben gestellte Frage kann man nun noch einmal abändern: $f(x)$ habe überall in (a, b) eine *endliche* Derivierte, und die Werte derselben seien in (a, b) bekannt, außer in einer Menge E. Welche Mengen E sind zulässig, damit $f(x)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist? Die Antwort hierauf gibt der folgende Satz[786]):* *Eine*

---

782) **F. Bernstein*, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 60 (1908), p. 331/5. Diese Aussage hat kurz darauf auch *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse infinitésimale 1 (2. éd.), Louvain-Paris 1909, p. 81/2 mittels eines ähnlichen Gedankengangs bewiesen.*

783) *Bezüglich des Nachweises der Existenz nicht-abzählbarer „total imperfekter" Mengen siehe den Schluß von Nr. 6.*

784) **L. Scheeffer*[780]), p. 287/91; [auch eine Bemerkung von ihm bei *G. Cantor*[618])]. Ähnliche Überlegungen auch bei *A. Harnack*[618]), wo allerdings mancherlei unrichtig ist; [vgl. dazu *A. Schoenflies*, Bericht I 1900, p. 168/71].*

785) *Vgl. *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 596.*

786) *Der Satz findet sich für *beschränkte* Derivierte, allerdings nicht mit

stetige Funktion, von der eine Derivierte in (a, b) endlich ist, ist dort bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn man den Wert dieser Derivierten für jeden Punkt x von (a, b), außer für die Punkte einer Menge vom Maß Null, kennt.

Wir wissen weiter, daß in diesem Falle die Ableitung existiert, ausgenommen vielleicht für eine Punktmenge vom Maß Null; es genügt also, die Ableitung in den Punkten, in denen sie existiert, zu kennen, und man kann sogar noch aus diesen Punkten diejenigen einer Menge vom Maß Null ausschließen.

Übrigens ist es nicht möglich, in dem letzten Satz die Menge vom Maß Null durch irgendeine Menge von positivem Maß zu ersetzen.[787])

*Schließlich kann man die beiden letzten Sätze in der folgenden allgemeinsten Aussage zusammenfassen[788]): *Eine stetige Funktion ist in (a, b) bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn hier eine ihrer Derivierten 1. in jedem Punkte endlich ist, außer vielleicht in einer abzählbaren Menge E_1, und 2. ihrem Werte nach bekannt ist, außer vielleicht in einer Menge E_2 vom Maß Null.**

Es sei noch hervorgehoben, daß sich alle Sätze dieser Nr. ohne Benutzung des Integralbegriffs beweisen lassen.

43. Wirkliche Aufsuchung der primitiven Funktionen einer gegebenen Derivierten oder einer gegebenen Ableitung. *Nachdem in der vorigen Nr. darüber Aufschluß gegeben worden ist, wann eine stetige Funktion durch die Kenntnis ihrer Ableitung oder einer ihrer Derivierten (bis auf eine additive Konstante) bestimmt ist, wollen wir nun hier die wirkliche Aufsuchung der primitiven Funktionen betrachten, wenn man die Ableitung oder eine Derivierte vollständig oder teilweise kennt. Wir haben dabei im folgenden ausschließlich die *stetigen* primitiven Funktionen im Auge.[788a]) Das gegebene Mittel ist

---

„Maß Null", sondern mit „Inhalt Null", schon bei *V. Volterra,* Giorn. di mat. 19 (1881), p. 343 u. 347; für beschränkte Derivierte und mit Maß Null bei *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 79; für *endliche* Derivierte bei *Ch. J. de la Vallée Poussin*[782]).*

787) *Vgl. *V. Volterra*[786]) sowie insbes. *L. Scheeffer*[780]), p. 291.*

788) **Ch. J. de la Vallée Poussin,* Cours d'Analyse infinitésimale 1 (3. éd.), Louvain-Paris 1914, p. 101. Hier scheinbar etwas allgemeiner formuliert: E_1 ist eine Menge ohne perfekten Bestandteil; diese ist aber wegen des obigen von selbst abzählbar. Übrigens ist a. a. O. der Beweis nur unter der Voraussetzung richtig, daß die Menge E_1 nicht nur ohne perfekten Bestandteil, sondern auch noch vom Maß Null ist; aber wegen der Abzählbarkeit von E_1 ist letzteres von selbst der Fall.*

788a) *Ein einfaches Beispiel *unstetiger* primitiver Funktionen einer Ab-

natürlich die Bildung des unbestimmten Integrals der Derivierten $f(x)$, nämlich:

$$C + \int_a^x f(x)\,dx = F(x),$$

wobei das Integral zunächst ein *Riemann*sches oder *Lebesgue*sches sein soll. Um sich die Gesamtheit der stetigen primitiven Funktionen einer Derivierten durch unbestimmte Integration derselben verschaffen zu können, muß notwendig a) diese Derivierte integrierbar oder summierbar sein [Nr. 41] und außerdem b) die stetige primitive Funktion durch die Kenntnis der Derivierten bis auf eine additive Konstante bestimmt sein [Nr. 42]. Immer aber, wenn diese beiden Bedingungen a) und b) erfüllt sind, liefert die unbestimmte Integration auch tatsächlich die stetigen primitiven Funktionen. Dies haben in den einzelnen Fällen die betr. Autoren erkannt, die sich gleichzeitig mit den zusammengehörigen Aussagen von Nr. 41 u. 42 beschäftigt haben.[789]) Wir können uns hier darauf beschränken, die weitestgehenden Resultate, die sich insbesondere mit Hilfe des *Lebesgue*schen Integrals ergeben, anzuführen.*

Man verdankt *H. Lebesgue*[790]) die folgenden Sätze:

1. *Die unbestimmten Lebesgueschen Integrale einer beschränkten Ableitung sind ihre primitiven Funktionen.* Dasselbe gilt (wenn man nur die stetigen primitiven Funktionen betrachtet) für eine der vier Derivierten, sofern dieselbe beschränkt ist; ferner existiert dann die Ableitung, außer vielleicht für die Punkte einer Menge vom Maß Null, und es genügt, das Integral über die Menge von Punkten zu nehmen, in denen die Ableitung existiert.

2. Allgemeiner: *Ist eine endliche Derivierte summierbar, so sind*

---

leitung: Es sei

$$F(x) = \sqrt[3]{x}; \quad \text{also} \quad F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

dann ist die Funktion

$$\mathfrak{F}(x) = \begin{cases} F(x) + a & \text{für } x < 0 \\ F(x) + b & \text{,, } x = 0 \\ F(x) + c & \text{,, } x > 0, \end{cases}$$

wobei

$$a < b < c$$

sei, eine unstetige primitive Funktion von $F'(x)$.*

789) *Die ersten allgemeinen Ergebnisse über das Aufsuchen der primitiven Funktionen mittels Integration finden sich (für beschränkte, integrierbare Derivierte) in den in [778]) zitierten Arbeiten von *P. du Bois-Reymond, U. Dini, A. Harnack.**

790) *H. Lebesgue*, Leçons sur l'intégration, p. 120/5. *1. im wesentlichen schon in Thèse, p. 42/4 = Annali, p. 272/4.*

ihre unbestimmten Integrale zugleich die (stetigen) primitiven Funktionen dieser Derivierten. Auch in diesem Falle existiert die Ableitung, ausgenommen vielleicht für eine Punktmenge vom Maß Null: mithin ist eine Funktion beschränkter Schwankung mit einer endlichen Derivierten das unbestimmte Integral ihrer Ableitung, wobei das Integral lediglich über die Menge der Punkte zu erstrecken ist, in denen die Ableitung existiert.[791])

*Der allgemeinste derartige Satz ist von *W. H. Young*[792]) und von *C. Carathéodory*[793]) bewiesen worden[793a]), nämlich:

3. *Ist eine Derivierte $f(x)$ einer stetigen Funktion $F(x)$ in einem Intervall summierbar und dort überall, außer höchstens in einer abzählbaren Menge, endlich, so ist $F(x)$ ein unbestimmtes Integral dieser Derivierten $f(x)$.* Da die beschränkte Schwankung von $F(x)$ stets hinreichend ist für die Summierbarkeit ihrer Derivierten [Nr. **41**], so folgt hieraus der schon früher zuerst von *W. H. Young*[794]) und dann auch von *M. B. Porter*[795]) bewiesene Satz: Die stetige Funktion $F(x)$ beschränkter Schwankung, von der eine Derivierte endlich ist, außer höchstens in einer abzählbaren Menge, ist ein unbestimmtes Integral dieser Derivierten. Diese beiden Sätze geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $F(x)$ ein unbestimmtes Integral ihrer Derivierten ist, wenn letztere endlich ist, abgesehen vielleicht von abzählbar vielen Stellen. Aber trotzdem kann man von diesem zweiten Satz nicht direkt zu dem ersten kommen, solange man noch nicht weiß [was allerdings aus dem ersten Satz unmittelbar folgt], daß für die Summierbarkeit einer Derivierten, die von höchstens abzählbar vielen Stellen abgesehen endlich ist, die beschränkte Schwankung ihrer primitiven Funktion $F(x)$ notwendig ist.*

791) Dieser Satz hat zu einer (schon in den Zitaten der vorhergehenden Nrn. mehrfach angedeuteten) Kontroverse zwischen *H. Lebesgue* und *B. Levi* Veranlassung gegeben, die, ohne die Richtigkeit der Behauptungen in Frage zu stellen, dazu geführt hat, die Form der Beweise zu verschärfen; *doch sind es im ganzen nur geringfügige Ergänzungen oder Korrekturen, die *H. Lebesgue* seinen Beweisen hinzuzufügen hatte, um sie völlig einwandfrei zu machen.* Vgl. *B. Levi*, Atti Accad. Linc. Rend. (5) 15 I (1906), p. 433/8, *551/8*, 674/84; (5) 15 II (1906), p. 358/68; *H. Lebesgue*, ibid. (5) 15 II (1906), p. 3/8; (5) 16 I (1907), p. 92/100, 283/90.

792) **W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 12 (1913), p. 207/17; siehe dazu auch [794]) und *G. Chisholm Young*[760]), p. 152/3.*

793) **C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 597/99.*

793a) *Für eine nur reduzible Ausnahmemenge findet sich der analoge Satz schon vorher bei *B. Levi*[771]).*

794) **W. H. Young*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 16 (1910/12 [1910]), p. 35/8. [Ein weniger besagender Satz bei *W. H. Young* und *G. Chisholm Young*[787]), p. 334/5.]*

795) **M. B. Porter*, Bull. Amer. Math. Soc. 22 (1915/6), p. 109/111.*

Trotz des vorstehenden ist eine stetige Funktion $F(x)$ von beschränkter Schwankung nicht notwendig ein unbestimmtes Integral [vielmehr müßte sie zu diesem Zweck nach Nr. **44** sogar totalstetig sein]. Die Ableitung $F'(x)$ dieser Funktion ist summierbar auf der Menge E derjenigen Punkte von $[a, b]$, in denen sie existiert und endlich ist (die übrigen Punkte von $[a, b]$ bilden nur eine Nullmenge); jedoch stellt das Integral $\int_E F'(x)\,dx$ nicht immer $(F(b) - F(a))$ dar, sondern der Unterschied zwischen beiden Größen ist gleich der „Variation" von $F(x)$ in der Komplementärmenge von E bezüglich $[a, b]$.[796]) *In anderer Formulierung: Nach Nr. 22 kann man die stetige Funktion $F(x)$ von beschränkter Schwankung im Intervall $[a, b]$ in eindeutiger Weise als Summe einer totalstetigen Funktion $\varphi(x)$ und einer in a verschwindenden Funktion $\psi(x)$ von konstanter λ-Variation darstellen; dann ist

$$\int_E F'(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

d. h. $\varphi(x)$ ist ein unbestimmtes Integral einer jeden Derivierten von $F(x)$, und der eben besprochene Unterschied zwischen $(F(b) - F(a))$ und $\int_E F'(x)\,dx$ wird durch $(\psi(b) - \psi(a))$ dargestellt.[797]). Daraus folgt dann [da nach Nr. **44** die unbestimmten Integrale mit den totalstetigen Funktionen identisch sind] der zuerst von *H. Lebesgue*[798]) aufgestellte Satz:*

Damit eine stetige Funktion ein unbestimmtes Integral einer ihrer vier Derivierten, erstreckt über die Endlichkeitspunkte der letzteren, dar-

---

796) *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse infinitésimale 1, 2. éd. (Louvain-Paris 1909), p. 269/72; *3. éd. (1914), p. 277/9. Er versteht dabei unter der „Variation" einer Funktion $F(x)$ auf einer meßbaren Menge M folgendes: Man umgebe M mit abzählbar vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen $(\alpha_n \beta_n)$ und bilde $\sum_n [F(\beta_n) - F(\alpha_n)]$. Ist diese Summe absolut konvergent und existiert ein eindeutig bestimmter Grenzwert der Summe, wenn man die Längensumme der Intervalle gegen das Maß von M konvergieren läßt, so nennt er diesen Grenzwert die „Variation" von $F(x)$ auf M.*

Vgl. auch Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 475/8 u. 484/5; Intégrales de Lebesgue, p. 93/4.

797) *Vgl. dazu *H. Lebesgue*, Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 417/24; *Ch J. de la Vallée Poussin*, Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 484/5; *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 589.*

798) *H. Lebesgue*, Atti Accad. Linc. Rend. (5) 16 I (1907), p. 285; *vgl. auch *G. Vitali*, Atti Accad. Torino 43 (1907/8), p. 238/43, sowie [796]), [797]) und *L. Tonelli*[737]).*

stelle, ist notwendig und hinreichend, daß jene Funktion ein unbestimmtes Integral, also eine totalstetige Funktion sei.

*Aus dem vorstehenden darf man *nicht* etwa schließen, daß stets durch Kenntnis einer Derivierten $f(x)$ einer totalstetigen Funktion $F(x)$ *jede* stetige primitive Funktion von $f(x)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist und mittels des unbestimmten *Lebesgue*schen Integrals von $f(x)$ erhalten wird (sondern nur die totalstetigen primitiven Funktionen sind als solche bis auf eine Konstante durch $f(x)$ bestimmt). Es existieren nämlich totalstetige Funktionen $F(x)$, von denen alle Derivierten in einer perfekten Nullmenge A gleich $+\infty$ sind.[799] Nach Nr. **42** sind also durch die Kenntnis einer dieser (sicher summierbaren) Derivierten $f(x)$ die stetigen primitiven Funktionen von $f(x)$ nicht bis auf eine additive Konstante bestimmt; es gibt vielmehr zu diesem $f(x)$ stetige Funktionen $\Phi(x)$, die nicht totalstetig sind und deren entsprechende Derivierte mit $f(x)$ zusammenfällt. Man kann also auf Grund von Nr. **42** sagen:

Damit die *sämtlichen* stetigen primitiven Funktionen einer Derivierten $f(x)$ durch das unbestimmte Integral von $f(x)$ dargestellt werden, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ eine in höchstens abzählbar vielen Stellen unendliche Derivierte einer totalstetigen Funktion sei.

Natürlich dürfen im übrigen bei diesem und allen vorangehenden Sätzen die Werte der Derivierten in einer Nullmenge unbekannt sein.

Aus den vorstehenden Betrachtungen und aus dem weiter oben[800] angegebenen Beispiel einer endlichen, nicht summierbaren Ableitung geht noch hervor, daß die Umfänge der vorhin erwähnten Bedingungen a) und b) sich keineswegs decken, sondern sich gegenseitig überschneiden; d. h. eine Derivierte kann summierbar sein, ohne ihre stetigen primitiven Funktionen bis auf eine additive Konstante zu bestimmen, und umgekehrt.*

*Das bisher Gesagte bezieht sich ausschließlich auf das *Lebesgue*sche Integral; man kann nun aber noch wesentlich weiterkommen, wenn man in analoger Weise auch das *Denjoy*sche Integral zur Anwendung bringt: *A. Denjoy*[776] hat bewiesen, daß *die unbestimmten speziellen (oder allgemeinen) Denjoyschen Integrale jeder endlichen Ableitung (oder Derivierten) $f(x)$ die [stetigen] primitiven Funktionen von $f(x)$ darstellen.* Also man sieht wieder: was das *Lebesgue*sche Inte-

799) *Derartige Beispiele bei *M. B. Porter*[795] und bei *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 551/3.*

800) *In der Mitte von Nr. **41**.*

gral für die beschränkten Derivierten, das leistet das *Denjoy*sche Integral für die endlichen Derivierten.*

Wir betrachten nun weiterhin den Fall, wo uns nicht eine, sondern mehrere Ableitungen gleichzeitig vorgelegt sind.[801])

Hat man eine endliche Anzahl von Ableitungen und kennt man eine primitive Funktion einer jeden von ihnen, so erhält man eine primitive Funktion der Summe dieser Funktionen, indem man die Summe jener primitiven Funktionen bildet.

Sind die Ableitungen in unendlicher Zahl vorhanden, derart, daß sie eine gleichmäßig konvergente Reihe bilden, so stellt ihre Summe eine Ableitung dar, von der man eine primitive Funktion erhält, indem man die Summe der primitiven Funktionen einer jeden von ihnen bildet: nur muß man die Konstanten derart wählen, daß die Reihe der primitiven Funktionen für einen Wert der Veränderlichen konvergiert.[802])

In dem Falle einer Reihe von nicht negativen Ableitungen, die gegen eine Ableitung konvergiert, erhält man gleichfalls eine primitive Funktion der Summe, indem man die Summe von primitiven Funktionen der Glieder der Reihe bildet: sofern nach geeigneter Wahl der Konstanten die Reihe der primitiven Funktionen konvergiert.

Bezeichnet man mit $f_n(x)$ die Summe der n ersten Glieder der Reihe, so kann man den vorstehenden Satz auch folgendermaßen aussprechen: *Konvergieren Ableitungen $f_n(x)$ wachsend gegen eine Ableitung $f(x)$, so haben ihre primitiven Funktionen eine primitive Funktion von $f(x)$ zur Grenzfunktion.*[803]) Dabei ist vorausgesetzt, daß die auf die Konstanten bezügliche Bedingung beständig beachtet wird.[804])

*Wir sind bisher stets von einer Funktion $f(x)$ ausgegangen, von der bekannt ist, daß sie eine Ableitung oder Derivierte ist. Wie aber kann man feststellen, daß eine Funktion $f(x)$ tatsächlich eine Ableitung oder Derivierte ist? Als Antwort darauf ergibt sich wegen Satz 2., 3. unserer Nr.: Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ endlich,

801) *Vgl. dazu *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration, p. 85/9, sowie den Schluß von Nr. **37**, insbesondere [713]).*

802) *H. Lebesgue* [801]), p. 88; Bull. sc. math. [40 =] (2) 29 (1905), p. 272/5] leitet aus diesem Satz einen Beweis dafür ab, daß jede stetige Funktion eine Ableitung ist; bei diesem Beweis wird die Integration nicht benutzt.

803) *Vgl. auch Nr. **49** bei [896]).*

804) Die Grenzfunktion $f(x)$ von Ableitungen $f_n(x)$, die mit n wachsen, ist nicht immer eine Ableitung. Z. B. wenn für $x \geqq 0$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

ist, so hat man $f(x) = 1$ für $x > 0$ und $f(0) = 0$.

abgesehen höchstens von abzählbar vielen Stellen, und summierbar, so ist $f(x)$ daselbst dann und nur dann eine Ableitung bzw. eine Derivierte, wenn $f(x)$ in $[a, b]$ gleich der Ableitung bzw. Derivierten ihres unbestimmten Integrals $F(x)$ ist. Ist $f(x)$ nicht summierbar, so kann man das *Denjoy*sche Integral heranziehen: Die in $[a, b]$ endliche Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann eine Ableitung bzw. Derivierte, wenn $f(x)$ in $[a, b]$ totalisierbar und gleich der Ableitung bzw. Derivierten ihres unbestimmten *Denjoy*schen Integrals $F(x)$ ist.*

*In Nr. **40** ist hervorgehoben worden, daß die Ableitung des unbestimmten Integrals einer summierbaren (oder speziell-totalisierbaren) Funktion $f(x)$ fast überall existiert, endlich ist und mit $f(x)$ übereinstimmt. Daraus folgt, daß eine beliebige summierbare (oder speziell-totalisierbare) Funktion $f(x)$ fast überall gleich der Ableitung einer stetigen Funktion $F(x)$ ist. Darüber noch hinausgehend hat *N. Lusin*[805]) folgendes Resultat erhalten[805a]): Wenn die Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ meßbar und fast überall endlich ist, dann existiert (mindestens) eine in $[a, b]$ stetige Funktion $F(x)$, die dort fast überall $f(x)$ als Ableitung besitzt. Da die Beweismethode die Mittel zur Berechnung von $F(x)$ liefert, kann man sagen, daß auf diese Weise im allerallgemeinsten Fall die Auffindung von primitiven Funktionen möglich ist, wenn man die Mengen vom Maß Null vernachlässigt.*

44. Funktionen, die unbestimmte Integrale sind. Unter welchen Bedingungen ist eine Funktion $F(x)$ das unbestimmte *Lebesgue*sche Integral einer anderen Funktion? Diese Frage hat *H. Lebesgue* folgendermaßen beantwortet:

Damit eine Funktion $F(x)$ ein unbestimmtes Lebesguesches Integral sei, ist notwendig und hinreichend, daß $F(x)$ totalstetig sei.[806])

805) **N. Lusin*[749]) [siehe insbesondere das letzte Zitat, p. 88/95] sowie Paris C. R 162 (1916), p. 975/8. Vgl. dazu auch eine Bemerkung von *D. T. Egoroff,* Paris C. R. 154 (1912), p. 1474/5, der darauf hinweist, daß man im allgemeinsten Fall $F(x)$ nicht durch einen integralartigen Prozeß erhalten kann, wenn man hierbei gewisse einfache Eigenschaften des Integrals beibehalten will.

Siehe außerdem *A. Denjoy,* Ann. Éc. Norm. (3) 34 (1917), p. 182/3, wo eine Verallgemeinerung der *Lusin*schen Frage behandelt wird.*

805a) *Wie in anderem Zusammenhang schon in [749a]) erwähnt.*

806) Diesen Satz hat zuerst *H. Lebesgue* in einer Fußnote zu p. 129 seiner Leçons sur l'intégration angegeben. *G. Vitali,* Atti Accad. Torino 40 (1904/5), p. 1021/34, hat ihn von neuem aufgestellt und bewiesen. *H. Lebesgue* hat erst etwas später in den Atti Accad. Linc. Rend. 16 I (1907), p. 286/8 den Beweis seines Satzes veröffentlicht.

H. Lebesgue hat dabei den Begriff, aber nicht die auf *G. Vitali* (a. a. O.) zurückgehende Benennung der absolut stetigen oder total stetigen Funktionen benutzt. *Siehe hierüber Nr. **22**.*

*Hierin ist enthalten: Jedes unbestimmte *Lebesgue*sche Integral ist eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung; aber im allgemeinen ist keineswegs das Umgekehrte der Fall (obgleich nach Nr. **41** jede stetige Funktion beschränkter Schwankung summierbare Derivierte besitzt).*

*Wann ist nun speziell eine Funktion $F(x)$ ein unbestimmtes *Riemann*sches Integral? Diese Frage hat *H. Lebesgue*[807]) folgendermaßen beantwortet: Damit $F(x)$ ein *unbestimmtes Riemannsches Integral* sei, ist notwendig und hinreichend, daß $F(x)$ beschränkte Derivierte habe und daß außerdem eine dieser Derivierten [und dann von selbst auch die andern drei] fast überall stetig sei.*

*Es sei noch erwähnt, daß *W. H. Young*[808]) die Summe eines unbestimmten *Lebesgue*schen Integrals (also einer totalstetigen Funktion) und einer monoton wachsenden [bzw. abnehmenden] Funktion als *„oberes* [bzw. *unteres*] *Halbintegral“* (*„upper* [*lower*] *semiintegral“*)[809]) bezeichnet und eingehend untersucht hat. Eine Funktion, die zugleich ein oberes und ein unteres „Halbintegral“ ist, ist ein *Lebesgue*sches Integral.*

*Ähnlich wie für das *Lebesgue*sche (und *Riemann*sche) Integral kann man auch nach den wesentlichen Eigenschaften des unbestimmten *Denjoy*schen Integrals fragen. *N. Lusin*[737]) hat gezeigt, daß jedes unbestimmte spezielle *Denjoy*sche Integral eine stetige Funktion von „verallgemeinerter beschränkter Schwankung“[467a]) sei. Durch Hinzunahme einer der Totalstetigkeit analogen Bedingung gibt *N. Lusin*[737]) eine genaue Charakterisierung des unbestimmten speziellen *Denjoy*schen Integrals und *A. Khintchine*[758]) hat das Entsprechende für die von ihm gegebene Erweiterung des speziellen *Denjoy*schen Integrals angedeutet. Und schließlich hat *A. Denjoy*[810]) gezeigt, daß die *unbestimmten „allgemeinen Denjoyschen Integrale“* sich völlig decken mit den von ihm sogenannten *„fonctions résolubles“* oder ausführlicher *„fonctions à variation résoluble“*, sofern diese Funktionen stetig sind. Er bezeichnet so eine in $[a, b]$ definierte Funktion $F(x)$, wenn jede perfekte Nullmenge M von $[a, b]$ eine perfekte Teilmenge M_1 enthält, so daß, falls α und β die Endpunkte von M_1 und $(\alpha_n \beta_n)$ die in

807) **H. Lebesgue*, Ann. Fac. sc. Toulouse [23 =] (3) 1 (1909), p. 40/2.*

808) **W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910), p. 286/324.*

809) **H. Hahn*, Theorie der reellen Funktionen I, Berlin 1921, p. 526, benutzt hierfür die Bezeichnung: *„nach oben* (bzw. *nach unten*) *totalstetige Funktion“*.*

810) **A. Denjoy*, Paris C. R. 162 (1916), p. 377/80; Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), p. 156, 172/5; (3) 34 (1917), p. 181/201.*

(α, β) enthaltenen Lückenintervalle von M_1 sind,

$$\sum_n (F(\beta_n) - F(\alpha_n))$$

absolut konvergiert und

$$F(\beta) - F(\alpha) - \sum_n (F(\beta_n) - F(\alpha_n)) = 0$$

ist.[811])*

F. Riesz hat notwendige und hinreichende Bedingungen aufgesucht dafür, daß eine Funktion $F(x)$ das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ einer bestimmten Kategorie sei.

Er bezeichnet als Funktion der Klasse $[L^p]$ $(p > 1)$ eine im Intervall $[a, b]$ summierbare Funktion $f(x)$, für die auch $|f(x)|^p$ im gleichen Intervall summierbar ist. Nun zeigt er, daß jede der Klassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ von der Menge derjenigen Funktionen gebildet wird, deren Produkt mit irgendeiner Funktion der anderen Klasse summierbar ist; ist speziell $p = 2$, so stellt, wie man sieht, das Produkt zweier summierbarer Funktionen von summierbarem Quadrat eine summierbare Funktion dar. Man erhält nun den folgenden Satz:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $F(x)$ ein unbestimmtes Integral einer Funktion der Klasse $[L^p]$ sei, besteht darin, daß die Summe

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{|F(a_{k+1}) - F(a_k)|^p}{(a_{k+1} - a_k)^{p-1}},$$

in der $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m = b$ eine Einteilung des Intervalls $[a, b]$ bilden, unter einer von der Art der Einteilung unabhängigen oberen Schranke liegt.[812])

811) *Diese „fonctions résolubles" besitzen fast überall eine „approximative Ableitung"; siehe hierüber Nr. **44b**. *A. Denjoy* definiert in [810]), letztes Zitat, das allgemeine *Denjoy*sche Integral von $f(x)$ geradezu durch die charakteristischen Eigenschaften, eine stetige „fonction résoluble" zu sein, welche fast überall f zur „approximativen Ableitung" besitzt, und leitet dann hieraus die in Nr. **35c** angegebenen Konstruktionsprinzipien und Bedingungen ab. — Bei gegebenem $f(x)$ ist $\int_D f(x)\,dx$ durch diese charakteristischen Eigenschaften bis auf eine additive Konstante bestimmt. —

Vgl. ferner auch die in [662a]) zitierten Noten, wo sich eine Charakterisierung derjenigen Funktionen findet, die durch den dort angegebenen integralartigen Prozeß entstehen.*

812) *F. Riesz*, Math. Ann. 69 (1910), p. 462/4. *E. Fischer*, Paris C. R. 144 (1907), p. 1148/51, hat schon früher in etwas anderer Form die Bedingungen für den Fall $p = 2$ gegeben. Seine Resultate lassen sich auf die übrigen Werte von p ausdehnen. Für $p = 2$ hatte auch *F. Riesz* sein Kriterium schon aufgestellt und angewendet, nämlich in Math. termész. értesitö 27 (1909), p. 230/40; Mathematikai és

Ferner: *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $F(x)$ das unbestimmte Integral einer Funktion beschränkter Schwankung sei, besteht darin, daß die Summe*

$$\sum_{k=1}^{k=m-1} \left| \frac{F(a_{k+1}) - F(a_k)}{a_{k+1} - a_k} - \frac{F(a_k) - F(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}} \right|$$

unter einer von der Art der Einteilung des Intervalls $[a, b]$ unabhängigen oberen Schranke liegt.[813])

44a. ***Allgemeinere Auffassung des unbestimmten Integrals.** *H. Lebesgue*[872]) hat im Jahre 1910 für die Auffassung des unbestimmten Integrals einen neuen Gesichtspunkt beigebracht, der allerdings seine Bedeutung und Fruchtbarkeit erst bei Funktionen mehrerer Veränderlichen erweist und daher erst in Nr. 47 voll zur Geltung kommen wird, zumal bei diesem Standpunkt die Zahl der Veränderlichen ganz gleichgültig ist. Hier sei für die Funktionen einer Veränderlichen nur so viel vorläufig erwähnt: Bei der bisher immer betrachteten Form des unbestimmten Integrals von $f(x)$

$$F(x) = C + \int_a^x f(x)\,dx \tag{1}$$

kann man die willkürliche Konstante C beseitigen, wenn man an Stelle von $F(x)$ nur Funktionsdifferenzen betrachtet. Es wird so jedem (dem Definitionsbereich angehörenden) Intervall $[\alpha, \beta]$ eine eindeutig bestimmte Zahl

$$\mathfrak{F}([\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \tag{2}$$

zugeordnet, d. h. das unbestimmte Integral (1) definiert in eindeutig bestimmter Weise die *Intervallfunktion* (2). *H. Lebesgue* führt nun statt dieser Intervallfunktion gleich allgemeiner die entsprechende *Mengenfunktion* ein: $f(x)$ sei in $[a, b]$ summierbar und es sei e eine beliebige meßbare Teilmenge von $[a, b]$; dann ist

$$\mathfrak{F}(e) = \int_e f(x)\,dx \tag{3}$$

---

physikai lapok 19 (1910), p. 177 [beides ungarisch]. *Vgl. für $p = 2$ auch *K. Popoff*, Math. Ann. 86 (1922), p. 154/7, und *L. Neder*, Math. Ann. 87 (1922), p. 315/6. Verallgemeinerungen der Betrachtungen von *F. Riesz* hat *W. H. Young*, Proc. Roy. Soc. London 87 A (1912), p. 225/9 gegeben; vgl. ferner Nr. 35 c, insbes. *J. Radon*[676]).*

813) *F. Riesz*, Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 33/36. Dieser Satz findet sich auch in einer etwas anderen Form in einer Note von *F. Riesz* über die linearen Funktionaloperationen [Paris C. R. 149 (1909), p. 974].

eine eindeutig bestimmte Funktion der meßbaren Mengen e und diese bezeichnet *H. Lebesgue* als das *unbestimmte Integral von* $f(x)$. Er zeigt, daß diese unbestimmten Integrale mit den additiven totalstetigen Mengenfunktionen [Nr. 22] der Mengen e identisch sind. Für diese wird nun (wieder unabhängig von der Zahl der Veränderlichen) eine *Ableitung* definiert und untersucht; auch hierüber siehe Nr. 47. Hier sei nur noch bemerkt, daß man bei *einer* Veränderlichen, mit dem Üblichen übereinstimmend, als Ableitung an der Stelle x_0 definieren kann:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\mathfrak{F}(\delta)}{\delta},$$

wobei unter δ irgendein den betrachteten Punkt x_0 enthaltendes Intervall verstanden wird.[814]*

44 b. *Die approximativen Ableitungen.* *A. Khintchine*[815]) und ungefähr gleichzeitig *A. Denjoy*[816]) haben, im Zusammenhang mit der Untersuchung des allgemeinen *Denjoy*schen Integrals, den Begriff der Ableitung einer Funktion $F(x)$ in folgender Weise verallgemeinert: Wenn es eine meßbare Menge E gibt, welche im Punkte x_0 die Dichte 1 hat, so daß unter Beschränkung auf die Punkte x von E

$$(1) \qquad F^{[1]}(x_0) = \lim_{x=x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

existiert, so sagt *A. Khintchine*, $F(x)$ habe im Punkte x_0 die *„asymptotische Ableitung"* $F^{[1]}(x_0)$; *A. Denjoy* gebraucht hierfür die Bezeichnung *„approximative Ableitung"*.[817])[818])

---

814) *Eine Darstellung der *Lebesgue*schen Theorie für den Spezialfall der Funktionen einer Veränderlichen findet sich bei *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 453/86; vgl. auch Intégrales de Lebesgue, p. 90/5.*

815) **A. Khintchine,* Paris C. R. 162 (1916), p. 287/91.*

816) **A. Denjoy,* Paris C. R. 162 (1916), p. 377/80; Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), p. 168/75.*

817) **A. Denjoy*[816]) hat diesem Begriff einen noch etwas allgemeineren an die Seite gestellt, indem er auch den Fall betrachtet, wo E in x_0 nicht die Dichte 1, sondern (auf beiden Seiten oder nur auf einer Seite von x_0) eine untere Dichte $> \alpha$ hat.*

818) *Schon etwas früher hat *A. Denjoy,* Paris C. R. 158 (1914), p. 1003/6; Bull. Soc. math. France 43 (1915), p. 165/86, in ähnlicher Weise *„approximativ stetige"* Funktionen definiert und näher untersucht. Er bezeichnet eine Funktion $f(x)$ als approximativ stetig im Punkt x_0, wenn $f(x)$ in x_0 stetig ist auf einer Menge E, die in x_0 von der Dichte 1 ist, d. h. wenn unter Beschränkung auf die Punkte x von E

$$f(x_0) = \lim_{x=x_0} f(x) \quad \text{ist.}$$

Von seinen Sätzen hierüber erwähnen wir: Jede meßbare Funktion $f(x)$ ist fast überall approximativ stetig. [Vgl. dazu den Schluß von Nr. 57 a.] Ferner: Eine beschränkte, in jedem Punkt approximativ stetige Funktion ist eine Ableitung. Vgl. auch [735]).*

Es bestehen dann für diesen Begriff und das allgemeine *Denjoy*sche Integral analoge Zusammenhänge, wie wir sie für die gewöhnliche [„exakte“ oder „allgemeine“] Ableitung und das *Lebesgue*sche Integral kennen. Insbesondere gilt nach *A. Khintchine*[815]) und *A. Denjoy*[819]) der Satz, daß das unbestimmte allgemeine *Denjoy*sche Integral den Integranden fast überall als approximative Ableitung besitzt (ein Satz, der nicht mehr allgemein richtig wäre, wenn man die approximative Ableitung durch die gewöhnliche Ableitung ersetzen würde). Also ist auch jede endliche Derivierte einer stetigen Funktion $F(x)$ zugleich fast überall eine approximative Ableitung von $F(x)$.[820]) Ferner hat *A. Khintchine*[821]) den Satz bewiesen: Damit eine meßbare Funktion $F(x)$, die im Intervall $[0, 1]$ definiert ist, eine endliche approximative Ableitung $F^{[1]}(x_0)$ fast überall in $[0, 1]$ besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine perfekte Menge P von einem $(1 - \varepsilon)$ übersteigenden Maß angeben kann, derart, daß $F(x)$ in P totalstetig ist. Dabei heiße $F(x)$ „in P totalstetig“, wenn man bei Bildung der „Nullvariation“ [Nr. 22] von $F(x)$ nur die zu P gehörenden Punkte benutzt und wenn die so gebildete „Nullvariation“ verschwindet.[822])*

Integrale und Ableitungen der Funktionen mehrerer Veränderlichen.

45. Meßbare Funktionen. Summierbare Funktionen. Mehrfache Lebesguesche Integrale. Die Definitionen des bestimmten Integrals einer beschränkten Funktion einer Veränderlichen nach *A. L. Cauchy* und *B. Riemann* lassen sich unmittelbar auf die Funktionen mehrerer Veränderlichen ausdehnen[823]); ebenso die Definition der oberen und unteren Integrale. Das gleiche gilt von *H. Lebesgues*

---

819) *A. Denjoy*[816]) sowie Ann. Éc. Norm. (3) 34 (1917), p. 184. — Bei *A. Khintchine* ist der Satz ohne Beweis angegeben; er ist erst bei *A. Denjoy* bewiesen. — Vgl. auch [811]).*

820) *Siehe dazu auch *A. Denjoy*[818]), zweites Zitat, p. 181.*

821) *A. Khintchine,* Paris C. R. 164 (1917), p. 142/4.*

822) *A. Khintchine*[821]) gibt (ohne Beweis) auch einen Zusammenhang zwischen der approximativen und der exakten Ableitung an: Damit eine meßbare Funktion $f(x)$, die in jedem Punkt eines Intervalls die approximative Ableitung einer meßbaren Funktion $F(x)$ ist, in jedem Punkt dieses Intervalls die exakte Ableitung von $F(x)$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ dort kleiner als die exakte Ableitung $\varphi(x)$ einer stetigen Funktion $\Phi(x)$ sei. Speziell ist demnach die approximative Ableitung sicher eine exakte Ableitung, wenn sie beschränkt ist.*

823) *Vgl. auch II A 2, Nr. 38 (*A. Voß*).*

Definition der meßbaren und der summierbaren Funktionen, sowie von der Definition des *Lebesgue*schen Integrals.[824])

Eine Funktion f heißt wieder *meßbar*, wenn die Menge aller Punkte, in denen man

$$\alpha \leqq f \leqq \beta$$

hat, meßbar ist, was auch α und β sind.[595])

Die Summe und das Produkt mehrerer meßbaren Funktionen sind meßbare Funktionen; der Grenzwert einer Folge von meßbaren Funktionen ist eine meßbare Funktion. Da eine Konstante und die Funktionen $x, y, z, \ldots$ meßbar sind, so ist jedes Polynom meßbar, also auch jede Funktion, die in bezug auf die Gesamtheit der Veränderlichen stetig ist, und jede Funktion einer der *Baire*schen Funktionenklassen. Eine in bezug auf jede einzelne ihrer p Variablen stetige Funktion ist meßbar; denn sie ist höchstens von der Klasse $p-1$ [*vgl. Nr. 58.*]

Sei f eine beschränkte meßbare Funktion, g und G ihre untere und obere Grenze im Bereiche B; schieben wir zwischen g und G $n-1$ wachsende Zwischenwerte ein und bilden wir die Folge:

$$g = l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n = G.$$

Sei

$$E[l_i \leqq f < l_{i+1}]$$

die meßbare Menge aller Punkte in B, für die $l_i \leqq f < l_{i+1}$ ist, und sei

$$m\{E[l_i \leqq f < l_{i+1}]\}$$

das Maß dieser Menge (das lineare Maß im Falle einer, das Flächenmaß im Falle zweier, das Raummaß im Falle dreier Veränderlichen usw.). Die Summen[598])

$$\sigma = \sum_{i=0}^{i=n} l_i m\{E[l_i \leqq f < l_{i+1}]\},$$

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{i=n} l_i m\{E[l_{i-1} < f \leqq l_i]\}$$

haben einen gemeinsamen Grenzwert, wenn das Maximum der Differenzen $l_i - l_{i-1}$ gegen Null konvergiert. Dieser Grenzwert ist das *Lebesgue*sche Integral, erstreckt über den Bereich B, und man nennt dann die Funktion f *in* B *summierbar.* Jede meßbare beschränkte Funktion ist summierbar.

Es werde die Funktion f von p Veränderlichen nur für die Punkte einer beschränkten meßbaren Menge E betrachtet, sei ferner B ein p-dimensionaler Bereich, der alle Punkte von E enthält, und φ eine Funktion, die in allen Punkten von E gleich f und in allen Punkten

824) *H. Lebesgue,* Thèse, p. 44/51 = Annali, p. 274/81.*

von B, die nicht zu E gehören, Null ist: Das über die Menge E erstreckte Integral von f ist dann nach Definition gleich dem Integral von φ über dem Bereiche B. *Oder man kann wieder das Integral über E[603]) direkt definieren, indem man in der obigen Definition des *Lebesgue*schen Integrals ausschließlich die zu E gehörenden Stellen benutzt.*[825])

Die Definition des Integrales einer nicht beschränkten Funktion von mehreren Variablen ist ebenfalls ganz gleich der auf den Fall einer einzigen Variablen bezüglichen Definition.

So, wie die Begriffe und Definitionen, überträgt sich auch ein sehr großer Teil der Sätze und Überlegungen ohne irgendeine Änderung auf die Funktionen von mehreren Veränderlichen; es tritt eben hierbei die Anzahl der Veränderlichen überhaupt nicht in die Erscheinung. In manchen Betrachtungen allerdings macht sich die Zahl der unabhängigen Veränderlichen bemerkbar.[826]) In diesen Fällen lassen sich im großen und ganzen die Sätze über die mehrfachen *Riemann*schen Integrale[827]) auf die *Lebesgue*schen Integrale der summierbaren Funktionen ausdehnen; wir beschränken uns dabei, der bequemeren Ausdrucksweise halber, auf den Fall zweier Variablen.

Das Wichtigste ist hier die Zurückführung des mehrfachen Integrals auf wiederholte einfache Integration.[828])

Wir bemerken zunächst: Ist eine ebene Menge E flächenhaft nach *Borel* meßbar, so ist die Menge aller Punkte von E, die auf einer beliebigen Geraden der Ebene liegen, eine linear nach *Borel* meßbare Menge; aber für eine (nach *Lebesgue*) meßbare ebene Menge E, die keine nach *Borel* meßbare Menge ist, braucht die Menge der Punkte von E, die auf einer beliebigen Geraden liegen, keineswegs immer linear

825) Ist f eine beschränkte, nicht meßbare Funktion, so wird das *obere* und das *untere Lebesgue*sche Integral von f wieder wörtlich genau so definiert wie in Fußn. [605]) oder wie in Nr. **31**.

826) *Eine auch für solche Fälle anwendbare direkte Methode zur Übertragung von Eigenschaften einfacher Integrale auf mehrfache Integrale hat *B. H. Camp*, Math. Ann. 75 (1914), p. 274/89 angegeben.*

827) *Vgl. II A 2, Nr. **38—41** und **43—47** (*A. Voß*), sowie II A 3, Nr. 8 (*G. Brunel*).*

828) *Bezüglich der Zurückführung *Riemann*scher Doppelintegrale auf iterierte Integrale siehe II A 2, Nr. **39** (*A. Voß*), sowie außerdem: *A. Schoenflies*, Bericht I 1900, p. 192/6; *B. Levi*, Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 322;* *E. W. Hobson*, Theory, p. 421/8, *und (auf Grund der in Nr. **29** bei [576]) angegebenen allgemeineren Auffassung des *Riemann*schen Integrals) *J. Pierpont*, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 428/31; Lectures 1, p. 537/47; 2, p. 11/20; *E. B. Lytle*, Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1910), p. 25/36. — Wegen der betreffenden Untersuchungen bei uneigentlichen Integralen siehe Fußn. [843]).*

meßbar zu sein.[824]) Jedoch ist diese Menge [*nach *G. Fubini*[831])*] immer noch auf jeder Geraden (irgend)einer Parallelschar meßbar, außer vielleicht für eine Menge von Geraden, deren Schnittpunkte mit einer festen Geraden eine Menge vom Maß Null bilden.[829])

H. Lebesgue[824]) beweist nun mit Hilfe der vorstehenden Bemerkung, soweit sie sich auf die nach *Borel* meßbaren Mengen bezieht, eine grundlegende Reduktionsformel, in der $\varphi(x, y)$ eine Funktion bedeutet, die in allen Punkten der Menge E, über die das Doppelintegral erstreckt wird, gleich der beschränkten, summierbaren Funktion $f(x, y)$ und für alle anderen Punkte des (E einschließenden) Rechteckes
$$D(0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b)$$
gleich Null ist. Diese Formel lautet[830]):

$$\iint\limits_D \varphi(x, y)\, dx\, dy = \underline{\int_0^a} \left(\underline{\int_0^b} \varphi(x, y)\, dy \right) dx = \overline{\int_0^a} \left(\overline{\int_0^b} \varphi(x, y)\, dy \right) dx.$$

Wenn alle Mengen $E[\alpha \leqq f \leqq \beta]$ nach *Borel* meßbar sind (wenn also φ eine in D beschränkte, nach *Borel* meßbare Funktion ist), so hat man die klassische Formel:

$$\iint\limits_D \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_0^a \left(\int_0^b \varphi(x, y)\, dy \right) dx. \tag{1}$$

Formel (1) ist daher sicher anwendbar: auf die bezüglich der Gesamtheit der Veränderlichen stetigen Funktionen, auf die beschränkten Funktionen der *Baire*schen Klassen, unter denen insbesondere die beschränkten, in bezug auf jede einzelne Veränderliche stetigen Funktionen enthalten sind.

G. Fubini[831]) hat sodann den wichtigen Satz[832]) bewiesen, daß die Formel (1) in allen Fällen, in denen das Doppelintegral auf der linken Seite vorhanden ist, anwendbar bleibt unter der Bedingung, daß

---

829) *Daß die Umkehrung dieser Aussage nicht mehr gilt, zeigte neuerdings *W. Sierpiński*[430]).*

830) *Hierin bezeichnet $\underline{\int}$ bzw. $\overline{\int}$ das untere bzw. obere *Lebesgue*sche Integral [siehe [605]) und Nr. 31].*

831) *G. Fubini*, Rend. Accad. Linc. (5) 16 1 (1907), p. 608/14. Siehe auch *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Bull. Ac. Belgique (classe sc.) 12 (1910), p. 768/98; *Intégrales de Lebesgue, p. 50/3;* *E. W. Hobson*, Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1910), p. 22/39; **C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 621/34, sowie (auf Grund der *Pierpont*schen Integraldefinition [Nr. 35 a]): *J. Pierpont*, Lectures 2, p. 394/401, 408/12; *J. K. Lamond*, Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 387/98. Die Untersuchungen der letztgenannten drei Autoren sind allgemein für n Veränderliche geführt.*

832) *Er wird vielfach kurz als der „*Satz von Fubini*“ bezeichnet.*

man auf der rechten Seite alle Werte von x vernachlässigt, für die

$$\int_0^b \varphi(x, y)\, dy$$

nicht existiert, wobei — wie er zeigt — diese Werte eine Menge vom Maß Null bilden.

Mit der gleichen Einschränkung ist nach *G. Fubini*[831]) diese Formel für eine nicht beschränkte, summierbare Funktion gültig.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß man (selbst bei flächenhaft meßbarem, aber nicht-beschränktem φ) in der Formel (1) nicht umgekehrt aus der Existenz des iterierten Integrals auf die Existenz des Doppelintegrals schließen kann; dies ist sogar noch nicht einmal dann erlaubt, wenn man weiß, daß das iterierte Integral sich nicht ändert, wenn man die Reihenfolge der Integrationen nach x bzw. y miteinander vertauscht.[833]) Immerhin kann man bei flächenhaft meßbarem Integranden φ leicht notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, um aus der Existenz des iterierten Integrals auf die Existenz (und dann auch Gleichheit) des Doppelintegrals schließen zu können: Eine solche Bedingung besteht in der Existenz und Endlichkeit des iterierten Integrals für $|\varphi|$ oder für eine zu $|\varphi|$ äquivalente, nicht-negative Funktion[834]); oder auch[835]) in der Existenz und Endlichkeit des iterierten Integrals von φ über jede beliebige meßbare Teilmenge von D.[836])

---

833) *Für *Riemann*sche Integrale war die entsprechende Bemerkung (sogar für beschränktes φ) schon seit längerer Zeit durch Beispiele von *J. Thomae*, Ztschr. Math. Phys. 23 (1878), p. 67, und insbesondere von *A. Pringsheim*, Sitzgsber. Ak. Wiss. München 29 (1899), p. 46/52, bekannt; siehe hierüber II A 2, Nr. 39 (*A. Voß*), Fußn. [238]). Diese Beispiele versagen aber im Falle *Lebesgue*scher Integrale. Für letztere sind einschlägige Beispiele (mit flächenhaft meßbarem, aber nicht-beschränktem φ) von *G. Fubini*[835]), p. 588/9, und *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 634/5, gegeben worden; übrigens leisten dasselbe die ersten Beispiele von uneigentlichen iterierten Integralen, bei denen man die Reihenfolge der Integration nicht ohne Wertänderung vertauschen kann und die bereits von *A. L. Cauchy*, Mémoire sur les intégrales définies [1814], erschienen erst 1827 in Mémoires prés. par div. savants à l'Acad. d. Sc. 1 = Œuvres (I) 1, p. 394/6, und *C. F. Gauß*, Commentationes soc. sc. Gottingensis recentiores 3 (1816), p. 138/9 = Werke 3, p. 62, angegeben worden sind. Ferner liefert [mit Benutzung des Wohlordnungssatzes] *W. Sierpiński*[430]) und Fundamenta mathematicae 1 (1920), p. 142/7, ein entsprechendes Beispiel bei beschränktem, aber nicht flächenhaft meßbarem φ.*

834) **L. Tonelli*[842]), p. 246/8; *E. W. Hobson*[831]), p. 31; *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 636/8.*

835) **G. Fubini*, Rend. Acc. Linc. (5) 22_{I} (1913), p. 584/9.*

836) *Mit diesen Untersuchungen hängt aufs engste die Frage nach der

Durch Anwendung der Formel (1) ergibt sich noch ohne weiteres: Sind die Funktionen f''_{xy} und f''_{yx} beschränkt, so sind sie (weil sie Funktionen *Baire*scher Klassen und daher auch nach *Borel* meßbar sind) auch summierbar, und man hat:

$$f(x,y) - f(0,y) - f(x,0) + f(0,0) = \iint_D f''_{xy}\,dx\,dy = \int_0^x \left(\int_0^y f''_{xy}\,dy\right) dx.$$

Ferner hat man, wenn $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ beschränkt sind, den sogenannten „*Greenschen Satz*" in der Ebene[837]):

$$\iint_B \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C p\,dx + q\,dy, \tag{2}$$

wo der Bereich B durch die rektifizierbare Kurve C begrenzt ist; ebenso hat man die Formel, die ein Volumintegral auf ein Oberflächenintegral zurückführt, den sogenannten „*Gaußschen Satz*"[838]):

Vertauschbarkeit der Integrationsfolge von iterierten Integralen zusammen. [Diese Vertauschbarkeit ist nach dem obigen Satz von *G. Fubini*[831]) natürlich immer gestattet, wenn das Doppelintegral existiert.] Siehe im übrigen hierüber außer [833]), [834]), [835]) noch: *C. Arzelà,* Mem. Acc. Bologna (5) 2 (1892), p. 133/47; *O. Stolz,* Grundzüge 3, p. 1/36; *G. H. Hardy,* Quart. J. of math. 32 (1901), p. 66/140, insbes. 79/85; *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (2) 5 (1907), p. 325/34; *W. H. Young,* Trans. Cambridge Phil. Soc. 21 (1910), p. 361/76; *A. Pringsheim*, Math. Ann. 68 (1910), p. 369/78;* *L. Lichtenstein,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1910, p. 468/75; *Sitzgsber. Berliner Math. Ges. 10 (1911), p. 55/69; *G. Fichtenholz,* Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1913), p. 111/114; *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 638/41; *D. C. Gillespie,* Ann. of math. (2) 20 (1919), p. 224/8. *L. Lichtenstein*, a. a. O. (sowie auch *D. C. Gillespie,* a. a. O.) beweist u. a.: *Wenn die beiden* (durch Vertauschung von x und y sich unterscheidenden) *iterierten Riemannschen Integrale existieren, dann sind sie einander gleich.* [Dies gilt übrigens für nicht-beschränkte Funktionen (uneigentliche Integrale oder *Lebesgue*sche Integrale) im allgemeinen nicht mehr; vgl. [833]). Vermutlich wird es auch nicht ganz allgemein für *Lebesgue*sche Integrale bei beschränkten Funktionen gelten (vgl. *W. Sierpiński*[833]), p. 145; ferner auch *L. Lichtenstein,* a. a. O., 2. Zitat, p. 67/9); doch ist dies noch nicht definitiv entschieden.]*

837) *Siehe hierüber II A 2, Nr. 45 (*A. Voß*); wegen Formel (3) siehe daselbst Nr. 46. [Spätere Arbeiten zu (2), die aber noch *Riemann*sche Integrierbarkeit voraussetzen: *M. B. Porter,* Ann. of math. (2) 7 (1905), p. 1/2; *Ida Barney,* Amer. J. of math. 36 (1914), p. 137/50; *M. Picone,* Rend. Acc. Linc. (5) 28 (1919), p. 270/3; Rend. Circ. mat. Palermo 43 (1918/19), p. 239/54; *E. B. Van Vleck,* Annals of math. 22 (1920/21), p. 226/37].*

838) *Diese Bezeichnung ist in den Darstellungen der Mechanik und Physik jetzt allgemein gebräuchlich; siehe z. B. IV 14, Nr. 5 (*M. Abraham*).*

$$(3) \quad \iiint\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

wenn $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z}$ beschränkt sind.[839])

*Neben der Zurückführung der Doppelintegrale auf iterierte Integrale ist die sogenannte *Transformation* der Doppelintegrale, d. h. die Einführung neuer Veränderlicher ganz besonders wichtig.[840]) Es ergibt sich hier für *Lebesgue*sche Doppelintegrale: Wird das Gebiet G der xy-Ebene umkehrbar eindeutig und stetig auf das Gebiet G_1 der uv-Ebene abgebildet durch die Funktionen $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, die beschränkte partielle Ableitungen besitzen, so gilt die bekannte Transformationsformel

$$(4) \qquad \iint_{G_1} f(u, v)\, du\, dv = \iint_G f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \cdot \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\right| dx\, dy,$$

wobei aus der Existenz des einen Doppelintegrals die des andern folgt. Hierbei ist an solchen Stellen, wo gleichzeitig die Funktionaldeterminante verschwindet und f unendlich ist, der Integrand der rechten Seite gleich Null zu setzen.[841])*

---

839) *P. Montel,* Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907), p. 283/98. Für die Gültigkeit der Formel (2) genügt z. B., daß die vier Derivierten von p bezüglich y und von q bezüglich x in B endlich und flächenhaft summierbar sind. Im ersten Gliede vernachlässigt man dann alle Punkte, für die $\frac{\partial q}{\partial x}$ oder $\frac{\partial p}{\partial y}$ nicht existieren, d. h. man vernachlässigt eine Menge vom Flächenmaß Null; vgl. *Ch. J. de la Vallée Poussin*[831]), erstes Zitat, p. 790/3, *sowie Cours d'Analyse 2 (2. éd.), p. 124/5.*

*Ferner sei auf *C. Poli,* Atti Acc. Torino 49 (1913/14), p. 248/60, und *W. Groß,* Monatsh. Math. Phys. 27 (1916), p. 70/120, insbes. p. 75/9 hingewiesen. Vgl. auch II C 3, Nr. **10** (*L. Lichtenstein*), Fußn. [103]).*

*Bezüglich (3) siehe auch *L. Lichtenstein,* Arch. Math. Phys. 27 (1918), p. 31/7. Wegen der Ausdehnung von (3) für eine beliebige Anzahl n von Veränderlichen sei insbesondere auf *L. E. J. Brouwer,* Proc. Acad. Amsterdam 22 (1919), p 150/4, hingewiesen.*

840) *Siehe hierüber bezüglich *Riemann*scher Integrale II A 2, Nr. **41** (*A. Voß*) und II A 3, Nr. 8 (*G. Brunel*); vgl. auch [843]).*

Die Transformation *Lebesgue*scher Doppelintegrale haben untersucht: *E. W. Hobson*[831]); **Ch. J. de la Vallée Poussin,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 495/501; *H. Rademacher,* Eineindeutige Abbildungen und Meßbarkeit, Göttinger Dissertation 1917, p. 39/54 u. 84/109 = Monatsh. Math. Phys. 27 (1916), p. 220/35 u. 265/90; Math. Ann. 79 (1919), p. 340/59; *W. H. Young,* Proc. Roy. Soc. London A 96 (1919), p. 82/91.*

841) **H. Rademacher*[840]). Bei ihm übrigens noch allgemeiner: an Stelle der Bedingung, daß die Abbildungsfunktionen beschränkte partielle Ableitungen

Ferner hat man auch die Formel für die partielle Integration[842]) und die Mittelwertsätze[633])[635]) auf mehrfache Integrale übertragen.

*Bei dem *Lebesgue*schen Integral werden zusammen mit den beschränkten auch gleich die nicht-beschränkten, summierbaren Funktionen behandelt, so daß sich für solche nicht-beschränkte Funktionen eine gesonderte Untersuchung uneigentlicher Integrale erübrigt[842a]); wobei allerdings die *Lebesgue*sche Integraldefinition sich von vornherein nur auf den Fall absoluter Konvergenz bezieht. Wenn man dagegen von dem mehrfachen *Riemann*schen Integral ausgeht, das ja nur für beschränkte Funktionen definiert ist, so hat man für nicht-beschränkte Funktionen einen Grenzübergang zum uneigentlichen Integral ganz analog wie in Nr. 32 vorzunehmen. Dabei sind dann eingehende Untersuchungen nötig, um zu sehen, welche Eigenschaften der eigentlichen mehrfachen Integrale für die uneigentlichen mehrfachen Integrale erhalten bleiben.[843]) Besonders bemerkenswert ist, daß man hier (ganz anders wie bei den einfachen uneigentlichen Integralen) nach *C. Jordan* zunächst nur zu *absolut konvergenten* uneigentlichen mehr-

---

besitzen, wird nur gefordert, daß sie beschränkte partielle Derivierte besitzen (in Math. Ann. 79 eine noch weitergehende Verallgemeinerung); man hat dann der Funktionaldeterminante auf der Nullmenge, wo sie etwa nicht existiert, einen beliebigen Wert beizulegen. *Ch. J. de la Vallée Poussin*[840]) fordert statt dessen die totale Differentiierbarkeit der Abbildungsfunktionen. In den Fällen, die den Bedingungen von *H. Rademacher* entsprechen, kann es eintreten, daß diese totalen Differentiale [s. Nr. 46] in einer Nullmenge nicht existieren.*

842) *L. Tonelli,* Rend. Acc. Linc. (5) 18_{II} (1909), p. 246/53; **H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 446/7; *B. H. Camp*[826]), p. 285; *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 16 (1916), p. 273/93.*

842a) *Besondere Betrachtungen sind nur für den Fall des Übergangs zu unendlichen Integrationsbereichen nötig; vgl. insbes. *B. H. Camp,* Amer. J. of math. 39 (1917), p. 311/28.*

843) *Siehe hierüber: *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Ann. Soc. scient. Bruxelles 16 B (1891/2), p. 150/80 [ausführlich referiert in II A 3, Nr. 8 (*G. Brunel*)]; J. de math. (4) 8 (1892), p. 421/67; (5) 5 (1899), p. 191/204; *C. Jordan,* J. de math. (4) 8 (1892), p. 87/94; Cours d'Analyse II (2. éd. Paris 1894, 3. éd. 1913), p. 75/95; *O. Stolz,* Grundzüge 3, p. 122/99; *A. Schoenflies,* Bericht I 1900, p. 198/206; *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (2) 4 (1906), p. 136/59; Theory, p. 432/52, 566/76, 582/94; *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), p. 240/54; *J. Pierpont,* Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), p. 155/74; Lectures 2, p. 30/76; *R. G. D. Richardson,* Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), p. 449/58; 9 (1908), p. 339/71; *J. K. Lamond,* ib. 13 (1912), p. 434/44.

Von allen diesen Autoren wird insbesondere die Zurückführung der uneigentlichen mehrfachen Integrale auf iterierte Integrale untersucht; ferner behandeln *C. Jordan, O. Stolz, E. W. Hobson, J. Pierpont* die Transformation der uneigentlichen mehrfachen Integrale.*

fachen Integralen gelangt.[844]) Um zu sehen, woran das liegt, betrachten wir den einfachsten Fall: B sei ein beschränkter, einfach zusammenhängender, quadrierbarer Bereich der Ebene; $f(x, y)$ soll nur auf der Begrenzung C von B Unendlichkeitsstellen haben und sei in jedem im Innern von B gelegenen einfach zusammenhängenden, quadrierbaren Teilbereich A beschränkt und stetig. Es werde nun mit *C. Jordan* $\iint\limits_B f(x, y)\,dx\,dy$ definiert als Grenzwert aller $\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy$, wenn der Inhalt von A gegen den Inhalt von B konvergiert. Bei einfachen, bedingt konvergenten, uneigentlichen Integralen kann die Vereinigung hinreichend vieler, getrennter, in der Nähe einer Unendlichkeitsstelle liegenden Strecken, in denen der Integrand gleiches Vorzeichen hat, beliebig große Beiträge zum Integral liefern. Dagegen ist bei unserem Doppelintegral das Analoge ausgeschlossen, weil endlich viele getrennt liegende Bereiche immer durch Hinzufügung bzw. Weglassung beliebig schmaler Verbindungsstücke (die keinen wesentlichen Beitrag zum Doppelintegral leisten) zu einem einfach zusammenhängenden Bereich zusammengefaßt werden können. — Um zu *bedingt konvergenten* uneigentlichen Doppelintegralen zu gelangen, wird man demgemäß die bei der Definition des uneigentlichen Doppelintegrals verwendeten approximierenden Bereiche wesentlich zu spezialisieren haben, was *Ph. Freud*[845]) durchgeführt hat.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß auch ein großer Teil der in Nr. **35 a—f** angegebenen anderen Integraldefinitionen sich unmittelbar auf mehrfache Integrale übertragen läßt; die nötigen Angaben hierüber finden sich bereits in Nr. **35 a—f.***

46. Partielle Ableitungen und totales Differential. *Man definiert neuerdings das *totale* oder *vollständige* (erste) *Differential* einer Funktion $f(x, y)$ folgendermaßen [dabei beruft man sich in der Regel auf *O. Stolz*[846]), doch findet sich dieser Begriff schon viel früher in voller Schärfe bei *J. Thomae*[847])]: Man sagt, daß die in der Umgebung der Stelle (x, y) definierte Funktion $f(x, y)$ an der Stelle (x, y) ein vollständiges Differential besitzt, wenn

$$(1)\qquad \begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\\ &= (A\Delta x + B\Delta y) + \varepsilon(|\Delta x| + |\Delta y|)\end{aligned}$$

844) **C. Jordan*[843]); siehe ferner dazu *O. Stolz*[843]) u. Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien IIa 108 (1899), p. 1234/8.*

845) **Ph. Freud,* Monatsh. Math. Phys. 18 (1907), p. 29/70; siehe auch *E. W. Hobson,* Theory, p. 437/8.*

846) **O. Stolz,* Grundzüge 1, p. 131/3.*

847) **J. Thomae,* Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, Halle 1875, p. 36/7.*

ist, wobei A, B von Δx und Δy unabhängig sind und ε mit $(|\Delta x| + |\Delta y|)$ gegen Null konvergiert. Es existieren dann in (x, y) die ersten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$, nämlich

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

und es ist

$$A = p, \quad B = q.$$

Der lineare Bestandteil von Δf wird nun als das vollständige Differential df von $f(x, y)$ bezeichnet, also

(2) $$df = p\,dx + q\,dy.$$

Man bezeichnet ferner in diesem Fall vielfach $f(x, y)$ als an der Stelle (x, y) „*differentiierbar*".[848])

Existieren die partiellen Ableitungen p und q in der Umgebung von (x, y) und sind sie in (x, y) stetig, so besitzt $f(x, y)$ sicherlich in (x, y) ein totales Differential.[849]) Dagegen ist dies im allgemeinen nicht der Fall, wenn man nur die Existenz und Endlichkeit von p und q in der Umgebung von (x, y) voraussetzt.[850])[851])

---

848) *Darstellungen der Differentialrechnung bei Funktionen mehrerer Veränderlichen sind unter Zugrundelegung dieses Begriffs des totalen Differentials gegeben worden von: *J. Pierpont,* Lectures 1, p. 268 ff.; *W. H. Young,* The fundamental theorems of the differential calculus (Cambridge Tracts Nr. 11), Cambridge 1910, p. 21 ff.; *M. Fréchet,* Nouv. Ann. de math. [71 =] (4) 12 (1912), p. 385/403, 433/49 [dazu auch Paris C. R. 152 (1911), p. 845/7, 1050/1]; *Ch J. de la Vallée Poussin,* Cours d'Analyse 1, 3. éd., Louvain-Paris 1914, p. 140 ff.; 4. éd., Louvain-Paris 1921, p. 110 ff.; *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 644 ff. — Eine Übertragung dieser Definition auf den Funktionenraum bei *M. Fréchet,* a. a. O., p. 448/9, und Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), p. 135/61.

Bezüglich der älteren Auffassung siehe II A 2, Nr. 9 (*A. Voß*).*

849) *Hierfür genügt schon, wenn p an der Stelle (x, y) existiert und endlich ist, während q in der Umgebung von (x, y) existiert und in (x, y) stetig ist; vgl. *O. Hölder,* Beiträge zur Potentialtheorie, Tübinger Dissertation (Stuttgart 1882), p. 67/70.*

850) *Darauf ist wohl zuerst von *J. Thomae,* Abriß einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen, Halle 1873, p. 17/18 [vgl. auch p. 119/21], sowie [847]) aufmerksam gemacht worden. — Einfaches Beispiel:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0, \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für die übrigen Stellen.} \end{cases}$$

[Auch auf Beispiele, die *E. J. Townsend,* Ann. of math. (2) 21 (1919/20), p. 64/72 (ib., p. 276/7 Berichtigung!) angegeben hat, sei hier hingewiesen].*

851) *Wenn die partiellen Ableitungen p und q in einem Gebiet G beschränkt sind, so ist $f(x, y)$ in G fast überall total differentiierbar; vgl. *H. Rademacher,* Math. Ann. 79 (1919), p. 340/8.*

Man kann nun umgekehrt fragen:*

Wenn p und q irgendwelche stetige Funktionen sind, unter welchen Bedingungen ist $pdx + qdy$ das totale Differential einer Funktion $f(x, y)$ [oder, was dasselbe ist: unter welchen Bedingungen sind p und q die ersten partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$] und wie bestimmt man diese Funktion? Man kann diese Frage als eine Übertragung des Problems der primitiven Funktionen auf den Fall zweier Veränderlichen ansehen.

*Ein im wesentlichen bereits auf *A. C. Clairaut*[852]), *L Euler*[853]) und *A. Fontaine*[853a]) zurückgehender bekannter Satz besagt hierüber: Sind in einem Gebiet G p und q irgendwelche stetige Funktionen[854]) und sind dort auch $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial q}{\partial x}$ stetig, so ist $pdx + qdy$ dann und nur dann ein totales Differential in G, wenn durchweg in G

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

ist.

Dieser Satz beruht vor allem auf der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \tag{3}$$

worauf wir weiter unten noch zurückkommen werden.

Zuvor aber wollen wir darauf hinweisen, daß jener Satz aufs engste mit dem *Cauchyschen Integralsatz* für reelle Funktionen [vgl. II A 2, Nr. 45 (*A. Voß*)] zusammenhängt. Dies ergibt sich unmittelbar aus der bekannten Integrabilitätsbedingung für $pdx + qdy$: Sind p und q stetige Funktionen in G, so ist dafür, daß für jede in G gelegene geschlossene rektifizierbare Kurve C

$$\int_C pdx + qdy = 0 \tag{4}$$

ist, notwendig und hinreichend, daß $pdx + qdy$ ein vollständiges Differential in G ist.

852) *[*A. C.*] *Clairaut*, Mém. de math. et phys. Acad. Roy. d. Sciences (beigebunden der Histoire de l'Acad. Roy. d. Sc. Paris) 1739 [1741], p. 425/36; 1740 [1742], p. 293/323, insbes. p. 294/7.*

853) **L. Euler*, Commentarii Acad. Petropolitanae 7 (1734 u. 1735 [erst 1740 erschienen]), p. 174/83, 184/200, insbes. p. 176/8.*

853a) **A. Fontaine*, Mémoires de mathématiques recueillis et publiés avec quelques pièces inédits, Paris 1764. Siehe auch *A. C. Clairaut*[852]), zweites Zitat, p. 294 Fußn.*

854) *Die Funktionen werden hier stets auch als eindeutig vorausgesetzt, da andere Funktionen von uns hier überhaupt nicht betrachtet werden.*

Man sieht also, daß jede verschärfte Bedingung dafür, daß $pdx + qdy$ ein totales Differential ist, zugleich eine verschärfte Bedingung für den *Cauchy*schen Integralsatz bei reellen Funktionen, d. h. für das Verschwinden des Kurvenintegrals (4) darstellt — daraus lassen sich dann auch verschärfte Bedingungen für den *Cauchy*schen Integralsatz bei Funktionen komplexer Veränderlichen folgern[855]) — und umgekehrt. Deshalb hat die genauere Untersuchung unserer obigen Frage ein doppeltes Interesse.

Man kann hier nun zunächst von der von *E. Goursat*[856]) gefundenen Verschärfung des *Cauchy*schen Integralsatzes für komplexe Funktionen ausgehen. *L. Heffter*[857]) hat durch Übertragung der *Goursat*schen Methode aufs Reelle die entsprechende Erweiterung des *Cauchy*schen Integralsatzes für reelle Funktionen erhalten; d. h. er beweist (wenn wir sein Resultat nicht, wie er es tut, fürs Kurvenintegral (4), sondern gleich für das totale Differential formulieren) den folgenden Satz: Wenn die Funktionen p und q in G stetig sind und jede von ihnen daselbst ein vollständiges Differential besitzt, so ist die überall in G geltende Bedingung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß $pdx + qdy$ in G ein vollständiges Differential sei.

Auch die weitergehenden Untersuchungen, die etwas später von *P. Montel*[858]) über die Bedingungen für das vollständige Differential angestellt worden sind und über die wir nachher zu berichten haben werden, benutzen den Zusammenhang mit dem *Cauchy*schen Integralsatz für reelle Funktionen oder vielmehr die Integrabilitätsbedingung von $pdx + qdy$. Er knüpft (wie auch die meisten älteren Beweise des *Cauchy*schen Integralsatzes) an die *Green*sche Formel [(2) in Nr. **45**] an, aus der, wenn, abgesehen von einer Nullmenge, $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ ist, das Verschwinden des Kurvenintegrals (4) folgt. —

855) *Siehe hierüber: II B 1, Nr. **2** u. **3** (*W. F. Osgood*), sowie insbesondere II C 4, Nr. **2** u. **4** (*L. Bieberbach*).*

856) **E. Goursat*, Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 14/16; [siehe dazu auch *E. H. Moore*, ib., p. 499/506, und *A. Pringsheim*, Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 413/21]. Näheres hierüber findet man im übrigen a. a. O. [855]).*

857) **L. Heffter*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1902, p. 115/40. [Vgl. dazu auch ib. 1903, p. 312/16; 1904, p. 196/200, sowie *A. Pringsheim*, Sitzgsber. Ak. Wiss. München 33 (1903), p. 673/82.]*

858) **P. Montel*[839]). [Einiges davon auch schon in einer vorläufigen Mitteilung Paris C. R. 136 (1903), p. 1233/5.]*

Die oben angegebene einfachste Bedingung dafür, daß $pdx + qdy$ ein vollständiges Differential ist, beruht, wie schon erwähnt, zu einem wesentlichen Teil auf dem Fundamentalsatz von der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen, den man so aussprechen kann:*

Seien wieder p und q die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$ in bezug auf x und y: sind nun p und q im Gebiet G stetig und lassen sie dort stetige Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial q}{\partial x}$ zu, so hat man

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{5}$$

für alle Punkte von G.

*[Will man nur über die Vertauschbarkeit an der Stelle (x, y) etwas aussagen, so hat man die auf die Stetigkeit bezüglichen Voraussetzungen nur für die Stelle (x, y) selbst, dagegen die auf die Existenz der Ableitungen bezüglichen Voraussetzungen für die Umgebung von (x, y) zu machen.] Siehe über diesen Vertauschungssatz II A 2, Nr. **10** (*A. Voß*), wo man auch nähere Angaben über die einschlägige Literatur sowie über die Untersuchungen von *H. A. Schwarz*[859]) und anderen[860]) findet, die eine Herabminderung der Voraussetzungen dieses Vertauschungssatzes bezwecken. Z. B. kann man nach *H. A. Schwarz* auf die Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit *einer* der beiden zweiten Ableitungen $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right.$ oder $\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right)$ verzichten. Aber es ist hervorzuheben, daß die Stetigkeit der ersten Ableitungen und die Existenz der zweiten Ableitungen in G noch nicht für die Vertausch-

---

859) *H. A. Schwarz,* Verhandl. d. Schweiz. naturforsch. Gesellsch. 56 (1873 [1874]), p. 259/70 = Ges. math. Abhandl. 2, Berlin 1890, p. 275/84.

860) *J. Thomae*[847]), p. 22; *U. Dini,* Analisi infinitesimale 1, Pisa 1877/8, p. 122; **G. Peano,* Mathesis (1) 10 (1890), p. 153/4. Dazu kommen noch von neueren Arbeiten: *E. W. Hobson,* Theory, p. 316/21; Proc. London Math. Soc. (2) 5 (1907), p. 225/36;* *A. Timpe,* Math. Ann. 65 (1908), p. 310/2 *und *W. H. Young,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh 29 (1908/9), p. 136/64; Trans. Cambridge Phil. Soc. 21 (1911), p. 412/13, 421/3; [siehe auch [848]), p. 50/2]. — Eine von *P. Martinotti,* Rend. Circ. mat. Palermo 37 (1914), p. 17/24 angegebene Bedingung ist unrichtig; siehe hierüber *H. Hahn,* Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 27 (1918 [1919]), p. 184/8; vgl. aber auch *P. Martinotti,* Rend. Istit. Lombardo (2) 47 (1914), p. 845, 865/69.*

*Es seien noch besonders die folgenden Bedingungen für den Vertauschbarkeitssatz erwähnt, die von *L. Heffter*[857]) [erstes Zitat, p. 139/40] aus seinem oben erwähnten Satz für ein Gebiet G gefolgert, etwas später von *W. H. Young* [Proc. London Math. Soc. (2) 7 (1909), p. 157/80 (auch [848]), p. 22/3); vgl. ferner Paris C. R. 148 (1909), p. 82/4] direkt und zwar gleich für eine einzelne Stelle bewiesen worden sind: an der betrachteten Stelle (x, y) sollen p und q (deren Existenz in der Umgebung von (x, y) vorausgesetzt sei) ein totales Differential besitzen.*

barkeit hinreichen; siehe hierzu das weiter unten angegebene Beispiel.[861])*

Durch welche Aussagen muß man nun die Gleichung (5) ersetzen, wenn zwar die ersten Ableitungen p und q stetig bleiben, dagegen von den zweiten Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial q}{\partial x}$ im wesentlichen nur ihre Existenz (jedenfalls nicht ihre Stetigkeit) bekannt ist?

*Diese Frage hat *P. Montel*[858]) näher untersucht, und er hat die dabei erhaltenen Ergebnisse dazu verwendet, um die oben gestellte Frage nach den Bedingungen, unter denen $pdx + qdy$ ein vollständiges Differential einer Funktion $f(x, y)$ ist, weiter zu klären. Wir berichten nun über diese Untersuchungen von *P. Montel*, wobei im folgenden immer vorausgesetzt ist, daß p und q in G stetige Funktionen von (x, y) sind.*

Betrachten wir das Verhältnis

$$r(x, y, h, k) = \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)}{hk}$$

und die Verhältnisse

$$\frac{p(x, y+k) - p(x, y)}{k}, \quad \frac{q(x+h, y) - q(x, y)}{h}.$$

Diese drei Verhältnisse haben in jedem Gebiet G dieselbe obere Grenze und dieselbe untere Grenze, d. h. wenn die vier Zahlen x, y, h, k so variieren, daß die beiden Punkte (x, y) und $(x+h, y+k)$ nicht aus dem Gebiet G heraustreten. Hieraus folgt, daß in jedem Punkte diese Verhältnisse denselben oberen und denselben unteren Limes haben. Daraus folgt weiter, daß die vier Derivierten von p in bezug auf y, und die vier Derivierten von q in bezug auf x in jedem Punkte denselben oberen Limes, denselben unteren Limes, dieselbe Schwankung haben: insbesondere sind diese Derivierten gleichzeitig stetig oder unstetig; in jedem Stetigkeitspunkte existieren die Ableitungen $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ und sind einander gleich.

Nehmen wir, nur der bequemeren Ausdrucksweise wegen, an, daß $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ im ganzen Gebiet G existieren: dann ist in jedem Stetigkeitspunkte der einen Ableitung auch die andere stetig und ihr gleich; in jedem Unstetigkeitspunkte haben beide die gleiche Schwankung (und außerdem den gleichen oberen und den gleichen unteren Limes). Z. B. sind für die Funktion:

$$\varphi(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

861) *Ein erstes derartiges Beispiel bei *H. A. Schwarz*[859]).*

die Ableitungen p und q überall stetig; ferner sind die Ableitungen $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ stetig, mit alleiniger Ausnahme des Anfangspunktes, in dem $\frac{\partial q}{\partial x} = +1$, $\frac{\partial p}{\partial y} = -1$ und der obere bzw. untere Limes dieser beiden partiellen Ableitungen gleich $+\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ ist.

Umgekehrt: *Sind die beschränkten Funktionen* $\frac{\partial q}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial p}{\partial y}$ *in* G *integrabel und haben sie in jedem in* G *gelegenen Gebiet* G' *die gleiche obere Grenze und die gleiche untere Grenze, so sind* p *und* q *in jedem Punkte von* G *die partiellen Ableitungen einer und derselben Funktion* $f(x, y)$[862]. Diese Funktion ist:

$$f(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} p\,dx + q\,dy,$$

wobei das Integral längs eines rektifizierbaren Weges genommen ist, der x_0, y_0 mit x, y verbindet, ohne aus dem Gebiet G herauszutreten.

Nehmen wir jetzt an, daß die in G beschränkten Funktionen $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ nicht notwendig integrabel sind; dann hat man den folgenden Satz[863]): *Wenn* p *und* q *in* G *beschränkte Ableitungen* $\frac{\partial q}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial p}{\partial y}$ *zulassen, so besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Funktionen partielle Ableitungen einer Funktion* $f(x, y)$ *seien, darin, daß die Menge aller Punkte von* G, *in denen* $\frac{\partial q}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial p}{\partial y}$ *voneinander verschieden sind, vom Maß Null in* G *ist.*

Z. B: Die Funktion

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}\varphi(x - \alpha_n, y - \beta_n),$$

in der $\varphi(x, y)$ die weiter oben eingeführte Funktion und (α_n, β_n) einen Punkt von rationalen, zwischen 0 und 1 enthaltenen Koordinaten darstellt, ist stetig und läßt stetige partielle Ableitungen zu; in allen Punkten mit rationalen Koordinaten, die im Quadrate

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

liegen, sind die beiden Ableitungen $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ voneinander verschieden.

---

862) In diesem Satze kann man die Ableitungen $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ durch Derivierte ersetzen; aber da in diesem Falle diese Derivierten beschränkt sind, so existieren die Ableitungen, ausgenommen vielleicht für eine Punktmenge vom Maß Null.

863) *Ein wesentlicher Teil dieses Satzes ist bereits von *A. Pringsheim,* Sitzgsber. Ak. Wiss. München 29 (1899), p. 52/62 bewiesen worden.*

Nimmt man lediglich an, daß die Ableitungen $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ endlich seien, so ist die Menge der Punkte, in deren Umgebung diese Funktionen nicht beschränkt sind, eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge H; $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ sind einander gleich, außer vielleicht für eine Punktmenge, deren Maß das von H nicht übertrifft.[864])

Ist die Funktion $p(x, y)$, was auch x sei, eine Funktion von y mit beschränkter Schwankung und ist die Funktion $q(x, y)$, was auch y sei, eine Funktion von x mit beschränkter Schwankung, so kann man noch behaupten, daß die Menge aller Punkte, in denen $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ nicht existieren, das Maß Null hat, und daß die Bedingung, daß $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ höchstens in einer Nullmenge voneinander verschieden sind, dafür hinreicht, daß p und q die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} p\,dx + q\,dy$$

seien.[865])

Beschränkt man sich endlich darauf, nur die Existenz von $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ anzunehmen, so kann man nur behaupten, daß die Menge aller Punkte, in denen diese Ableitungen einander gleich sind, eine überall dichte Menge ist; denn da diese Funktionen beide der *Baire*schen Klasse 1 angehören, so gibt es in jedem Gebiet Punkte, in denen beide stetig und folglich einander gleich sind.[866])

47. Die unbestimmten Integrale und ihre Differentiation. Die unbestimmten Integrale der Funktionen von mehreren Veränderlichen und die Differentiation dieser Integrale sind (mit verschiedenen Me-

864) *Darüber hinaus hat *P. Montel,* Paris C. R. 156 (1913), p. 1820/2 ohne Beweis angegeben, daß der oben bei [863]) angegebene Satz auch noch gilt, wenn man $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ nicht als beschränkt, sondern nur als endlich voraussetzt.*

865) Es genügt ebenfalls statt der beschränkten Schwankung vorauszusetzen, daß die Derivierten von q bezüglich x und von p bezüglich y endlich und flächenhaft summierbar sind; vgl. *Ch. J. de la Vallée Poussin* [839]).

866) *P. Montel* [839]). *L. Lichtenstein,* Sitzgsb. Berl. Math. Ges. 9 (1910), p. 84/100, hat bewiesen, daß p und q die partiellen Ableitungen einer und derselben Funktion sind, wenn in G

$$r(h) = \frac{1}{h}[q(x+h, y) - q(x, y) - p(x, y+h) + p(x, y)] \qquad (\text{für } h > 0)$$

beschränkt ist und mit h gegen Null konvergiert.

thoden) von *G. Vitali* und insbesondere von *H. Lebesgue* untersucht worden.

G. Vitali[867]) nimmt als unbestimmtes Integral einer summierbaren Funktion $\varphi(x, y)$ die Funktion[868])

$$f(x, y) = \int_0^x \int_0^y \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

und betrachtet das zur Funktion f gehörige Verhältnis $r(x, y, h, k)$. Streben h und k mit positiven Werten der Null zu, *wobei das Verhältnis $h : k$ zwischen endlichen, von Null verschiedenen Schranken bleibe[869])*, so definiert er mittels des oberen und unteren Limes von $r(x, y, h, k)$ zwei von den vier Derivierten von f; die andern beiden, indem er h und k mit negativen Werten gegen Null gehen läßt: sind alle vier einander gleich, so sagt er, f habe eine *Ableitung* im Punkte (x, y). *G. Vitali* beweist, daß f die Funktion φ zur Ableitung hat, außer für eine Punktmenge vom Maß Null. *Überhaupt überträgt er eine Reihe der wesentlichsten Sätze von Funktionen einer Veränderlichen auf Funktionen mehrerer Veränderlichen.[869a]) — In ähnlicher Weise wie *G. Vitali* gehen auch einige andere Mathematiker vor, um aus $f(x, y)$ den Integranden $\varphi(x, y)$ herzuleiten; sie beweisen[870]), daß, abgesehen höchstens von einer ebenen Nullmenge, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren und daß

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \varphi(x, y)$$

ist. Ferner läßt sich zeigen, daß $f(x, y)$, abgesehen höchstens von einer ebenen Nullmenge, ein vollständiges Differential besitzt.[871])*

Von ganz neuen Gesichtspunkten aus werden die hierher gehörenden Fragen in den grundlegenden und umfassenden Untersuchungen von *H. Lebesgue*[872]) betrachtet. Die Definitionen und Resultate von

867) *G. Vitali,* Atti Accad. Torino 43 (1907/8), p. 237/46.

868) *Oder man nehme statt dessen

$$f(x, y) = \int_0^x \int_0^y \varphi(x, y)\, dx\, dy + \int_0^x g(x)\, dx + \int_0^y h(y)\, dy + C,$$

wobei $g(x)$ und $h(y)$ willkürliche summierbare Funktionen sind.*

869) *Wegen dieser zusätzlichen Bedingung (die bei *G. Vitali* fehlt) siehe eine Bemerkung von *H. Lebesgue*[872]), p. 362/3 u. 395.*

869a) *Vgl. dazu auch *H. Looman*[661b]).*

870) *Ein wesentlicher Teil dieses Satzes bereits bei *H. Lebesgue*[872]), p. 432; an ihn anschließend ist der Satz bewiesen worden von *G. Fubini* u. *L. Tonelli,* Rend. Circ. mat. Palermo 40 (1915), p. 295/8, sowie von *W. H. Young,* Paris C. R. 164 (1917), p 622/5.*

871) **C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 656/61.*

872) *H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 361/450.

H. Lebesgue sind allgemeiner als die von *G. Vitali* und unabhängig von der Wahl der Koordinatenachsen sowie von der Zahl der unabhängigen Veränderlichen. Wir haben bereits in Nr. **44a** darauf hingewiesen, wie man zu der *Lebesgue*schen Auffassung des unbestimmten Integrals gelangt. Die Funktion φ sei über jede meßbare Menge E endlichen Maßes summierbar. Durch das über E erstreckte Integral von φ wird dieser Menge E eine Zahl $F(E)$, eine Funktion der Menge E, zugeordnet. Diese Funktion $F(E)$ heißt nach *H. Lebesgue* das *unbestimmte Integral* von φ; sie ist eine *additive, total stetige Funktion der Mengen* E [vgl. Nr. 22] *und diese Eigenschaften charakterisieren das unbestimmte Integral.* Die Ableitung dieser Funktion $F(E)$ im Punkte P wird von *H. Lebesgue* nach der Methode von *V. Volterra*[873]) definiert: man bilde den Quotienten $\frac{F(E)}{m(E)}$, wobei $m(E)$ das Maß der P enthaltenden meßbaren Menge E bezeichnet, und man suche den Grenzwert dieses Quotienten, wenn alle Dimensionen von E der Null zustreben; dieser Grenzwert ist, sofern er existiert, die *Ableitung* von $F(E)$ im Punkte P. *Wenn dieser Grenzwert nicht existiert, so geben der obere und untere Limes eine obere bzw. untere Derivierte. Ohne weiteren Zusatz wäre jedoch diese Definition zu allgemein und würde nicht zu den Sätzen führen, die den Aussagen über die einfachen Integrale entsprechen: man muß also die zu verwendenden Mengen E noch einer Bedingung unterwerfen.* *H. Lebesgue* bedient sich daher zur Definition der Ableitung einer speziellen Kategorie von Mengen E, die er eine *reguläre Mengenfamilie (famille régulière d'ensembles)* nennt. *Er bezeichnet[874]) eine meßbare Menge E als *„regulär“* (für einen bestimmten positiven Wert α), wenn für die kleinste, E enthaltende Kugel[875]) K

$$\frac{m(E)}{m(K)} > \alpha > 0$$

ist; und er versteht unter einer „regulären Mengenfamilie“ eine Gesamtheit von meßbaren Mengen E, die für einen festen positiven Wert α regulär sind.[876]) [Vgl. dazu die in Nr. **20a** gemachten Angaben über den *Vitali*schen Überdeckungssatz, der bei den hier besprochenen *Lebesgue*schen Untersuchungen eine wesentliche Rolle spielt.] Man

873) *Siehe *V. Volterra*[501]), zuerst in Rend. Atti Acc. Linc. (4) 3_{II} (1887), p. 99. — [Vgl. dazu auch *Ch. A. Fischer*[544]).]*

874) *Wie schon in [430e]) erwähnt.*

875) *Bei zwei Dimensionen: Kreis, bei einer Dimension: Strecke. — Natürlich kann man statt einer Kugel auch einen Würfel nehmen.*

876) **C. de la Vallée Poussin,* Intégrales de Lebesgue, p. 60, nennt α den *„Regularitätsparameter“* der Mengenfamilie.*

lasse nun eine P enthaltende meßbare Menge E so variieren, daß sie beständig einer regulären Mengenfamilie angehört und daß ihr Durchmesser gegen Null abnimmt, und man mache dies für alle möglichen solchen regulären Familien von meßbaren Mengen, die P enthalten. Den hierbei sich ergebenden oberen bzw. unteren Limes von $\frac{F(E)}{m(E)}$ bezeichnet *H. Lebesgue* als die *obere* bzw. *untere Derivierte* (nombre dérivé) von $F(E)$ an der Stelle P[877]), und, wenn diese beiden zusammenfallen, den gemeinsamen Wert als *Ableitung* (dérivée) von $F(E)$ im Punkte P; in diesem Fall heißt $F(E)$ „in P *differentiierbar*".*

Bei Benutzung dieser Definition ist die Differentiation die inverse Operation der Integration, außer vielleicht für eine Punktmenge vom Maß Null. *D. h. es gilt der Satz: Eine total stetige und additive Mengenfunktion $F(E)$ hat fast überall eine endliche und bestimmte Ableitung, und sie ist das unbestimmte Integral dieser Ableitung [diese genommen, wo sie bestimmt und endlich ist].[878]) Und umgekehrt: Eine über jeder meßbaren Menge endlichen Maßes summierbare Funktion φ ist fast überall gleich der Ableitung ihres unbestimmten Integrals.*

*Zugleich ergibt sich hieraus, daß, wenn man zur Definition der Ableitung von $F(E)$ nicht alle regulären Mengenfamilien, sondern nur irgendeine spezielle reguläre Mengenfamilie zugrunde legt, sich die Ableitung von der oben definierten nur höchstens in einer Nullmenge unterscheidet; und zwar ist diese Nullmenge von der speziellen Art der verwendeten regulären Mengenfamilie unabhängig. Durch solche Spezialisierung erhält man z. B. die oben angegebene Definition der Ableitung von *G. Vitali*; ein anderer viel bequemer zu verwendender Spezialfall: man kann für E speziell Würfel oder Kugeln mit dem Mittelpunkt P benutzen.[879]) Hierher gehören auch die von *Ch. J. de la Vallée Poussin* eingeführten und von ihm viel verwendeten *„dérivées sur un réseau"*.[880])*

877) *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 492, bezeichnet jeden einzelnen mittels einer regulären, gegen P konvergierenden Mengenfolge erhaltenen Grenzwert von $\frac{F(E)}{m(E)}$ als eine „Derivierte" von $F(E)$; vgl. auch [717]) und [718]).*

878) *Hieraus folgt die oben angegebene Übereinstimmung der additiven, totalstetigen Mengenfunktionen mit den unbestimmten Integralen.*

879) *Ch. J. de la Vallée Poussin*[876]), p. 59, bzw. *C. Carathéodory*[877]), p. 480, haben hierfür die Namen *„dérivées symétriques"* bzw. *„Mittlere Derivierte"* eingeführt.*

880) *Siehe *Ch. J. de la Vallée Poussin*[881]), zweites Zitat, p. 486/8; drittes Zitat, p. 61 ff. Er versteht unter einem „Netz" (réseau) eine unendliche Folge

*Weiterhin betrachtet *H. Lebesgue* neben den unbestimmten Integralen noch allgemeiner die Funktionen beschränkter Schwankung [Nr. 22[466])], die sich hier zunächst als additive Intervallfunktionen von beschränkter Schwankung repräsentieren, sowie ihre Derivierten. Es ergeben sich zum Teil analoge Sätze, wie sie für *eine* Veränderliche schon in früheren Nrn. angegeben worden sind. Insbesondere ist auch hier fast überall eine bestimmte, endliche Ableitung vorhanden. Und: Eine additive Intervallfunktion beschränkter Schwankung, deren Derivierte überall endlich sind, ist das unbestimmte Integral ihrer Derivierten.*

*Die wichtigen Untersuchungen von *H. Lebesgue* sind von *Ch. J. de la Vallée Poussin*[881]) und von *C. Carathéodory*[882]) teils weitergeführt, teils ausführlicher oder vereinfacht dargestellt worden. *Ch. J. de la Vallée Poussin*[883]) geht insbesondere insofern über *H. Lebesgue* hinaus, als er dessen Untersuchungen über die Funktionen beschränkter Schwankung bzw. die zugehörigen additiven Intervallfunktionen durch die entsprechende Untersuchung der absolut additiven Mengenfunktionen und ihrer Ableitungen ausbaut und verallgemeinert; wie schon in Nr. 22, Schluß hervorgehoben, sind nämlich [nach *J. Radon*[479]) und *Ch. J. de la Vallée Poussin*[480])] die Punktfunktionen beschränkter Schwankung und die absolut additiven Mengenfunktionen äquivalent. Mit Hilfe der genannten „dérivées sur un réseau“[880]) gewinnt nun *Ch. J. de la Vallée Poussin*[883]) die betreffenden Sätze über die Differentiation dieser absolut additiven Mengenfunktionen. Endlich sind hier noch die Untersuchungen von *J. Radon*[884]) über die absolut additiven Mengenfunktionen zu erwähnen, die sich zwar nicht auf die Differentiation beziehen, wohl aber, wie schon in Nr. 35 d auseinandergesetzt, den *Lebesgue*schen Begriff des unbestimmten Integrals verallgemeinernd auf *Stieltjes*sche Integrale übertragen.*

48. Integration partieller Differentialgleichungen. Die Überlegungen, die gewöhnlich bei der Integration der partiellen Differen-

von immer feineren, gleich gerichteten, kubischen Einteilungen $\mathfrak{E}_n$, die aufeinander gelegt sind; und er bildet mit Hilfe der Maschen ω_n dieses Netzes die durch den oberen bzw. unteren Limes von $\frac{F(\omega_n)}{m(\omega_n)}$ dargestellten Derivierten, wobei die ω_n sich auf den betrachteten Punkt P zusammenziehen sollen.*

881) **Ch. J. de la Vallée Poussin,* Cours d'Analyse 2 (2. éd.), p. 109/117; Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 435/501; Intégrales de Lebesgue, p. 57/104.*

882) **C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p 469/510.*

883) **Ch. J. de la Vallée Poussin*[881]), zweites Zitat, p. 468/95; drittes Zitat. p. 83/104.*

884) **J. Radon*[475]). Vgl. auch *M. Fréchet*[870]).*

tialgleichungen angestellt werden, setzen die Stetigkeit der vorkommenden Ableitungen voraus. *R. Baire* hat sich nun das folgende Problem gestellt: die Funktionen aufzusuchen, die nur denjenigen Bedingungen unterworfen sind, die nötig sind, damit die in eine gegebene Gleichung eingehenden Elemente einen Sinn haben und diese Gleichung befriedigen. Nehmen wir z. B. die Gleichung

$$p + q = 0,$$

so muß man eine Funktion $f(x, y)$ finden, die stetig ist in bezug auf jede einzelne der Veränderlichen und partielle Ableitungen p und q besitzt, deren Summe Null ist. *R. Baire* hat gezeigt, daß, wenn man $f(x, y)$ als stetig in bezug auf die Gesamtheit der Veränderlichen (x, y) voraussetzt, die Lösung durch eine beliebige stetige Funktion von $(x - y)$ geliefert wird; und er hat seine Resultate auf den Fall einer linearen Gleichung mit einer beliebigen Zahl von Veränderlichen ausgedehnt.[885])

Im übrigen führen diese und ähnliche, auf (gewöhnliche oder partielle) Differentialgleichungen sich beziehende Fragen, auch wenn bei ihrer Untersuchung von Methoden der modernen reellen Funktionentheorie Gebrauch gemacht wird, bereits über den Rahmen dieses Artikels hinaus.

885) *R. Baire*, Paris C. R. 126 (1898), p. 1700/3; Pariser Thèse (1899) = Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 101/21. Siehe auch *P. Montel*, Ann. Éc Norm. (3) 24 (1907), p. 297/8, *sowie a. a. O.[864]).*

II C 9c. FUNKTIONENFOLGEN.

Nach dem französischen Artikel von **M. FRÉCHET** in Poitiers
(jetzt in Straßburg)
bearbeitet von **A. ROSENTHAL** in Heidelberg.

*Literatur.

(Zusammenfassende Darstellungen.)

R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles, Pariser Thèse 1899 (Mailand 1899) = Annali di mat. (3) 3 (1899), p. 1/123 [abgekürzt: *R. Baire*, Thèse].

— Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905.

É. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, Paris 1905.

C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig u. Berlin 1918 [abgekürzt: *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen].

U. Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878 [abgekürzt: *U. Dini*, Fondamenti].

— Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Größe, dtsch. bearb. von *J. Lüroth* u. *A. Schepp*, Leipzig 1892 [abgekürzt: *Dini-Lüroth*, Grundlagen].

H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, I. Band, Berlin 1921 [abgekürzt: *H. Hahn*, Reelle Funktionen I].

F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914 [abgekürzt: *F. Hausdorff*, Mengenlehre].

E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambridge 1907 [abgekürzt: *E. W. Hobson*, Theory].[885a])

J. Pierpont, Lectures on the theory of functions of real variables, Bd. 2, Boston 1912.

A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Bericht, erstattet der Deutsch. Math.-Ver.), I. Teil, Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900) [abgekürzt: *A. Schoenflies*, Bericht I 1900].

Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, II. Bd., 2. éd., Louvain-Paris 1912.

— Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire, Paris 1916 [abgekürzt: *C. de la Vallée Poussin*, Intégrales de Lebesgue].

— Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris 1919.*

885a) *Vgl. Fußnote †) auf p. 855.*

Reihen und Folgen von Funktionen einer Veränderlichen.

49. Gleichmäßig konvergente Reihen von stetigen Funktionen. Betrachten wir eine Reihe, deren allgemeines Glied $u_\nu(x)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x ist. Nehmen wir an, daß alle Glieder dieser Reihe für sämtliche Werte x eines gewissen Intervalles I definiert seien, und betrachten wir den Fall, daß die Reihe in I überall konvergiert. Sei dann $s_\nu(x)$ die Summe:

$$(1) \qquad s_\nu(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_\nu(x)$$

und $s(x)$ die Summe:

$$(2) \qquad s(x) = \lim_{\nu=+\infty} s_\nu(x)$$

der Reihe

$$(3) \qquad u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_\nu(x) + \cdots.$$

Eine solche unendliche Reihe und eine unendliche Folge entsprechen einander vollständig; jede kann in die andere verwandelt werden. Die Summe (2) der unendlichen Reihe (3) ist nichts anderes als die Grenzfunktion der Folge der Teilsummen $s_\nu(x)$. Daher ist es gleichgültig, ob wir weiterhin von einer unendlichen Reihe von Funktionen und ihrer Summe oder von einer unendlichen Funktionenfolge und ihrer Grenzfunktion sprechen.

Es ist sehr wichtig, unter den gemeinsamen Eigenschaften der Funktionen $s_\nu(x)$ diejenigen zu bestimmen, die beim Grenzübergange erhalten bleiben, d. h. $s(x)$ angehören; oder anders ausgedrückt, die Art von Konvergenz zu bestimmen, die man der Reihe oder Folge auferlegen muß, damit eine den Funktionen $s_\nu(x)$ gemeinsame Eigenschaft auch $s(x)$ angehöre.

Diese Frage war von den alten Analysten nicht in einer so klaren Weise gestellt worden, weil man es als selbstverständlich ansah, daß jede den Gliedern einer Folge gemeinsame Eigenschaft beim Grenzübergang erhalten bleibe. Es ist leicht, an einem Beispiele zu zeigen, daß dem nicht so ist. In der Tat, betrachten wir die für jeden endlichen Wert von x konvergente Folge

$$f_0(x) = x,\ f_1(x) = x^{\frac{1}{3}},\ f_2(x) = x^{\frac{1}{5}},\ \ldots,\ f_\nu(x) = x^{\frac{1}{2\nu+1}},\ \ldots;$$

sie wird von überall stetigen Funktionen gebildet, und dennoch ist ihr Grenzwert (der für $x = 0$ gleich Null, für $x < 0$ gleich -1, für $x > 0$ gleich $+1$ ist) für $x = 0$ unstetig. Setzt man:

$$u_0(x) = f_0(x),\ u_1(x) = f_1(x) - f_0(x), \ldots, u_\nu(x) = f_\nu(x) - f_{\nu-1}(x), \ldots,$$

so sieht man, daß eine konvergente Reihe stetiger Funktionen eine unstetige Summe haben kann.[886])

Es ist also die Frage zu stellen, unter welchen Bedingungen die Stetigkeit der Glieder einer konvergenten Reihe die Stetigkeit der Reihensumme nach sich zieht.

Ph. L. Seidel[887]) und *G. G. Stokes*[888]) erhielten eine hinreichende Bedingung durch die Einführung der *gleichmäßigen Konvergenz.*[889]) Zeigen wir, wodurch sie sich von der gewöhnlichen Konvergenz unterscheidet.

Ist, unter Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnungen, die Reihe:

$$u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_\nu(x) + \cdots \tag{3}$$

im Intervalle I überall konvergent, so kann man

$$r_\nu(x) = s(x) - s_\nu(x) \tag{4}$$

setzen, und man kann bei festgehaltenem x einer jeden Zahl $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl m derart zuordnen, daß für alle ganzen Zahlen $n > m$ die Ungleichung

$$|r_n(x)| < \varepsilon \tag{5}$$

besteht.

Aber diese Zahl m kann offenbar variieren, wenn man von einem Werte von x zu einem anderen übergeht. Nennt man $m(x)$ den kleinsten der Werte m, die der vorstehenden Bedingung bei gegebenen x und ε genügen, so sieht man, daß die Funktion $m(x)$ in jedem Punkte des Intervalles I endlich ist; aber es ist kein Grund dafür vorhanden, daß sie für jeden festen Wert von ε in I beschränkt sei.

Wir wählen als Beispiel[890]) hierfür mit *I. Bendixson*[891])

$$s_\nu(x) = x^\nu + \frac{\nu(1-x)}{1+\nu(1-x)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

---

886) *Noch *A. L. Cauchy* hatte geglaubt, das Gegenteil beweisen zu können. Siehe hierüber II A 1 (*A. Pringsheim*), Nr. **17** [insbes. Fußn. [177]) u. [183])].*

887) *Ph. L. Seidel,* Abh. Ak. München 5_2 (1848), p. 379/93 = Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. **116**, p. 35/45.

888) *G. G. Stokes,* Trans. Cambridge Philos. Soc. 8_5 (1849), p. 533/83 = Math. and phys. papers 1, Cambridge 1880, p. 236/285.

889) *Siehe hierüber auch II A 1, Nr. **16**, **17** u. **24** (*A. Pringsheim*), wo sich insbesondere ausführlichere historische Angaben finden.*

890) *Das weiter oben im Text benutzte Beispiel oder die in II A 1, Nr. **16**, Fußn. [178]) (*A. Pringsheim*) angegebenen Beispiele wären noch etwas einfacher zu behandeln; doch ist das nachfolgende Beispiel auch für andere Zwecke verwendbar. Vgl. den Text dieser Nr. weiter unten sowie [993]).*

891) Öfversigt Vetensk.-Akad. Förhandlingar (Stockholm) 54 (1897), p. 608.

im Intervalle [0, 1]. Dann konvergiert die Reihe (3) gegen 1 und man hat für $x = 1 - \frac{1}{\nu}$:

$$|r_\nu(x)| = \left|\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^\nu\right| > \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

Nimmt man also

$$\varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{1}{e},$$

so sieht man, daß man

$$m\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \geqq \nu$$

hat; $m(x)$ kann also im Intervalle [0, 1] beliebig große Werte annehmen.

Wir sagen, daß die Konvergenz im Intervalle I *gleichmäßig* ist, wenn für jeden Wert von ε die zugehörige Funktion $m(x)$ beschränkt ist. Das kommt darauf hinaus, daß man in diesem Falle für die oben definierte Zahl m im ganzen Intervall I eine nur von ε, aber nicht mehr von x abhängige Größe wählen kann. Bedient man sich des Konvergenzsatzes von *A. L. Cauchy*, so kann man auch sagen:

Eine Reihe (3) ist in einem Intervalle I gleichmäßig konvergent, wenn man jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl N so zuordnen kann, daß für alle $n > N$ *im ganzen Intervall* I die Ungleichung

$$(6) \qquad |s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

besteht, welches auch die ganze Zahl p sei.

Dieser Begriff der gleichmäßigen Konvergenz tritt in einer großen Zahl von Fragen auf. Ganz besonders wichtig ist die bereits hervorgehobene Anwendung auf die Frage nach der Stetigkeit der Reihensumme, die ja, wie erwähnt, den Anlaß zu der hier besprochenen Begriffsbildung gegeben hat:

Die Summe einer konvergenten Reihe von Funktionen, die in einem Intervalle I stetig sind, ist ebenfalls in I stetig, wenn die Konvergenz dieser Reihe in I gleichmäßig ist.

Das oben angegebene Beispiel (von *I. Bendixson*) zeigt übrigens, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht richtig ist. D. h.: Die Summe einer konvergenten Reihe von stetigen Funktionen kann stetig sein, auch wenn die Konvergenz der Reihe nicht gleichmäßig ist. *Dies ist durch geeignete Beispiele zuerst von *G. Darboux*[892]), *P. du Bois-Reymond*[893]) und *G. Cantor*[894]) nachgewiesen worden.[895]) [Siehe hierüber

892) *G. Darboux*, Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875), p. 77/9.*

893) *Abhandl. Münchn. Akad. 12_1 (1875), p. 120 Fußn.*

894) *Math. Ann. 16 (1880), p. 268/9.*

895) *Ein besonders einfaches Beispiel dieser Art ist:

die ausführlicheren historischen Angaben in II A 1, Nr. **16**, insbes. bei Fußn. [180])—[187]) (*A. Pringsheim*).]*

*Hieraus geht also hervor, daß die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe von stetigen Funktionen zwar eine *hinreichende*, aber *keine notwendige* Bedingung für die Stetigkeit der Reihensumme ist. Hinreichende und notwendige Bedingungen hierfür, die durch Verallgemeinerungen des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz entstehen, werden erst in Nr. **52** besprochen.[895a])*

*Übrigens ist bereits die gleichmäßige Konvergenz eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Stetigkeit der Reihensumme in einem abgeschlossenen Intervall $\bar{I}$, wenn die Reihenglieder stetig und *positiv* sind.[896]) Oder für die Grenzfunktion einer Funktionenfolge formuliert: wenn man eine *monotone* (z. B. wachsende) Folge von stetigen Funktionen hat. Dasselbe gilt auch noch für die Grenzfunktion einer Folge von in $\bar{I}$ stetigen und monoton wachsenden Funktionen.[897])*

*Wir haben hier zunächst nur von der gleichmäßigen Konvergenz im Intervall gesprochen. In genau gleicher Weise kann man die gleichmäßige Konvergenz auf irgendeiner Menge M definieren.

Man kann aber auch, darüber hinaus gehend, die *gleichmäßige Konvergenz an* [oder *in*] *einer Stelle* (oder, wie man auch sagt, *in der Umgebung einer Stelle*) definieren, was zuerst von *P. du Bois-Reymond*[898])

$$s_\nu(x) = 1 \text{ für } x = \frac{2}{\nu},$$
$$= 0 \text{ außerhalb } \left(\frac{1}{\nu}, \frac{3}{\nu}\right),$$
$$= \text{linear in } \left[\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right] \text{ und } \left[\frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}\right].*$$

895a) *Von dem in Nr. **52** zu besprechenden ist völlig verschieden eine andere Art der Verallgemeinerung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz, die von *E. H. Moore*[535]) [insbes. erstes Zitat, p. 30ff.; viertes Zitat, p. 344] herrührt: Wird in (5) auf der rechten Seite ε durch $\varepsilon \cdot |\sigma(x)|$ ersetzt, so bezeichnet *E. H. Moore* die Konvergenz als *„relativ gleichmäßig"* [in bezug auf die *„scale function"* („Maßfunktion") $\sigma(x)$]. Siehe hierzu: *O. Bolza*[535]), p. 265/69; *E. W. Chittenden,* Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914); p. 197/201; 20 (1919), p. 179/84; 23 (1922), p. 1/15.*

896) **U. Dini,* Fondamenti, p. 110/12 = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 148/50. Siehe auch *A. Pringsheim,* Math. Ann. 44 (1894), p. 82, sowie *P. Montel,* Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907), p. 263/4 und *T. H. Hildebrandt,* Bull. Am. Math. Soc. 21 (1914/15), p. 113/5.*

897) **H. E. Buchanan* u. *T. H. Hildebrandt,* Annals of math. (2) 9 (1908), p. 123/6; *C. A. Dell'Agnola,* Atti Istit. Veneto 70_{II} [= (8) 13_{II}] (1911), p. 383/91.*

898) **P. du Bois-Reymond,* Sitzgsber. Ak. Wiss. Berlin 1886, p. 359/60; J. f. Math. 100 (1887), p. 334/7. — Er verwendet hier die Bezeichnung „stetige Konvergenz" statt „gleichmäßige Konvergenz"; vgl. [901a]), wo der Ausdruck „stetige Konvergenz" in einem etwas engeren Sinn gebraucht wird.*

und dann besonders klar von *A. Pringsheim*[899]) geschehen ist.[900]) Eine [in einer Umgebung von x_0 konvergente[901])] Reihe oder Folge heißt an der Stelle x_0 gleichmäßig konvergent, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine Umgebung von x_0, nämlich $\mathfrak{U}_\varepsilon(x_0)$ und eine positive Zahl m gefunden werden kann, so daß für jeden Wert x von $\mathfrak{U}_\varepsilon(x_0)$ und für jedes $n > m$

$$(5) \qquad |r_n(x)| < \varepsilon$$

ist. Dabei kann es natürlich sein, daß diese Umgebungen $\mathfrak{U}_\varepsilon$ sich mit abnehmendem ε auf den Punkt x_0 zusammenziehen.[901a])

Ist eine Reihe in jedem Punkt einer abgeschlossenen und beschränkten Menge A (z. B. eines abgeschlossenen Intervalls) gleichmäßig konvergent, so konvergiert sie auch auf A gleichmäßig.

Auch für die gleichmäßige Konvergenz an einer Stelle gilt der dem obigen entsprechende Satz über die Stetigkeit der Reihensumme[902]): Eine in der Umgebung von x_0 konvergente Reihe von in x_0 stetigen Funktionen, die in x_0 gleichmäßig konvergiert, besitzt eine ebenfalls in x_0 stetige Reihensumme.*

899) **A. Pringsheim*, Math. Ann. 44 (1894), p. 64/5 u. 80/1. — Vgl. auch II A 1, Nr. 16 u. Fußn. [184]) (*A. Pringsheim*).*

900) *Dieser Begriff ist auch später mehrfach von neuem aufgestellt worden: *W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1903), p. 90; (2) 6 (1908), p. 29/30, 36; *F. Riesz*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 17 (1908), p. 199; *C. A. Dell' Agnola*[911]). — [Siehe hierzu auch die Bemerkungen bei: *F. Riesz*, Acta math. 42 (1919), p. 204/5; *A. Pringsheim*, Sitzgsber. Ak. Wiss. München 1919, p. 419/28.]*

901) *Wenn man nicht die Konvergenz in einer Umgebung von x_0 voraussetzen will, so hat man (5) durch (6) zu ersetzen.*

901a) *Auf einen Spezialfall der gleichmäßigen Konvergenz sei noch hingewiesen, nämlich auf einen von *H. Hahn* [Reelle Funktionen I, p. 238/44 u. 248/9; vgl. auch *E. J. Townsend*[912]), p. 11, 57, 74/6] untersuchten und mit Recht als „*stetige Konvergenz* im Punkte x_0" [vgl. [898])] bezeichneten Begriff: man hat nur in der obigen Definition (5) [oder (6)] für alle Werte x und x^* von $\mathfrak{U}_\varepsilon(x_0)$ und für alle $n > m$, $n^* > m$ durch

$$|s_{n^*}(x^*) - s_n(x)| < \varepsilon$$

zu ersetzen. So erhält man das genaue Analogon zum Begriff der Stetigkeit $\left[\text{etwa der Funktion } \varphi\left(x, \frac{1}{\nu}\right) = s_\nu(x) \text{ an der Stelle } x = x_0,\ \frac{1}{\nu} = 0\right]$.

Bei stetigen Funktionen fallen die Begriffe der gleichmäßigen und der stetigen Konvergenz zusammen [*H. Hahn*, a. a. O. p. 248/9]. Man kann übrigens, darüber hinausgehend, sehr leicht zeigen, daß für das Zusammenfallen der stetigen und der gleichmäßigen Konvergenz (im Punkte x_0 auf der Menge M) notwendig und hinreichend ist, daß

$$\varlimsup_{\nu=\infty} \omega(s_\nu, M, x_0) = 0$$

sei. [Wegen der Bezeichnung siehe Nr. 22.]*

902) *Ebenso auch die bei [896]) und [897]) gemachten Bemerkungen.*

*An einer Stelle ungleichmäßiger Konvergenz kann man die Abweichung von der gleichmäßigen Konvergenz durch den sogenannten *„Grad der ungleichmäßigen Konvergenz“* oder kürzer *„Ungleichmäßigkeitsgrad“* der Funktionenfolge bzw. -reihe messen. Darunter versteht man folgendes[903]): Für jede beliebige Punktfolge $x_n \to x_0$ und für jede beliebige Folge von ganzzahligen Indizes $\nu_n \to +\infty$ wird

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |r_{\nu_n}(x_n)| = \varrho$$

gebildet und die obere Grenze aller dieser Zahlen ϱ wird als Ungleichmäßigkeitsgrad U der Reihe (3) an der Stelle x_0 bezeichnet.[904]) $U = 0$ charakterisiert natürlich die gleichmäßige Konvergenz an der betr. Stelle x_0.*

*Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß man beim Übergang von konvergenten zu nicht-konvergenten (oder, wie man auch sagt, oszillierenden) Folgen an Stelle der gleichmäßigen Konvergenz nach *W. H. Young*[905]) entsprechende allgemeinere Begriffe der *„gleichmäßigen Oszillation“* bilden kann. So wie der Begriff der Stetigkeit zerspalten wird in Halbstetigkeit nach oben bzw. unten, so gelangt man hier von den gleichmäßig konvergenten Folgen zu den „oberhalb bzw. unterhalb gleichmäßig oszillierenden“ Folgen; und zwar ergeben sich zwei verschiedene Möglichkeiten einer derartigen Begriffsbildung [„uniform oscillation of the first bzw. second kind“[906])], die von *W. H. Young* eingehend untersucht werden.[907])*

903) **W. F. Osgood,* Amer. J. of math. 19 (1897), p. 155/66, insbes. p. 164 u. 166. Vgl. auch *A. Schoenflies,* Bericht I 1900, p. 225/6 [hier die jetzt übliche Bezeichnung] und *E. W. Hobson*[909]), erstes Zitat, p. 252/3; Theory, p. 483/5.

Ein Ansatz zu einer derartigen Begriffsbildung bereits bei *P. du Bois-Reymond*[898]), zweites Zitat, p. 337/45.*

904) **H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 261/7, führt eine analoge, mit der obigen aufs engste zusammenhängende Größe als *„Schwankung“* der Funktionenfolge oder -reihe ein, indem er $|r_{\nu_n}(x_n)|$ durch

$$|s_{\nu_n}(x_n) - s_{\nu_{n^*}}(x_n)|$$

ersetzt, wobei neben $\nu_n \to +\infty$ auch $\nu_{n^*} \to +\infty$ geht. — Vgl. übrigens dazu auch *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 177/8.*

905) **W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), p. 298/320 (insbes. p. 309 u. 313); (2) 8 (1910), p. 353/64; (2) 12 (1913), p. 340/64; Trans. Cambridge Philos. Soc. 21 (1909), p. 241/55; Atti IV. congr. internaz. dei matematici (Roma 1908), vol. II [Rom 1909], p. 57/9; Quart. J. of math. 44 (1913). p. 131/3 u. 138/41. Siehe hierzu auch *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 254/60, 277/80.*

906) *Letztere wird von *H. Hahn*[905]) als „gleichmäßige Oszillation“, erstere als „sekundär-gleichmäßige Oszillation“ bezeichnet.*

907) **H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 244/6 definiert außerdem noch zu seinem Begriff der „stetigen Konvergenz“[901a]) einen zugehörigen Begriff der *„halbstetigen Oszillation“*.*

49a. *Die Verteilung der Stellen gleichmäßiger und ungleichmäßiger Konvergenz. Die Frage nach der Verteilung der Stellen gleichmäßiger und ungleichmäßiger Konvergenz ist zuerst von *W. F. Osgood*[908]) für den Fall eingehend untersucht und erledigt worden, wo die konvergente Folge $\{f_\nu\}$ aus stetigen Funktionen besteht und eine stetige Grenzfunktion besitzt. Seine Resultate gelten jedoch allgemeiner[909]), und man erhält wesentliche Aussagen, selbst wenn über die Funktionen f_ν und ihre Grenzfunktion überhaupt nichts vorausgesetzt wird. In diesem allgemeinsten Fall ergibt sich[910]): Damit A die Menge aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz einer konvergenten Folge $\{f_\nu\}$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß A eine „äußere Grenzmenge", d. h. die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ist. Natürlich ist dann die zu A komplementäre „innere Grenzmenge" die Menge aller Punkte gleichmäßiger Konvergenz von $\{f_\nu\}$.[911]) Wenn die Funktionen f_ν als stetig vorausgesetzt werden, so kann man noch mehr aussagen: in diesem Falle nämlich liegen die Punkte gleichmäßiger Konvergenz überall dicht, und zwar bilden die Punkte ungleichmäßiger Konvergenz eine Menge erster Kategorie.[912])[913]) [Im übrigen sei hier auch auf Nr. 56 hingewiesen.]*

908) *W. F. Osgood,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1896, p. 288, 290, 289; Amer. J. of math. 19 (1897), p. 155/73.*

909) *Die Voraussetzung der Stetigkeit der Grenzfunktion kann überall entbehrt werden; siehe *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. [(1)] 34 (1902), p. 245/53; auch Acta math. 27 (1903), p. 209/16.*

910) **W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1904), p. 356/60; siehe auch *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 267/74.*

911) *Ist die Folge $\{f_\nu\}$ nicht, wie im Text angenommen, in einem Intervall definiert und konvergent, sondern wird sie auf einer beliebigen Menge M betrachtet (ohne daß sie überall auf M zu konvergieren braucht), so ist die Menge A aller Stellen, in welchen $\{f_\nu\}$ nicht gleichmäßig konvergiert, die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen in M abgeschlossenen Mengen. Wenn außerdem $\{f_\nu\}$ überall auf M konvergiert, so müssen diese abgeschlossenen Mengen noch Teilmengen von $(M \cdot M')$ sein [da in isolierten Punkten die Konvergenz von selbst eine gleichmäßige ist]. Siehe *H. Hahn*[910]). —

Für die *Konvergenz-* und *Divergenz*stellen einer beliebigen (nicht überall konvergenten) Folge von beliebigen Funktionen $\{f_\nu\}$ besteht eine derartige Gesetzmäßigkeit nicht: jede vorgegebene Menge kann „Konvergenzmenge" einer geeigneten Folge $\{f_\nu\}$ sein. Erst wenn man über die f_ν Voraussetzungen macht, wird auch die Konvergenzmenge Bedingungen unterworfen: Sind die f_ν meßbar, so ist auch die Konvergenzmenge meßbar. Wenn man die weitere Einschränkung macht, daß die f_ν *Baire*sche Funktionen sind, so ist die Konvergenzmenge stets eine *Borel*sche Menge; Genaueres hierüber in Nr. 54a, insbesondere bei Fußn.[1047]).*

912) **W. F. Osgood*[908]) [insbes. 2. Zitat, p. 171/3] mit der einschränkenden Voraussetzung der Stetigkeit der Grenzfunktion. Ferner sind Beweise ohne diese

49 b. *__Gleichgradig stetige Funktionenmengen.__ Hat man eine Folge von stetigen Funktionen $f_\nu(x)$, die gegen eine stetige Grenzfunktion $f(x)$ konvergieren, so braucht nach Nr. 49 diese Folge nicht gleichmäßig zu konvergieren. Wenn man also weiß, daß die Folge auch noch gleichmäßig konvergiert, so wird es umgekehrt möglich sein, über die $f_\nu(x)$ noch mehr als die bloße Stetigkeit auszusagen. Diese über die bloße Stetigkeit hinausgehende, für die gleichmäßige Konvergenz charakteristische Eigenschaft ist die sogenannte *gleichgradige Stetigkeit* der Funktionenfolge. Dieser Begriff stammt von *G. Ascoli*[914]). Eine Folge von Funktionen $f_\nu(x)$ heißt *gleichgradig stetig* [„*egualmente continua*"] in einem Punkte x_0, wenn es zu jedem positiven ε eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von x_0 gibt, so daß für jedes f_ν die Schwankung in $\mathfrak{U}$ kleiner als ε ist. Die Funktionenfolge heiße in einem Intervalle I oder auf einer Menge M gleichgradig stetig, wenn sie in jedem Punkte von I oder M gleichgradig stetig ist. Ist I abgeschlossen, so ist daselbst die Funktionenfolge gleichgradig stetig, wenn zu einem beliebigen positiven ε eine Länge d gehört, so daß in jedem Teilintervall aus I von einer Länge $\leqq d$ die Schwankung jedes f_ν kleiner als ε bleibt.

Diese gleichgradige Stetigkeit in x_0 ist nun also, wie schon oben angedeutet, notwendig und hinreichend dafür, daß eine in x_0 konvergente Folge von daselbst stetigen Funktionen in x_0 gleichmäßig konvergiert; und dieselbe Aussage gilt dann natürlich auch (statt an der Stelle x_0) im abgeschlossenen Intervall [oder auf einer abgeschlossenen, beschränkten Menge A].[915])

Voraussetzung gegeben worden von: *E. J. Townsend,* Über den Begriff und die Anwendung des Doppellimes, Gött. Diss. 1900, p. 52/5 u. 68; *E. W. Hobson*[909]); *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1903/4), p. 89/98; *E. B. Van Vleck,* Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), p. 202/4; *C. A. Dell'Agnola,* Rend. Accad. Linc. (5) 19_{II} (1910), p. 105/9. Vgl. auch *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 387/8; *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 274/7; *C. Kuratowski*[1021]), p. 78/80.

Infolge dieses Satzes erweist sich ein Beispiel von *P. du Bois-Reymond* [Sitzgsber. Ak. Berlin 1886, p. 366] für eine Folge von stetigen Funktionen, die in jedem Punkt ungleichmäßig konvergieren sollte, als falsch und unmöglich.*

913) *Wegen der entsprechenden Sätze über die Verteilung der Punkte gleichmäßiger bzw. ungleichmäßiger Oszillation siehe *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), p. 310/12 u. 316; (2) 12 (1913), p. 355/57; sowie *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 277/80.*

914) **G. Ascoli,* Mem. Accad. Linc. (3) 18 (1884), p. 545/80. Vgl. auch *P. Montel*[916]), p. 246; *C. A. Dell'Agnola*[915]), 2. Zitat, p. 1106. Bei dem ersteren die Definition der gleichgradig stetigen Funktionenmengen fürs Intervall J, bei den letzteren für den Punkt x_0. [Vgl. ferner auch Nr. 37 bei [705]).]*

915) **C. Arzelà,* Mem. Ist. Bologna (5) 5 (1895), p. 225/31; (5) 8 (1899/1900), p. 176/81; (5) 10 (1902/4), p. 109 [Dtsch. Bearbeitung von *J. T. Pohl* u. *Br. Rauch-*

Statt einer Folge von stetigen Funktionen kann man allgemeiner irgendeine *Menge* von stetigen Funktionen zugrundelegen und in gleicher Weise hierfür den Begriff der gleichgradigen Stetigkeit definieren. Man erhält dann hier den Satz[916]): Es sei $\mathfrak{F}$ eine Menge von Funktionen $\mathfrak{f}$, die in einem abgeschlossenen Intervall I oder auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge A definiert und daselbst stetig[917]) seien; damit dann aus jeder in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Funktionenfolge eine (in I oder A) gleichmäßig konvergente Teilfolge herausgegriffen werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionenmenge $\mathfrak{F}$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt[918]) sei.

Man kann diesen Satz noch anders formulieren; man bezeichnet [nach *M. Fréchet*[916])] eine (auf einer Menge M gegebene) Funktionenmenge $\mathfrak{F}$ als *kompakt*, wenn jede Funktionenfolge aus $\mathfrak{F}$ eine (auf M) gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält. Also kann der obige Satz so ausgesprochen werden: Für die Kompaktheit unserer oben betrachteten Funktionenmenge $\mathfrak{F}$ ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{F}$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt sei.

Dieser Begriff „*kompakt*" stimmt überein mit der allgemeinen Definition, die in Nr. 26 gegeben ist; man hat hier nur einen Funktionenraum zugrunde zu legen, in dem die in Nr. 26 bei [541]) gegebene Entfernungsdefinition gilt, oder, was dasselbe ist, in dem das „Grenzelement" mit Hilfe der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen definiert wird.

Schließlich sei noch folgendes hinreichende Kriterium für die gleichgradige Stetigkeit erwähnt: In einem Intervall I ist eine Funktionenmenge $\mathfrak{F}$ sicherlich dann gleichgradig stetig, wenn in I die

egger, Monatsh. Math. Phys. 16 (1905), p. 71/2, 250/8]. Siehe ferner: *C. A. Dell'Agnola,* Rend. Accad. Linc. (5) 19_{II} (1910), p. 106/7 (dazu auch Atti. Ist. Veneto 69_{II} [= (8) 12_{II}] (1910), p. 1103/9). Vgl. auch *W. H. Young,* Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1910), p. 356, sowie *M. Fréchet,* Ann. Éc. Norm. (3) 38 (1921), p. 359/62.*

916) *Ein (auf „hinreichend" sich beziehender Teil) dieses Satzes bei *G. Ascoli*[914]), p. 545/49; im übrigen stammt der Satz selbst im wesentlichen erst von *C. Arzelà*[915]) [vgl. auch Rend. Accad. Linc. (4) 5_I (1889), p. 342/8, sowie Mem. Ist. Bologna (5) 6 (1896/7), p. 131/6]. Siehe ferner hierzu: *M. Fréchet,* Pariser Thèse 1906 = Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 10/14; *P. Montel,* Ann. Éc. Norm (3) 24 (1907), p. 236/64, insbes. p. 236/43 u. p. 249/52; *L. Tonelli,* Atti Accad. Torino 49 (1914), p. 4/14; [vgl. auch: Fondamenti di calcolo delle variazioni 1, Bologna (1922), p. 76/92]; *W. Groß*, Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien II a, 123 (1914), p. 806/7; *F. Schürer,* Integraldifferenzen- und Differentialdifferenzengleichungen (Preisschr. Fürstl. Jablonowskische Gesellsch.), Leipzig 1919, p. 21/3.*

917) **C. Arzelà*[916]) behandelt auch entsprechend den Fall unstetiger Funktionen, die gegen eine stetige Grenzfunktion konvergieren.*

918) *D. h.: Alle Funktionen von $\mathfrak{F}$ liegen (in J oder A) zwischen zwei festen endlichen Schranken.*

ersten Differenzenquotienten aller Funktionen von $\mathfrak{F}$ insgesamt gleichmäßig beschränkt sind.[919])*

50. Der Weierstraßsche Satz. Ist eine Reihe in einem Intervalle I gleichmäßig konvergent, so ist der Fehler, den man begeht, wenn man die Summe $s(x)$ durch die Summe $s_n(x)$ der ersten Glieder ersetzt, in I beschränkt und wird mit wachsendem n beliebig klein. Es ist deshalb für die Anwendungen vorteilhaft, eine Funktion in der Form einer gleichmäßig konvergenten Reihe von einfacheren Funktionen darstellen zu können. Ganz besonders wichtig sind die beiden folgenden Sätze, die miteinander in engem Zusammenhang stehen und die man beide *K. Weierstraß*[920]) verdankt:

1. *Jede in einem abgeschlossenen Intervalle I stetige Funktion kann daselbst in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe von Polynomen entwickelt werden.*[921])

Nennen wir endliche trigonometrische Summe (n^{ter} Ordnung) jeden Ausdruck der Form:

$$(1)\qquad u_0 + u_1 \cos x + v_1 \sin x + u_2 \cos 2x + v_2 \sin 2x + \cdots + u_n \cos nx + v_n \sin nx,$$

wo $u_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$ beliebige Konstanten sind.

2. *Jede stetige Funktion von der Periode 2π kann in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe von endlichen trigonometrischen Summen entwickelt werden.*

Für beide *Weierstraß*schen Sätze sind eine große Anzahl von Beweisen gegeben worden. Wir werden hier nur den ersten dieser beiden Sätze, den sogenannten „*Weierstraßschen Polynomsatz*“ eingehender zu besprechen haben.[922]) *Zunächst sei hervorgehoben, daß dieser

919) *C. Arzelà,* Mem. Ist. Bologna (5) 5 (1895), p. 232/3; (5) 8 (1899/1900), p. 182/6 [Dtsch. Bearbeitung[915]), p. 258/63]; vgl. auch Rend. Ist. Bologna (2) 7 (1903), p. 34/5; (2) 8 (1904), p. 143/54.*

920) *K. Weierstraß,* Sitzgsb. Ak. Berlin 1885, p. 633/9, 789/805 [*auch ins Französische übersetzt von *L. Laugel* im J. de math. (4) 2 (1886), p. 105/13, 115/38*]; Mathematische Werke 3, Berlin 1903, p. 1/37.

921) Betrachtet man statt des endlichen Intervalles I die ganze x-Achse oder eine Halbgerade, so kann man es so einrichten, daß die Reihe in jedem endlichen (abgeschlossenen) Teilintervalle absolut und gleichmäßig konvergiert.

922) *Für den Satz 2. haben, abgesehen von *K. Weierstraß*[920]), Beweise gegeben: *E. Picard*[927]); *V. Volterra*[929]); *H. Lebesgue*[924]) [hier wird 2. direkt aus 1. hergeleitet]; *L. Fejér,* Mathematikai és physikai lapok 10 (1902), p. 49/68, 97/123 (ungarisch); Math. Ann. 58 (1904), p. 51/69, insbes. p. 59, 60, 67; *Ch. J. de la Vallée Poussin*[935]), erstes Zitat, p. 227/51; L'Enseignement math. 20 (1918), p. 5 ff.; Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable reelle, Paris 1919, p. 5/6; [Übertragung der Untersuchungen des letztgenannten (erstes Zitat)

Satz (unabhängig von *K. Weierstraß* und etwa gleichzeitig mit ihm) im wesentlichen auch von *C. Runge*[923]) gefunden und bewiesen worden ist.* Im übrigen sind die zahlreichen Beweise dieses Satzes 1. mit ganz verschiedenartigen Methoden erbracht worden. Die einen, wie die von *H. Lebesgue*[924]), *G. Mittag-Leffler*[925]) *und *G. Faber*[926])* sind elementarer Natur; *dazu kann auch der Beweis von *C. Runge*[923]) gerechnet werden.* Andere, wie die von *E. Picard*[927]), *M. Lerch*[928]) und *V. Volterra*[929]) benutzen die Darstellung durch trigonometrische Reihen. *Noch andere, z. B. die von *L. Fejér*[930]), *W. Stekloff*[931]) und *P. Funk*[932]) gehen von Entwicklungen nach *Legendre*schen Polynomen[933]) aus.* Endlich machen die Beweise von *K. Weierstraß*[920]) sowie von *E. Landau*[934]) *und *Ch. J. de la Vallée Poussin*[935])* von der Methode der sin-

auf mehrere Veränderliche bei *F. Sibirani,* Atti Acc. Torino 44 (1909), p. 659/83]; auch *D. Jackson*[963]), zweites Zitat. Bezüglich der Einordnung in die allgemeine Theorie der singulären Integrale siehe [936]).* Übrigens läßt sich ein großer Teil der Betrachtungen vom Polynomsatz 1. auf den Satz 2. übertragen, indem man einfach die Polynome durch endliche trigonometrische Summen ersetzt. *Vgl. auch den Text bei [942a]).*

923) *C. Runge,* Acta math. 7 (1885), p. 387/92. *Er hat hier allerdings nur die gleichmäßige Approximation der stetigen Funktionen durch *rationale* Funktionen bewiesen, aber er hatte schon vorher [Acta math. 6 (1884/5), p. 236/8 (siehe auch p. 246)] die gleichmäßige Approximation der rationalen Funktionen durch Polynome durchgeführt. Vgl. dazu auch eine Bemerkung von *E. Phragmén* bei *G. Mittag-Leffler*[925]), p. 218/21.*

924) Bull. sc. math. [33 =] (2) 22_{I} (1898), p. 278/87.

925) Rend. Circ. mat. Palermo 14 (1900), p. 217/24.

926) *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 143/4.*

927) *Paris C. R. 112 (1891), p. 183/6*; Traité d'Analyse I, 1re éd., Paris 1891, p. 258; 2e éd., Paris 1901, p. 278.

928) Rozpravy Ak. Prag (II. Cl.) 1 (1892), Nr. 33; 2 (1893), Nr. 9 (beides tschechisch); *Acta math. 27 (1903), p. 341/4. Vgl. dazu auch *P. Lehmann,* Diss.[960]), p. 58/61.*

929) Rend. Circ. mat. Palermo 11 (1897), p. 83/6.

930) *Mathematikai és termeszettudományi értesitö 26 (1908), p. 323/73; Math. Ann. 67 (1909), p. 76/109, insbes. p. 97/99. Siehe dazu auch *A. Haar,* Rend. Circ. mat. Palermo 32 (1911), p. 132/42; *M. Plancherel,* Rend. Circ. mat. Palermo 33 (1912), p. 1/26, insbes. p. 1/2 u. 23/6.*

931) *Mémoires Ac. sc. St. Pétersbourg (8) 30 (1911), Nr. 4 (86 S. [französisch]), insbes. p. 5, 30/31, 86. Dazu russische Selbstanzeige: Bull. Ac. sc. St. Pétersbourg (6) 5_{I} (1911), p. 754/7.*

932) *Math. Ann. 77 (1915/16), p. 146/8.*

933) *Siehe hierüber II A 10 (*A. Wangerin*), insbes. Nr. 2.*

934) Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), p. 337/45. [*Vgl. dazu auch *W. G. Simon,* Ann. of math. (2) 19 (1917/18), p. 242/5, wo die Integrale durch Summen ersetzt werden.*]

935) *Bull. Acad. Roy. Belgique (classe sc.) 1908, p. 193/254; auch Cours d'Analyse II, 2. éd., Louvain-Paris 1912, p. 126/37.*

gulären Integrale Gebrauch, die dann von *H. Lebesgue*[936]) systematisch entwickelt worden ist. [*Wegen der allgemeinen Theorie der singulären Integrale siehe II C 11 (*E. Hilb* u. *O. Szász*), Nr. 4.*][937])

Die Methode von *K. Weierstraß* ist recht einfach; sie beruht auf der Formel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

Die wesentlichste Eigenschaft dieses Integrales ist, daß man zu einer gegebenen Zahl $\omega > 0$ stets ein A derart finden kann, daß für $a > A$

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < \omega$$

ist.

Man beweist dann, daß der Ausdruck

$$\Psi(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du \tag{3}$$

gleichmäßig gegen die gegebene Funktion $f(x)$ konvergiert, indem man zeigt, daß das Integral nicht merklich geändert wird, wenn man als Integrationsgrenzen $-h$, $+h$ nimmt, sofern h und k genügend klein sind $\left(\text{und } k < \frac{h}{A}\right)$.

Man ersetzt dann die ganze Funktion $\Psi(x, k)$ von x durch die ersten Glieder ihrer Entwicklung in eine *Mac Laurin*sche Reihe.[938])

---

936) Ann. Fac. sc. Toulouse [23 =] (3) 1 (1909), p. 25/117, 119/28. *Siehe auch die vorläufige Mitteilung in Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 325/8.* Ferner sei hier hingewiesen auf *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), p. 349/95, *und *H. Hahn,* Denkschr. Ak. Wiss. Wien 93 (1916), p. 585/655, 657/92.*

937) *Es sei noch erwähnt, daß *S. Bernstein,* Communications Soc. math. de Kharkow (2) 13 (1912/13), p. 1/2, einen Beweis von Satz 1. mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung erbracht hat. — Auch ein Teil der in Nr. **51** behandelten Methoden der Interpolation führt zu Beweisen des *Weierstraß*schen Satzes; vgl. insbes. [außer [926])] [960]) und [962]).

W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), p. 210/23, hat den Satz 1. für nicht-beschränkte, in einem erweiterten Sinn stetige Funktionen verallgemeinert.

Bezüglich der Ausdehnung auf Funktionen mehrerer Veränderlichen sowie auf den Funktionenraum siehe Nr. 58.*

938) *Es sei bemerkt, daß *K. Weierstraß* seiner Untersuchung von vornherein einen etwas allgemeineren Charakter dadurch gegeben hat, daß er statt e^{-t^2} beliebige andere Funktionen $\psi(t)$ mit analogen Eigenschaften ins Auge gefaßt hat; so daß also bei ihm unmittelbar klar wird, daß auf mannigfache Art Folgen approximierender Polynome gefunden werden können. Vgl. übrigens [936]) und den Hinweis auf die allgemeine Theorie der singulären Integrale.*

Später haben zuerst *E. Landau*[939]) $_*$und kurz darauf *Ch. J. de la Vallée Poussin*[935])* die Methode von *K. Weierstraß* sehr vereinfacht, indem sie das Integral $\Psi(x, k)$ durch das Integral

$$(4) \qquad L_n(x) = \frac{\int_0^1 f(u)\,[1-(u-x)^2]^n\,du}{2\int_0^1 (1-u^2)^n\,du}$$

ersetzen, das im Intervalle [0, 1] gleichmäßig gegen die als stetig vorausgesetzte Funktion $f(x)$ konvergiert, wenn n über alle Grenzen wächst. Dieses Integral ist nun aber offenbar ein Polynom in x.

$_*$Die Approximation mit Hilfe der Polynome $L_n(x)$ bietet noch einen weiteren wesentlichen Vorteil dar: Wie *Ch. J. de la Vallée Poussin*[940]) gezeigt hat, konvergieren die aus $L_n(x)$ durch p-fache Ableitung entstehenden Polynome $D^p L_n(x)$ mit wachsendem n gegen die p^{te} Ableitung von $f(x)$ in jedem Punkt, wo diese Ableitung existiert; und diese Konvergenz ist gleichmäßig in jedem Intervall, das ganz im Innern eines Stetigkeitsintervalls von $f^{(p)}(x)$ liegt.[941]) [942])*

---

939) *E. Landau*[934]) gibt selbst an, daß er die Idee seiner Vereinfachung des *Weierstraß*schen Beweises einer Bemerkung von *T. J. Stieltjes* verdankt [Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publ. par *B. Baillaud* et *H. Bourget*, 2, Paris 1905, p. 337/9 ($_*$vgl. dazu auch p. 185/7*)].

940) $_*$*Ch. J. de la Vallée Poussin*[935]), erstes Zitat, p. 202/21; zweites Zitat, p. 129/33. — [Ähnlich für endliche trigonometrische Summen: a. a. O.[935]), erstes Zitat, p. 238/44, und für *Legendre*sche Polynome: *M. Plancherel*[930])]. — Allgemeinere Untersuchungen bei *H. Hahn*[936]), p. 596 ff.; *K. Ogura*, Tôhoku Math. J. 16 (1919), p. 118/25.

Schon früher hatte *P. Painlevé*, Paris C. R. 126 (1898), p. 459/61, stetige Funktionen samt ihren Ableitungen durch Polynome und deren Ableitungen approximiert; allerdings nur bei Funktionen, deren sämtliche Ableitungen existieren.*

941) $_*$*L. Tonelli*[1087]), p. 25/31; Annali di mat. (3) 25 (1916), p. 275/316, sowie *K. Ogura*[940]), p. 125/6, haben entsprechend auch die Integration von $f(x)$ und der zugehörigen Näherungspolynome $L_n(x)$ untersucht.*

942) Die *Landau*schen Polynome bieten noch den großen Vorzug dar, daß sie auch für die Approximation nicht-stetiger Funktionen $f(x)$ sehr brauchbar sind. Es hat nämlich *F. Riesz*, Jahresb. Dtsch. Math.-Ver. 17 (1908), p. 196/211, gezeigt, daß die *Landau*schen Polynome $L_n(x)$ gegen $f(x)$ *„fast überall" konvergieren, selbst wenn* $f(x)$ *nur eine summierbare Funktion ist*; wobei also die Konvergenz gegen $f(x)$ höchstens in den Punkten einer Nullmenge aussetzt. Unter den Konvergenzpunkten befinden sich alle Stetigkeitspunkte von $f(x)$. $_*$Und noch mehr: *An jeder Stetigkeitsstelle* von $f(x)$ ist die Konvergenz der Polynome *gleichmäßig*. — Auch die soeben im Text gemachte Aussage über die Ableitungen gilt nach *Ch. J. de la Vallée Poussin*[940]) ganz allgemein. — Übrigens sehe man zu diesen Dingen auch Nr. **57a** und insbes. Fußn. [1074]).*

Bei anderen Methoden zeigt man zuerst, daß man die Kurve, welche die gegebene stetige Funktion darstellt, als die Grenze eines eingeschriebenen polygonalen Linienzuges ansehen kann, dessen Maximalseitenlänge gegen Null konvergiert. Man wird so auf den Fall geführt, in dem die darzustellende Kurve selbst polygonal ist.

Um den Satz in diesem Falle zu beweisen, benutzt *V. Volterra*[929]) die Darstellung einer stetigen periodischen Funktion, die endlich viele Maxima und Minima hat, durch die *Fourier*sche Reihe. Man kann für denselben Fall auch elementare Methoden anwenden. Man bemerkt, daß die durch den polygonalen Linienzug dargestellte Funktion eine einfache Kombination von Funktionen ersten Grades und von Funktionen ist, die ähnlich gebaut sind wie eine Funktion $\alpha(x)$, welche für $x > 0$ gleich Null, für $x < 0$ gleich 1 und für $x = 0$ endlich ist. Es genügt dann, die Funktion $\alpha(x)$ durch ein Polynom zu ersetzen, welches sich ihr beliebig nähert, außer vielleicht in einem kleinen Intervall um $x = 0$, in dem sie endlich bleibt. *C. Runge*[923]) und *G. Mittag-Leffler*[925]) geben verschiedene Darstellungen von $\alpha(x)$.

Übrigens, wenn man bereits den oben ausgesprochenen Satz 2. kennt, gelangt man sehr schnell zu Satz 1. durch folgende *von *E. Picard*[927]) verwendete* Methode, die im wesentlichen nur eine Vereinfachung der Methode von *V. Volterra* ist. Nennen wir $\varphi(x)$ eine Funktion, die im Intervalle I durch dieselbe Kurve dargestellt wird wie $f(x)$ und in bezug auf die erste Ordinate von I symmetrisch ist und die im übrigen eine stetige, periodische Funktion ist, deren Periode ω gleich der doppelten Länge von I ist. Nach dem Satze 2. kann man $\varphi(x)$ durch eine Reihe von endlichen trigonometrischen Summen darstellen, die man erhält, wenn man in (1) x durch $\frac{2\pi x}{\omega}$ ersetzt. Jede dieser Summen ist eine ganze Funktion, und es genügt dann, sie näherungsweise durch die ersten Glieder ihrer Entwicklung zu ersetzen.

*In noch viel einfacherer Weise kann man den Zusammenhang zwischen den Sätzen 1. und 2. nach *S. Bernstein*[942a]) aufdecken und ausnutzen, wenn man zugleich mit $f(x)$ die Funktion $f(\cos\varphi)$ betrachtet. Die Approximation der letzteren Funktion durch Summen (1), die hier nur cos-Glieder enthalten, liefert, wenn man $\cos(k\varphi)$ durch $\cos\varphi$ ausdrückt und dann $\cos\varphi = x$ setzt, eine entsprechende Approximation von $f(x)$ durch Polynome.*

Der Satz von *Weierstraß* besitzt große Wichtigkeit, nicht nur

942a) **S. Bernstein*[942]), zweites Zitat; vgl. auch *C. de la Vallée Poussin*, Leçons[922]), insbes. p. 6/7 u. 63/4.*

in praktischer Hinsicht (Interpolation), sondern auch dadurch, daß er die Menge der stetigen Funktionen als die Ableitung [Nr. 4 u. 26] der Menge der Polynome erscheinen läßt (wenn man für die Definition des „Grenzelements" die gleichmäßige Konvergenz zugrunde legt). *Benutzt man übrigens nur die Polynome mit rationalen Koeffizienten, so erhält man die Menge der stetigen Funktionen als (wieder mit Hilfe der gleichmäßigen Konvergenz definierte) Ableitung einer *abzählbaren* Teilmenge.[943])* Man kann daher nach einer Bemerkung von *M. Fréchet*[944]) [*bzw. nach *W. Sierpiński*[945])*] sogar *ein für allemal* eine Reihe von Polynomen bilden derart, daß es möglich ist, sie durch jedesmalige passende Zusammenfassung [*bzw. Anordnung*] ihrer Glieder gleichmäßig gegen jede beliebige gegebene stetige Funktion konvergieren zu lassen.

*Ferner kann man, wie *J. Pál*[946]) auf Grund des *Weierstraß*schen Satzes gezeigt hat, die Näherungspolynome einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ so wählen, daß sie eine Folge von (natürlich im allgemeinen nicht allen) Abschnitten einer zu $f(x)$ passend bestimmten Potenzreihe bilden. Und nach einer daran anknüpfenden Bemerkung von *M. Fekete*[947]) kann man sogar (wieder ausgehend von den Polynomen mit rationalen Koeffizienten) eine *feste* Potenzreihe angeben, deren geeignet ausgewählte Abschnitte im Intervall $[-1, +1]$ *jede* vorgegebene, im Nullpunkt verschwindende, stetige Funktion $f(x)$ beliebig gut approximieren.*

*Schließlich kann man den *Weierstraß*schen Polynomsatz noch in einer anderen Weise formulieren, was zu neuen Fragestellungen An-

---

943) *Nach *C. Burstin,* Monatsh. Math. Phys. 28 (1917), p. 104/12, ist bereits für die Funktionen 1. (oder 2.) Klasse [Nr. 53 u. 54] etwas Analoges nicht möglich, wenn man wieder die gleichmäßige Konvergenz zugrunde legt: Es gibt überhaupt keine abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ von Funktionen, so daß jede Funktion 1. (oder 2.) Klasse durch eine Teilfolge von $\mathfrak{M}$ gleichmäßig approximiert wird. Und für die Funktionen 2. Klasse ist etwas derartiges nicht einmal möglich, wenn man die gewöhnliche Konvergenz benutzt und zugleich die Funktionen von $\mathfrak{M}$ als meßbar voraussetzt. — Im übrigen vgl. [1074]).*

944) *M. Fréchet,* Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 36.

945) **W. Sierpiński,* Anzeiger Ak. Wiss. Krakau (A) 1912, p. 86/94.*

946) **J. Pál,* Tôhoku Math. J. 5 (1914), p. 8/9; [auch Mathematikai és phys. lapok 24 (1915), p. 243/7 (ungarisch)].

Hiermit hängt eine andere Bemerkung von *J. Pál* [Tôhoku Math. J. 6 (1914/15), p. 42/3] eng zusammen, daß man nämlich jede im Nullpunkt verschwindende, stetige Funktion $f(x)$ im Intervall $[-a, +a]$ durch Polynome mit *ganzzahligen* Koeffizienten approximieren kann, wenn $0 < a < 1$ ist. Vgl. dazu auch *S. Kakeya,* ib. 6 (1914/15), p. 182/6.*

947) *Bei *J. Pál*[946]), letztes Zitat.*

laß gibt, nämlich: Die Folge der Potenzen

(5) $$x^0 = 1, x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

bildet eine *Basis* für die Gesamtheit der in $[a, b]$ stetigen Funktionen, in dem Sinn, daß jede der letzteren durch lineare Aggregate[948]) der Potenzen (5) mit beliebiger Genauigkeit gleichmäßig approximiert werden kann.

Man kann nun allgemeiner fragen, etwa mit Beschränkung auf das Intervall $[0, 1]$: Wie muß eine Teilfolge von (5) beschaffen sein, damit sie eine derartige Basis darstelle? Oder noch allgemeiner: Unter welchen Bedingungen bildet die Folge von beliebigen positiven Potenzen

(6) $$x^{p_0}, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_n}, \ldots \quad (0 \leq p_0 < p_1 < \cdots < p_n < \cdots)$$

ein derartiges Basissystem? *S. Bernstein*[949]), der diese Frage gestellt hat, hat hierfür einerseits hinreichende und andererseits notwendige Bedingungen angegeben. Erst *Ch. H. Müntz*[950]) konnte die folgende, zugleich notwendige und hinreichende Bedingung beweisen: Die unendliche Folge der Potenzen

(6a) $$x^0 = 1, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_n}, \ldots \quad (0 < p_1 < \cdots < p_n < \cdots)$$

ist dann und nur dann eine Basis aller in $[0, 1]$ stetigen Funktionen, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$$

divergiert.[951])

948) *Mit konstanten Koeffizienten.*

949) *S. Bernstein*, Proceedings of the 5. international congress of mathematicians, Cambridge 1912, Vol. I (Cambridge 1913), p. 256/66, insbes. p. 264; Mém. Acad. Roy. Belgique [Classe d. sc.] (2) 4 (1912), fasc. 1 (104 S.), insbes. p. 78/84.*

950) *Ch. H. Müntz*, Mathematische Abhandlungen, *H. A. Schwarz* zu seinem 50jähr. Doktor-Jubiläum gewidmet, Berlin 1914, p. 303/12. Siehe auch Arch. Math. Phys. (3) 24 (1916), p. 310/16 (wo gezeigt wird, daß in einem positiven Intervall $0 \leq a \leq x \leq b$ die unendliche Folge der Wurzeln

$$x^{\frac{1}{1}}, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, \ldots, x^{\frac{1}{n}}, \ldots, x^0 = 1$$

eine Basis der dort stetigen Funktionen ist). —

Eine Vereinfachung des Beweises und Verallgemeinerungen des Satzes, insbes. für komplexe Exponenten, bei *O. Szász*, Math. Ann. 77 (1916), p. 482/96; vgl. dazu auch Mathematikai és physikai lapok 25 (1917), p. 157/77 (ungarisch). [Ferner für komplexe Funktionen: *T. Carleman*, Arkiv för mat., astr. och fysik 17 (1922/23), Nr. 9.]*

951) *Wie *Ch. H. Müntz*, Paris C. R. 158 (1914), p. 1864/6, zuerst gezeigt und dann auf einfacherem Wege *O. Szász*, J. f. Math. 148 (1918), p. 183/8 [der auch noch einen anderen derartigen Satz gibt] bewiesen hat, besitzt die Folge der *Bernoulli*schen Polynome geraden Grades die Eigenschaft, daß sie und [im Gegensatz zu den Potenzen (5)] jede beliebige aus ihnen herausgegriffene unend-

Natürlich ordnet sich das vorstehende der folgenden allgemeinsten Fragestellung unter:*

Wann bildet eine gegebene abzählbare Folge von in $[a, b]$ stetigen Funktionen

$$(7) \qquad \varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

eine Basis aller in $[a, b]$ stetigen Funktionen?

Diese allgemeine Frage ist zuerst von *E. Schmidt*[952]) untersucht worden und von ihm sind einerseits hinreichende und andererseits notwendige Bedingungen dafür aufgestellt worden; während, daran anknüpfend, *F. Riesz*[953]) Bedingungen geben konnte, die zugleich notwendig und hinreichend sind.

51. Interpolation. Beste Approximation.[954]) Der *Weierstraß*sche Satz erlaubt, eine beliebige stetige Funktion durch ein Polynom zu ersetzen, das sich in einem gegebenen Intervall beliebig wenig von ihr unterscheidet.

Die hiermit geleistete Approximation der stetigen Funktion $f(x)$ setzt im Prinzip die volle Kenntnis von $f(x)$ im betrachteten Intervall voraus. Nun ist aber die Funktion $f(x)$, da sie stetig ist, bereits durch eine abzählbare, überall dichte Menge ihrer Punkte völlig bestimmt. Man wird — was für die Anwendungen besonders wichtig ist — naturgemäß noch einen Schritt weitergehen und die Bestimmung eines Näherungspolynoms von $f(x)$ zu gewinnen suchen, wenn man nur eine endliche Anzahl von Punkten (z. B. mit rationalen Abszissen) der $f(x)$ darstellenden Kurve kennt; derart, daß eine An-

liche Teilfolge in $[0, \frac{1}{2}]$ eine Basis der dort stetigen Funktionen bildet. — Übrigens besitzt [wie sich unmittelbar aus dem Satz von *Ch. H. Müntz*[950]) ergibt] jede Folge (6a) dieselbe Eigenschaft für das Intervall [0, 1], wenn nur die p_n beschränkt bleiben.*

952) *E. Schmidt,* Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Gött. Diss. 1905 [insbes. IV. Kap.]; Math. Ann. 63 (1907), p. 433/76. — [*Vgl. auch *A. Kneser,* Math. Ann. 60 (1905), p. 402/43.*]

*Es sei hier auch auf eine Arbeit von *J. Mollerup,* Math. Ann. 66 (1909), p. 511/16 [dazu eine Berichtigung: ib. 71 (1912), p. 600] hingewiesen, wo eine in dieser Richtung liegende Frage in verhältnismäßig einfacher Weise behandelt und so ein neuer Beweis des *Weierstraß*schen Satzes gegeben wird.*

953) *F. Riesz,* Ann. Éc. Norm. [47 =] (3) 28 (1911), p. 51/4; [*vorläufige Mitteilung: Paris C. R. 150 (1910), p. 674/7*].

954) *In dieser Nr. werden nur einige neuere, die Interpolation betreffende Dinge besprochen, insbesondere solche, die entweder mit dem vorhergehenden zusammenhängen oder überhaupt mit Methoden der reellen Funktionentheorie behandelt werden. Im übrigen sei auf die ausführlichen Darstellungen in den Artikeln I D 3, Interpolation (*J. Bauschinger*) und II A 9a, Trigonometrische Interpolation (*H. Burkhardt*) verwiesen. Vgl. auch II C 4, Nr. **59** (*L. Bieberbach*).*

näherung von beliebiger Genauigkeit erzielt werden kann, wenn die Zahl dieser Punkte hinreichend groß ist (und dieselben in der Grenze schließlich überall dicht liegen): Dies eben ist das Ziel der *Interpolation.*

Am einfachsten scheint es zu sein, das Polynom allein durch die Bedingung zu bestimmen, daß es für eine zur Berechnung seiner Koeffizienten gerade hinreichende Anzahl von a priori ausgewählten Werten der Veränderlichen mit der gegebenen Funktion *zusammenfällt.* Die Funktion müßte dann der Limes dieses Polynomes sein, wenn die Maximallänge der durch diese Werte bestimmten aufeinanderfolgenden Intervalle gegen Null konvergiert. Jedes der fraglichen Polynome kann übrigens unmittelbar, z. B. durch die Interpolationsformel von *Lagrange*[955]), erhalten werden.

C. Runge[956]) und, unabhängig von ihm, *E. Borel*[957]) haben Beispiele gegeben, die zeigen, daß diese Methode nicht zum gewünschten Resultat führen kann. So hat *C. Runge* gezeigt: Berechnet man ein Polynom $P_n(x)$ vom n^{ten} Grade, das mit der stetigen Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ an den aufeinanderfolgenden Endpunkten von n gleichen Teilen des Intervalles $[-5, +5]$ zusammenfällt, so konvergiert bei unbegrenzt wachsendem n nicht nur dieses Polynom nicht notwendig im ganzen Intervalle $[-5, +5]$ gegen $\frac{1}{1+x^2}$, sondern es divergiert sogar an Stellen außerhalb des Intervalles $[-3{,}63\ldots; +3{,}63\ldots]$.

E. Borel ist es gelungen, eine aus Polynomen bestehende Interpolationsformel zu erhalten, die immer konvergiert[958]). Genauer gesagt: man kann *ein für allemal* Polynome $P_{\mu,\nu}(x)$ bilden, welche folgende Eigenschaft besitzen: Ist eine zwischen 0 und 1 definierte stetige Funktion $f(x)$ gegeben, so hat man:

$$(1) \qquad f(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} f\left(\frac{\mu}{\nu}\right) P_{\mu,\nu}(x)$$

und die Konvergenz ist von 0 bis 1 gleichmäßig.

---

955) $_*$Vgl. I B 1a (*E. Netto*), Nr. 2 und I D 3 (*J. Bauschinger*), Nr. 3.*

956) *C. Runge*, Ztschr. Math. Phys. 46 (1901), p. 224/43; siehe auch *Ch. Méray*, Ann. Éc. Norm. (3) 1 (1884), p. 165/76; Bull. sc. math. [31_I =] (2) 20_I (1896), p. 266/70; *E. Heine*, J. f. Math. 89 (1880), p. 27/30.

$_*$Die Untersuchungen von *C. Runge* sind neuerdings weitergeführt worden von *G. Faber*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 192/210; *S. Bernstein*, Math. Ann. 79 (1918), p. 1/12; *H. Hahn*[966]), p. 137/42.*

957) *E. Borel*, Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris 1905, p. 74/9.

958) *E. Borel*, $_*$Verhandl. des 3. internat. Math.-Kongr. Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), p. 229/32*; [957]), p. 79/82. [$_*$Vgl. dazu auch *G. Faber*[926]).*]

Man sieht, daß man als angenähertes Polynom das Polynom

$$(2) \qquad \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} f\left(\frac{\mu}{\nu}\right) P_{\mu,\nu}(x)$$

nehmen kann, das bestimmt ist, wenn man nur die Werte von $f(x)$ für die Abszissen

$$0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}, 1$$

kennt.

Durch die Anwendung derselben Methode kann man *ein für allemal* endliche trigonometrische Reihen $S_{\mu,\nu}(\theta)$ derart bilden, daß man

$$(3) \qquad \varphi(\theta) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} \varphi\left(\frac{2\pi\mu}{\nu}\right) S_{\mu,\nu}(\theta)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz hat, wenn $\varphi(\theta)$ eine stetige Funktion von der Periode 2π ist[959]).

Außerdem läßt sich nicht nur die Möglichkeit der Bildung der $S_{\mu,\nu}(\theta)$ und der $P_{\mu,\nu}(x)$ beweisen, sondern man kann sogar wirklich einfache Ausdrücke für sie angeben. Solche sind explizit aufgestellt worden von *M. Krause*[960]), *M. Potron*[961]), **W. Sierpiński*[962]), *S. Bernstein*[962a])* für die $P_{\mu,\nu}(x)$ und von *M. Fréchet*[959]) für die $S_{\mu,\nu}(\theta)$.[962b])[963])

959) *M. Fréchet,* Paris C. R. 141 (1905), p. 818/9. Die Formel bleibt bestehen, auch wenn

$$\varphi(0) \quad \text{und} \quad \varphi(2\pi)$$

ungleich sind; aber dann ist der Grenzwert der rechten Seite für $\theta = 0$ oder $\theta = 2\pi$:

$$\frac{\varphi(0) + \varphi(2\pi)}{2},$$

und die Konvergenz ist nur in jedem innerhalb von $(0, 2\pi)$ gelegenen Intervalle gleichmäßig. Ein Druckfehler ist in einer folgenden Note [Paris C. R. 141 (1905), p. 875] berichtigt worden.

960) *M. Krause,* *Paris C. R. 140 (1905), p. 1442/4;* Berichte Ges. d. Wiss. Leipzig 58 (1906), p. 2/18; *Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 16 (1907), p. 240/2. Siehe ferner hierzu die bei *M. Krause* entstandene Dissertation von *P. Lehmann,* Beiträge zur Theorie der Darstellung der stetigen Funktionen durch Reihen von ganzen rationalen Funktionen, Halle 1910.*

961) *M. Potron,* Bull. Soc. math. France 34 (1906), p. 52/60.

962) **W. Sierpiński,* Prace Matematyczno-Fizyczne 22 (1911), p. 59/68 (polnisch); ausführliches Referat hierüber im Bull. sc. math. [49_{II} =] (2) 38_{II} (1914), p. 9/11.*

962a) **S. Bernstein*[937]). Hier ein ganz besonders einfacher Ausdruck für $P_{\mu,\nu}(x)$, nämlich

$$P_{\mu,\nu}(x) = \binom{\nu}{\mu} x^{\mu}(1-x)^{\nu-\mu}.*$$

962b) *Auch aus *D. Jackson*[963]), zweites Zitat, p. 372, kann ein expliziter Ausdruck für die $S_{\mu,\nu}(\theta)$ abgelesen werden.*

963) *Außerdem sind von verschiedenen Mathematikern auch noch andere

H. Lebesgue[964]) gibt übrigens eine allgemeine Methode an, durch die man, ausgehend von den Integraldarstellungen mittels singulärer Integrale, die vorstehenden Ausdrücke und außerdem noch beliebige andere (der *Borel*schen Formel analoge) Lösungen des Interpolationsproblems erhalten kann. *Dies ist von *Th. Radakovič*[965]) noch weiter ausgeführt worden. Ferner hat *H. Hahn*[966]) (mit Methoden, die der Theorie der singulären Integrale nachgebildet sind) notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß ganz allgemeine Interpolationsformeln (die nicht notwendig mit Polynomen, sondern mit beliebigen Funktionen gebildet sind) im Intervall $[a, b]$ für *alle* beschränkten und höchstens von erster Art unstetigen Funktionen[967]) $f(x)$ an einer beliebigen Stetigkeitsstelle von $f(x)$ gegen $f(x)$ konvergieren. Auch die Bedingungen für gleichmäßige Konvergenz gegen $f(x)$ werden von ihm genauer untersucht.*

*Die *Lagrange*sche Interpolationsformel besitzt außer der in vielen Fällen vorhandenen Divergenz noch einen anderen, in der Praxis überaus störenden Mangel: Geringfügige Änderungen der bei der Interpolation verwendeten Beobachtungswerte von $f(x)$ können sehr beträchtliche (sogar mit n über alle Grenzen wachsende) Änderungen der Näherungsausdrücke $P_n(x)$ bewirken.[968]) *H. Hahn*[965]) hat nun genauer die Bedingungen untersucht dafür, daß bei allgemeinen Inter-

---

explizite Interpolationsformeln angegeben und untersucht worden (hauptsächlich trigonometrische, zum Teil auch mit Polynomen gebildete), welche entweder a) geeignet sind, alle stetigen Funktionen $f(x)$ darzustellen, oder b) dies nur für speziellere stetige Funktionen (z. B. die von beschränkter Schwankung) leisten. Siehe [abgesehen von [964])] insbesondere: Zu a): *D. Jackson,* Trans. Amer. Math. Soc. 14 (1913), p. 453/61; Rend. Circ. mat. Palermo 37 (1914), p. 371/75; 39 (1915), p. 230/2; *L. Fejér,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1916, p. 66/91; *N. Kryloff,* Bull. sc. math. [52_1 =] (2) 41_1 (1917), p. 309/20; *Maria Theis,* Math. Ztschr. 3 (1919), p. 93/113; vgl. auch *K. Ogura,* Tôhoku Math. J. 16 (1919), p. 126/35. — Zu b): *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Bull. Acad. Roy. Belgique (classe d. sc.) 1908, p. 319/410 [dazu auch *Maria Theis,* a. a. O.]; *G. Faber,* Math. Ann. 69 (1910), p. 417/34; *D. Jackson,* a. a. O., erstes Zitat; *K. Ogura,* Tôhoku Math. J. 18 (1920), p. 61/74. — Im übrigen siehe hierzu auch den Artikel II C 10 (*E. Hilb-M. Riesz*).*

964) *H. Lebesgue,* Ann. Fac. sc. Toulouse (3) 1 (1909), p. 108/9.

965) **Th. Radakovič,* Über singuläre Integrale und Interpolationsverfahren, Auszug aus der Dissertation, Bonn 1921. Er hat hier auch die Differentiation von Interpolationsverfahren näher untersucht.*

966) **H. Hahn,* Math. Ztschr. 1 (1918), p. 115/42.*

967) *Ähnlich auch für die Klasse der Funktionen $f(x)$ von beschränkter Schwankung.*

968) *Vgl. hierüber: *Ch. J. de la Vallée Poussin*[963]), p. 321/2; *H. Tietze,* Ztschr. Math. Phys. 64 (1916/17), p. 74/90; *G. Faber*[956]); *L. Fejér*[963]), insbes. p. 73/6; *H. Hahn*[966]), p. 115/6, 137/42.*

polationsverfahren eine geringe Änderung der zu interpolierenden Werte von $f(x)$ auch stets eine nur geringfügige Änderung der Näherungsausdrücke zur Folge hat. Im speziellen findet er, daß diese Eigenschaft im Intervall $[a, b]$ sicher vorhanden ist, wenn das betrachtete Interpolationsverfahren in $[a, b]$ für jedes stetige $f(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.*

Die Formel von *E. Borel* und die daran anknüpfenden anderen hier besprochenen Untersuchungen geben eine vollständige Lösung des Interpolationsproblems. Sowohl für die Interpolation wie für die Approximation einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ gibt es, wie wir gesehen haben, nicht nur eine einzige Lösung, sondern unendlich viele, also etwa unendlich viele Systeme von Polynomen, welche die Interpolation oder die Approximation von $f(x)$ ermöglichen. Wir können nun fragen, ob sich unter diesen unendlich vielen Lösungen nicht eine finden läßt, die besser als alle andern ist. Man kann das Wort „besser" verschiedenartig auffassen. Z. B. ist es ganz besonders interessant, zu untersuchen, ob es unter allen Entwicklungen einer stetigen Funktion $f(x)$ in eine Reihe von Polynomen, bei der die Polynome sukzessive gegebene Grade haben, nicht eine gibt, die schneller als die anderen konvergiert.

Diese Frage ist mittelst einer von *P. L. Tschebyscheff*[969]) herrührenden, von *P. Kirchberger*[970]) vervollkommneten [und dann von mehreren anderen Mathematikern modifizierten[971])] Methode im bejahenden Sinne gelöst worden. Man erhält so die folgenden Sätze: Ist

969) *P. L. Tschebyscheff*, *Mémoires présentés à l'Acad. sc. St.-Pétersbourg par divers savants 7 (1854), p. 537/68;* Mémoires Acad. sc. St.-Pétersbourg (6) 9_{I} sc. math. phys. nat. [auch als (6) 7 sc. math. phys. bezeichnet] (1859), p. 201/91 [1857]; Bulletin de la classe phys.-math. Acad. sc. St.-Pétersbourg 16 (1857/8), col. 145/9; Oeuvres 1, St. Petersburg 1899, p. *109/43*, 271/378, 705/10. *Außerdem gehört zum Bereich dieser Untersuchungen: Zapiski imperatorskoj Akademii nauk (St. Petersburg) 22 (1873), Anhang Nr. 1 (russisch) = J. de math. (2) 19 (1874), p. 319/46 (französisch übersetzt von *N. Khanikof*) = Oeuvres 2, St. Petersburg 1907, p. 187/215; Zapiski imperat. Akad. nauk (St. Petersburg) 40 (1881), Anhang Nr. 3 (russisch) = Oeuvres 2, p. 333/56 (französisch übersetzt von *C. A. Possé*).*

970) *P. Kirchberger*, Über *Tchebychef*sche Annäherungsmethoden, Diss. Göttingen 1902; [*ein Teil davon auch in Math. Ann. 57 (1903), p. 509/40.*]

971) *An die Untersuchungen von *P. L. Tschebyscheff* und *P. Kirchberger* schließen die folgenden Arbeiten an, in denen die von jenen gewonnenen Resultate teils eine neue oder wenigstens modifizierte Begründung erfahren, teils erweitert werden:* *E. Borel*, Leçons[957]), p. 82/92; *L. Tonelli*, Annali di mat. (3) 15 (1908), p. 47/94, 95/119; *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Bull. Acad. Roy. Belgique 12 (1910), p. 808/44; *R. Suppantschitsch*, Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien IIa 123_2 (1914), p. 1553/1618.*

eine Funktion $f(x)$, die in einem Intervalle I stetig ist, gegeben, so existiert für jeden Wert der ganzen Zahl n ein und nur ein Polynom von höchstens n^{tem} Grade,

$$T_n(x)$$

derart, daß der Maximalwert von $|f(x) - T_n(x)|$ in I kleiner ist als derjenige, den man erhält, wenn man $T_n(x)$ durch irgendein anderes Polynom von höchstens n^{tem} Grade ersetzt.[972]) Man hat dann:

$$f(x) = \lim_{\nu=\infty} T_\nu(x)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz im Intervalle I. Ist weiter $V_n(x)$ das Polynom n^{ten} Grades, welches $T_n(x)$ ersetzt, wenn man die stetige Funktion $g(x)$ an Stelle von $f(x)$ betrachtet, und konvergiert $g(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$, so läßt sich beweisen, daß die Koeffizienten von $V_n(x)$ bezüglich gegen die von $T_n(x)$ konvergieren; so daß für ein festes n die Korrespondenz zwischen $f(x)$ und $T_n(x)$ stetig ist.

*Wir erwähnen noch, daß *Ch. J. de la Vallée Poussin*[971]) statt in einem Intervall I allgemeiner in irgendeiner beschränkten linearen

972) *Insbesondere ist das eindeutig bestimmte („*Tschebyscheff*sche") Polynom n^{ten} Grades $T_n(x)$, für welches der Koeffizient von x^n gleich 1 ist und *das in* $[-1, +1]$ *am wenigsten von Null abweicht:*

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos(n \cdot (\arccos x))$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\right].$$

Diese Polynome und verschiedene damit zusammenhängende Fragen sind [abgesehen von *P. L. Tschebyscheff*[969])] Gegenstand der folgenden Arbeiten gewesen: *G. Zolotareff*, Zapiski imper. Akad. nauk (St. Petersburg) 30 (1877) [russisch]; Mélanges math. et astr. tirés du Bull. Ac. St.-Pétersbourg 15 (1877); [ausführl. Referat in Fortschr. d. Math. 9 (1877), p. 343/47]; *A. Markoff*, Zapiski imper. Akad. nauk (St. Petersburg) 62 (1889), p. 1/24 [russisch]; *W. Markoff*, Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen, St. Petersburg 1892 [russisch] = Math. Ann. 77 (1916), p. 213/58 [deutsch von *J. Großmann*]; *E. Vallier*, Paris C. R. 116 (1893), p. 712/14; *H. Liebmann*, Jahresb. Dtsch. Math.-Ver. 18 (1909), p. 433/49; *M. Fujiwara*, Tôhoku Math. J. 3 (1913), p. 129/36; *S. Bernstein*[949]), zweites Zitat, p. 5/21, 47/9; Commun. Soc. math. de Kharkow (2) 14 (1913), p. 81/7; Paris C. R. 157 (1913), p. 1055/7; *A. Pchéborski*, Commun. Soc. math. de Kharkow (2) 14 (1913), p. 65/80; Paris C. R. 156 (1913), p. 531/3; 158 (1914), p. 619/21; *M. Riesz*, Paris C. R. 158 (1914), p. 1152/4; Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 354/68; Acta math. 40 (1916), p. 337/47; *L. Fejér*, J. f. Math. 146 (1915), p. 80/82; Math. Ann. 85 (1922), p. 41/8; [*Ch. J.*] *de la Vallée Poussin*, Bull. Soc. math. France 45 (1917), p. 53/6; *E. Egerváry*, Arch. Math. Phys. (3) 27 (1918), p. 17/24; *G. Faber*, J. f. Math. 150 (1919), p. 79/106; *I. Schur*, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 271/87; *G. Szegö*, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 239/41, 252/7; *M. Fekete* u. *J. L. v. Neumann*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 31 (1922), p. 125/38.*

Punktmenge operiert, und daß *L. Tonelli*[971]) die *Tschebyscheff*schen Untersuchungen auf Funktionen von zwei (reellen) Veränderlichen[973]) und auf Funktionen einer komplexen Veränderlichen[974]) übertragen hat.[975])*

*Die vorstehenden Resultate sind nun noch wesentlich in der Hinsicht verallgemeinert werden, daß man zur besten *Tschebyscheff*schen Annäherung einer stetigen Funktion $f(x)$ an Stelle von Polynomen n^{ten} Grades allgemeinere Systeme stetiger Funktionen verwendet. Diese allgemeineren Untersuchungen sind zuerst von *M. Fréchet*[976]) und etwa gleichzeitig ganz besonders eingehend von *J. W. Young*[977]) begonnen worden und sind dann von *F. Sibirani*[978]) [mit Hilfe einer Übertragung der Gedankengänge von *L. Tonelli*[971]) bzw. *Ch. J. de la Vallée Poussin*[971])] wesentlich weiter gefördert und neuerdings [unter Anwendung der *Minkowski*schen Geometrie] von *A. Haar*[979]) zu einem gewissen Abschluß gebracht worden. Es handelt sich hier, genauer gesagt, vor allem um folgendes[980]): Gegeben sei ein Intervall oder gleich allgemeiner irgendeine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ eines Raumes von einer oder mehreren Dimensionen; mit X sei irgendein Punkt von $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Ferner sei das folgende System von in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen:

$$(4) \qquad f_1(X),\ f_2(X),\ \ldots\ f_n(X)$$

vorgelegt. Es wird nun die beste *Tschebyscheff*sche Annäherung irgendeiner in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion $f(X)$ mittels der aus (4) gebildeten

---

973) *a. a. O.[971]), p. 60/94; siehe auch [978]), [979]), [981]) und den zugehörigen Text.*

974) *a. a. O.[971]), p. 108/119. Hieran anknüpfend untersuchen den Fall komplexer Veränderlichen ferner: *F. Sibirani*[978]), erstes Zitat, p. 220/1; zweites Zitat, p. 151/5; *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Bull. Acad. Roy. Belgique 1911, p. 119/211; außerdem ein Teil der in [972]) genannten Arbeiten.*

975) *Ferner behandelt die Übertragung auf den Funktionenraum: *R. Gateaux,* Rend. Acc. Linc. 23_{I} (1914), p. 405/8; die Verallgemeinerung auf Polynome mit nicht-ganzzahligen Exponenten: *S. Bernstein*[949]), zweites Zitat, p. 37/47.*

976) *M. Fréchet*, Paris C. R. 144 (1907), p. 124/5; Ann. Éc. Norm. [44 =] (3) 25 (1908), p. 43/56.

977) *J. W. Young,* Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), p. 331/44.

978) **F. Sibirani,* Ann. di mat. (3) 16 (1909), p. 203/21; Rend. Circ. mat. Palermo 34 (1912), p. 132/57. In der zweiten Arbeit, p. 155/7, auch einige Bemerkungen über gleichzeitige beste Approximation der Funktion $f(x)$ und ihrer ersten k Ableitungen.*

979) **A. Haar,* Math. Ann. 78 (1918), p. 294/311.*

980) *Bei *J. W. Young*[977]) sind noch allgemeinere Auffassungen und Fragestellungen behandelt.*

linearen Aggregate

(5) $$a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) + \cdots + a_n f_n(X)$$

gesucht, d. h. diejenigen Konstanten

(6) $$(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n),$$

für welche in $\mathfrak{M}$ das Maximum von

(7) $$|f(X) - (a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) + \cdots + a_n f_n(X))|$$

möglichst klein wird. Es ergibt sich: Stets existiert mindestens ein Wertsystem (6), für welches dieses Extremum eintritt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß nur ein *einziges* derartiges ausgezeichnetes Wertsystem existiert, besteht darin, daß die Funktion (5) mit Ausnahme des trivialen Wertsystems

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0,$$

für kein anderes Wertsystem (6) in $\mathfrak{M}$ mehr als $(n-1)$ Nullstellen besitzt.[981])

Daraus folgt noch unmittelbar [was für Polynome von 2 Veränderlichen schon *L. Tonelli*[971]) gezeigt hat], daß in zwei- oder mehrdimensionalen Gebieten $\mathfrak{G}$ *kein* Funktionensystem (4) [für $n \geqq 2$] existieren kann, mit dessen linearen Aggregaten eine *eindeutige Tschebyscheff*sche Annäherung jeder stetigen Funktion $f(X)$ in $\mathfrak{G}$ möglich ist. Denn man kann in diesem Fall die Größen (6) so bestimmen, daß (5) an einer inneren Stelle von $\mathfrak{G}$ positiv und an einer anderen solchen Stelle negativ ist, weshalb dann (5) an unendlich vielen Stellen von $\mathfrak{G}$ verschwinden muß.*

Die eben besprochenen allgemeinen Resultate enthalten natürlich die entsprechenden oben angegebenen Sätze über Polynome als speziellen Fall. Durch Anwendung dieser allgemeineren Untersuchungen gewinnt man ferner derartige Sätze z. B. über endliche trigonometrische Summen. Dies geschieht zuerst von *M. Fréchet*[976]) und *J. W. Young*[977]); sie zeigen so[982]):

Ist $\varphi(\theta)$ eine stetige Funktion von der Periode 2π und ν eine beliebige ganze Zahl, so gibt es eine trigonometrische Summe ν^{ter} Ordnung, $T_\nu(\theta)$, die (im Sinne von *P. L. Tschebyscheff*) sich $\varphi(\theta)$ mehr nähert als jede andere trigonometrische Summe ν^{ter} Ordnung. Weiter bemerkt *M. Fréchet*:

---

981) *Siehe insbes. *A. Haar*[979]), p. 301 u. 311.*

982) *Die betreffende Untersuchung über endliche trigonometrische Summen ist in anderer Weise noch von *L. Tonelli*[971]), p. 95/108, und von *F. Sibirani*[978]), erstes Zitat, insbes. p. 218/9, geführt worden, und zwar haben sie auch den Fall von 2 Veränderlichen betrachtet.*

1. daß die so zwischen $\varphi(\theta)$ und $T_\nu(\theta)$ aufgestellte Korrespondenz (im oben angegebenen Sinn) stetig ist;

2. daß mit wachsendem ν die Koeffizienten von $T_\nu(\theta)$ bezüglich gleichmäßig gegen die *Fourier*schen Koeffizienten von $\varphi(\theta)$ konvergieren, ohne ihnen im allgemeinen gleich zu sein;

3. daß sie auch nicht den Koeffizienten der Summen von *Fejér* [siehe hierüber II C 10 (*E. Hilb* u. *M. Riesz*), Nr. 8] gleich sind, und nicht einmal durch die Summen gleichen Ranges von *Fejér* eindeutig bestimmt sind.

So daß man eine eindeutige Darstellung jeder stetigen periodischen Funktion $\varphi(\theta)$ durch eine Reihe von endlichen trigonometrischen Summen hat, die gleichmäßig und schneller als die entsprechenden Reihen von *Fourier* oder von *Fejér* gegen $\varphi(\theta)$ konvergieren.

Für die vorstehenden Untersuchungen ist es wesentlich, daß das, was man unter der am meisten angenäherten Funktion versteht, gerade in der angegebenen *Tschebyscheff*schen Weise definiert wird. Man könnte natürlich auch verschiedene andere Definitionen verwenden [vgl. z. B. [977])], und es ist ganz besonders naheliegend, hier die Methode der kleinsten Quadrate zu benutzen. *Dies ist von einer größeren Anzahl von Mathematikern geschehen (insbes. gerade auch von *P. L. Tschebyscheff* sowie von *J. P. Gram*). Es genüge hier, auf I D 3 (*J. Bauschinger*), Nr. 14 und II A 9a (*H. Burkhardt*), Nr. 4 u. 6 zu verweisen.[983]) Nur ein paar Punkte, die zu dem vorigen in enger Beziehung stehen, seien hier noch hervorgehoben. Knüpfen wir zunächst an die zuletzt besprochenen trigonometrischen Summen an:* Würde man etwa, entsprechend der Methode der kleinsten Quadrate, den Fehler, den man begeht, wenn man die stetige, periodische Funktion $\varphi(\theta)$ durch eine trigonometrische Summe $F_\nu(\theta)$ ν^{ter} Ordnung ersetzt, durch die Größe:

$$\int_0^{2\pi} [\varphi(\theta) - F_\nu(\theta)]^2 d\theta$$

messen, so würde die $\varphi(\theta)$ am meisten angenäherte trigonometrische Summe ν^{ter} Ordnung diejenige sein, die zu Koeffizienten die *Fourier*schen Koeffizienten von $\varphi(\theta)$ hat[984]). Aber wenn diese Definition auch

983) *Sowie auf die französ. Bearbeitung der Encykl., I 21 (*J. Bauschinger-H. Andoyer*), Nr. 27, und auf *H. Burkhardt,* Entwicklungen nach oscillierenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bericht, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 10_{II} (1901/08), § 82 u. 83.*

984) *Vgl. die Literaturangaben in II A 9a (*H. Burkhardt*) Nr. 4, Fußn. 15. In diesem Zusammenhang sei noch auf *F. Bernstein*, J. f. Math. 132 (1907), p. 270/8 hingewiesen.*

für die Rechnung bequemer ist als die oben besprochene von *P L. Tschebyscheff*, so hat sie doch auch manche Nachteile (da insbesondere, wenn der so definierte Fehler gegen Null konvergiert, $F_\nu(\theta)$ nicht notwendig für jeden Wert von θ gegen $\varphi(\theta)$ konvergiert). [*Im übrigen sei wegen dieser Dinge auch auf den Artikel II C 10 (*E. Hilb* u. *M. Riesz*) hingewiesen.*]

*Machen wir das Analoge für die Approximation der stetigen Funktionen $f(x)$ durch Polynome: Das Polynom n^{ten} Grades, welches das Integral des Fehlerquadrats zu einem Minimum macht, erhält man durch die Summe der ersten $n+1$ Terme in der Entwicklung von $f(x)$ nach *Legendre*schen Polynomen.[985]) Man kann übrigens auch (statt des Integrals der Fehlerquadrate) das Integral der k^{ten} Potenz des absoluten Betrags des Fehlers zu einem Minimum machen und die entsprechenden Näherungspolynome n^{ten} Grades bestimmen. Es ergibt sich dann, daß man beim Grenzübergang für $k=\infty$ zu den Polynomen der *Tschebyscheff*schen Approximation gelangt.[986])*

*Mit der besten Approximation (im *Tschebyscheff*schen Sinn) hängt schließlich noch aufs engste die Frage nach dem „*Grad der Approximation*" [„*ordre d'approximation*"] zusammen, die zuerst von *Ch. J. de la Vallée Poussin*[987]) gestellt und in Angriff genommen, dann insbesondere von *S. Bernstein*[988]) und *D. Jackson* u. a. in ausgedehnten Untersuchungen eingehend behandelt worden ist, d. h. die Frage: Wenn man mit Hilfe von Polynomen n^{ten} Grades Funktionen einer geeigneten Funktionenklasse möglichst gut approximiert, welchen Grad der Genauigkeit der Annäherung kann man garantieren und insbesondere wie drückt sich die Größenordnung des dabei begangenen maximalen Fehlers mit Hilfe von n aus? Bezeichnet man diesen Fehler im betrachteten Intervall, d. h. das Maximum von $|f(x)-T_n(x)|$ mit $E_n(f(x))$, so sagt der *Weierstraß*sche Satz (Nr. **50**) aus, daß für jedes stetige $f(x)$
$$\lim_{n=\infty} E_n(f(x)) = 0$$

985) **P. L. Tschebyscheff,* Bulletin de la classe phys.-math. Acad. sc. St.-Pétersbourg 13 (1854), col. 210/11 = J. f. Math. 53 (1857), p. 286 = Oeuvres 1, p. 701/2; [dazu: Utschenija Zapiski imper. Akad. nauk (St. Petersburg) 3 (1855), p. 636/64 (russisch) = J. de math. (2) 3 (1858), p. 289/323 (französisch von *I.-J. Bienaymé*) = Oeuvres 1, p. 201/30, insbes. § 4 u. 7]; *G. Plarr,* Paris C. R. 44 (1857), p. 984/6.*

986) *Siehe hierüber: *G. Pólya,* Paris C. R. 157 (1913), p. 840/3; *D. Jackson,* Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), p. 117/28, 158/66, 320/6.*

987) *Ch. J. de la Vallée Poussin*[935]), erstes Zitat, p. 221/7; ferner Bull. Acad. Roy. Belgique 10 (1908), p. 403/10; 12 (1910), p. 808/44. *Vgl. auch die etwa gleichzeitigen Bemerkungen bei *H. Lebesgue*[936]), zweites Zitat.*

988) *Insbes. siehe [949]).*

ist. Es handelt sich dann im wesentlichen darum, unter geeigneten Voraussetzungen über $f(x)$ die Größenordnung dieses Verschwindens zu untersuchen. Dabei ergibt sich, daß ein inniger Zusammenhang besteht zwischen den Differentialeigenschaften von $f(x)$ und dem asymptotischen Verhalten der Abnahme von $E_n(f(x))$. Doch sind alle diese Untersuchungen und die dabei verwendeten Methoden so eng mit der Theorie der trigonometrischen Reihen und den hierbei auftretenden analogen Fragestellungen verknüpft und verwachsen, daß es als zweckmäßig erschien, diesen ganzen Fragenkomplex des Approximationsgrades einheitlich in dem Artikel II C 10 über „Trigonometrische Reihen" von *E. Hilb* und *M. Riesz* zur Darstellung zu bringen; darauf sei hier verwiesen.[989])*

52. Quasi-gleichmäßige Konvergenz. Wir haben bemerkt (Nr. 49), daß die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe von stetigen Funktionen für die Stetigkeit der Summe zwar hinreichend, aber im allgemeinen nicht notwendig ist.[990]) Um eine zugleich hinreichende und notwendige Bedingung zu finden, muß man die Bedingung der Gleichmäßigkeit gleichsam lockern. *U. Dini*[991]) hat zunächst, indem er die *„einfach-gleichmäßige Konvergenz"* einführte, eine hinreichende Bedingung erhalten, die zwar umfassender ist als die gewöhnliche gleichmäßige Konvergenz[992]), aber noch immer nicht notwendig[993]): *Von der „gleichmäßigen Konvergenz im Intervall I" kommt man zur „einfach-gleichmäßigen Konvergenz in I", wenn man bei gegebenen ε die Ungleichung (5) [Nr. 49] in I nicht für *alle* $n > m$, sondern nur für *unendlich viele* solche n fordert.[994])*

Notwendige und hinreichende Bedingungen sind zuerst *ebenfalls

---

989) *Es sei noch besonders die zusammenfassende Darstellung in *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris 1919, erwähnt.*

990) *Wegen einiger Spezialfälle, in denen die gleichmäßige Konvergenz auch eine notwendige Bedingung ist, siehe die in Nr. 49 bei [896]), [897]), [902]) gemachten Bemerkungen.*

991) *U. Dini,* Fondamenti, p. 103 = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 137/8. *Vgl. auch II A 1 (*A. Pringsheim*), Nr. 17, Fußn. [188]).*

992) *Vgl. dazu *I. Bendixson*[891]), p. 605/7.*

993) *Das oben (Nr. 49) angegebene Beispiel von *I. Bendixson*[891]) sowie das einfachere Beispiel von [895]) liefern Folgen stetiger Funktionen mit stetiger Grenzfunktion, welche in einem Intervall weder gleichmäßig noch einfach-gleichmäßig konvergieren.*

994) *Übrigens gibt es natürlich in jeder einfach-gleichmäßig konvergenten Folge Teilfolgen, die gleichmäßig konvergieren.*

von *U. Dini*[995]) sowie* von *C. Arzelà*[996]) gefunden worden. *Man hat dabei zweierlei zu unterscheiden: 1. eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in einem bestimmten Punkte x_0 die Grenzfunktion oder Reihensumme stetig ist, wenn die einzelnen Funktionen als stetig in x_0 vorausgesetzt sind; 2. die daraus folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunktion in einem Intervall I (oder in einer Punktmenge M), wenn die einzelnen Funktionen in I (oder M) als stetig vorausgesetzt sind. Zu 1. hat (im wesentlichen) zuerst *U. Dini*[995]) die folgende notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt: Zu jedem positiven ε und zu jeder ganzen Zahl n, die ein hinreichend großes m_ε übertrifft, gehört eine gewisse Umgebung von x_0, nämlich $\mathfrak{U}_{\varepsilon,n}(x_0)$, so daß für alle Punkte x dieser Umgebung

$$|r_n(x)| < \varepsilon \tag{5}$$

ist. Der Unterschied gegenüber der „gleichmäßigen Konvergenz im Punkte x_0" besteht bloß darin, daß die Umgebung $\mathfrak{U}$ bei der gleichmäßigen Konvergenz nur von ε, hier aber von ε und von n abhängt. Dieser Begriff hat bisher, wie es scheint, keinen besonderen Namen erhalten[996a]); er möge als *„pseudo-gleichmäßige* Konvergenz im Punkte x_0" bezeichnet werden.*

*Man kann diese notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunktion in x_0 noch durch andere weniger fordernde Bedingungen ersetzen. [Bei einer Folge von stetigen Funktionen ist dann natürlich die eine dieser Bedingungen immer eine Folge der andern; dagegen sind die Umfänge dieser Begriffe verschieden, wenn man sie auf beliebige Funktionenfolgen anwendet.]

Eine erste derartige Bedingung stellt die *„einfach-gleichmäßige Konvergenz* der Folge *im Punkte* x_0" dar, die im wesentlichen ebenfalls bereits von *U. Dini*[995]) herrührt.[997]) Sie entsteht aus der „pseudo-gleichmäßigen Konvergenz in x_0", wenn man die definierende Eigen-

---

995) *U. Dini,* Fondamenti, p. 107/9 = *Dini-Lüroth,* Grundlagen, p. 143/6.*

996) *C. Arzelà,* *Rend. Ist. Bologna (1) 19 (1883/4), p. 79/84;* Mem. Ist. Bologna (5) 8 (1899/1900), p. 138/71 [*Dtsch. Bearbeitung von *J. T. Pohl,* Monatsh. Math. Phys. 16 (1905), p. 82/112*]; *vgl. auch Rend. Ist. Bologna (2) 7 (1902/3), p. 22/32.*

996a) *Nachträglich finde ich bei *P. Martinotti,* Rend. Istit. Lombardo (2) 47 (1914), p. 874/5, hierfür die [an [1001]) anknüpfende und gerade deshalb (vgl. [1003])) hier gar nicht zweckmäßige] Bezeichnung: „successione (o serie) convergente quasi uniformemente nel punto x_0".*

997) *Siehe hierzu auch: *E. W. Hobson,* Theory, p. 489/90; *C. A. Dell' Agnola,* Atti Istit. Venet. 69_{II} [= (8) 12_{II}] (1909/10), p. 1083/1102, insbes. p. 1098/1102 [vgl. auch ibid., p. 151/9]; *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 280/5.*

schaft nicht für *alle* ganzen Zahlen $n > m_\varepsilon$, sondern nur für *unendlich viele* solche n fordert; oder auch: sie entsteht aus der „einfach-gleichmäßigen Konvergenz im Intervall I", wenn man von dem festen Intervall I zu Umgebungen $\mathfrak{U}(x_0)$ von x_0 übergeht, die von ε und n abhängig sind. Da, wie oben erwähnt, die „einfach-gleichmäßige Konvergenz im Intervall I" für die Stetigkeit der Reihensumme in I nicht notwendig ist, so ergibt sich, daß die einfach-gleichmäßige Konvergenz in jedem einzelnen Punkt von I noch nicht die „einfach-gleichmäßige Konvergenz in I" zur Folge hat.

Man kann nun die vorstehende Bedingung noch einmal vereinfachen, indem man die definierende Eigenschaft statt für unendlich viele n, nur für ein *einziges* n fordert. Man erhält so die folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunktion stetiger Funktionen im Punkt x_0: Zu jedem positiven ε soll es eine ganze Zahl n und eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von x_0 geben, so daß für jeden Punkt x von $\mathfrak{U}$

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

ist.[998]) *F. Hausdorff*[998]) bezeichnet dies als „*uniforme* Konvergenz in x_0"; vielleicht wäre der Ausdruck „*einfachst-gleichmäßige* Konvergenz in x_0" vorzuziehen.[999])*

*Aus diesen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Stelle x_0 ergeben sich natürlich 2. sofort notwendige und hinreichende Bedingungen für das ganze Intervall I [oder für eine Punktmenge M]: es muß nur eine der obigen Bedingungen in jedem einzelnen Punkt

998) ***L. Orlando*[1002]), insbes. zweites u. drittes Zitat; *S. Kakeya*, Tôhoku Math. J. 3 (1913), p. 137/9; *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 384/7. — [Vgl. dazu auch noch *P. Martinotti*[996a]), p. 870/8].*

999) *Eine gegen $f(x)$ konvergierende Folge von Funktionen $f_\nu(x)$, die im Punkte x_0 „fast alle" unstetig sind, kann in x_0 „einfachst-gleichmäßig (uniform)" konvergieren, ohne „einfach-gleichmäßig" zu konvergieren, selbst dann, wenn f mit keiner der Funktionen f_ν in einer Umgebung von x_0 übereinstimmt. Beispiel: Auf einer Geraden sei $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\mu, \ldots$ eine Folge von aneinanderstoßenden Intervallen, die (etwa nach rechts hin) gegen einen einzigen Punkt $x_0 = 0$ konvergieren; jedes δ_μ wird in eine ebensolche Folge von Teilintervallen $\{\delta_\mu^{(\nu)}\}$ zerlegt, die gegen den rechten Endpunkt von δ_μ konvergieren. Es sei

$$f_1(x) = x^2$$

und für $\nu > 1$:

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 1 \text{ im Mittelpunkt aller } \delta_\mu^{(\nu)} \\ 0 \text{ in den Endpunkten der } \delta_\mu^{(\nu)} \text{ und außerhalb derselben} \\ \text{linear in jeder Hälfte von } \delta_\mu^{(\nu)} \end{cases} \text{ für } \mu = 1, 2, 3 \ldots;$$

also $f(x) = 0$. Hier ist der in der obigen Definition auftretende Index n stets gleich 1.*

von I [oder M] erfüllt sein. Man kann nun (etwa mit Hilfe des *Borel*schen Überdeckungssatzes) für ein abgeschlossenes Intervall I [oder allgemeiner für eine abgeschlossene und beschränkte Menge A] diese Bedingung umformen*; man erhält so mit *C. Arzelà*[996]) als notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunktion bzw. der Reihensumme einer Folge oder Reihe von stetigen Funktionen in I [oder A[1000])] die sog. *streckenweise gleichmäßige* Konvergenz (c. uniforme (oder in egual grado) „*a tratti*"), die nach *E. Borel*[1001]) häufig als *quasi-gleichmäßige* Konvergenz (convergence quasi-uniforme) bezeichnet wird.[1002])

Eine Reihe (oder Folge) von Funktionen heißt in einem Intervalle I[1003]) *quasi-gleichmäßig* konvergent, wenn

1. die Reihe in I konvergiert,

2. man jeder Zahl $\varepsilon > 0$ und jeder Zahl N eine Zahl $N' > N$ zuordnen kann, derart, daß für jeden Wert von x des Intervalles I eine ganze Zahl n_x zwischen N und N' existiert, für die man

(a) $$|r_{n_x}(x)| < \varepsilon$$ hat.[1003a])

Wenn man beim Übergang vom Punkt zum Intervall die „einfachst-gleichmäßige (uniforme) Konvergenz in x_0" zum Ausgangspunkt wählt, so kann man diese Bedingung der „quasi-gleichmäßigen Konvergenz" noch ein wenig vereinfachen[1004]), indem man unter 2. nur fordert, daß zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ endlich viele ganze Zahlen n_x existieren, so daß für jedes x von I (a) gilt.[1005])

1000) *Bei einer beliebigen Menge M hat man dieselbe Bedingung für jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von M.*

1001) *E. Borel*, Leçons[957]), p. 41.

1002) Weitere Beweise oder Beweisvereinfachungen dieses *Arzelà*schen Satzes bei: **E. W. Hobson*, Proc. London Math. Soc. (2) 1 (1904), p. 376/82 [auch Theory, p. 489/94];* *E. Borel*, Leçons[957]), p. 41/5; **C. A. Dell'Agnola*, Rend. Ist. Lomb. (2) 40 (1907), p. 378/84; (2) 41 (1908), p. 287/99, 676/83; *G. Vivanti*, Rend. Circ. mat. Palermo 30 (1910), p. 85/6; *L. Orlando*, Annaes scient. Acad. Polytechn. Porto 6 (1911), p. 188/90; 7 (1912), p. 97/8; Rend. Acc. Linc. (5) 22_{II} (1913), p. 415/17. [Vgl. auch noch *J. Wolff*, Verslag Ak. Amsterdam 27_2 (1918/19), p. 1098/1103].*

*Wegen Gültigkeit des Satzes in allgemeinen Räumen [Klasse (L)] siehe *M. Fréchet*, Paris C. R. 140 (1905), p. 29; Pariser Thèse 1906 = Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 9/10.*

1003) *Ebenso auf irgendeiner Menge M. — Die entsprechende Begriffsbildung für die einzelne Stelle x_0 in II A 1, Nr. **17** [Schluß] (*A. Pringsheim*).*

1003a) *Vgl. auch Nr. **36***

1004) *Vgl. *L. Orlando*[1002]); *S. Kakeya*[998]).*

1005) *Es sei erwähnt, daß *C. Burstin* [Monatsh. Math. Phys. 27 (1916), p. 292/302] einen anderen, noch weniger fordernden Begriff als „quasi-uniforme Konvergenz" eingeführt und untersucht hat.*

53. Grenzfunktionen stetiger Funktionen. Wir haben gesehen, [Nr. 49], daß eine Reihe stetiger Funktionen gegen eine unstetige Funktion konvergieren kann. Es erhebt sich nun die Frage, ob eine solche unstetige Funktion besondere Eigenschaften besitzt, ob sie einer speziellen Klasse in der Menge der Funktionen einer Veränderlichen angehört. Diese Frage ist von *R. Baire* vollständig gelöst worden. Um seine Resultate bequem auszusprechen, geben wir zuerst eine Definition.

Nehmen wir an, daß eine Funktion $f(x)$ mindestens in allen Punkten einer perfekten [Nr. 4] Punktmenge E definiert sei. Wir sagen, daß $f(x)$ in einem Punkte x_0 von E *in bezug auf E stetig* sei, wenn $f(x)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, auf welche Weise auch ein beständig zu E gehörender Punkt x gegen x_0 konvergiert. Wir sagen ferner, daß eine Funktion, die nicht in jedem Punkte von E stetig ist, *in bezug auf E nur punktweise unstetig* ist, wenn es in einer beliebig kleinen Umgebung jedes Punktes von E Punkte von E gibt, in denen die Funktion in bezug auf E stetig ist. [*Vgl. Nr. 22.*]

R. Baire[1006]) beweist nun den folgenden allgemeinen Satz: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine eindeutige unstetige Funktion durch eine konvergente Reihe stetiger Funktionen dargestellt werden kann, ist die, daß diese Funktion auf jeder perfekten Menge nur höchstens punktweise unstetig sei. Andere Beweise sind von *H. Lebesgue*[1007]), **W. H. Young*[1008]) und *Ch. J. de la Vallée Poussin*[1009])* gegeben worden.[1010])

Sei dieser Satz als richtig erkannt; dann ist es jetzt leicht, zu beweisen, daß sich eine Funktion definieren läßt, die nicht Summe

1006) *R. Baire*, *Paris C. R. 126 (1898), p. 884/7*; Pariser Thèse 1899 = Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 19/63. *Siehe dazu auch Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 173/9; Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905, Chap. IV u. V. — Ferner beweist er in Acta math. 30 (1906), p. 15 u. 18/21, den Satz für Funktionen, die nur auf irgendeiner Menge M definiert sind.*

1007) *H. Lebesgue*, *Paris C. R. 128 (1899), p. 811/13;* Démonstration d'un théorème de M. Baire, Note II in *E. Borel*, Leçons[957]), p. 149/55; Bull. Soc. math. France 32 (1904), p. 229/42; *siehe auch [1020]), p. 181/2.*

1008) **W. H. Young*, Messenger of math. (2) 37 (1907/08), p. 49/54, 139/44; Quart. J. of. math. 40 (1909), p. 374/80; hier auch einige Verallgemeinerungen. Siehe ferner Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), p. 298/304.*

1009) **C. de la Vallée Poussin*, Intégrales de Lebesgue, p. 105/25. [Siehe hierzu und zu [1006]) auch *C. Kuratowski*, Fundamenta math. 3 (1922), p. 100/7].*

1010) *Andere Beweise für Teile des Satzes bei *C. A. Dell'Agnola*, Rend. Ist. Lomb. (2) 41 (1908), p. 287/307, 676/84; Atti Ist. Veneto 68_{II} [= (8) 11_{II}] (1908/09), p. 775/83; *E. B. Van Vleck*, Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), p. 202/4. In diesem Zusammenhange sei auch *E. W. Chittenden*[895a]), zweites Zitat, erwähnt.*

einer Reihe von stetigen Funktionen sein kann. Es genügt, im Intervall $[0, 1]$ die Funktion $\chi(x)$ zu betrachten, welche für die rationalen Abszissen gleich 1 und für die übrigen Null ist. Dann gibt es auf der vom ganzen Intervall $[0, 1]$ gebildeten perfekten Menge E in der Tat keinen Stetigkeitspunkt in bezug auf E.

So ist die Menge der unstetigen Funktionen, welche Grenzwerte von stetigen Funktionen sind, nur ein (bestimmter) Teil der Menge der eindeutigen Funktionen. *R. Baire*[1011]) hat daher die Funktionen dieser Menge „Funktionen der *Klasse 1*" nennen können, indem er den stetigen Funktionen den Namen: „Funktionen der *nullten Klasse*" zuerteilte.

Es ist übrigens leicht zu sehen, daß die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden unstetigen Funktionen in der Regel von der ersten Klasse sind. Die meisten unter ihnen besitzen in der Tat nur eine endliche Zahl von Unstetigkeiten. *H. Lebesgue*[1012]) hat sogar direkt bewiesen, daß eine Funktion $f(x)$, die in einem Intervalle I definiert ist, in dem die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte abzählbar ist, durch eine in I konvergente Reihe von stetigen Funktionen (nämlich Polynomen) dargestellt werden kann, die sogar in jedem Intervalle, das innerhalb eines Stetigkeitsintervalles liegt, gleichmäßig konvergiert.

54. Die Baireschen Funktionenklassen. Ebenso wie eine gleichmäßig konvergente Reihe von stetigen Funktionen eine stetige Funktion zur Summe hat, ebenso hat auch eine gleichmäßig konvergente Reihe von Funktionen erster Klasse eine Funktion erster Klasse (oder nullter Klasse) zur Summe[1013]). Aber ebenso wie für die Reihen von stetigen Funktionen hört auch hier der Satz auf, richtig zu sein, wenn man bloß gewöhnliche Konvergenz hat.[1014])

1011) **R. Baire,* Paris C. R. 126 (1898), p. 1621/3; Thèse, p. 68/71.*

1012) *H. Lebesgue*, Bull. sc. math. [33 =] (2) 22 (1898), p. 280/3; ein anderer Beweis von *H. Lebesgue* in *E. Borel*, Leçons[957]), p. 97/8. Siehe auch *E. Borel*, Paris C. R. 137 (1903), p. 903/5; Leçons[957]), p. 95/7.

1013) *R. Baire,* *Thèse, p. 67/8*; Leçons[1006]), p. 112/14. *Der wesentlichste Teil dieses Satzes schon bei *V. Volterra,* Giorn. di mat. 19 (1881), p. 79/80.*

*Der entsprechende Satz für Funktionen beliebiger Klasse bei *H. Lebesgue*[1020]), p. 156, und bei *R. Baire,* Acta math. 30 (1906), p. 5/6. — Nach *C. Burstin*[1005]), p. 300/1, gilt dies für beliebige Klassen auch, wenn man die gleichmäßige Konvergenz durch „einfachst-gleichmäßige (uniforme)" [Nr. 52] Konvergenz ersetzt.*

1014) *Nach *C. Burstin*[1005]), p. 292/9, ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Grenzfunktion von Funktionen höchstens 1. Klasse selbst von höchstens 1. Klasse sei, die von ihm sogenannte „quasi-uniforme" Konvergenz[1005]) auf jeder perfekten Menge. — Dagegen sind für höhere als die erste Klasse derartige, auf die Art der Konvergenz bezügliche, notwendige und hinreichende Bedingungen noch nicht bekannt; vgl. ibid., p. 301/2.*

Setzt man z. B.[1015]) im Intervalle [0, 1]

$$f_m(x) = \lim_{n=\infty} (\cos m!\,\pi x)^{2n}, \quad \chi(x) = \lim_{m=\infty} f_m(x),$$

so sieht man leicht, daß die $f_m(x)$ Funktionen erster Klasse sind, welche als Grenzwert die in Nr. **53** angegebene Funktion $\chi(x)$ haben; und diese ist weder stetig noch von der ersten Klasse.

Durch Verallgemeinerung gelangt man zu der Klassifikation von *Baire.*[1011]) Wir haben die Funktionen der Klassen 0 und 1 definiert; allgemein nehmen wir an, wir hätten die Funktionen von niedrigerer Klasse als α definiert; dann nennt man *Funktion* α^{ter} *Klasse* jede Funktion, welche als Grenze einer Folge von Funktionen niedrigerer Klasse als α erhalten werden kann, aber selbst nicht von niedrigerer Klasse als α ist. Man definiert so die Funktionen der Klassen $0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ Man kann sogar diese Definition genau mit denselben Worten auf den Fall anwenden, daß α eine transfinite Zahl ist. Man sieht dann, daß insbesondere eine Funktion der Klasse ω [Nr. 5] eine Funktion ist, die, ohne von endlicher Klasse zu sein, Grenze von Funktionen endlicher (aber notwendigerweise nicht beschränkter) Klasse ist. *Auf diese Weise können die *Baire*schen Klassen für alle Indizes α der ersten und zweiten *Cantor*schen Zahlenklasse definiert werden, und man sieht sehr leicht[1016]), daß auf Grund des in der gegebenen Definition enthaltenen Erzeugungsprinzips der Index α der *Baire*schen Klassen die erste und zweite *Cantor*sche Zahlenklasse niemals verlassen kann.[1016a]) Die in den *Baire*schen Klassen enthaltenen Funktionen werden kurz als *Bairesche Funktionen* bezeichnet.*

Es bleibt wohlverstanden noch zu beweisen, daß Funktionen aller Klassen existieren. Zunächst ist es leicht, mit *R. Baire*[1017]) zu sehen, daß man die Menge der eindeutigen Funktionen nicht erschöpft, wenn man alle Funktionen bildet, deren Klasse eine gegebene (endliche oder transfinite) Zahl α nicht übersteigt. In der Tat ist die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ der ersten Menge größer als die des Kontinuums, d. h. als die Mächtigkeit aller dieser Funktionen von höchstens α^{ter} Klasse. Daraus folgt dann, daß Funktionen *existieren,* die nicht in der Klassifikation von *Baire* enthalten sind.[1018]) Aber kann man sie wirklich *definieren,* sie angeben?

1015) *Vgl. II A 1 (*A. Pringsheim*), Nr. 3, Fußn. [31]).*

1016) **R. Baire,* Thèse, p. 70.*

1016a) *Bezüglich der Möglichkeit einer Verwendung von Funktionenfolgen vom Typus Ω (= Anfangszahl der 3. Zahlenklasse) siehe *H. Lebesgue*[1020]), p. 151/2, Fußnote, sowie insbes. *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 1 (1920), p. 132/41.*

1017) Thèse, p. 71.

1018) *Siehe übrigens die in Nr. **20** vor und nach [395]) gemachten Bemerkungen.*

Ein sehr einfacher Schluß von *E. Borel*[1019]) zeigt, daß man, wenn eine willkürliche (endliche oder transfinite) Zahl α gegeben ist, (mittels eines Diagonalverfahrens) eine wohl bestimmte Funktion *konstruieren* kann, die entweder von höherer Klasse als α ist oder überhaupt außerhalb der Klassifikation von *R. Baire* steht. Durch geeignete Abänderung dieser Schlußweise ist es *H. Lebesgue* gelungen zu beweisen, *daß man wirklich Funktionen irgendeiner gegebenen (endlichen oder transfiniten) Klasse angeben kann, und sogar Funktionen, welche der Klassifikation von Baire entgehen.*[1020])

R. Baire hat eine allgemeine Eigenschaft der Funktionen, die in seiner Klassifikation enthalten sind, angegeben. Jede Funktion von irgendeiner seiner Klassen ist auf jeder perfekten Menge höchstens punktweise unstetig, wenn man die Mengen der ersten Kategorie [siehe Nr. 9a] in bezug auf diese perfekte Menge vernachlässigt.[1021]) *Aber diese Bedingung ist für das Enthaltensein einer Funktion in der *Baire*schen Klassifikation nur notwendig, dagegen, wie *N. Lusin*[1022]) gezeigt hat, *nicht hinreichend.**

H. Lebesgue hat notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß eine Funktion von einer bestimmten Klasse α sei[1023]), darunter auch solche, die eine Verallgemeinerung der oben angegebenen *Baire*schen charakteristischen Bedingung für die Funktionen der 1. Klasse darstellen. Er hat auch den Satz bewiesen[1024]): *Damit eine*

1019) *E. Borel,* Leçons[957]), Note III, p. 156/8.

Im Jahre 1898 hatte *V. Volterra* an *R. Baire* [vgl. *R. Baire,* Acta math. 30 (1906), p. 47] die Mitteilung eines Beispieles einer Funktion von höherer als der 2. Klasse gelangen lassen. 1905 hatte *R. Baire* [a. a. O., p. 30/47] gezeigt, daß man eine Funktion der Klasse 3 wirklich bilden kann.

1020) *H. Lebesgue,* J. de math. (6) 1 (1905), p. 205/16. [*Eine vereinfachte Darstellung des ersten dieser beiden Existenzbeweise findet sich bei *C. de la Vallée Poussin*[1009]), p. 145/51.*] *Vgl. auch *C. Kuratowski,* Paris C. R. 176 (1923), p. 229/32.*

1021) *R. Baire,* Paris C. R. 129 (1899), p. 1010/13; siehe auch *R. Baire*[1019]), p. 21/30, [in seiner Thèse, p. 81/7, und in [1011]), erstes Zitat, nur für Funktionen 2. Klasse].* Die obige Form des Satzes ist diejenige, die *H. Lebesgue,* J. de math. (6) 1 (1905), p. 184/88, gegeben hat; dort findet man die zum Verständnis nötigen Definitionen und einen neuen Beweis. *Einen anderen Beweis hat *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 1 (1920), p. 159/65 gegeben. Siehe ferner hierzu: *C. Kuratowski,* Fundamenta math. 5 (1923), p. 75/86.* — *Vgl. auch den Schluß von [456]) und den Text bei [726]).*

1022) **N. Lusin,* hat dies zuerst in Paris C. R. 158 (1914), p. 1258/61, unter der Voraussetzung der Hypothese, daß die Mächtigkeit des Kontinuums gleich $\aleph_1$ sei, dann neuerdings in Fundamenta mathematicae 2 (1921), p. 155/57, ohne diese Hypothese (nur mit Benutzung des Auswahlaxioms) bewiesen.*

1023) *H. Lebesgue*[1020]), p. 166/91.

1024) *ib., p. 168/70.*

Funktion $f(x)$ der Klassifikation von Baire angehört, ist es notwendig und hinreichend, daß sie nach Borel meßbar sei [vgl. Nr. 30], d. h. daß die Menge der Punkte x, in denen

$$\mu \leqq f(x) \leqq \nu$$

ist, eine nach *Borel* meßbare Menge sei [siehe Nr. 9b u. 20], was auch die Zahlen μ und ν sind.

*Eine Modifikation der *Baire*schen Klassifikation ergibt sich, wenn man im Anschluß an *W. H. Young*[1025]) statt mit beliebigen, nur mit *monotonen* Funktionenfolgen operiert. Bezeichnen wir[1026]) die Grenzfunktionen von *monotonen* Folgen stetiger Funktionen als Funktionen *erster Ordnung*, und speziell bei monoton wachsenden Folgen die [in diesem Fall nach unten halbstetige[1027])] Grenzfunktion als eine Grenzfunktion G_1, bei monoton abnehmenden Folgen die [in diesem Fall nach oben halbstetige] Grenzfunktion als eine Funktion g_1. Von hier ausgehend definieren wir wieder für jedes α der ersten oder zweiten Zahlenklasse die *Funktionen α^{ter} Ordnung*: Die Funktionen von niedrigerer Ordnung als α seien definiert; dann nenne man Funktion α^{ter} Ordnung jede Funktion, welche als Grenze einer *monotonen* Folge von Funktionen niedrigerer Ordnung als α erhalten werden kann, aber selbst nicht von niedrigerer Ordnung als α ist. Und zwar bezeichnen wir eine solche Funktion als G_α bzw. g_α, je nachdem sie mittels einer monoton wachsenden oder monoton abnehmenden Folge erzeugt wird. Eine monoton wachsende [bzw. abnehmende] Folge von Funktionen, die höchstens Funktionen G_α [bzw. g_α][1028]) sind, besitzt als Grenzfunktion ebenfalls höchstens eine

1025) **W. H. Young*, Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910/11), p. 15/24; (2) 12 (1913), p. 260/87; (2) 15 (1916), p. 354/9. Vgl. auch [1027]).

Die Ansätze von *W. H. Young* sind von *H. Hahn*, Reelle Funktionen I, p. 328/49, genauer ausgeführt worden. Vgl. ferner *F. Hausdorff* [1045]), der die hier einschlägigen Sätze durch Spezialisierung allgemeinerer Untersuchungen gewinnt.*

1026) *Wir wählen die Bezeichnungen im Anschluß an *H. Hahn*[1025]), p. 328. Wegen der *Young*schen Bezeichnungen siehe [1030]).*

1027) *Daß eine Funktion dann und nur dann Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen sein kann, wenn sie nach unten halbstetig ist, hat zuerst *R. Baire*, Bull. Soc. math. France 32 (1904), p. 125/8 bewiesen, später auch *W. H. Young*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 14 (1908), p. 520/29; Proc. Roy. Soc. Edinburgh 28 (1908), p. 249/58 [vgl. auch Messenger of math. 37 (1908), p. 148/54]. Andere Beweise (zum Teil für beliebige metrische Räume): *H. Tietze*, J. f. Math. 145 (1914), p. 9/14; *H. Hahn*, Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien IIa 126 (1917), p. 95/103; *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, p. 175/6, 401/2; und besonders einfach *F. Hausdorff*, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 293/4.*

1028) *„Höchstens G_α“ soll bedeuten: G_α oder irgendeine Funktion von niedrigerer Ordnung als α.*

Funktion G_α [bzw. g_α].[1029]) Beim fortschreitenden Aufbau der verschiedenen Ordnungen müssen also abwechselnd monoton wachsende und monoton fallende Folgen verwendet werden.[1030])

Man sieht leicht, daß die Gesamtheit der Funktionen aller dieser Ordnungen mit der Gesamtheit aller *Baire*schen Funktionen identisch ist. Genauer ergibt sich[1031]): Die Gesamtheit aller Funktionen höchstens α^{ter} Klasse besteht aus allen Funktionen höchstens α^{ter} Ordnung sowie aus allen denjenigen Funktionen $(\alpha + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die gleichzeitig $G_{\alpha+1}$ und $g_{\alpha+1}$ sind.*

*Eine andere Modifikation der *Baire*schen Klassifikation ergibt sich, wenn man nach *W. Sierpiński* statt „konvergenter Folgen oder Reihen" überall „*absolut konvergente Reihen*" verwendet. Zunächst zeigt sich, daß eine Funktion dann und nur dann in eine absolut konvergente Reihe stetiger Funktionen entwickelbar ist, wenn sie die Differenz von zwei nach oben halbstetigen Funktionen ist[1032]); und dies ist keineswegs für jede Funktion der ersten *Baire*schen Klasse der Fall.[1033]) Da jede monotone Folge sich als absolut konvergente Reihe schreiben läßt, so ist klar, daß eine Funktion α^{ter} Ordnung von höchstens α^{ter} „*Stufe*" in der Klassifikation von *W. Sierpiński* ist[1034]); und es ist selbstverständlich, daß eine Funktion α^{ter} „Stufe" von höchstens α^{ter} Klasse ist. Die Einteilung von *W. Sierpiński* steht also gewissermaßen in der Mitte zwischen der von *W. H. Young* und der von *R. Baire.* Übrigens könnte man sehr leicht noch genauer sehen, daß (für $\alpha \geqq 1$) *W. Sierpiński*s Funktionen α^{ter} „Stufe" zusammenfallen mit Funktionen, die sich als Differenz von zwei Funktionen, die höchstens g_α[1034a]) sind, darstellen lassen, ohne daß diese Darstellung für ein kleineres $\beta < \alpha$ möglich ist.*

54a. *Klassifikation der Borelschen Mengen uud ihre Beziehungen zu den Baireschen Funktionen. Wir haben bereits in Nr. 54

1029) *Siehe insbes. *H. Hahn*[1025]), p. 330/2.*

1030) *Deshalb bezeichnet *W. H. Young* die Funktionen G_1, g_1; G_2, g_2; G_3, g_3; ... bzw. als *l*-, *u*-; *lu*-, *ul*-; *lul*-, *ulu*-; ...-Funktionen [wobei er übrigens, anders wie oben, irgendeine dieser Funktionen in alle folgenden Ordnungen gleicher Art nochmals mit aufnimmt]; was zwar für kleine Indizes recht eindringlich, für größere oder gar für transfinite Indizes aber nicht gut brauchbar ist.*

1031) *Siehe *W. H. Young*[1026]), zweites Zitat, p. 283/7, sowie *H. Hahn*[1025]), p. 345/9.*

1032) **W. Sierpiński,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 15/18.*

1033) **W. Sierpiński*[1032]), p. 18/27; einfacherer Beweis von *St. Mazurkiewicz*, ibid., p. 28/32; [siehe auch p. 32/6, sowie *W. Sierpiński*, ibid., p. 37/40; *St. Kempisty*, ibid., p. 131/5.]*

1034) **St. Kempisty,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 64/73.*

1034a) *Oder auch: höchstens G_α.*

auf die von *H. Lebesgue*[1034]) aufgedeckte enge Beziehung zwischen den *Baire*schen Funktionen und den *Borel*schen Mengen hingewiesen. Dieser Zusammenhang ist ein noch tiefer gehender: Die *Borel*schen Mengen lassen sich in ähnlicher Weise wie die *Baire*schen Funktionen klassifizieren, und es lassen sich dann die *Baire*schen Funktionen einer bestimmten Klasse durch die entsprechenden *Borel*schen Mengen charakterisieren und umgekehrt.

Von diesem letzteren Zusammenhang ist zuerst *H. Lebesgue*[1035]) ausgegangen, um eine Klassifikation der *Borel*schen Mengen durchzuführen: Er bezeichnet eine Menge M als eine „*Menge F der Klasse* α" (wir schreiben „F_α"), wenn man M als Menge $E\ [a \leqq f \leqq b]$[1036]) betrachten kann, wo f eine Funktion der Klasse α ist und wobei es nicht möglich sein soll, f durch eine Funktion von niedrigerer Klasse zu ersetzen. Und er bezeichnet M als eine „*Menge O der Klasse* α" (wir schreiben „O_α"), wenn das Analoge für $E\ [a < f < b]$ gilt. Diese Bezeichnung rührt daher, daß sich für $\alpha = 0$ die abgeschlossenen bzw. offenen Mengen (ens. *f*ermés bzw. *o*uverts) ergeben.

Die in der ersten bzw. zweiten Definition auftretenden Mengen E können auch ersetzt werden durch $E\,[f = 0]$ bzw. durch $E\,[f \neq 0]$, woraus folgt, daß die Komplementärmenge einer Menge F_α eine Menge O_α ist. Eine Menge F_α (oder O_α) ist stets zugleich eine Menge O (oder F) von höchstens $(\alpha + 1)^{\text{ter}}$ Klasse. Die Gesamtheit der Mengen F und O aller dieser Klassen ist identisch mit der Gesamtheit der *Borel*schen Mengen.

W. H. Young[1037]) hat [wie schon in Nr. **9b** erwähnt], ohne Heranziehung der *Baire*schen Funktionen, in direkter Weise eine derartige Klassifikation der *Borel*schen Mengen vorgenommen, indem er unmittelbar von den definierenden und erzeugenden Prozessen der *Borel*schen Mengen [vgl. Nr. **9b** u. **20**] ausgeht, nämlich von der Bildung der Vereinigungsmenge und des Durchschnitts von Mengenfolgen, wobei er wieder ausschließlich *monotone* (wachsende oder fallende) Folgen verwendet.[1038]) Man kommt so zu einer Einteilung der Mengen, welche ganz der obigen Einteilung der Funktionen in Ordnungen entspricht; man wird zweck-

1035) *H. Lebesgue[1020]), insbes. p. 156/66.*

1036) *Wegen dieser Bezeichnungen siehe Nr. **30**.*

1037) *W. H. Young[1025]), zweites Zitat; weiter ausgeführt von *H. Hahn*[1025]), p. 334/42. Vgl. auch *C. de la Vallée Poussin*, Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 437/41, sowie *F. Hausdorff*, Mengenlehre, p. 23/5 u. 304/6, u. [1045]), ferner die Bemerkungen in Nr. **9b** bei [125]).*

1038) *Doch ist hier die Beschränkung auf monotone Mengenfolgen unwesentlich und kann in Wegfall kommen. Vgl. insbes. *H. Hahn*[1025]), p. 335/7.*

mäßig die Bezeichnungen in ähnlicher Weise wählen.[1039]) Unter Mengen 1. Ordnung verstehe man die abgeschlossenen Mengen und die offenen Mengen, die als Mengen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{V}_1$ bezeichnet werden sollen. Durch Induktion werden dann wieder für jedes α der ersten oder zweiten Zahlenklasse mit Hilfe der Mengen niedrigerer Ordnung die *Mengen α^{ter} Ordnung,* nämlich die Mengen $\mathfrak{D}_\alpha$ und $\mathfrak{V}_\alpha$ folgendermaßen definiert: Der Durchschnitt einer monoton abnehmenden Folge von Mengen von niedrigerer als α^{ter} Ordnung werde, wenn er nicht gleichfalls von niedrigerer als α^{ter} Ordnung ist, eine Menge $\mathfrak{D}_\alpha$ genannt; und die entsprechende Vereinigungsmenge monoton wachsender Folgen werde als eine Menge $\mathfrak{V}_\alpha$ bezeichnet. Die oben definierten Mengen F_α sind, wenn α eine isolierte Zahl ist, identisch mit den Mengen $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$; und, wenn α eine Limeszahl ist, identisch mit der Gesamtheit der Mengen α^{ter} Ordnung und der Mengen $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$. Entsprechendes gilt (indem $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{V}$ ersetzt wird) für die Mengen O_α.[1040])

Diese Einteilung der *Borel*schen Mengen in Ordnungen läßt sich übrigens geradezu der Einteilung der *Baire*schen Funktionen in Ordnungen unterordnen; jeder Menge $\mathfrak{D}_\alpha$ [bzw. $\mathfrak{V}_\alpha$] ist nämlich in eindeutiger Weise eine „charakteristische" Funktion zugeordnet, welche in jedem Punkt der betrachteten Menge gleich 1, sonst gleich 0 ist, und diese charakteristische Funktion ist gerade eine Funktion g_α [bzw. G_α]. Dementsprechend übertragen sich die oben bei den *Baire*schen Funktionen erwähnten Sätze auf die *Borel*schen Mengen.

Zwischen der Klassifikation der *Baire*schen Funktionen und der *Borel*schen Mengen bestehen noch weitere spezielle Zusammenhänge, die zuerst von *H. Lebesgue* und dann auch von anderen Mathematikern untersucht worden sind, und die zu einer Charakterisierung der *Baire*schen Funktionen bestimmter Klasse oder Ordnung dienen oder führen.

1039) *Wir wollen uns bzgl. der Bezeichnungen wieder an *H. Hahn*[1025]), p. 334, anschließen.

W. H. Young[1025]), zweites Zitat, verwendet natürlich eine der obigen[1030]) entsprechende Bezeichnungsweise: *i*-, *o*-; *io*-, *oi*-; *ioi*-, *oio*-; ...-Mengen; dabei sind *i* und *o* Abkürzungen von „inner bzw. outer limiting sets" [siehe Nr. **9b**].

F. Hausdorff, Mengenlehre, p. 304/5, verwendet die analogen, durchsichtigen Bezeichnungen: F, G; F_σ, G_δ; $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$; .... Von der *Hausdorff*schen Bezeichnungsweise haben wir in Nr. **9b** gelegentlich Gebrauch gemacht. Wir ziehen aber hier die kürzere und für transfinite Ordnungszahlen geeignetere *Hahn*sche Bezeichnungsweise vor.*

1040) *Die Invarianz dieser Klassifikation der *Borel*schen Mengen gegenüber umkehrbar eindeutigen und beiderseits stetigen Transformationen hat, wie schon in Nr. **17a** erwähnt, *W. Sierpiński*[333a]) bewiesen; vgl. dazu auch [333b]), [c]) und den zugehörigen Text.*

Zunächst[1041]): Damit f höchstens eine Funktion G_α sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes p die Menge $E[f > p]$ höchstens eine Menge $\mathfrak{B}_\alpha$ sei; damit f genau eine Funktion G_α sei, muß außerdem noch gefordert werden (dann wieder notwendig und hinreichend), daß für kein $\beta < \alpha$ alle Mengen $E[f > p]$ und ebenso für kein $\beta < \alpha$ alle Mengen $E[f < p]$ höchstens Mengen $\mathfrak{B}_\beta$ sind.

Daraus folgt dann sofort auch: Damit f eine Funktion α^{ter} Klasse sei, ist notwendig und hinreichend, daß für alle p und q die Mengen $E[p \leqq f \leqq q]$[1042]) höchstens Mengen F_α sind und daß dies für keine kleinere Klasse β $(\beta < \alpha)$ der Fall ist.[1043]) [Daraus ergibt sich unmittelbar der schon in Nr. 54 erwähnte Satz, daß die *Baire*schen Funktionen mit den nach *Borel* meßbaren Funktionen identisch sind.]

In engem Zusammenhang hiermit leitet *H. Lebesgue*[1023]) noch eine Reihe weiterer charakteristischer Eigenschaften für die Funktionen α^{ter} Klasse (oder höchstens α^{ter} Klasse) ab.[1044])

Die Beziehung zwischen den *Borel*schen Mengen und den *Baire*schen Funktionen bestimmter Klasse hat *F. Hausdorff*[1045]) in bemerkenswerter Weise verallgemeinert, indem er fast beliebige Systeme von Funktionen f und die zugehörigen Mengen $M = E[f > p]$ bzw. $N = E[f \geqq p]$ betrachtet. Es ergeben sich hierbei eine Reihe von Sätzen, die analog den wichtigsten Aussagen für die *Baire*schen Funktionen sind und diese als Spezialfälle enthalten.

Die Betrachtungen dieser und der vorigen Nr. gelten im wesentlichen unverändert, wenn die Funktionen nicht im Gesamtraum, sondern nur auf irgendeiner (eventuell einer geeigneten Bedingung zu unterwerfenden) Menge $\mathfrak{M}$ definiert sind oder wenn der Gesamtraum irgendein metrischer (zum Teil noch allgemeinerer) Raum ist.[1046]) Im Zu-

1041) **W. H. Young*[1025]), zweites Zitat, p. 260/83; drittes Zitat, p. 357/9. Vgl. auch *H. Hahn*[1025]), p. 342/5.*

1042) *Man könnte dafür auch $E[f \geqq p]$, $E[f \leqq q]$ nehmen. Ferner könnte man hierin $\geqq$ und $\leqq$ durch $>$ und $<$ ersetzen, wenn man gleichzeitig F durch O ersetzen würde.*

1043) **H. Lebesgue*[1020]), p. 167/8; siehe auch *C. de la Vallée Poussin*, Intégrales de Lebesgue, p. 139/42, sowie insbes. *W. Sierpiński*, Bull. Acad. sc. Cracovie (A) 1918, p. 168/72 (wo auf eine Ungenauigkeit bei *H. Lebesgue* aufmerksam gemacht wird). — Es sei in diesem Zusammenhang noch auf *W. Sierpiński*, Paris C. R. 170 (1920), p. 919/22; Fundamenta math. 2 (1921), p. 74/80, hingewiesen.*

1044) *Siehe hierzu auch *H. Hahn*[1025]), p. 352/6; *C. de la Vallée Poussin*[1043]), p. 142/5.*

1045) **F. Hausdorff*, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 292/309, insbes. p. 298/309; [siehe dazu auch Mengenlehre, p. 27/31, 390/4].*

1046) *Siehe *F. Hausdorff*[1045]) u. *H. Hahn*[1025]), p. 318/92; vgl. ferner *R. Baire*, Acta math. 32 (1909), p. 97/176.*

sammenhang damit ist noch insbesondere der Fall zu berücksichtigen, daß die verwendeten Funktionenfolgen nicht überall konvergieren („*unvollständige Baire*sche Funktionen“). Es ergibt sich: Die Menge, in der irgendeine Folge von Funktionen geringerer als α^{ter} Klasse konvergiert, ist höchstens eine Menge $\mathfrak{D}_{\alpha+2}$. Aber auch umgekehrt: Jede Menge $\mathfrak{D}_{\alpha+2}$ ist Konvergenzmenge von Funktionen geringerer als α^{ter} Klasse.[1047])

Wenn eine *Baire*sche Funktion f von α^{ter} Klasse nur auf einer Menge $\mathfrak{M}$ definiert ist, wird man fragen, ob diese Funktion f zu einer Funktion gleicher Klasse im ganzen Raum R *erweitert* werden kann. Wir betrachten zunächst die stetigen Funktionen ($\alpha = 0$). Es ist fast selbstverständlich, daß sich eine auf einer beliebigen Menge $\mathfrak{M}$ stetige Funktion dann und nur dann zu einer auf der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ stetigen Funktion erweitern läßt, wenn in jedem Häufungspunkt von $\overline{\mathfrak{M}}$ ein Limes der in $\mathfrak{M}$ gegebenen Funktionswerte existiert.[1048]) Darüber hinaus ist von mehreren Mathematikern, zum Teil unabhängig voneinander und auf verschiedenen Wegen[1049]), bewiesen worden, daß jede auf einer abgeschlossenen Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ stetige Funktion sich zu einer im ganzen Raum stetigen Funktion erweitern läßt.

Für $\alpha \geq 1$ ergibt sich entsprechend: Ist $\mathfrak{M}$ höchstens eine Menge $\mathfrak{D}_{\alpha}$ und f auf $\mathfrak{M}$ von höchstens α^{ter} Klasse, so läßt sich f zu einer Funktion, die im ganzen Raum R von höchstens α^{ter} Klasse ist, erweitern, einfach dadurch, daß man auf $(R - \mathfrak{M})$ die Funktion f gleich einer Konstanten setzt.[1050]) Bei beliebigem $\mathfrak{M}$ lassen sich die Bedingungen angeben, unter denen f auf den ganzen Raum erweitert werden kann; es kommt wesentlich darauf an, zu sehen, wann die Erweiterung von $\mathfrak{M}$ nach $\overline{\mathfrak{M}}$ möglich ist.[1051])

1047) *H. Hahn,* Arch. Math. Phys. (3) 28 (1919), p. 34/45; [vgl. auch Reelle Funktionen I, p. 380/3; der Fall $\alpha = 1$ auch bei *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 2 (1921), p. 41/9]. Siehe ferner *F. Hausdorff,* Mengenlehre, p. 30/31, 396/9 und [911]).*

1048) *R. Baire,* Acta math. 30 (1906), p. 17. [Die analoge Erweiterung punktweise unstetiger Funktionen bei *T. Brodén,* Acta Univ. Lund. 33 [= (2) 8] (1897), p. 16].*

1049) *H. Tietze,* J. f. Math. 145 (1914), p. 9/14; *C. de la Vallée Poussin*[1048]), p. 127; *H. Bohr* in *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 617/20 [s. auch p. VI]; *L. E. J. Brouwer,* Math. Ann. 79 (1918/19), p. 209/11 [siehe auch p. 403]; *F. Hausdorff*[1045]), erstes Zitat, p. 296/8.*

1050) *Siehe *H. Hahn*[1025]), p. 356. — *F. Hausdorff*[1045]), p. 306/9, zeigt etwas allgemeiner die Erweiterung einer Funktion α^{ter} Klasse, wenn $\mathfrak{M}$ höchstens eine Menge $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ ist.*

1051) *Eine derartige Untersuchung bei *H. Hahn*[1025]), p. 360/3. — Speziell für $\alpha = 1$ siehe *R. Baire*[1048]) u. *H. Hahn*[1025]), p. 364/5.*

Zusammenfassend können wir sagen, daß die *Baire*schen Funktionen und die *Borel*schen Mengen aufs allerengste miteinander verknüpft sind und daß ihre Eigenschaften sich gegenseitig bedingen. Wir wollen aber zum Schluß doch noch auf einen Fall aufmerksam machen, wo eine Betrachtung der *Baire*schen Funktionen über die Gesamtheit der *Borel*schen Mengen hinausführt. Nach *N. Lusin*[1051a]) braucht nämlich die Menge der Funktionswerte, die eine *Baire*sche Funktion annehmen kann, keine *Borel*sche Menge mehr zu sein, sondern sie wird im allgemeinen nur eine Menge (A) [s. Nr. **9b**] sein. Es existieren sogar bereits Funktionen erster Klasse, die, abgesehen von den rationalen Stellen, in [0, 1] stetig sind und deren Funktionswerte keine *Borel*sche Menge bilden.*

55. Die analytisch darstellbaren Funktionen. Seit *G. Lejeune-Dirichlet* und *B. Riemann* ist man ziemlich allgemein darin einig, eine Zahl y als eindeutige Funktion der Veränderlichen x zu betrachten, wenn jedem Werte von x ein Wert von y entspricht, ohne daß man sich von vornherein mit dem Verfahren beschäftigt, das zur Definition dieser Zuordnung dient[1052]). Wenn auch diese Definition allgemein anerkannt wird, so betrachten dennoch viele Mathematiker als *natürlicher* diejenigen Funktionen, die durch analytische Ausdrücke bestimmt sind. Z. B. untersucht man lieber die Funktion des Argumentes, die durch die Werte einer *Mac Laurin*schen Reihe auf ihrem Konvergenzkreis definiert ist, als die *a priori* gebildeten unstetigen Funktionen. Es war von Interesse, die Frage zu beleuchten, ob diese Unterscheidung einem wirklichen Sachverhalt entspricht.

Zunächst ist es leicht einzusehen, daß diese Unterscheidung in der Praxis keine Existenzberechtigung besitzt. Die Funktionen, denen man da begegnet, selbst die sonderbarsten sind stets einer analytischen Darstellung fähig. Man kann nämlich jede stetige Funktion in gleichmäßig konvergente Reihen von Polynomen entwickeln. Hieraus folgt, daß jede Funktion der ersten *Baire*schen Klasse durch eine Reihe von Polynomen dargestellt werden kann, die (allerdings im allgemeinen nicht gleichmäßig) konvergiert. Eine Funktion zweiter Klasse kann dann durch eine Doppelreihe:

$$\sum_{q=1}^{q=\infty}\left[\sum_{p=1}^{p=\infty} P_{p,q}(x)\right]$$

dargestellt werden, in der die $P_{p,q}(x)$ Polynome sind. Und allgemein

---

1051a) *N. *Lusin*[126]), vgl. dazu auch *W. Sierpiński*[128]) [Bull. Acad. sc. Cracovie (A) 1918, insbes. p. 163/6 sowie p. 191/2].*

1052) *Historisches über den Funktionsbegriff in II A 1, Nr. **1—3** (*A. Pringsheim*).*

wird eine Funktion n^{ter} Klasse durch eine n-fache Reihe dargestellt werden, deren sämtliche Glieder Polynome sind.

Aber man kann sich dennoch fragen, ob es analytisch nicht darstellbare Funktionen gibt. Man muß zunächst festsetzen, was man darunter versteht. *H. Lebesgue* nennt analytisch darstellbar jede Funktion, die man konstruieren kann, indem man nach einem bestimmten Gesetz endlich oder abzählbar unendlich viele Additionen, Multiplikationen, Grenzübergänge an Konstanten und Veränderlichen vornimmt.[1053]) Der Fall, daß der Grenzübergang an nicht überall konvergenten Reihen vorzunehmen ist, wird dabei nicht ausgeschlossen, wodurch auch nicht überall definierte Funktionen zugelassen werden. Es ist ferner zu bemerken, daß die üblichen, durch die Symbole

$$-,\ :,\ \sqrt[m]{\ },\ \sin,\ \log,\ \int_{x_0}^{x},\ \frac{d}{dx},\ \cdots$$

dargestellten Operationen, wenngleich sie unter den ausdrücklich zugelassenen Operationen nicht erscheinen, dennoch, auf analytisch darstellbare Funktionen angewendet, wieder analytisch darstellbare Funktionen ergeben.[1054]) Z. B. ist

$$u : v = u \times \frac{1}{v},$$

und man kann eine Reihe von Polynomen in v angeben, die gegen $\frac{1}{v}$ konvergiert, ausgenommen für $v = 0$.

H. Lebesgue zeigt dann, daß jede analytisch darstellbare Funktion in der Klassifikation von *Baire* enthalten ist[1055]). Die Umkehrung ist übrigens evident. Man kann also die oben [Nr. 54] angegebenen Resultate nach *H. Lebesgue* folgendermaßen aussprechen: *Damit eine Funktion analytisch darstellbar ist, ist es notwendig und hinreichend, daß sie eine nach Borel meßbare Funktion sei. Man kann analytisch nicht darstellbare Funktionen angeben*; und[1056]) man kann unter ihnen sogar solche finden, die trotzdem im *Riemann*schen Sinne integrabel sind.

1053) *H. Lebesgue*[1020]), p. 145.

1054) id. p. 146.

1055) id. p. 152/3, 168/70.

1056) id. p. 216. — *Dies stimmt sachlich überein mit der bereits in Nr. 20 vor und nach [395]) gemachten Bemerkung, daß man Mengen angeben kann, die zwar im *Jordan*schen, nicht aber im *Borel*schen Sinn meßbar sind. — Übrigens liefert natürlich jede nicht meßbare Menge M sofort ein Beispiel einer analytisch nicht darstellbaren Funktion f, wenn man $f = 1$ auf M, $= 0$ in den übrigen Punkten setzt. Und das gleiche gilt auch, wenn man für M eine Menge 2. Kategorie nimmt, deren Komplementärmenge ebenfalls von 2. Kategorie ist [vgl. Nr. 9a]; denn nach [107]) ist eine solche Menge M nicht nach *Borel* meßbar.*

Man kann von den analytisch darstellbaren Funktionen diejenigen unterscheiden, die [*implizite*] *analytisch definiert* sind[1057]). *H. Lebesgue* nennt so jede Funktion y, die gleichzeitig mit einer endlichen (oder sogar abzählbar unendlichen) Menge anderer Funktionen $y_1, y_2, \ldots$ definiert ist als eine der Lösungen einer Menge von ebenso vielen Gleichungen, die man erhält, indem man analytisch darstellbare Funktionen von $x, y, y_1, y_2, \ldots$ gleich Null setzt. *H. Lebesgue* will nun beweisen, daß jene Unterscheidung unwesentlich ist, d. h. daß jede implizite analytisch definierte Funktion auch analytisch darstellbar ist.[1058]) *Aber der Beweis von *H. Lebesgue* muß als mißlungen angesehen werden, da er sich wesentlich auf einen unrichtigen Hilfssatz stützt.[1059]) *N. Lusin*[1059a]) gibt an, daß sich trotzdem die *Lebesgue*sche Behauptung bezüglich der implizite definierten Funktionen beweisen lasse.*

56. Konvergenzcharakter von Folgen meßbarer Funktionen.[1060]) *Alle *Baire*schen Funktionen sind, wie erwähnt, nach *Borel* meßbar; daher bilden die (nach *Lebesgue*) meßbaren Funktionen eine umfassendere Gesamtheit. Wir wollen nun zunächst einige allgemeine Aussagen über den Konvergenzcharakter von Folgen meßbarer Funktionen machen und dann nachher [Nr. **57a**] allgemeine Beziehungen zwischen den meßbaren Funktionen und den *Baire*schen Klassen untersuchen.*

Man kann mit *H. Lebesgue* sagen, daß eine Reihe *fast überall*[390a]) im Intervall $[a, b]$ konvergiert, wenn die Menge der Punkte, wo sie nicht konvergiert, vom Maß Null ist.

Es ist nun bemerkenswert, daß man über den Konvergenzcharakter einer fast überall konvergenten Reihe wesentliche Aussagen machen kann, sobald die Einzelfunktionen als meßbar vorausgesetzt werden.

1057) id. p. 147.

1058) id. p. 192.

1059) *Es handelt sich um den Hilfssatz (a. a. O., p. 191/2), daß die Projektion einer *Borel*schen Menge wieder eine *Borel*sche Menge sei. Die Unrichtigkeit dieses Hilfssatzes hat *M. Souslin,* Paris C. R. 164 (1917), p. 88/91, nachgewiesen; siehe hierüber Nr. 9b. — Übrigens besteht der Fehlschluß *H. Lebesgues* beim Beweis dieses Hilfssatzes darin, daß er annimmt, die Projektion des Durchschnittes einer abnehmenden Mengenfolge sei gleich dem Durchschnitt der einzelnen Projektionen, was durch sehr einfache Beispiele widerlegt werden kann. — Vgl. dazu auch *H. Lebesgue,* Ann. Éc. Norm. [54 =] (3) 35 (1918), p. 240/3.*

1059a) *N. Lusin,* Paris C. R. 164 (1917), p. 93; doch fehlen hier die näheren Ausführungen.*

1060) *Die in dieser Nr. behandelten Dinge hat *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 556/63 u. 570/4, insofern verallgemeinert, als er an Stelle der meßbaren Funktionen die allgemeineren „φ-meßbaren" Funktionen [vgl. Nr. 30 bei [594]) bis [597])] betrachtet.*

E. Borel[1061]) hat gezeigt: Wenn eine Reihe von meßbaren Funktionen fast überall im Intervall $[a, b]$ konvergiert, so strebt das Maß der Menge von Punkten, in denen der Reihenrest vom Range n absolut genommen größer als eine willkürliche positive Zahl ε ist, mit $\frac{1}{n}$ der Null zu.[1062])

*Das Gleiche gilt nach *H. Lebesgue*[1063]) auch, wenn man die Worte „Reihenrest vom Range n" durch „mindestens ein Reihenrest vom Range $m \geqq n$" ersetzt.*

Die vorstehenden Sätze können als Spezialfälle des folgenden Theorems von *D. Th. Egoroff*[1064]) betrachtet werden, der dasselbe aus jenen Sätzen abgeleitet hat:

Wenn eine Reihe von meßbaren Funktionen fast überall in einem Intervall konvergiert, so kann man aus diesem Intervall eine Menge von beliebig kleinem Maß η herausheben, derart, daß die Reihe in der Komplementärmenge gleichmäßig konvergiert.[1065])

1061) *E. Borel,* Leçons[957]), p. 37. *Vgl. dazu auch *C. Arzelà,* Mem. Ist. Bologna (5) 8 (1899/1900), p. 135, wo sich bereits ein Spezialfall des Satzes findet.*

1062) *Man kann diesen Satz noch etwas anders formulieren, wenn man folgende Begriffe verwendet: Es sei M eine meßbare Menge (etwa von endlichem Maß), es sei $\{f_n\}$ eine Folge von auf M meßbaren Funktionen und f ebenfalls eine auf M meßbare, endliche Funktion; wenn dann das Maß der Punkte, wo $|f - f_n|$ größer als eine willkürliche positive Zahl ε ist, für jedes ε mit wachsendem n der Null zustrebt, so sagt *F. Riesz* [Paris C. R. 148 (1909), p. 1303/5], die Folge $\{f_n\}$ *konvergiere gegen f „en mesure"*, oder, an *E. Borel* [Paris C. R. 154 (1912), p 413/5; J. de math. (6) 8 (1912), p. 192/4] anschließend, sagt man, die Folge $\{f_n\}$ *konvergiere „asymptotisch" gegen f.*

Unter Benutzung dieser Ausdrucksweise kann man also den obigen *Borel*schen Satz so aussprechen: Wenn eine Folge von meßbaren Funktionen in einem Intervall (oder auf einer meßbaren Menge M von endlichem Maß) fast überall gegen f konvergiert, so konvergiert sie daselbst asymptotisch gegen f.

Das Umgekehrte gilt nicht. Aber man kann nach *F. Riesz,* a. a. O., aus einer solchen gegen f asymptotisch konvergenten Folge stets eine Teilfolge herausheben, die fast überall gegen f konvergiert.*

1063) **H. Lebesgue,* Paris C. R. 137 (1903), p. 1228/30 [unter Bezugnahme auf seine Thèse, p. 29]; Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1906, p. 9/10 [dazu Richtigstellung eines kleinen Versehens: Paris C. R. 149 (1909), p. 102/3].

Man kann dies nach einer Bemerkung von *D. Th. Egoroff*[1064]) leicht aus dem vorstehenden *Borel*schen Satz folgern.*

1064) *D. Th. Egoroff,* Paris C. R. 152 (1911), p. 244/6. [*Ein anderer Beweis dieses Satzes bei *F. Riesz,* Acta litterarum ac scientiarum Univ. Hungar. Franc.-Jos. (Sectio scient. math.) 1 (1922), p. 18/21.*]

1065) *Dieser Satz läßt sich nicht dahin verschärfen, daß die gleichmäßige Konvergenz in einem maßgleichen Kern des Intervalls (bzw. von M) stattfindet; vgl. *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 384/85.*

Übrigens kann man statt eines Intervalls hier eine beliebige meßbare Menge M von endlichem Maß zugrunde legen.

*Man kann diesen Satz noch anders formulieren, wenn man dabei eine schon vorher von *H. Weyl*[1066]) angegebene Begriffsbildung verwendet: Er bezeichnet eine auf M definierte Funktionenfolge als *„wesentlich-gleichmäßig“* konvergent, wenn sie, nach Ausschluß einer geeigneten Teilmenge von beliebig kleinem Maß, auf der Restmenge von M gleichmäßig konvergiert.

Dann besagt also der Satz von *Egoroff*, daß *eine auf M fast überall konvergente Folge meßbarer Funktionen dort auch wesentlich-gleichmäßig konvergiert.* Also für eine auf der meßbaren Menge M von endlichem Maß definierte Folge von meßbaren Funktionen decken sich die Begriffe *„fast überall konvergent“* und *„wesentlich-gleichmäßig konvergent“* vollständig.[1067])*

57. Konvergenz im Mittel. Sei Ω die Menge der Funktionen, deren Quadrat im Intervall $[a, b]$ summierbar ist. Gehören $f(x)$ und $\varphi(x)$ der Menge Ω an, so gehört auch $f(x) - \varphi(x)$ zu Ω und man kann den Ausdruck

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}$$

als die *„Entfernung“* von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bezeichnen. [*Siehe Nr. **26a**, insbes. bei [542]).*] *E. Fischer*[1068]) sagt, daß eine Reihe von Funktionen von Ω

$$(1) \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\ldots$$

im Mittel konvergiert, wenn die Entfernung von $f_n(x)$ und $f_{n+p}(x)$ mit $\frac{1}{n}$ beliebig klein wird, was auch p sei. Und er beweist[1069]), daß dann in Ω eine Funktion

$$f(x)$$

existiert, *gegen die* die Reihe im Mittel konvergiert, d. h. daß die

---

1066) *H. Weyl*, Math. Ann. 67 (1909), p. 225.*

1067) *W. H. Young*, Quart. J. of math. 44 (1913), p. 129/34; Proc. London Math. Soc. (2) 12 (1913), p. 363/4, hat den Satz von *Egoroff* noch verallgemeinert: Wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß die betrachtete Funktionenfolge fast überall konvergieren soll, so kann man immer noch eine analoge Aussage machen, wobei an Stelle der „gleichmäßigen Konvergenz“ jetzt die „gleichmäßige bzw. sekundär-gleichmäßige Oszillation“ [vgl. Nr. 49, Schluß] tritt.*

1068) *E. Fischer*, Paris C. R. 144 (1907), p. 1022/4; [vgl. auch p. 1148/51]. *Eine derartige Begriffsbildung findet sich übrigens im wesentlichen schon bei *A. Harnack*, Math. Ann. 17 (1880), p. 126 u. 128.*

1069) *Ein anderer Beweis dieses Satzes bei *H. Weyl*[1071]).*

Entfernung von $f(x)$ und $f_n(x)$ mit $\frac{1}{n}$ unendlich klein wird. $_*f(x)$ ist natürlich nur bis auf eine Nullmenge bestimmt; d. h. an Stelle von $f(x)$ kann hier auch jede dazu äquivalente Funktion treten.*[1070])

H. Weyl[1071]) beweist außerdem, daß man aus der im Mittel konvergenten Reihe (1) stets eine Teilfolge herausheben kann, die gegen $f(x)$ gleichmäßig konvergiert in einer Punktmenge des Intervalls $[a, b]$, deren Maß sich beliebig wenig von $(b - a)$ unterscheidet. $_*$Oder anders gesagt: Aus der im Mittel konvergenten Funktionenfolge (1) kann man stets eine gegen $f(x)$ *wesentlich-gleichmäßig* konvergente [Nr. **56**] Teilfolge herausheben.*

57 a. $_*$Allgemeine Beziehungen zwischen meßbaren Funktionen und Baireschen Klassen. Die *Baire*schen Funktionen sind, wie oben betont wurde, nach *Borel* meßbar und infolgedessen in der umfassenderen Gesamtheit der (nach *Lebesgue*) *meßbaren Funktionen* enthalten. Es bestehen nun sehr einfache allgemeine Beziehungen zwischen den meßbaren Funktionen und den Funktionen der niedrigsten *Baire*schen Klassen. *G. Vitali*[1072]) hat nämlich den folgenden Satz bewiesen: *Zu jeder beliebigen meßbaren Funktion ist eine Funktion von* (*höchstens*) *2. Klasse äquivalent*[543]), d. h. die beiden Funktionen unterscheiden sich nur in einer Nullmenge. (Natürlich ist diese Aussage für die meßbaren Funktionen charakteristisch.) Man kann diesen Satz als ein Analogon zu der in [391]) gemachten Aussage über maßgleichen Kern (bzw. Hülle) einer meßbaren Menge auffassen und, von da ausgehend, auch sehr einfach beweisen. Wenn man übrigens die Integrationstheorie benutzt, so folgt dieser Satz, wenigstens für summierbare Funktionen, unmittelbar aus der Tatsache [Nr. **40**], daß eine

1070) $_*$Verallgemeinerungen dieser Betrachtungen sind gegeben worden: a) von *F. Riesz*[1062]) u. Math. Ann. 69 (1910), p. 464/8, wo der Exponent 2 durch eine beliebige positive Zahl ersetzt wird; [vgl. dazu auch *J. Radon,* Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien IIa 122 (1913), p. 1361/8; 128 (1919), p. 1088/92]; b) von *Pia Nalli,* Rend. Circ. mat. Palermo 38 (1914), p. 305/19, 320/3, wo unendliche Integrationsintervalle betrachtet werden.*

1071) *H. Weyl*[1066]), p. 243/5; siehe dazu auch *M. Plancherel,* Rend. Circ. mat. Palermo 30 (1910), p. 292/5; $_*$Bull. sc. math. [58_1 =] (2) 47_1 (1923), p. 195/204.*

1072) *G. Vitali,* Rend. Ist. Lomb. (2) 38 (1905), p. 599/603. $_*$Vgl. auch *C. Carathéodory,* Reelle Funktionen, p. 403/7.*

$_*$Ferner sei überhaupt wegen der in dieser Nr. behandelten Dinge auf *H. Hahn,* Reelle Funktionen I, p. 563/70, hingewiesen, wo an Stelle der meßbaren Funktionen allgemeinere „φ-meßbare" Funktionen [vgl. Nr. **30**, bei [594]) bis [597])] betrachtet werden.*

$_*$Für die Sätze dieser Nr. hat vor kurzem *W. Sierpiński,* Fundamenta math. 3 (1922), p. 314/21 neue Beweise gegeben.*

Derivierte eines unbestimmten *Lebesgue*schen Integrals fast überall mit dem Integranden übereinstimmt.

Aus diesem Satz von *G. Vitali* ergeben sich noch einige weitere Folgerungen:

M. Fréchet[1073]) hat bewiesen, daß es zu jeder beliebigen *Baire*schen Funktion f eine *Reihe von Polynomen* gibt, *die fast überall gegen f konvergiert.* Dieser Satz läßt sich jetzt mit Hilfe des vorstehenden *Vitali*schen Satzes sofort für alle *meßbaren Funktionen* f verallgemeinern. Ist übrigens f eine summierbare Funktion, so kann man den Satz direkt (ohne Bezugnahme auf die *Baire*schen Funktionen, mit Hilfe der Integrationstheorie) begründen und kann hierfür die Polynome sofort explizit angeben. Es wird nämlich nach *F. Riesz* das Gewünschte (im Intervall [0, 1]) bereits durch die zugehörigen *Landau*schen Polynome [Nr. 50] geleistet.[1074]) Man kann das eben Gesagte auch so formulieren: Ist f eine meßbare Funktion auf einer meßbaren Menge M, so gibt es einen maßgleichen Kern von M, auf welchem *f von höchstens 1. Klasse* ist. Daraus darf man aber *nicht* schließen[1075]), daß jede meßbare Funktion auf M zu einer Funktion 1. Klasse äquivalent

1073) *M. Fréchet,* Thèse, Paris 1906 = Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906), p. 15/17. [*Vorläufige Mitteilung: Paris C. R. 140 (1905), p. 28*].

1074) Schon vor *M. Fréchet* hatte *H. Lebesgue* [Math. Ann. 61 (1905), p. 251/80, insbes. p. 277; *vgl. auch Leçons[1063]), p. 92/6*] gezeigt, daß die arithmetischen Mittel σ_n von *L. Fejér* [vgl. den Artikel II C 10 von *E. Hilb* u. *M. Riesz* über trigonometrische Reihen] gegen die Funktion konvergieren, außer vielleicht für eine Punktmenge vom Maß Null. [Hieraus läßt sich unmittelbar eine wirkliche Bestimmung einer dem Satz entsprechenden Reihe von Polynomen herleiten.] *P. Fatou* [Acta math. 30 (1906), p. 335/400] ist zu einem analogen Resultat mittels des Poissonschen Integrals gelangt. Endlich hat *F. Riesz,* Jahresb. Dtsch. Math.-Ver. 17 (1908), p. 196/211 gezeigt, daß die Polynome $L_n(x)$ von *E. Landau* [Nr. 50] gegen $f(x)$ konvergieren, selbst wenn $f(x)$ nur eine summierbare Funktion ist, wobei die Konvergenz gegen $f(x)$ höchstens in den Punkten einer Menge vom Maß Null aussetzt. [Wegen weiterer Einzelheiten siehe [942]).] Alle diese Beweise, bis auf den von *M. Fréchet,* beruhen auf der Tatsache, daß ein unbestimmtes Integral die integrierte Funktion, außer vielleicht für eine Menge vom Maß Null, zur Ableitung hat. *H. Lebesgue* hat schließlich noch bewiesen [Ann. Fac. sc. Toulouse (3) 1 (1909), p. 86/101], daß alle diese Resultate sich aus einem allgemeinen Kriterium ableiten lassen, das auf die singulären Integrale von *K. Weierstraß*, *S. D. Poisson*, *E. Landau* und *Ch. J. de la Vallée Poussin* Anwendung findet [vgl. die allgemeine Theorie der singulären Integrale im Artikel II C 11 (*E. Hilb* u. *O. Szász*)]. Der Beweis von *M. Fréchet* dagegen beruht auf einer allgemeinen Eigenschaft der Doppelreihen. — *Siehe hierzu auch *E. W. Hobson,* Proc. London Math. Soc. (2) 12 (1913), p. 156/73.*

1075) *Wie dies *C. Burstin*[435]) [vgl. insbes. die dort zitierte (von *A. Rosenthal* veranlaßte) Berichtigung] getan hatte.*

ist. Denn: Die Folge der Polynome wird im allgemeinen auf einer Nullmenge nicht konvergieren und daher nicht auf der ganzen Menge M eine Funktion 1. Klasse definieren. In der Tat gibt es meßbare Funktionen, die (auf ihrer Definitionsmenge M) zu keiner Funktion 1. Klasse äquivalent sind[1076]). —

Mit Hilfe des Satzes von *Egoroff* [Nr. 56] kann man weiter noch schließen, daß jede auf einer meßbaren Menge M definierte, fast überall endliche, meßbare Funktion f auf einer (perfekten) Teilmenge P, deren Maß sich beliebig wenig von dem Maß von M unterscheidet, *stetig* ist.[1077]) Diese Aussage ist für die meßbaren Funktionen charakteristisch.[1077a]) Man kann aber dabei P im allgemeinen nicht durch einen maßgleichen Kern von M ersetzen, da es auf M meßbare Funktionen gibt, die auf jedem maßgleichen Kern von M total unstetig sind.[1076]) Dagegen kann man nach *A. Denjoy*[818]) noch behaupten, daß f fast überall in M „approximativ stetig" ist.

Entsprechend den vorstehenden Resultaten teilt *C. Carathéodory*[1078]) die unstetigen meßbaren Funktionen in 4 „*Arten*" ein: 1. diejenigen, die auf ihrer Definitionsmenge M einer stetigen Funktion äquivalent sind; 2. die auf einem maßgleichen Kern von M stetig sind; 3. die einer Funktion 1. Klasse äquivalent sind; 4. die außer der Meßkarkeit keiner weiteren Bedingung unterworfen sind. Jede dieser 4 Arten von meßbaren Funktionen ist in der folgenden enthalten und enger als diese.

Es ist noch sehr bemerkenswert, daß neuerdings *H. Blumberg*[1078a]) weitgehende Aussagen auch über *ganz beliebige* Funktionen gewinnen

1076) *Vgl. z. B. *C. Carathéodory*[1072]), p. 407/8 u. 411.*

1077) *Andeutungen hierüber zuerst bei *E. Borel,* Paris C. R. 137 (1903), p. 966/7, und *H. Lebesgue,* ibid., p. 1228/30; explizit formuliert und bewiesen (und zwar in ganz direkter Weise) von *G. Vitali*[1072]), p. 601/2 [er hat dies aus seinem oben angegebenen Satz[1072]) über die Funktionen 2. Klasse hergeleitet]. Vgl. ferner dazu: *N. Lusin*[749]), sowie *W. Sierpiński,* Tôhoku Math. J. 10 (1916), p. 81/6.*

1077a) *D. h. jede auf M fast überall endliche Funktion, für welche die obige Aussage gilt, ist auf M meßbar; siehe *L. Tonelli,* Fondamenti di calcolo delle variazioni, 1, Bologna [1922], p. 131/42, insbes. p. 132/4 u. 141/2. *L. Tonelli* nimmt überhaupt a. a. O. die obige charakteristische Eigenschaft [„*Quasi-Stetigkeit*" (auf M)] zum Ausgangspunkt, um von da aus die meisten der in dieser Nr. betrachteten Sätze zu gewinnen. —

In diesem Zusammenhang siehe auch *W. Sierpiński* u. *A. Zygmund,* Fundamenta math. 4 (1923), p. 316/8, die (mit Hilfe des Wohlordnungssatzes) eine auf jeder Menge von Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ unstetige (also nicht-meßbare) Funktion bilden.*

1078) *C. Carathéodory*[1072]), p. 412/13.*

1078a) **H. Blumberg,* Proceed. National Acad. U. S. A. 8 (1922), p. 283/8. [Eine ausführliche Darstellung wird in den Trans. Amer. Math. Soc. erscheinen.]*

konnte, von denen gar nichts (abgesehen vielleicht von der Endlichkeit), insbesondere nicht die Meßbarkeit vorausgesetzt wird. Er zeigt, daß jede beliebige Funktion f auf einer im Definitionsbereich M[1078b]) überall dichten Menge *stetig* ist und (was eine weitgehende Verallgemeinerung des vorhergehenden *Denjoy*schen Resultats ist), daß f fast überall in M „*approximativ stetig*" ist.[1078c])*

Reihen und Folgen von Funktionen mehrerer Veränderlichen.

58. Funktionen mehrerer Veränderlichen. Die meisten der vorstehenden Betrachtungen lassen sich auf die Funktionen einer endlichen Zahl von Veränderlichen anwenden. Nur wird man veranlaßt, die Stetigkeit in bezug auf die Gesamtheit der Veränderlichen von der Stetigkeit in bezug auf jede einzelne der Veränderlichen zu unterscheiden. Man sagt kurz, daß eine Funktion von mehreren Veränderlichen stetig ist, wenn der erste Fall zutrifft. Man findet eine einfache Beziehung zwischen den beiden Arten von Stetigkeiten, wenn man die Klassifikation von *Baire* auf den Fall mehrerer Veränderlichen ausdehnt. Betrachtet man eine (in bezug auf die Gesamtheit der Veränderlichen) stetige Funktion als Funktion nullter Klasse, so definiert man wieder nacheinander die Funktionen erster, zweiter, . . . Klasse durch die Festsetzung, daß eine Funktion dann von der Klasse α ist, wenn sie Grenzwert von Funktionen niedrigerer Klassen als α ist, ohne selbst von niedrigerer Klasse als α zu sein. Die den früheren analogen Sätze über die *Baire*schen Klassen gelten auch im Fall mehrerer Veränderlichen im wesentlichen genau ebenso wie für eine Veränderliche. Nun beweist *H. Lebesgue* die folgenden Sätze:

Eine Funktion von n Veränderlichen, die in bezug auf eine jede von ihnen stetig ist, ist höchstens von der Klasse $(n-1)$.[1079]) Und zwar kann sie wirklich von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Klasse sein: *Ist $f(t)$ eine Funktion einer Veränderlichen von der Klasse n, so existiert eine in be-*

1078b) *Der Definitionsbereich M kann der Gesamtraum oder eine geeigneten Bedingungen unterworfene Menge sein.*

1078c) *Das letztere dieser beiden Resultate hat (offenbar unabhängig von *H. Blumberg*) kürzlich auch *W. Sierpiński*, Fundamenta math. 4 (1923), p. 124/7 bewiesen.*

1079) *H. Lebesgue*, *[1012]), erstes Zitat, p. 284/5;* [1020]), p. 201. [*Wegen der Spezialfälle $n = 2, 3$ vgl. auch *R. Baire*, Thèse, p. 87/101, u. *H. Lebesgue*[1007]), zweites Zitat, p. 234*]. — *Siehe dazu ferner *H. Hahn*, Reelle Funktionen I, p. 383/92.*

zug auf jede ihrer Veränderlichen stetige Funktion $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ *derart, daß* $f(t)$ *mit der Funktion* $\varphi(t, t, \ldots, t)$ *identisch ist.*[1080])

*Man kann dem noch hinzufügen, was *R. Baire*[1081]) für $n = 2$ u. 3 und *H. Hahn*[1082]) für beliebiges n bewiesen hat, daß eine Funktion von n Veränderlichen, die in bezug auf jede einzelne von ihnen stetig ist, nur punktweise unstetig ist als Funktion der Gesamtheit ihrer Veränderlichen; und zwar liegen ihre Stetigkeitspunkte sogar auf jeder $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $x_i = \text{const.}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ überall dicht.[1083])*

Es gelten auch die folgenden, den früheren analogen Sätze:

Die Summe einer gleichmäßig konvergenten Reihe von (in bezug auf die Gesamtheit ihrer Veränderlichen) stetigen Funktionen ist eine stetige Funktion. Jede (in bezug auf die Gesamtheit ihrer Veränderlichen) stetige Funktion kann in einem Intervall als die Summe einer absolut und gleichmäßig konvergenten Reihe von Polynomen dargestellt werden. Diese Verallgemeinerung des *Weierstraß*schen Satzes auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ist durch die oben Nr. **50** angegebenen Methoden von *K. Weierstraß*[1084])*, *G. Mittag-Leffler*[925]), *E. Picard*[927]), *H. Lebesgue*[924]) sowie *E. Landau*[934]) *und *Ch. J. de la Vallée Poussin*[1085]), ferner *W. Stekloff*[931])* bewiesen worden.[1086])

Hieraus folgt wieder, daß eine Funktion mehrerer Veränderlichen von der Klasse n durch eine n-fache Reihe, deren Glieder Polynome sind, darstellbar ist.

1080) *H. Lebesgue*[1020]), p. 202/5. Der Fall $n = 1$ war zuerst von *V. Volterra* im Jahre 1899 erhalten worden [nicht veröffentlicht; siehe die Fußnote von *H. Lebesgue*, id. p. 203].

1081) **R. Baire*, Paris C. R. 125 (1897), p. 691/4; Thèse, p. 22/7, 95/9. Vgl. auch *E. B. Van Vleck*, Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), p. 198/201. Verallgemeinerungen bei *K. Bögel*, Math. Ann. 81 (1920), p. 64/93.*

1082) **H. Hahn*, Math. Ztschr. 4 (1919), p. 306/13.*

1083) *Dies steht natürlich nicht im Widerspruch zu dem (auch für n Veränderliche unverändert geltenden) Satz von *R. Baire*[1006]), der ja punktweise Unstetigkeit auf jeder perfekten Teilmenge fordert.*

1084) *a. a. O.[920]), Werke 3, p. 27/37. — Hierzu auch *G. Ingrami*, Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali, Bologna 1889.*

1085) *Siehe [935]), zweites Zitat.*

1086) *Außerdem ist der *Weierstraß*sche Polynomsatz auf den Funktionenraum übertragen worden von *M. Fréchet*, Paris C. R. 148 (1909), p. 155/6; Ann. Éc. Norm. [46 =] (3) 27 (1910), p. 193/216, insbes. p. 213. Weitere Untersuchungen hierüber bei *R. Gateaux*, Paris C. R. 157 (1913), p. 325; Rend. Acc. Lincei 22_{II} (1913), p. 646/8; 23_{I} (1914), p. 310/15; Bull. Soc. math. France 50 (1922), p. 2/6, 21/30; *P. Lévy*, Paris C. R. 172 (1921), p. 1283/4.*

L. Tonelli[1087]) hat die Ergebnisse ⁎von *Ch. J. de la Vallée Poussin*[940]) und* von *F. Riesz*[942]) u. [1074]) bezüglich der Polynome von *E. Landau* [Nr. 50] auf den Fall von n Veränderlichen ausgedehnt. Z. B. konvergiert, für $n = 2$, das Polynom

$$P_n(x_1, x_2) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{f(z_1, z_2)}{4k_n}[1-(z_1-x_1)^2-(z_2-x_2)^2]^n dz_1 dz_2,$$

wobei

$$k_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}[1 - z_1^2 - z_2^2]^n dz_1 dz_2$$

ist, gegen die summierbare Funktion

$$f(x_1, x_2),$$

außer in einer Punktmenge vom Inhalte Null. ⁎Zu den Konvergenzpunkten gehören alle Stetigkeitspunkte von $f(x_1, x_2)$.* Die Konvergenz ist gleichmäßig in jedem Stetigkeitsbereiche. ⁎Ebenso lassen sich über die partiellen Ableitungen und ihre Darstellung ähnliche Aussagen machen wie bei den Funktionen einer Veränderlichen.*

⁎Auch die *Tschebyscheff*schen Untersuchungen sind auf die Funktionen mehrerer Veränderlichen verallgemeinert worden, insbes. von *L. Tonelli*[971]), *F. Sibirani*[978]) und *A. Haar*[979]). Die näheren Angaben hierüber sind bereits in Nr. **51** gemacht worden.*

⁎Überhaupt finden sich in den früheren Nrn. auch sonst die nötigsten Angaben und Literaturnachweise bezüglich der Übertragung der Resultate auf den Fall mehrerer Veränderlichen und ebenso auch bezüglich der Übertragung auf noch allgemeinere (insbesondere metrische Räume.*

1087) *L. Tonelli,* Rend. Circ. mat. Palermo 29 (1910), p. 1/36. ⁎Vgl. auch *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Cours d'Analyse II, 2. éd., Louvain-Paris 1912 p. 135/7; *S. Takenaka,* Tôhoku Math. J. 16 (1919), p. 16/25.*

(Abgeschlossen im Juli 1923.)

II C 10. NEUERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER TRIGONOMETRISCHE REIHEN.[1])

Von

E. HILB in Würzburg und **M. RIESZ** in Stockholm.

H. Burkhardt (II A 12) gab den Bericht über die historische Entwicklung der Theorie und Anwendungen der trigonometrischen Reihen bis *Riemann*. In den folgenden Ausführungen berichten wir über die Weiterentwicklung der Theorie, müssen jedoch auf eine Besprechung der Anwendungen verzichten, ebenso auf eine Auseinandersetzung des Einflusses der Theorie auf die gesamte Analysis und speziell auf ihre Grundbegriffe.

Nach einem kurzen historischen Überblicke gehen wir zunächst von einer Funktion $f(x)$ aus, der wir die Zahlen [1a])

$$\text{(I)} \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ihre *Fourierkoeffizienten* und die zunächst formale Reihe

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

ihre *Fourierreihe* zuordnen. Es wird dann untersucht, unter welchen Bedingungen diese *Fourier*reihe direkt oder vermittels geeigneter Summationsverfahren die Funktion $f(x)$ darstellt. Darüber hinaus behandeln wir die Frage, wie Operationen, die wir auf Funktionen anwenden, sich in ihren *Fourier*koeffizienten widerspiegeln. Der zweite Teil bringt die von *Riemann* geschaffene Theorie der allgemeinen trigonometrischen Reihen, bei denen von der Reihe als solcher ausgegangen wird und also die Koeffizienten nicht von vornherein in der Form (I) gegeben sind.

Wir beschränken uns auf Reihen mit einer Veränderlichen und geben nur in Nr. 15 einen ganz kurzen Bericht über mehrfache, namentlich zweifache *Fourier*sche und trigonometrische Reihen. Schließlich behandeln wir in Ergänzung des Referates *A. Rosenthal* (II C 9) Fragen über den Grad der Annäherung einer Funktion durch Polynome und endliche trigonometrische Summen.

---

1) Für die Mitwirkung bei der Korrektur bzw. für Verbesserungs- und Ergänzungsvorschläge sind die Verfasser den Herren *Fejér, Hahn, Hardy, Hausdorff, A. Kneser, Landau, Neder, Perron, Pleßner, Pringsheim, F. Riesz, Schlesinger* und *Szász* zum wärmsten Danke verpflichtet.

1a) Über die Festlegung des Integralbegriffs vgl. Nr. 1.

Inhaltsübersicht.

1. Festsetzungen und Bezeichnungen.
2. Geschichtlicher Überblick.

I. Fouriersche Reihen.

3. *Fourier*koeffizienten.
4. Konvergenz der *Fourier*schen Reihe.
5. Die konjugierte Reihe.
6. Gleichmäßige Konvergenz und absolute Konvergenz.
7. Verschiedene Konvergenz- und Divergenzerscheinungen.
8. Summationsverfahren.
9. Die *Bessel*sche Ungleichung und der *Parseval*sche Satz.
10. Der *Riesz-Fischer*sche Satz und verwandte Sätze.
11. Operationen mit *Fourier*reihen.

II. Allgemeine trigonometrische Reihen.

12. Die Arbeit *Riemanns*.
13. Weiterentwicklung im Anschluß an *Riemann*.
14. Konvergenz- und Divergenzerscheinungen bei allgemeinen trigonometrischen Reihen.

III. Anhang.

15. Mehrfache *Fourier*reihen und trigonometrische Reihen.
16. Der Grad der Annäherungen.

Literatur.

Für ältere Literatur vgl. bei *H. Burkhardt* (II A 12, p. 823—824), für die Gesamtliteratur *M. Lecat,* Bibliographie des séries trigonométriques, 1921.

Öfter genannt werden im folgenden namentlich:

B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 2. Aufl. 1892, insbesondere daselbst: Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, p. 227—271 (aus Gött. Abh. 1867).

H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Sammlung *Borel* 1906. Zitiert: *Lebesgue,* Leçons.

Ch.-J. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, Bd. II, 2. Aufl. 1912. Zitiert: *de la Vallée Poussin,* Cours II. Ferner:

—, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Sammlung *Borel* 1919. Zitiert: *de la Vallée Poussin,* Leçons.

Zur Ergänzung des vorliegenden Berichtes verweisen wir außer auf das schon erwähnte Referat von *H. Burkhardt* (II A 12) auf *L. Bieberbach* (II C 4), *A. Rosenthal* (II C 9), *E. Hilb* und *O. Szász* (II C 11). Im letztgenannten Referate wird auch das *Fourier*sche Integraltheorem besprochen.

---

1. Festsetzungen und Bezeichnungen. 1. Wir bezeichnen mit (a, b) ein Intervall mit Ausschluß seiner Endpunkte (offenes Intervall), mit $\langle a, b\rangle$ ein Intervall mit Einschluß seiner Endpunkte (abgeschlossenes Intervall), mit $\rangle a, b\langle$ ein Intervall, welches $\langle a, b\rangle$ vollständig in seinem Innern enthält.

2. Bei der Definition einer Funktion dient als Grundintervall im allgemeinen das Intervall $-\pi \leqq x < \pi$. Über dieses Intervall hinaus denken wir uns die Funktion mit der Periode 2π fortgesetzt. Unter einer in $\langle -\pi, +\pi\rangle$ stetigen Funktion verstehen wir also eine stetige Funktion mit der Periode 2π. Die Klasse dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_{st}$. Als *Stetigkeitsmaß* $\omega(\delta)$ bezeichnen wir im Anschluß an *de la Vallée Poussin* das Maximum von $|f(x_2) - f(x_1)|$ bei $|x_2 - x_1| \leqq \delta$.

3. Die Worte *„Integral"*, *„integrierbar"* wenden wir stets im *Lebesgue*schen Sinne an. Daher ist mit $f(x)$ zugleich auch $|f(x)|$ integrierbar (vgl. II C 9 (*A. Rosenthal*), Nr. **33**). Die Klasse der in $\langle -\pi, +\pi\rangle$ integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit L, die der Funktionen, bei denen außerdem die k^{te} Potenz $(k > 1)$ integrierbar ist, nennen wir L^k. Die Klasse der integrierbaren und beschränkten Funktionen nennen wir L_b, die der im *Riemann*schen Sinne integrierbaren Funktionen R. Wir sprechen aber ältere Sätze, welche für Funktionen der Klasse L gelten, im allgemeinen gleich für diese aus. Auf Funktionen, die nicht im *Lebesgue*schen, aber etwa im *Harnack-Lebesgue*schen oder im *Denjoy*schen Sinne integrierbar sind (vgl. II C 9, *A. Rosenthal*, Anm. 630 bzw. Nr. **35c**), kommen wir nur beiläufig zu sprechen.

Schließlich nennen wir einen Punkt x einen *regulären Punkt* der Funktion $f(x)$, wenn die Funktion daselbst stetig ist oder eine Unstetigkeit erster Art besitzt, oder wenn $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h))$ existiert. In einem regulären Punkte verstehen wir unter $f(x)$ stets den letztgenannten Wert.

2. Geschichtlicher Überblick. Da bei der folgenden sachlichen Anordnung der geschichtliche Gesichtspunkt in den Hintergrund gedrängt wird, bringen wir hier eine kurze Übersicht über die Entwicklung.

B. Riemann[2]) bringt durch die Einführung seines Integralbegriffs eine Vertiefung der Theorie der *Fourier*schen Reihen, besonders aber schafft er die Grundlage für eine Behandlung der allgemeinen trigono-

2) Für Literaturangaben vgl. zu *Riemann* die Literaturübersicht, zu *Cantor* Nr. **13**, zu *du Bois-Reymond* Nr. **13** u. **7**, zu *Fejér* Nr. **8**, zu *Riesz-Fischer* Nr. **10**.

metrischen Reihen. An die Arbeit *Riemanns* schließen sich die Untersuchungen von *G. Cantor* und *P. du Bois-Reymond* an.

G. Cantor beweist 1870 den *Eindeutigkeitssatz*, der aussagt, daß eine Funktion, wenn überhaupt, nur auf eine einzige Weise im Intervalle $\langle -\pi, +\pi \rangle$ durch eine konvergente trigonometrische Reihe darstellbar ist. Die Bestrebungen, dieses Ergebnis unter Zulassung gewisser Ausnahmepunkte zu erweitern, führten *Cantor* zu seinen mengentheoretischen Untersuchungen und Begriffsbildungen.

P. du Bois-Reymond zeigt 1875 in Erweiterung eines Resultates von *G. Ascoli*, daß eine konvergente trigonometrische Reihe, die in $\langle -\pi, +\pi \rangle$ eine Funktion der Klasse R darstellt, eine *Fourier*sche Reihe ist. Außerdem bringt er 1873 Beispiele stetiger Funktionen, deren *Fourier*reihe nicht überall konvergiert.

L. Fejér deckt durch seine Untersuchungen über die Anwendung der arithmetischen Mittel der Partialsummen die Bedeutung der Summationsverfahren divergenter Reihen für die Theorie der *Fourier*schen Reihen auf.

H. Lebesgue gibt 1901 den für eine einheitliche Theorie der trigonometrischen Reihen grundlegenden Integralbegriff, der u. a. gestattet, den obigen Satz von *du Bois-Reymond* statt für Funktionen der Klasse R für beschränkte Funktionen auszusprechen, und den *Riesz-Fischer*schen Satz ermöglicht (vgl. Nr. **10**).

I. Fouriersche Reihen.

3. Fourierkoeffizienten. Es sei $f(x)$ in (α, β) eine Funktion der Klasse L. Dann ist für stetig wachsendes μ

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{\cos}{\sin} \mu x \, dx = 0. \tag{1}$$

Wir bezeichnen diesen Satz als das *Riemann-Lebesgue*sche[3]) Fundamentallemma.[4]) Insbesondere folgt: Die *Fourier*koeffizienten a_n, b_n einer Funktion der Klasse L konvergieren mit wachsendem n nach Null.

Daß der Satz für nicht absolut integrierbare Funktionen nicht zu gelten braucht, hat schon *Riemann* durch Beispiele gezeigt.[4a])

---

3) *B. Riemann,* l. c. p. 253—255, für Funktionen der Klasse L, *H. Lebesgue* Ann. Éc. Norm. (3) 20 (1903), p. 453—485, speziell p. 473; Leçons, p. 61.

4) Für hierher gehörige Fragen über gleichmäßige Konvergenz in bezug auf einen Parameter vgl. *E. W. Hobson,* London math. Soc. Proc. (2) 5 (1907), p. 275—289. Vgl. auch *de la Vallée Poussin,* Cours II, p. 142.

4a) Vgl. hierzu *E. C. Titchmarsh,* London math. Soc. Proc. (2) 22 (1923), p. III—IV (Juni).

Unter spezielleren Voraussetzungen ergibt sich:

a) Gehört $f(x)$ zur Klasse L^2, dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{2}$$

konvergent.[5]) Vgl. Nr. 9.

b) Ist $f(x)$ von beschränkter Schwankung, so bleiben na_n und nb_n beschränkt.[6])

c) Besitzt die periodische Funktion $f(x)$ eine r^{te} Ableitung mit dem Stetigkeitsmaß $\omega_r(\delta)$, so ist[7])

$$\begin{vmatrix} a_n \\ b_n \end{vmatrix} \leq \frac{2}{\pi n^r}\, \omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{3}$$

Genügt speziell $f(x)$ für jedes x einer *Lipschitz*bedingung mit festen C und α, ist also

$$|f(x+\delta) - f(x)| < C\,|\delta|^{\alpha}, \qquad (0 < \alpha \leqq 1) \tag{4}$$

so ist

$$\begin{vmatrix} a_n \\ b_n \end{vmatrix} < \frac{2C\pi^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}. \tag{5}$$

Für $\alpha = 1$ hat man aber nach einer Bemerkung von *Fatou*[8]) das weitergehende Resultat

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} nb_n = 0, \tag{6}$$

und es folgt sogar die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2), \tag{7}$$

während für $\alpha < 1$ nach *Hardy*[9]) noch die Konvergenz der Reihe

5) Der Exponent 2 kann, wie Beispiele zeigen, auch bei der Klasse $\mathfrak{F}_{st}$ nicht erniedrigt werden, *T. Carleman*, Acta Math. 41 (1918), p. 377—384; *E. Landau*, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 147—153. Vgl. auch *H. Steinhaus*, London math. Soc. Proc. (2) 19 (1921), p. 273—275; *O. Szász*, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 222—236. Das weitestgehende Resultat in dieser Richtung gibt *T. H. Gronwall*, Am. math. Soc. Bull. 27 (1921), p. 320—321.

6) *F. Riesz*, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 312—315, zeigt durch ein Beispiel, daß sogar bei einer stetigen Funktion beschränkter Schwankung na_n und nb_n nicht notwendig gegen Null gehen. Dagegen ist nach *L. Neder*, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 270—273 umgekehrt eine Funktion beschränkter Schwankung, bei der

$$n(|a_n| + |b_n|) \to 0,$$

notwendig stetig. Wegen anderer Fragen über die Größenordnung der Koeffizienten vgl. *W. H. Young*, Roy. Soc. Proc. A. 93 (1917), p. 42—55 u. p. 455—467.

7) *H. Lebesgue*, Soc. math. France Bull. 38 (1910), p. 184—210, spez. p. 190ff. Vgl. auch *de la Vallée Poussin*, Leçons, p. 16.

8) *P. Fatou*, Acta Math. 30 (1906), p. 335—400, spez. p. 388.

9) *G. H. Hardy*, Am. math. Soc. Trans. 17 (1916), p. 301—325, spez. p. 321. Vgl. auch *W. H. Young*, Roy. Soc. Proc. A. 85 (1911), p. 415—430 und 87 (1912), p. 217—224.

(8) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2(\alpha-\varepsilon)}(a_n^2 + b_n^2)$$

folgt, wenn ε beliebig positiv ist. Weitergehende Resultate bringt *O. Szász*[9a]).

Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten positiver harmonischer Funktionen und die eng damit zusammenhängenden Fragen nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die *Fourier*koeffizienten beschränkter, monotoner[10a]), R integrierbarer[10b]) Funktionen vgl. *L. Bieberbach,* II C 4, p. 500ff.; über das asymptotische Verhalten der *Fourier*koeffizienten für gewisse Funktionenklassen vgl. ebenda p. 471—472.

4. Konvergenz der Fourierschen Reihe. Die Funktionen $\cos nx$, $\sin nx$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ bilden im Bereiche der stetigen Funktionen ein in $\langle -\pi, +\pi \rangle$ abgeschlossenes System[11]), d. h. es gibt keine nicht identisch verschwindende Funktion der Klasse $\mathfrak{F}_{st}$, deren *Fourier*koeffizienten sämtlich Null sind, oder: Zwei verschiedene stetige Funktionen haben verschiedene *Fourier*reihen. Daraus folgt unmittelbar[12]): Jede in $\langle -\pi, +\pi \rangle$ stetige Funktion, deren *Fourier*reihe daselbst gleichmäßig konvergiert, wird durch diese Reihe dargestellt. Dieses gilt z. B., wenn in (3) $r \geqq 2$ ist. Es genügt aber, und zwar auch noch für absolute Konvergenz, viel weniger, z. B. daß die Funktion stetig sei, und eine stückweise stetige Ableitung besitze.[13]) Vgl. Nr. 3.

Zu weitergehenden Ergebnissen kommt man, indem man in Anschluß an *L. Dirichlet* (vgl. *H. Burkhardt,* II A 12, p. 1036 u. 1043) von

(9) $$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1) \frac{t-x}{2} \, dt}{\sin \frac{t-x}{2}}$$

9a) *O. Szász,* Münch. Sitzungsb. 1922, p. 135—154.

10) *C. Carathéodory,* a) Berl. Sitzungsb. 1920, p. 559—573, ferner: b) Math. Ztschr. 1 (1918), p. 309—320.

11) Besonders einfach bewiesen bei *Lebesgue,* Leçons, p. 37—38.

12) Vgl. hierzu etwa *A. Kneser,* Math. Ann. 58 (1903), p. 81—147.

13) *Ch.-J. de la Vallée Poussin,* Ann. Soc. sc. Brux. 17 B (1893), p. 18—34, spez. 33f. Hierzu *M. Bôcher,* Ann. of Math. (2) 7 (1905—6), p. 81—152, insbes. p. 108. Vgl. ferner *A. Pringsheim,* Münch. Sitzungsb. 30 (1900) p. 37—100, spez. p. 54—68.

ausgeht und untersucht[14]), wann

(10) $$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = S$$

existiert. Es sei

(11) $$\varphi(t) = f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2S,$$

wo S zunächst beliebig. Dann ist

(12) $$s_n(x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \frac{\sin(2n + 1)t}{\sin t} dt.$$

Vermittels des *Riemann-Lebesgue*schen Fundamentallemmas ergibt sich daraus als notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der *Fourier*reihe im Punkte x gegen den Grenzwert S

(13) $$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) \frac{\sin \mu \pi t}{t} dt = 0,$$

wo ε eine beliebig klein wählbare, feste, positive Zahl ist.[14a]) Hieraus folgt der berühmte, nach *Riemann* benannte Satz[15]): Die Konvergenz und der Wert der *Fourier*reihe einer Funktion in einem Punkte x hängt nur von dem Verhalten der Funktion in der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Punktes ab.

Wir machen nun im folgenden die Voraussetzung, daß der betrachtete Punkt x ein regulärer[16]) sei. (Vgl. Nr. 1.) Dann erhält man für die Konvergenz der *Fourier*reihe nach dem Werte[17])

(14) $$S = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}(f(x + h) + f(x - h)) = f(x)$$

die hinreichenden Kriterien:

a) $\frac{|\varphi(t)|}{t}$ sei integrierbar (*Dini*)[18]). Dieser Satz ergibt sich aus (13) unter nochmaliger Heranziehung des *Riemann-Lebesgue*schen Lemmas.

b) $|f(x + \delta) - f(x)| < C|\delta|^{\alpha}$ ($\alpha > 0$ und $C > 0$ sind die Kon-

---

14) Bezüglich weiterer Ausführungen vgl. *de la Vallée Poussin,* Cours II, p. 143f.

14a) *P. du Bois-Reymond* und *G. H. Hardy,* l. c. 45), untersuchen

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{f(t) \sin \mu \pi t}{t} dt,$$

wenn sich $f(t)$ in $t = 0$ in bestimmter Weise singulär verhält.

15) Bei *Riemann* wird der Satz p. 253 nicht für *Fourier*reihen, sondern für allgemeine trigonometrische Reihen ausgesprochen.

16) In den Kriterien b) und c) ist diese Voraussetzung von selbst enthalten.

17) Dieser Wert von S ist in (11) einzuführen.

18) *U. Dini,* Serie di Fourier etc., Pisa 1880, p. 102.

stanten der *Lipschitz*-Bedingung) (*Lipschitz*[19])). Dieses Kriterium ist ein Spezialfall des vorhergehenden. Insbesondere ist diese Bedingung erfüllt, wenn $f(x)$ im Punkte x einmal differenzierbar ist.

c) $f(x)$ sei in der Umgebung von x von beschränkter Schwankung. Dies Kriterium erhält *Jordan*[20]) aus (13) als Erweiterung der bekannten *Dirichlet*schen Bedingungen (vgl. *H. Burkhardt* II A 12, p. 1036 und 1043) durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

Diese klassischen Kriterien sind in den beiden folgenden enthalten.

1. Es sei

$$G(h) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x+t)\,dt \tag{15}$$

als Funktion von h von beschränkter Schwankung. Dann konvergiert die *Fourier*reihe im Punkte x nach

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x+t)\,dt \tag{16}$$

(*de la Vallée Poussin*[21])). Dieser Satz[22]) ergibt sich aus (13) durch partielle Integration unter Heranziehung des zweiten Mittelwertsatzes.

---

19) *R. O. Lipschitz,* J. f. Math. 63 (1864), p. 296—308. Bei der von *Lipschitz* gegebenen Ableitung wird vorausgesetzt, daß die Bedingung für alle x eines Intervalles erfüllt sei, so daß man also eine hinreichende Bedingung für gleichmäßige Konvergenz erhält. Betreffs Würdigung der *Lipschitz*schen Bedingung vgl. *E. Phragmén* bei *G. Mittag-Leffler,* Acta Math. 24 (1900), p. 205—244, spez. p. 230f. und insbes. p. 232 Anm.

20) *C. Jordan,* Paris C. R. 92 (1881), p. 228—230.

21) *Ch.-J. de la Vallée Poussin,* Palermo Rend. 31 (1911), p. 296—299; *W. H. Young,* London math. Soc. Proc. (2) 10 (1912), p. 254—272 führt die Untersuchung der *Fourier*reihe von $f(x)$ auf die der *Fourier*reihe von

$$\Phi(h) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\int_{-h}^{+h} f(x+t)\,dt$$

zurück und erhält durch diesen bedeutsamen Kunstgriff einen neuen Beweis und Verallgemeinerungen des obigen Satzes von *de la Vallée Poussin,* p. 266—267. Im wesentlichen dasselbe Kriterium wie *de la Vallée Poussin* gibt schon *P. du Bois-Reymond,* Paris C. R. 92 (1881), p. 915—918, 962—964. Vgl. auch *T. Brodén,* Math. Ann. 52 (1899), p. 177—227, spez. p. 213f.

22) Dieses Kriterium umfaßt nicht das von *W. H. Young,* Paris C. R. 163 (1916), p. 187—190 und l. c. 106), erste Arbeit, p. 206 gegebene Kriterium:

$$\frac{1}{h}\int_0^h |d\,[t\,(f(x+t)+f(x-t))]|$$

2. Es sei für ein bestimmtes S

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} |\varphi(t)|\, dt = 0 \tag{17}$$

und

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)|}{t}\, dt = 0, \tag{18}$$

ε konstant $> \delta$, dann konvergiert die *Fourier*reihe im Punkte x nach dem in diesem Falle stets existierenden Grenzwert (16) (*Lebesgue*[23])). Dieser Satz wird erhalten, indem man (13) durch die unter der Voraussetzung von (17) damit äquivalente Bedingung[24])

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{\varphi(t+\delta) - \varphi(t)}{t} \sin \frac{\pi t}{\delta}\, dt = 0 \tag{19}$$

ersetzt.

Aus (17) allein folgt nach (12) für das betrachtete x

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n(x)}{\log n} = 0. \tag{20}$$

Es besteht also, da (17) fast überall erfüllt ist, (20) fast überall.[25])

Das *Lebesgue*sche Kriterium umfaßt[26]) alle vorhergehenden Bedingungen, außerdem aber auch noch das klassische sogenannte *Lipschitz-Dini*sche Kriterium[27]), das seinem Charakter nach ein Kriterium für gleichmäßige Konvergenz ist, nämlich:

---

sei beschränkt und x etwa ein regulärer Punkt. Dieses umfaßt aber seinerseits keines der hier angeführten Kriterien außer c). Vgl. hierzu *G. H. Hardy*, l. c. 26). Vgl. ferner zum Teil für Verallgemeinerungen *W. H. Young*, Paris C. R. 163 (1916), p. 427—430 und p. 975—978; 164 (1917), p. 82—85 und p. 267—270, und l. c. 21).

23) *H. Lebesgue*, Math. Ann. 61 (1905), p. 251—280, insbes. p. 263; Leçons, p. 59 ff.; *de la Vallée Poussin*, Cours II, p. 145 u. 150 gibt auch Verallgemeinerungen.

24) Aus verwandten Umformungen hervorgehende Kriterien geben *L. Kronecker*, Berl. Sitzungsb. 1885, p. 641—656; *O. Hölder*, ebenda, p. 419—434; *T. Brodén*, l. c. 21).

25) *G. H. Hardy*, London math. Soc. Proc. (2) 12 (1913), p. 365—372, spez. p. 369. Dasselbe beweist *W. H. Young*, London math. Soc. Proc. (2) 13 (1913), p. 13—28, für die formale Ableitung der *Fourier*reihe einer Funktion beschränkter Schwankung. Für eine Vertiefung vgl. auch *G. H. Hardy*, Messenger, Nr. 550, 46 (1917), p. 146—149.

26) Eine genaue vergleichende Analyse der Tragweite der verschiedenen Kriterien gibt *G. H. Hardy*, Messenger, Nr. 586, 49 (1920), p. 149—155.

27) *U. Dini*, l. c. p. 102. Vgl. auch *G. Faber*, Math. Ann. 69 (1910), p. 372 bis 443 spez. § 5. *Faber* l. c. § 6 und *Lebesgue* l. c. 7), p. 206—208 zeigen durch Beispiele, daß die obige Bedingung nicht durch

$$|f(x+\delta) - f(x)| \log \frac{1}{|\delta|} < C$$

ersetzt werden kann.

Konvergiert im Intervalle $\rangle a, b\langle$

$$|f(x+\delta)-f(x)|\log\frac{1}{|\delta|}$$

gleichmäßig mit δ nach Null, dann konvergiert die *Fourier*reihe in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

Kriterien anderer Art sind die folgenden:

Sind na_n und nb_n beschränkt oder konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2+b_n^2),$$

dann ergeben sich als notwendige und hinreichende Bedingungen[28]) für die Konvergenz der *Fourier*reihe im Punkte x, daß der Grenzwert (16) existiere oder daß die Reihe durch arithmetische Mittel irgendwelcher Ordnung oder sogar nur nach der *Poisson*schen Methode (vgl. Nr. 8) summierbar sei. Umfassendere Resultate in dieser Richtung gibt *Neder*[28a]). Wegen anderer Kriterien vgl. *Young* und *Noaillon*[29]).

5. Die konjugierte Reihe. Es sei formal

$$S=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{21}$$

$$\bar S=\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nx-a_n\sin nx) \tag{22}$$

und

$$S-i\bar S=\frac{a_0-ib_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)e^{inx} \tag{23}$$

also $S-i\bar S$ formal die Potenzreihe $\frac{a_0-ib_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n$ auf dem Einheitskreise $z=e^{ix}$. $\bar S$ heißt die konjugierte trigonometrische Reihe

28) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* London math. Soc. Proc. (2) 18 (1918), p. 205—235, spez. p. 229 u. 233; auch *P. Fatou,* l. c. 8) p. 345—347, 385 bis 387 und *L. Fejér,* Paris C. R. 156 (1913), p. 46—49, ferner Festschrift für *H. A. Schwarz* 1914, p. 42—53. Insbesondere folgt nach *G. H. Hardy*, London math. Soc. Proc. (2) 8 (1909), p. 301—320 aus dem *Fejér*schen Satze über die Summation durch arithmetische Mittel (vgl. Nr. 8) vermittelst eines l. c. von *Hardy* gegebenen allgemeinen Reihensatzes (vgl. *L. Bieberbach*, II C 4, p. 482), das Kriterium c). Vgl. hierzu auch *de la Vallée Poussin,* Cours II, p. 162 und für das Kriterium a) *S. Pollard,* London math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 336—339. Vgl. auch die Ausführungen bei *L. Bieberbach,* II C 4, p. 482—484, spez. die Anm. 248), 249), 253), 254).

28a) *L. Neder* in einer demnächst in den London math. Soc. Proc. erscheinenden Arbeit.

29) *W. H. Young,* l. c. 21) und 22); *P. Noaillon*, Ac. Belg. Bull. sc. 1913, p. 524—541.

von S, $\bar{S}$ und $-\bar{S}$ nennen wir die Komponenten der Potenzreihe auf dem Einheitskreis.

Es entsteht nun die Frage: Was kann man über $\bar{S}$ aussagen, wenn man die Eigenschaften von S kennt, namentlich wenn S die *Fourier*reihe einer Funktion $f(x)$ ist? In diesem Falle ist[30])

$$(24) \qquad \bar{s}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kx - a_k \sin kx)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x-t)) \left(\cot \frac{t}{2} - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \right) dt.\text{[31])}$$

Konvergiert also

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|}{t} \, dt\text{[32])},$$

so konvergiert die konjugierte trigonometrische Reihe, und es ist

$$(25) \qquad \bar{S} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} (f(x+t) - f(x-t)) \cot \frac{t}{2} \, dt;$$

ist $f(x)$ in der Umgebung von x von beschränkter Schwankung, so ist[33]) die Existenz des Grenzwertes in (25) notwendig und hinreichend für die Konvergenz der konjugierten Reihe.[34])

Aus (24) schließt *Pringsheim*[35]): An einer Sprungstelle von $f(x)$ ist die konjugierte Reihe eigentlich divergent. Hierüber hinaus zeigt *F. Lukács*[36]):

Gehört $f(x)$ zur Klasse L und existiert an der Stelle x der Grenzwert

$$(26) \qquad D_x = \lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x-h)),$$

so ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{s}_n(x)}{\log n} = \frac{D_x}{\pi}.$$

---

30) *A. Tauber,* Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 79—118; *A. Pringsheim,* l. c. 13), p. 79—100.

31) Die *Konvergenz* der konjugierten Reihe hängt also wieder nur von dem Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung von x ab, dagegen der Wert im Gegensatz zur Reihe S von der Gesamtheit der Werte $f(x)$ in $\langle -\pi, +\pi \rangle$.

32) *A. Pringsheim,* l. c. 13), p. 87.

33) *W. H. Young,* Münch. Sitzungsb. 41 (1911), p. 361—371.

34) Für weitere Konvergenzkriterien vgl. *Pringsheim,* l. c.; *Young,* l. c. Außerdem *Young,* l. c. 21) und London math. Soc. Proc. (2) 12 (1913), p. 433 bis 452.

35) l. c., p. 87.

36) *F. Lukács,* J. f. Math. 150 (1920), 107—112. Vgl. auch *L. Fejér,* J. f. Math. 142 (1913), p. 165—188 und *W. H. Young,* l. c. 38, letzte Arbeit.

Dasselbe gilt allgemeiner, wenn eine Zahl D_x existiert, welche der Gleichung

$$(27) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x-t) - D_x| \, dt$$

genügt. Da es nach *Lebesgue* fast überall eine solche Zahl D_x gibt, und diese sogar fast überall Null ist, so folgt:

Für eine beliebige Funktion $f(x)$ aus L ist fast überall[37])

$$(28) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\bar{s}_n(x)}{\log n} = 0.$$

6. Gleichmäßige Konvergenz und absolute Konvergenz. Schon am Anfang von Nr. 4 fanden wir hinreichende Bedingungen für die absolute und gleichmäßige Konvergenz einer *Fourier*reihe. Auch in dem *Lipschitz-Dini*schen Kriterium hatten wir eine hinreichende Bedingung für gleichmäßige Konvergenz. Eine solche haben wir auch entsprechend dem *Jordan*schen Kriterium c) in einem Intervall $\langle a, b \rangle$, wenn $f(x)$ in $\rangle a, b \langle$ stetig und von beschränkter Schwankung ist.[38]) Die anderen Kriterien hatten wir als Bedingung für die Konvergenz in einem Punkte ausgesprochen. Wie *Fatou*[39]) bemerkte, erhält man aus diesen Kriterien hinreichende Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz in einem Intervalle $\langle a, b \rangle$, wenn die Bedingungen für das Intervall $\rangle a, b \langle$ gleichmäßig erfüllt sind, wobei der Sinn von „gleichmäßig" sich in jedem einzelnen Falle leicht festlegen läßt.

Für stetige Potenzreihen[40]) gilt nach *L. Fejér* der Satz: Aus der gleichmäßigen Konvergenz der einen Komponente auf dem ganzen Kreis folgt die gleichmäßige Konvergenz der anderen Komponente.[41]) Tiefer liegt der Satz: Die konjugierte Reihe einer gleichmäßig konvergenten trigonometrischen Reihe konvergiert fast überall.[42])

---

37) *W. H. Young*, l. c. 34), letzte Arbeit, p. 433 Fußnote. Vgl. auch den entprechenden Satz in Formel (20) von *G. H. Hardy*.

38) Vgl. dazu neben *C. Jordan*, l. c. 20) auch *G. Faber*, l. c. 27), § 5.

39) *P. Fatou*, Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 158. Vgl. auch *Lebesgue*, Leçons, p. 62; *E. W. Hobson*, l. c. 4) und *de la Vallée Poussin*, Cours II, p. 142.

40) Eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius mindestens 1 ist und deren Summe für $|z| < 1$ so ergänzt werden kann, daß sie für $|z| \leq 1$ stetig ist, nennen wir eine *stetige Potenzreihe*.

41) Dieses ergibt sich aus dem folgenden Satze, den *L. Fejér* vermittels eines Satzes von *S. Bernstein* (vgl. Anm. 174) gewonnen hat. Konvergiert eine trigonometrische Reihe gleichmäßig, so konvergiert für ihre konjugierte Reihe der Unterschied zwischen dem n^{ten} Mittel erster Ordnung und der n^{ten} Partialsumme gleichmäßig gegen Null, *L. Fejér*, J. f. Math. 144 (1914), p. 48—56. Die entsprechenden Sätze für einen Kreisbogen beweist *M. Riesz*, Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 354—368, spez. p. 366.

42) *L. Fejér*, l. c. 41), p. 56.

Für die Frage absoluter Konvergenz gibt *S. Bernstein*[43]) den Satz: Genügt die stetige Funktion $f(x)$ überall einer *Lipschitz*-Bedingung mit konstantem C und $\alpha > \frac{1}{2}$, dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

konvergent (vgl. hierzu (8)). Für jedes $\alpha < \frac{1}{2}$ gibt es Funktionen mit nicht absolut konvergenter *Fourier*reihe.[44])

7. Verschiedene Konvergenz- und Divergenzerscheinungen. Wie schon in der Einleitung erwähnt, gibt *du Bois-Reymond*[45]) das erste Beispiel[46]) einer stetigen Funktion, deren *Fourier*entwicklung in einem Punkte divergiert, da ihre Partialsummen dort nicht beschränkt sind. In allgemeiner Weise nimmt dann *Lebesgue*[47]) diese Frage auf und gibt ein Prinzip zur Konstruktion nicht nur solcher stetiger Funktionen, deren *Fourier*reihe in einem Punkte a divergiert, sondern auch solcher, deren *Fourier*reihe zwar überall, aber in der Umgebung eines Punktes a nicht gleichmäßig konvergiert. Im ersten Falle hat die Reihe nach *Fejérs*[48]) Bezeichnung im Punkte a eine *du Bois-Reymond*sche, im zweiten Falle eine *Lebesgue*sche Singularität. Das Auftreten beider Arten von Singularitäten folgt nach *Lebesgue* wesentlich aus der Tatsache, daß die Zahlen[49])

43) *S. Bernstein,* Paris C. R. 158 (1914), p. 1661—1663. Ferner Math.-Ver. Kharkoff 14 (1914), p. 139—144, (1915), p. 200—201; allgemeinere Resultate bei *O. Szász*, l. c. 9a).

44) Beispiele ausnahmslos und gleichmäßig, aber nicht absolut konvergenter Potenzreihen geben *G. H. Hardy* und *M. Riesz* bei *Hardy,* Quart. J. 44 (1913), p. 147—160, spez. p. 157—160; vgl. hierzu auch *E. Fabry,* Acta math. 36 (1913), p. 69—104, spez. p. 103 und *G. H. Hardy*, l. c. 9), p. 322. Ferner *L. Fejér,* Münch. Sitzungsb. (1917), p. 33—50, spez. p. 49; *L. Neder,* Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen, Diss. Gött. 1919 (45 S.), spez. p. 44—45; *O. Szász,* Math. Ztschr. 8 (1920), p. 222—236; vgl. auch *A. Pringsheim,* Math. Ann. 25 (1885), p. 419—426, spez. p. 424 und hierzu *H. Steinhaus,* Krak. Anz. 1918, p. 153—160.

45) *P. du Bois-Reymond*, Gött. Nachr. 1873, p. 571—584, Münch. Abh. 12 (1876) II, p. I—XXIII und p. 1—103. Vgl. zu dieser Arbeit *G. H. Hardy,* Quart. J. M. 44 (1912/13), p. 1—40, p. 242—263.

46) Ein einfacheres Beispiel gibt *H. A. Schwarz* bei *A. Sachse*, Ztschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 271f.

47) *H. Lebesgue,* Paris C. R. 141 (1905), p. 875—877; Leçons, p. 84—89. Vgl. auch Toulouse Ann. (3) 1 (1909), p. 25—117, insbes. p. 25—27.

48) *L. Fejér,* Paris C. R. 150 (1910), p. 518—520.

49) ϱ_n ist das Maximum bzw. die obere Grenze der $|s_n(x)|$ an irgendeiner Stelle x für die Gesamtheit der einfach unstetigen bzw. stetigen Funktionen $|f(x)| \leq 1$. Vgl. für das Analoge bei Potenzreihen *L. Bieberbach*, II C 4, p. 505 und *L. Neder,* Math. Ztschr. 11 (1921), p. 115—123, insbes. für *Fourier*reihen p. 116, Anm. 3.

$$(29) \qquad \varrho_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

die sogenannten *Lebesgue*schen Konstanten,[50]) mit n über alle Grenzen wachsen. An diesen Gedankengang von *Lebesgue* anschließend gibt *Fejér*[51]) besonders schöne Beispiele von *Fourier*reihen mit *du Bois-Reymond*scher Singularität, wobei auch die Koeffizienten einfachen Gesetzen gehorchen. Er gibt außerdem das erste Beispiel[52]) einer stetigen Potenzreihe, die in einem Punkte des Einheitskreises divergiert.

Allgemein gilt nach *Fejér* für stetige Potenzreihen als Folge seines über die Komponenten einer solchen Reihe gegebenen Satzes[41]) folgendes Theorem[53]): Hat die eine Reihe in einem Punkte des Einheitskreises eine der beiden Singularitäten, so tritt in demselben Punkte die eine der beiden Singularitäten auch bei der anderen Reihe auf. *Fejér* zeigt durch Beispiele[54]), daß die drei hier denkbaren Fälle auch wirklich auftreten können.

Nach einem Versuch von *du Bois-Reymond*[55]) bildet *Fejér*[56]) Beispiele stetiger Funktionen, deren *Fourier*reihe in mindestens abzähl-

---

50) *L. Fejér,* J. f. Math. 138 (1910), p. 22—53. *Fejér* zeigt, daß

$$\varrho_n = \frac{4}{\pi^2}\left(\log n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{\alpha_n}{n^2}\right),$$

wobei $|\alpha_n|$ beschränkt ist. Hieraus folgt, daß die ϱ_n für große n monoton wachsen. In der Arbeit Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 63—103, welche eine Zusammenstellung der früheren Arbeiten und der darin erzielten Resultate bringt, drückt *Fejér* p. 99f. ϱ_n durch eine endliche Summe aus. Davon ausgehend beweist *T. H. Gronwall,* Math. Ann. 72 (1912), p. 244—261; Ann. of Math. (2) 15 (1913—1914), p. 125—128 die von *Fejér* vermutete Tatsache, daß die ϱ_n von Beginn an wachsen. Noch mehr beweist *G. Szegö,* Math. Ztschr. 9 (1921), p. 163—166.

51) *L. Fejér,* l. c. 41), 44), 48), 50), ferner a) J. f. Math. 137 (1909), p. 1—5; b) Palermo Rend. 28 (1909), p. 402—404; c) Münch. Sitzungsb. (1917), p. 33—50; d) Monatsh. Math. Phys. 28 (1917), p. 64—76. Betreffs eines anderen Vorteils dieser Beispiele (starkes Anwachsen gewisser s_n) vgl. *G. H. Hardy,* l. c. 25), erste Arbeit, p. 371—372. Gleichzeitig gibt *G. Faber,* l. c. 27), § 6 Beispiele mit einem Divergenzpunkte, mit überall dichten Divergenzpunkten, mit einem Punkte ungleichmäßiger Konvergenz.

52) *L. Fejér,* Münch. Sitzungsb. 1910, 3. Abh., p. 1—17.

53) Diese allgemeine Fassung folgt aus dem l. c. 41) erwähnten Satze von *M. Riesz.*

54) Vgl. l. c. 51), c), p. 44f.

55) *P. du Bois-Reymond,* l. c. 45), p. 100—102; vgl. *Neders* Einwand, Deutsch. Math.-Ver. (1922), p. 153—155. Die Anregung zur Bildung solcher Reihen stammt von *Weierstraß,* vgl. Berlin Math. Ges. Sitzungsb. 9 (1910), p. 53—56, spez. p. 56.

bar vielen überall dichtliegenden Punkten nicht beschränkte Partialsummen[57]) haben. *Steinhaus* und *Neder*[58]) geben Beispiele von *Fourier*reihen stetiger Funktionen bzw. stetiger Potenzreihen mit genau abzählbar vielen überall dichtliegenden Divergenzstellen. Ein Beispiel einer stetigen Funktion, deren *Fourier*reihe ausnahmslos, aber in keinem Intervalle gleichmäßig konvergiert, gibt *Steinhaus*, die entsprechende Potenzreihe *Neder*[59]). *A. Kolmogoroff*[59a]) gibt neuerdings das Beispiel einer Funktion der Klasse L, deren *Fourier*reihe fast überall divergiert.

Eine besondere Konvergenzeigentümlichkeit ist noch die *Gibbs*sche Erscheinung. Es habe $f(x)$ im Punkte a eine Sprungstelle, sei aber sonst im Intervalle $\langle -\pi, +\pi \rangle$ stetig und von beschränkter Schwankung. Dann besitzt $s_n(x)$ in der Nähe der Sprungstelle Maxima und Minima, deren Genzwerte für $n \to \infty$ aus dem Intervall $\langle f(a-0), f(a+0) \rangle$ heraustreten. Genauer gesagt, die die Partialsummen darstellenden Kurven nähern sich gleichmäßig einer Kurve C, die für $-\pi \leqq x < a$, $a < x \leqq \pi$ $y = f(x)$ darstellt und außerdem aus der geradlinigen Strecke mit den Endpunkten

$$x = a, \qquad y = f(a \mp 0) \pm \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

besteht, so daß also diese Strecke über die von der Kurve $y = f(x)$ aus der Geraden $x = a$ ausgeschnittene Strecke auf jeder Seite um etwa 9% der letzteren herausragt. Diese Tatsache wird nach *Gibbs*[60]), der sie wieder entdeckte (vgl. *H. Burkhardt*, II A 12, p. 1049) als *Gibbs*sche Erscheinung[61]) bezeichnet. Allgemein ergibt sie sich durch

56) *L. Fejér*, l. c. 52); hier auch für Potenzreihen.

57) Nach *H. Steinhaus* bei *Neder*, Diss. l. c. 44), p. 26f. gilt aber, wenn die Partialsummen in einer überall dichten Menge nicht beschränkt sind, das gleiche in einer Menge, die in jedem Intervalle dem Kontinuum äquivalent ist. *Neder* gibt l. c. p. 25ff. u. a. auch Beispiele, in denen die Partialsummen in einer perfekten, nirgends dichten Nullmenge nicht beschränkt sind, während die Reihe sonst überall konvergiert.

58) *H. Steinhaus*, Krak. Anz. 1919, p. 123—141 und *L. Neder*, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 262—269.

59) *H. Steinhaus*, Krak. Anz. 1912, p. 145—160; vgl. auch *L. Neder*, Diss. p. 35ff., hier auch für Potenzreihen; ferner l. c. 58), p. 267ff. *J. Pál*, Paris C. R. 158 (1914), p. 101—103 zeigt, daß es zu jeder Funktion der Klasse $\mathfrak{F}_{st}$ eine eineindeutig stetige Transformation $\mu(x)$ gibt, sodaß die *Fourier*reihe von $f(\mu(x))$ gleichmäßig konvergiert.

59a) *A. Kolmogoroff*, Fund. Math. 4 (1923), p. 324—328.

60) *W. Gibbs*, Nature 59 (1898), p. 606.

61) *C. Runge*, Theorie und Praxis der Reihen (1904), p. 170—180; *M. Bôcher*, l. c. 13), p. 123ff.; ferner J. f. Math. 144 (1914), p. 41—47. Vgl. ferner *T. H.*

Zurückführung auf eine spezielle Reihe, etwa auf die Reihe[61a])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Bei Benützung der arithmetischen Mittel erster Ordnung (vgl. Nr. 8) tritt jedoch die *Gibbs*sche Erscheinung nicht auf[62]), da dieselben, wie dort bemerkt wird, immer zwischen der oberen und unteren Grenze der Funktion verlaufen. Für arithmetische Mittel von kleinerer als erster Ordnung beweist *Cramér*[63]) die Existenz einer Zahl k $(0 < k < 1)$, derartig, daß für Summation von niedrigerer als der k^{ten} Ordnung die *Gibbs*sche Erscheinung auftritt, für solche höherer Ordnung dagegen nicht.

8. Summationsverfahren. 1. *Arithmetische Mittel.* Die Existenz divergenter *Fourier*reihen führt zur Aufgabe, aus einer divergenten Reihe die erzeugende Funktion zu finden, d. h. diejenige Funktion, deren *Fourier*koeffizienten die Koeffizienten der Reihe sind. Dazu dienen die Summationsverfahren, deren wichtigste die von *Poisson*, *Riemann* und *Fejér* sind. Wir beginnen mit dem *Fejér*schen Summationsverfahren, welches zeitlich das jüngste ist, aber die Bedeutung der Summation für die Theorie der *Fourier*reihe zum ersten Mal klar zutage treten ließ. Wir setzen

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}, \tag{30}$$

wo $s_n(x)$ in (9) definiert ist, dann erhält man

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t) + f(x-2t)) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \tag{31}$$

Dieses Integral hat vor dem in (9) gegebenen *Dirichlet*schen den Vorzug, daß der Faktor von $(f(x+2t) + f(x-2t))$ wesentlich positiv[64]) ist, so daß also der erste Mittelwertsatz statt des zweiten angewendet werden kann. Hieraus folgt

---

Gronwall, Math. Ann. 72 (1912), p. 228—243; Amer. math. Soc. Trans. 13 (1912), p. 445—468; *D. Jackson,* Palermo Rend. 32 (1911), p. 257—262; *H. S. Carslaw,* Amer. J. of math. 39 (1917), p. 185—198; *Tr. Lalesco,* Ac. Roumaine Bull. (1919 bis 1920), p. 76—81.

61a) Die n^{te} Partialsumme dieser Reihe ist für alle n und x gleichmäßig beschränkt. Zuerst bewiesen von *A. Kneser,* Math. Ann. 60 (1905), p. 402—423. Unmittelbar folgt diese Tatsache aus dem Satze in 66).

62) *L. Fejér,* Math. Ann. 64 (1907), p. 273—288, insbes. 282 ff.; Palermo Rend. 38 (1914), p. 79—97.

63) *H. Cramér,* Arkiv f. Mat. 13, Nr. 20 (1918). p. 1—21.

64) Die weitere Entwicklung zeigte allerdings, daß diese Eigenschaft die Tragweite des Summationsverfahrens nicht erschöpft.

a) Sind L und l obere und untere Schranke von $f(x)$, so ist für alle n

$$l \leqq \sigma_n(x) \leqq L.$$ [65] [66]

b) In einem regulären Punkte x (vgl. Nr. **1**) konvergieren die $\sigma_n(x)$ nach $f(x)$.

c) Die Konvergenz der Mittel gegen die Funktion ist eine gleichmäßige in jedem Intervall, das in einem Intervall enthalten ist, in dem $f(x)$ stetig ist.

Dies sind die Sätze von *Fejér*[67]. In Verallgemeinerung von b) ist nach *Hardy-Littlewood*[68] bei einer Funktion der Klasse L^2 in jedem regulären Punkte von $f(x)$ bei $s = f(x)$

$$(31^*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|s_0 - s| + |s_1 - s| + \cdots + |s_{n-1} - s|}{n} = 0$$

und sogar

$$(31^{**}) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(s_0 - s)^2 + (s_1 - s)^2 + \cdots + (s_{n-1} - s)^2}{n} = 0.$$

Aus b) ergibt sich: Wenn eine *Fourier*reihe an einer regulären Stelle konvergiert, so konvergiert sie nach $f(x)$.[68a] Divergiert eine *Fourier*reihe an einer regulären Stelle von $f(x)$, so liegt stets $f(x)$ zwischen der oberen und unteren Unbestimmtheitsgrenze der Partialsummen $s_n(x)$.[69]

Die Sätze b) und c) gelten unverändert[70] bei der Summation mit

---

65) Vertiefungen geben *A. Hurwitz,* Math. Ann. 57 (1903), p. 425—446, spez. p. 433 und *L. Fejér,* l. c. 67b) und l. c. 62) zweite Arbeit, p. 85.

66) Sind außerdem $|a_n| < \frac{A}{n}$, $|b_n| < \frac{B}{n}$, so ist $l - (A + B) < s_n(x) < L + (A + B)$, *L. Fejér,* Paris C. R. 150 (1910), p. 1299—1302. Vgl. weiter *T. H. Gronwall,* l. c. 61) zweite Arbeit und *E. Landau,* Gött. Nachr. 1917, p. 79 bis 97, spez. p. 83—84.

67) *L. Fejér,* a) Paris C. R. 131 (1900), p. 984—987, insbes. b) Math. Ann. 58 (1904), p. 51—69; vgl. auch Math. Phys. Lapok 14 (1902), p. 49—68 und p. 97 bis 123 (ung.).

68) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* Paris C. R. 156 (1913), p. 1307—1309. (31*) und (31**) gelten übrigens fast überall. Vgl. auch *L. Fejér,* l. c. 51d), spez. § 4; *M. Fekete,* Math. Term. Ért. 34 (1916), p. 759—786 (ung.) und *J. Schur,* J. f. Math. 148 (1918), p. 121—145, spez. p. 130. Eine weitgehende Verallgemeinerung gibt neuerdings *T. Carleman,* London math. Soc. Proc. (2) 21 (1923), p. 483—492.

68a) Dieses folgt auch aus allen anderen hier behandelten Summationsverfahren.

69) Vgl. hierzu *E. Hossenfelder,* Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Pr. (Nr. 40) Gymn. Straßburg, Westpr. 1899—1900.

70) Dies folgt daraus, daß die Summation (C, δ) auf ein singuläres Integral führt (vgl. *E. Hilb* und *O. Szász,* II C 11), dessen Kern zwar bei $\delta < 1$ nicht

*Cesàro*schen Mitteln δ^{ter} Ordnung (C, δ) für positive δ und bei dem gleichwertigen *M. Riesz*schen Summationsverfahren.[71]) Für eine eingehendere Erörterung der Summationsverfahren nicht ganzer Ordnung vgl. *L. Bieberbach,* II C 4, p. 477—480, ferner *Bohr-Cramér,* II C 8, p. 753f.

Gehört $f(x)$ zur Klasse L und ist für

$$(32) \qquad \varphi(t) = f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)$$

analog zu (16)

$$(33) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t)\, dt = 0,$$

so konvergieren nach *Lebesgue*[72]) die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung, nach *Young* die Mittel $(C, 1 + \delta)$ gegen $f(x)$[73]).

Ist noch

$$(34) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t)|\, dt = 0,$$

so konvergieren nach *Lebesgue*[73a]) die *Fejér*schen Mittel, nach *Hardy*[74]) die Mittel (C, δ) im Punkte x nach $f(x)$. Da (34) nach *Lebesgue* stets fast überall erfüllt ist, so findet die Summierbarkeit mit diesen Mitteln fast überall statt. Dasselbe folgt für die Funktionen der Klasse R schon aus b), da diese Funktionen fast überall stetig sind.

Daß aber für die Summierbarkeit der *Fourier*reihe einer Funktion der Klasse L durch *Fejér*sche Mittel die Bedingung (33) nicht hinreicht, zeigt *Hahn*[75]) durch ein Beispiel. Im Falle jedoch, wo $f(x)$ in der Umgebung des betrachteten x beschränkt ist, gilt der folgende

---

durchweg positiv, wie bei $\delta \geq 1$ ist, aber die l. c. angegebenen Bedingungen a), b), c) erfüllt. Für feste positive δ gilt statt des obigen Satzes a) nur: Ist $f(x)$ beschränkt, so sind die genannten Mittel gleichmäßig beschränkt.

71) *M. Riesz,* Paris C. R. 149 (1909), p. 909—912; Acta Univ. hung. Franc.-Jos. 1 (1923), p. 104—113; ferner *S. Chapman,* London math. Soc. Proc. (2) 9 (1911), p. 369—409, spez. p. 390ff. und Quart. J. M. 43 (1911), p. 1—52, spez. p. 26—37.

72) *H. Lebesgue,* l. c. 23) erste Arbeit, p. 274ff.; l. c. 47) dritte Arbeit, p. 88ff.; *P. Nalli,* Palermo Rend. 40 (1915), p. 33—37, beweist denselben Satz für nach *Denjoy* vollständig totalisierbare Funktionen (vgl. *Rosenthal,* II C 9, Nr. 35c). Vgl. auch *J. Priwaloff,* Palermo Rend. 41 (1916), p. 202—206.

73) *W. H. Young,* zeigt l. c. 21): Wenn die *Fourier*reihe von $\Phi(h)$ für $h = 0$ (C, δ) konvergiert, so konvergiert die *Fourier*reihe von $f(x)$ $(C, 1 + \delta)$. Er erhält so einen einfachen Beweis für die obigen Sätze von *Lebesgue.*

73a) l. c. 23), Math. Ann. und l. c. 47), Toulouse Ann.

74) *G. H. Hardy,* London math. Soc. Proc. (2) 12 (1913), p. 365—372.

75) *H. Hahn,* Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916/17), p. 359—366.

Satz von *Hardy* und *Littlewood*[76]): Ist $f(x)$ integrierbar und außerdem in der Umgebung von x beschränkt[77]), so ist ihre *Fourier*reihe, wenn durch arithmetische Mittel irgendeiner Ordnung, auch durch solche jeder positiven Ordnung summierbar. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Summierbarkeit ist die Existenz des Grenzwertes (16), und S ist dann die Summe der Reihe.[77a]) Für den allgemeinen Fall einer Funktion der Klasse L geben *Hardy* und *Littlewood*[77b]) als notwendige und hinreichende Bedingung für Summierbarkeit mit der Summe S durch arithmetische Mittel genügend hoher positiver Ordnung, daß

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dx_1}{x_1}\int_0^{x_1}\frac{dx_2}{x_2}\cdots\int_0^{x_{k-2}}\frac{dx_{k-1}}{x_{k-1}}\int_0^{x_{k-1}}\varphi(x_k)\,dx_k$$

für irgendeinen Wert von k mit x nach Null strebt.

Die formal abgeleitete *Fourier*reihe einer Funktion beschränkter Schwankung hat in bezug auf die Summation positiver Ordnung dieselben Eigenschaften wie die gewöhnlichen *Fourier*reihen und ist insbesondere fast überall (C, δ) bei $\delta > 0$ summierbar.[77c]) Für die Bedeutung dieser Reihenklasse vgl. insbesondere Nr. **11**, 4.

2. *Poisson*sche *Summation*[78]). Aus dem *Poisson*schen Integrale (vgl. *L. Lichtenstein,* II C 3, p. 211 ff.) folgt[79]), daß für jede integrierbare

76) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, London math. Soc. Proc. (2) 17 (1918), p. XIII—XV.

77) Statt der Beschränktheit von $f(x)$ genügt es auch, diejenige von

$$\frac{1}{2h}\int_0^h |f(x+t)+f(x-t)|\,dt$$

vorauszusetzen. Für diese Bedingung vgl. *P. Noaillon,* l. c. 29), spez. p. 534.

77a) Nach *A. F. Andersen,* Studier over Cesàros Summabilitetsmetode, Diss. Kopenhagen 1921, 100 S., spez. p. 87 f. ist hierfür die Existenz des *Poisson*schen Grenzwertes auch eine notwendige und hinreichende Bedingung.

77b) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* Math. Ztschr. 19 (1923), p. 67—96 Einen entsprechenden Satz für die konjugierte Reihe veröffentlichen die genannten Verfasser demnächst in den London math. Soc. Proc. Vgl. hierzu auch Math. Ztschr., l. c. p. 96.

77c) *W. H. Young,* l. c. 25) und 106).

78) Die *Poisson*sche Summierung wird bei Potenzreihen als *Abel*sche Summierung bezeichnet. Vgl. *L. Bieberbach,* II C 4, p. 475—487, insbes. p. 476 und p. 481 ff.

79) *P. Fatou,* l. c. 8), p. 348—349 und 373 ff; *H. Lebesgue,* l. c. 47) dritte Arbeit, p. 88; *L. Lichtenstein,* J. f. Math. 141 (1912), p. 12—42; 142 (1913), p. 189—190; *H. Hahn,* Wiener Denkschriften, Math.-Nat. Kl. 93 (1916), p. 585 bis 692, spez. p. 651—653. Vgl. auch *M. Schechter,* Monatsh. Math. Phys. 22 (1911), p. 224—234; *W. Grosz,* Wien. Ber. 124 (1915), p. 1017—1037.

Funktion

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n \tag{35}$$

für $r \to 1$ nach dem Grenzwerte (16) in jedem Punkte konvergiert, wo dieser Grenzwert existiert. Die Konvergenz ist eine gleichmäßige in jedem Intervalle, das in einem Stetigkeitsintervalle der Funktion enthalten ist. Für die Existenz des *Poisson*schen Grenzwertes der zu (35) konjugierten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)\, r^n \tag{36}$$

in einem Punkte x, in dem $f(x)$ stetig ist, oder in dem allgemeiner[79a])

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h (f(x+t) - f(x-t))\, dt = 0 \tag{36a}$$

gilt, ist notwendig und hinreichend, daß der Grenzwert in (25) existiert. Die beiden Grenzwerte sind dann einander gleich. Für gleichmäßige Konvergenz gilt entsprechendes.[80]) Nach *Pleßner*[80a]) ist die konjugierte Reihe einer Funktion der Klasse L oder allgemeiner diejenige der formalen Ableitung der *Fourier*reihe einer Funktion beschränkter Schwankung sowohl durch das *Poisson*sche Verfahren, wie auch durch arithmetische Mittel beliebiger positiver Ordnung[80b]), wie auch durch das *Riemann*sche Verfahren (Nr. **12**) fast überall summierbar.

3. *Andere Summationsmethoden.* a) Durch formale Integration der *Fourier*reihe von $f(x)$ erhält man eine gleichmäßig konvergente Reihe $F_1(x)$ (vgl. Nr. **11**). Fast überall, nämlich in allen Punkten, in denen $F_1'(x) = f(x)$ ist, oder allgemeiner, wo der Grenzwert

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} (F_1(x+h) - F_1(x-h)) \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin nh}{nh} \right) \end{aligned} \tag{37}$$

existiert, gibt die rechte Seite von (37) ein Summationsverfahren für die *Fourier*reihe.

b) Durch zweimalige Integration kommt man zu dem in Nr. **12** bei allgemeinen trigonometrischen Reihen zu besprechenden *Riemann*-

79a) Aus der Existenz des Grenzwertes (25) folgt (36a).

80) *P. Fatou*, l. c. 8), p. 358 ff.

80a) *A. Pleßner*, Mitt. d. Math. Sem. d. Univ. Gießen Bd. 1, Heft 10 (1923), p. 1—36. Vgl. auch *P. Fatou*, l. c. 8), p. 373—375 und *J. Priwaloff*, Paris C. R. 165 (1917), p. 96—99.

80b) l. c. nur für Mittel 1. Ordnung, allgemein nach schriftlicher Mitteilung.

schen Summationsverfahren, das überall anwendbar ist, wo die ursprüngliche Reihe konvergiert.[80c]

c) *De la Vallée Poussin*[81] bildet die endliche trigonometrische Summe

$$(38)\quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

dann gibt $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ ein Summationsverfahren, das ebenso wie das *Poisson*sche[82] allgemeiner ist als das der arithmetischen Mittel irgendwelcher Ordnung[83][84].

9. Die Besselsche Ungleichung und der Parsevalsche Satz.[85] Die Summationsmethoden finden eine wichtige Anwendung beim Beweise des sogenannten *Parseval*schen Satzes (vgl. II A 12, *H. Burkhardt*, p. 947), der sich dem folgenden Ideenkreise einordnet:

Es sei $f(x)$ eine Funktion der Klasse L^2. Dann haben die *Fourier*koeffizienten a_n, b_n die Eigenschaft, daß

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\Big[f(x) - \Big(c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx)\Big)\Big]^2 dx$$

zu einem Minimum[86] wird für $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_k = a_k$, $d_k = b_k$ $(k = 1, 2, \dots n)$.

Die Partialsummen der *Fourier*reihe geben daher nach dem Prinzipe der kleinsten Quadrate bei gegebener Ordnung des trigonometrischen Polynoms die beste Annäherung der gegebenen Funktion $f(x)$. Diese Eigenschaft führt zu einer naturgemäßen Definition der *Fourier*schen Reihe.[87]

80c) Eine Verallgemeinerung bei *H. Hahn*, l. c. 79), p. 690.

81) *Ch.-J. de la Vallée Poussin*, Belg. Ac. Bull. (1908), p. 193—254, spez. p. 233 ff.; *H. Hahn*, l. c. 79), p. 631.

82) *O. Hölder*, Math. Ann. 20 (1882), p. 535—549; *W. Grosz*, l. c. 79).

83) *T. H. Gronwall*, Paris C. R. 158 (1914), p. 1664—1665; J. f. Math. 147 (1917), p. 16—35.

84) Für andere Summationsmethoden vgl. noch *W. H. Young*, Leipz. Ber. 63 (1911), p. 369—387; *J. Mollerup*, Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Medd. III 8 (1920), p. 1—29.

85) Vgl. hierzu auch die entsprechenden Ausführungen für allgemeine orthogonale Systeme in dem Referat *E. Hilb* und *O. Szász*, II C 11.

86) Aus dem unten gegebenen *Parseval*schen Satze folgt, daß dieses Minimum mit $\frac{1}{n}$ nach Null geht.

87) *A. Toepler*, Wien. Ak. Anz. 13 (1876), p. 205—209; *J. P. Gram*, J. f. Math. 94 (1883), p. 41—73; vgl. II A 9 a, *H. Burkhardt*, p. 648, Anm. 15).

Andererseits gilt die Identität

$$(39)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x)-s_n(x))^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx-\left(\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right),$$

aus der die sogenannte *Besselsche Ungleichung*[88])

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx$$

folgt, so daß also für die Funktionen der Klasse L^2

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

konvergiert.

Für Funktionen mit gleichmäßig konvergenter *Fourier*reihe folgt aus (39) oder unmittelbar durch gliedweise Integration der *Parseval*sche Satz:

$$(40)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

In allgemeinster Weise bewies *Fatou*[89]) diesen Satz[90]) für Funktionen der Klasse L^2 durch Anwendung der *Bessel*schen Ungleichung, des *Poisson*schen Summationsverfahrens und eines der Integralrechnung angehörigen von ihm selbst stammenden Hilfssatzes.

Aus (40) folgt

$$(41)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2}a_0\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n),$$

88) *F. W. Bessel,* Astr. Nachr. 6 (1828), p. 333—348.

89) *P. Fatou,* l. c. 8), p. 373—379.

90) Für Funktionen der Klasse R mit einer endlichen Anzahl quadratisch integrierbarer Unendlichkeiten wurde der Satz zuerst von *de la Vallée Poussin,* l. c. 13) bewiesen, vgl. für diesen Fall besonders auch *A. Hurwitz,* Ann. Éc. Norm. (3) 19 (1902), p. 357—408; Math. Ann. 57 (1903), p. 425—446 und 59 (1904), p. 553, und für Funktionen der Klasse L_b *H. Lebesgue,* Leçons, p. 100—101; die beiden letztgenannten Verfasser benützen die *Fejér*schen Mittel. Andere Beweise geben *E. Fischer,* Monatsh. Math. Phys. 15 (1904), p. 69—92; *F. Bernstein,* J. f. Math. 132 (1907), p. 270—278; für die Klasse L^2 *A. C. Dixon,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 15 (1909), p. 210—216; vgl. auch *de la Vallée Poussin,* Cours II, p. 165—166. Eine weitere Beweisanordnung geht von der evidenten Gültigkeit des *Parseval*schen Satzes für einfache Funktionen $\varphi(x)$ aus und geht zum allgemeinen Falle durch solche Approximationen über, daß $\int_{-\pi}^{+\pi}(f(x)-\varphi(x))^2dx$ beliebig klein wird. Vgl. *W. A. Stekloff,* Petersb. Denkschr. (8) 15 (1904), 32 S.; Krak. Anz. Math. 1903, p. 713—740; 1904, p. 280—283; *A. Kneser,* Integralgleichungen, 2. Aufl. 1922, p. 24.

wenn $f(x)$ und $g(x)$ zur Klasse L^2 gehören und a_n, b_n bzw. α_n, β_n ihre *Fourier*koeffizienten sind.[90a])

Eine Erweiterung dieses Satzes erhält man durch die folgenden Betrachtungen.

Es seien A) $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen der Klasse L, $G(x)$ von beschränkter Schwankung,

$$(42)\quad I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\,g(t)\,dt; \quad J(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\,dG(t).^{91)}$$

Dann sind nach *Young*[92]) $I(x)$ und $J(x)$ fast überall endliche Funktionen der Klasse L. Ist[93]) außerdem B) $f(x)$ beschränkt oder gehört C) $f(x)$ zur Klasse L^{1+p}, $g(x)$ zur Klasse $L^{1+\frac{1}{p}}$ $(p > 0)$, insbesondere[94]) C′) $f(x)$ und $g(x)$ zur Klasse L^2, so sind im Falle B) $I(x)$ und $J(x)$, im Falle C) und C′) $I(x)$ stetig. Ferner ist im Falle C) und C′)

$$(43)\quad I(x) = \tfrac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big((a_n\alpha_n + b_n\beta_n)\cos nx - (a_n\beta_n - b_n\alpha_n)\sin nx\big),$$

und es konvergiert die rechte Seite gleichmäßig, im Falle C′) auch absolut.[95]) Dieselbe Formel gilt für $I(x)$ bzw. $J(x)$ in dem Falle[96]) B) im Sinne der gleichmäßigen Summierbarkeit durch arithmetische Mittel beliebiger positiver Ordnung, während man im allgemeinen Falle A) nur aussagen kann, daß die rechte Seite die formale *Fourier*-

---

90a) Die Gleichung (41) besteht nach *M. Riesz*, l. c. 95), wenn $f(x)$ bzw. $g(x)$ zur Klasse L^{1+p} bzw. $L^{1+\frac{p}{1}}$ $(p > 0)$ gehören. Ferner gilt (41) dann und nur dann für jedes $f(x)$ der Klasse L, wenn die Partialsummen der *Fourier*reihe von $g(x)$ gleichmäßig beschränkt sind (vgl. *H. Lebesgue*, l. c. 47) dritte Arbeit, p. 52). Insbesondere gilt (41) also, wenn $g(x)$ von beschränkter Schwankung ist; vgl. *W. H. Young*, London math. Soc. Proc. (2) 9 (1910—11), p. 449—462, spez. p. 453—455, — hier und p. 463—485, spez. p. 475ff.; ferner ebenda (2) 13 (1913), p. 109—150, p. 147f. und *G. H. Hardy*, Messenger Nr. 612, 51 (1922), p. 186—192 Verallgemeinerung für ein unendliches Intervall — ferner l. c. 93), p. 412—413. Dagegen braucht die rechte Seite von (41) oder von (43) nicht zu konvergieren, wenn $f(x)$ integrierbar und $g(x)$ stetig ist, *H. Hahn*, l. c. 79), p. 679. Vgl. auch *S. Banach* und *H. Steinhaus*, Krak. Anz. 1919, p. 88—96, spez. 93—94.

91) Das letztere Integral ist ein erweitertes *Stieltjes*sches Integral.

92) *W. H. Young*, a) Paris C. R. 155 (1912), p. 30—33; b) Roy. Soc. Proc. A. 88 (1913), p. 561—568.

93) *W. H. Young*, Roy. Soc. Proc. A. 85 (1910—11), p. 401—414.

94) *A. C. Dixon*, l. c. 90).

95) Den Satz für C) beweist *M. Riesz* in einer demnächst in der Math. Ztschr. erscheinenden Arbeit.

96) *W. H. Young*, l. c. 90a), p. 456—457 und 93), p. 413.

reihe von $I(x)$ bzw. $J(x)$ ist. Dabei sind in den Formeln für $J(x)$ α_n und β_n die Koeffizienten der formal differentiierten *Fourier*reihe von $G(x)$.

10. Der Riesz-Fischersche Satz[85]**) und verwandte Sätze.** Eine Umkehrung der *Bessel*schen Ungleichung und des *Parseval*schen Satzes ist der von *F. Riesz*[97]) und *E. Fischer*[98]) nahezu gleichzeitig gefundene sogenannte *Riesz-Fischer*sche Satz, der aussagt: Die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{44}$$

ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es eine Funktion $f(x)$ der Klasse L^2 mit den *Fourier*koeffizienten a_n und b_n gibt. Daraus folgt unmittelbar: Jede trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten die Bedingung (44) erfüllen, ist die *Fourier*reihe einer Funktion der Klasse L^2.

Die wichtigsten Beweismethoden des *Riesz-Fischer*schen Satzes beruhen auf gliedweiser Integration der formal angesetzten trigonometrischen Reihe und nachheriger Differentiation der durch die integrierte Reihe dargestellten Funktion oder aber auf der Auswahl von fast überall konvergenten Folgen von Partialsummen. Die so gewonnene Funktion gehört zur Klasse L^2, aber nicht notwendigerweise zur Klasse R.

Young und *Hausdorff* finden, der erstere für ungerades p, der letztere für ein beliebiges $p \geqq 1$, als Verallgemeinerung[99]) der *Bessel*schen Ungleichung: Gehört $f(x)$ zur Klasse $L^{1+\frac{1}{p}}$, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{1+p} + |b_n|^{1+p});$$

als Verallgemeinerung[100]) des *Riesz-Fischer*schen Satzes: Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^{1+\frac{1}{p}} + |b_n|^{1+\frac{1}{p}}\right)$$

konvergent, dann gibt es eine Funktion der Klasse L^{1+p} mit den

97) *F. Riesz,* Paris C. R. 144 (1907), p. 615—619, 734—736; Gött. Nachr. 1907, p. 116—122; Paris C. R. 148 (1909), p. 1303—1305; Math. Phys. Lapok 19 (1910), p. 165—182, 228—243 (ung.).

98) *E. Fischer,* Paris C. R. 144 (1907), p. 1022—1024. Vgl. ferner *H. Weyl,* Math. Ann. 67 (1909), p. 225—245, insbes. p. 244. Wegen einer zusammenfassenden Darstellung der verschiedenen Beweise vgl. *W. H. Young* und *G. Chisholm Young,* Quart. J. 44 (1912—13), p. 49—88.

99) *W. H. Young,* a) l. c. 92) und b) Roy. Soc. Proc. A. 87 (1912), p. 331—339; *F. Hausdorff,* Math. Ztschr. 16 (1923), p. 163—169.

100) *W. H. Young,* a) Paris C. R. 155 (1912), p. 472—475; b) London math. Soc. Proc. (2) 12 (1912—13), p. 71—88.

*Fourier*koeffizienten a_n und b_n.[101]) Die beiden Sätze sind keine Umkehrungen voneinander, außer für $1 + p = 2$. Eine solche ist auch nicht möglich.[102])

W. H. Young und *G. Chisholm Young*[103]) geben als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene trigonometrische Reihe die *Fourier*reihe einer Funktion der Klasse L^{1+p} $(p > 0)$ sei, die Beschränktheit von $\int_{-\pi}^{+\pi} |\sigma_n(x)|^{1+p} dx$, wo $\sigma_n(x)$ in (30) definiert ist. Nach *M. Riesz*[95]) kann $\sigma_n(x)$ durch $s_n(x)$ ersetzt werden. Für $p = 0$ hat man nach *W. H. Young*[104]) in der Beschränktheit von $\int_{-\pi}^{+\pi} |\sigma_n(x)| dx$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe die abgeleitete *Fourier*reihe einer Funktion beschränkter Schwankung ist; die Beschränktheit von $\sigma_n(x)$ selbst ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe die *Fourier*reihe einer beschränkten Funktion ist[104]), $\lim\limits_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \int_{-\pi}^{+\pi} |\sigma_n(x) - \sigma_m(x)| dx = 0$ dafür, daß die Reihe die *Fourier*reihe einer Funktion der Klasse L sei.[104a])

Für konjugierte Reihen gilt: Ist eine der Reihen S und $\bar{S}$ die *Fourier*reihe einer Funktion der Klasse $L^p (p > 1)$, dann ist nach *M. Riesz*[95]) es auch die andere. Ein durch *Priwaloff* verschärfter Satz von *Fatou*[104b]) besagt: Ist eine der Reihen die *Fourier*reihe einer Funktion, die einer *Lipschitz*bedingung der Form (4) mit festem C und α genügt, dann ist die andere die *Fourier*reihe einer Funktion, die für $\alpha < 1$ einer *Lipschitz*bedingung mit dem gleichen α, für $\alpha = 1$ einer Bedingung der Form $|g(x + \delta) - g(x)| < C' |\delta| \log \frac{1}{|\delta|}$ genügt. Schließlich erwähnen wir den Satz: Sind S und $\bar{S}$ beide zugleich

101) Vgl. zu diesem Ideenkreise *F. Riesz,* Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497.

102) l. c. 100b), p. 74; vgl. ferner die Beispiele von *Hardy* und *Littlewood,* l. c. 145) und 146) und *T. Carleman,* l. c. 5).

103) l. c. 98), p. 57, eine andere Bedingung p. 68; ferner *W. H. Young,* London math. Soc. Proc. (2) 11 (1912), p. 43—95, spez. p. 88.

104) *W. H. Young,* Roy. Soc. Proc. A. 88 (1913), p. 569—574. Vgl. für ähnliche Sätze *H. Steinhaus,* Krak. Anz. 1916, p. 467 und *F. Hausdorff,* l. c. 104a).

104a) *H. Steinhaus,* Krak. Abh. 56 (1916), p. 176—225; *F. Hausdorff,* Math. Ztschr. 16 (1923), p. 220—248, spez. p. 240—248. Ein gleichwertiges Kriterium findet sich schon bei *W. H. Young* und *G. Chisholm Young,* l. c. 98), p. 56. Entsprechend für *Poisson*sche Summierung bei *W. Grosz,* l. c. 79).

104b) *P. Fatou,* l. c. 8), p. 358ff.; *J. Priwaloff,* Bull. Soc. math. France 44 (1916), p. 100—103.

*Fourier*reihen von Funktionen beschränkter Schwankung, dann sind auch die formal abgeleiteten Reihen *Fourier*reihen und daher ist $\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} n b_n = 0.$[104d)]

11. Operationen mit Fourierreihen. 1. *Multiplikation zweier Fourierreihen.* Seien a_n, b_n bzw. α_n, β_n die *Fourier*koeffizienten zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, dann erhält man die *Fourier*koeffizienten des Produktes $f(x)g(x)$, also

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,g(x)\,{}^{\cos}_{\sin}\, nx\,dx \tag{45}$$

nach der Formel (41), wobei nur die *Fourier*koeffizienten von $g(x)$ durch diejenigen von $g(x)\cos nx$ bzw. von $g(x)\sin nx$ zu ersetzen sind. Es sind daher die Ergebnisse von Nr. **9** unmittelbar übertragbar.

2. *Integration.* Es sei $f(x)$ eine Funktion der Klasse L, dann ist die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 x - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{n}\cos nx - \frac{a_n}{n}\sin nx\right) \tag{46}$$

gleichmäßig konvergent und stellt ein unbestimmtes Integral von $f(x)$ dar. Der Satz folgt unmittelbar aus dem *Jordan*schen Kriterium (vgl. Nr. **4** und **6**), da

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \tfrac{1}{2}a_0\right)dt \tag{47}$$

in $\langle -\pi, +\pi\rangle$ stetig und von beschränkter Schwankung ist und

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx, \quad A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n} \tag{48}$$

zu *Fourier*koeffizienten hat. Daher ist

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \tag{49}$$

$$= \frac{1}{2}a_0(x_2 - x_1) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{b_n}{n}(\cos nx_2 - \cos nx_1) - \frac{a_n}{n}(\sin nx_2 - \sin nx_1)\right],$$

oder, was dasselbe aussagt,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x) - s_n(x)\right)dx = 0.$$ [105)]

Aus (49) folgt: Zwei integrierbare Funktionen, die dieselbe *Fou-*

104d) *F.* und *M. Riesz,* 4. Skand. Math.-Kongr. Stockholm 1916, p. 27—44, spez. p. 44.

*rier*reihe haben, stimmen fast überall überein, d. h. das System $\cos nx$, $\sin nx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist auch im Bereiche der Funktionenklasse L abgeschlossen.

3. *Differentiation.* Die abgeleitete Reihe einer *Fourier*reihe ist im allgemeinen keine *Fourier*reihe, da schon ihre Koeffizienten im allgemeinen nicht nach Null gehen. Existiert aber eine im Punkte x stetige erste Derivierte von $f(x)$, dann konvergieren die *Fejér*schen Mittel der abgeleiteten Reihe im Punkte x nach dieser Derivierten.[106]) Allgemein konvergieren die Mittel $r+1^{\text{ter}}$ Ordnung der r^{ten} Ableitung der *Fourier*reihe von $f(x)$ gegen die r^{te} verallgemeinerte *de la Vallée Poussin*sche Ableitung[107]), wo diese existiert, und zwar in jedem Intervalle gleichmäßig, wo diese gleichmäßig existiert.[108])

4. *Faktorenfolgen.* Aus den Schlußbetrachtungen von Nr. 9 folgt insbesondere: Unter den Bedingungen A) für $f(x)$ und $G(x)$ sind die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{50}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \tag{51}$$

*Fourier*reihen. Daran schließt sich der Satz: Damit (50) bzw. (51) *Fourier*reihen einer Funktion der Klasse L seien, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{52}$$

die *Fourier*reihe irgendeiner Funktion derselben Klasse ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx$$

---

105) *H. Hahn*, l. c. 79), p. 681, bemerkt, daß es Funktionen der Klasse L gibt, für welche $\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x) - s_n(x)|\, dx$ nicht gegen Null strebt, ferner daß es solche Funktionen gibt, deren *Fourier*reihe nicht über jede meßbare Menge gliedweise integriert werden darf, auch Wien Ber. 127 (1918), p. 1763—1785, spez. p. 1782. Vgl. auch *S. Banach* und *H. Steinhaus,* Krak. Anz. 1918, p. 87—96.

106) Für stückweise stetig differenzierbare Funktionen *L. Fejér*, l. c. 67b), p. 61. In der obigen allgemeinen Form *W. H. Young*, London math. Soc. Proc. (2) 17 (1916), p. 195—236, insbes. p. 219; in dieser umfassenden Arbeit auch weitgehende Verschärfungen und Verallgemeinerungen für die höheren Ableitungen, ferner *W. H. Young*, Paris C. R. 163 (1916), p. 427—430.

107) *Ch.-J. de la Vallée Poussin,* l. c. 81), p. 214 ff.

108) *T. H. Gronwall,* J. f. Math. 147 (1916), p. 16—35. Darin sind die früheren Ergebnisse von *de la Vallée Poussin* enthalten, die den entsprechenden Satz für *Poisson*sche und *de la Vallée Poussin*sche Summation bringen. Vgl. auch *H. Hahn,* l. c. 79), p. 688 ff.

die formalen Ableitungen der *Fourier*reihen je einer Funktion beschränkter Schwankung seien.[109])

Hierher gehört auch die von *Young*[110]) in zahlreichen Arbeiten behandelte Aufgabe, spezielle Folgen α_n, β_n anzugeben, so daß die Reihen (50) und (51) bzw. die dazu gehörigen Funktionen feinere Eigenschaften haben als die Reihe (52) bzw. die dazu gehörige Funktion. Wir erwähnen hier nur den zum Teil von *Hardy* verschärften Satz von *Young*[111]): Ist (52) eine *Fourier*reihe oder die formale Ableitung der *Fourier*reihe einer Funktion beschränkter Schwankung, dann ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\log n}$$

eine fast überall konvergente *Fourier*reihe. Nach *Young* gilt dasselbe

109) Der obige Satz gilt auch noch, wenn man darin stets die Klasse L durch eine der Klassen L_b, R, oder die Klasse der stetigen Funktionen, oder der Funktionen beschränkter Schwankung, oder der Integralfunktionen ersetzt. Für die Klasse L^2 ist nach dem *Riesz-Fischer*schen Satze die entsprechende Bedingung die Beschränktheit der α_n bzw. β_n. Vgl. *W. H. Young,* l. c. 92b) und 104). Ferner *H. Steinhaus,* Math. Ztschr. 5 (1919), p. 186—221, spez. p. 210—214; *S. Szidon*, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 121—127; *M. Fekete* in einer demnächst erscheinenden Arbeit. Brauchbare Faktorenfolgen liefern folgende Sätze: $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx$ ist eine *Fourier*reihe, wenn entweder die q_n eine monotone konvexe Nullfolge bilden, d. h. wenn $q_n \to 0$, $\Delta q_n = q_n - q_{n+1} > 0$ und $\Delta^2 q_n = q_n - 2q_{n+1} + q_{n+2} > 0$ ist, (*W. H. Young*, l. c. 139), p. 44—45) oder wenn $q_n \log n$ monoton beschränkt oder allgemeiner $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta(q_n \log n)|$ konvergent ist, was für eine monotone Nullfolge immer der Fall ist, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} q_n$ konvergiert, (*S. Szidon,* l. c., p. 126). Es gibt aber nach *S. Szidon,* l. c., p. 126 monotone Nullfolgen q_n, für welche die Reihe weder eine *Fourier*reihe, noch die formale Ableitung der *Fourier*reihe einer Funktion beschränkter Schwankung ist. Die mit einer monotonen Nullfolge q_n gebildete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$ ist überall konvergent, aber nur dann eine *Fourier*reihe, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} q_n$ konvergiert, im anderen Falle nicht einmal die formale Ableitung der *Fourier*reihe einer Funktion beschränkter Schwankung (*W. H. Young,* l. c. 139), p. 46).

110) Vgl. etwa *W. H. Young,* l. c. 9), 92), 93), 99), 100), 103), 111), 139).

111) *W. H. Young,* Paris C. R. 155 (1912), p. 1480—1482; ferner l. c. 25) und 33) die letzte Arbeit; *G. H. Hardy*, l. c. 74). Der einfachere Faktor $\log n$ im Nenner stammt (für *Fourier*reihen) von *Hardy.*

von
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{\log n (\log \log n)^{1+\delta}}$$
für $\delta > 0$, während nach *Pleßner*[80a])
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{\log n}$$
fast überall konvergiert, ohne aber notwendigerweise eine *Fourier*reihe oder die formale Ableitung der *Fourier*reihe einer Funktion beschränkter Schwankung zu sein.

Der Satz von *Young-Hardy* umfaßt alle bisher für trigonometrische Reihen bekannten Sätze, in denen aus der Größenordnung der Koeffizienten auf die Konvergenz, abgesehen von einer Nullmenge, geschlossen werden kann. Über die diesbezüglichen Arbeiten von *Fatou*[112]), *Jerosch* und *Weyl* usw. vgl. *E. Hilb* und *O. Szász,* II C 11.

II. Allgemeine trigonometrische Reihen.

12. Die Arbeit Riemanns. Im Vorhergehenden beschäftigten wir uns fast ausschließlich mit *Fourier*reihen. Wir gehen nun zu allgemeinen trigonometrischen Reihen

$$(53) \qquad \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

bei denen die a_n, b_n gegebene Zahlen sind, über und fragen, was man über die durch diese Reihe im Falle der Konvergenz dargestellte Funktion aussagen kann, d. h., wir suchen notwendige Bedingungen für eine durch eine trigonometrische Reihe darstellbare Funktion. Dieses ist die Fragestellung von *Riemann.* Er beantwortet sie[113]), indem er unter der Voraussetzung

$$(54) \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

die gegebene Reihe als zweite formale Abgeleitete der absolut und gleichmäßig konvergenten Reihe

$$(55) \qquad F(x) = \frac{1}{2} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2}$$

auffaßt, wobei

$$(56) \qquad A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ist. Dann folgt:

---

112) *H. Steinhaus,* Warschau C. R. 1913, p. 357—367 (poln.), p. 367—368 (franz.) zeigt, daß bei den *Fatou*schen Bedingungen $n a_n \to 0$, $n b_n \to 0$ die Divergenzpunkte die Mächtigkeit des Kontinuums haben können.

113) *B. Riemann,* Ges. Werke, p. 244—259.

1. Es ist stets[114])

$$(57)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{2h}=0.$$

2. Konvergiert (53) in einem Punkte nach $f(x)$, so existiert die zweite verallgemeinerte Ableitung von $F(x)$, d. h.

$$(58)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{4h^2}=\lim_{h\to 0}\left[A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right]$$

und ist gleich $f(x)$.[115])[116]) Also führt der *Riemann*sche Prozeß zu einem Summationsverfahren für die gegebene Reihe. Es folgt[117]): Damit eine Funktion $f(x)$ sich durch eine in diesem Sinne summierbare trigonometrische Reihe, für welche (54) gilt, darstellen lasse, ist notwendig und hinreichend, daß sie die zweite verallgemeinerte Ableitung einer stetigen Funktion $F(x)$ sei, und daß außerdem, gleichmäßig in x, bei beliebigen b und c

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu^2\int_b^c F(t)\,h(t)\cos\mu(t-x)\,dt=0$$

gelte für jedes $h(t)$, das nebst seiner Ableitung in den Punkten b und c verschwindet und dessen zweite Ableitung in $\langle b, c\rangle$ von beschränkter Schwankung ist.

Für die Frage der gewöhnlichen Konvergenz in einem Punkte x ist der folgende Satz[118]) von entscheidender Bedeutung: Es sei $b<x<c$ und $\varrho(t)$ eine viermal stetig differenzierbare Funktion für $b\leqq t\leqq c\leqq b+2\pi$, ferner

$$\varrho(b)=\varrho(c)=\varrho'(b)=\varrho'(c)=0,\quad \varrho(x)=1,\quad \varrho'(x)=\varrho''(x)=0,$$

dann geht

$$A_0+A_1+\cdots+A_n-\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\varrho(t)\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right)dt$$

mit $\frac{1}{n}$ nach Null. Dieser Satz zeigt, daß die Konvergenz einer trigonometrischen Reihe, die unter Voraussetzung von (54) nach dem Summationsverfahren von *Riemann* eine Funktion $f(x)$ darstellt, nur

---

114) p. 248.

115) p. 246—247.

116) Für Reihen, die $(C, 1)$ summierbar sind, führt nach *Fejér* eine viermalige gliedweise Integration und nachträgliche Bildung der vierten verallgemeinerten Ableitung zum entsprechenden Resultat, l. c. 67b), spez. p. 68—69.

117) p. 251.

118) p. 252—253.

von dem Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung des betrachteten Punktes abhängt.[119])

13. Weiterentwicklung im Anschluß an Riemann. Konvergiert (53) für alle Punkte irgendeines Intervalles, so ist nach *Cantor*[120]) (54) erfüllt[121]); ist andererseits (54) nicht erfüllt, so divergiert (53) nach *Lebesgue*[122]) fast überall. Dieses folgt auch unmittelbar aus dem Satze von *Steinhaus*[122a]), daß fast überall

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

ist. Eine gewisse Umkehrung des *Cantor*schen Koeffizientensatzes bilden die am Schlusse von Nr. **11** und die in II C 11, *E. Hilb* und *O. Szász*, Nr. 2 besprochenen Sätze.

Wir wenden uns nun zu den beiden eng verbundenen Hauptfragen:

1. Gibt es eine trigonometrische Reihe, welche die Null darstellt, ohne daß sämtliche Koeffizienten verschwinden?

2. Unter welchen Bedingungen ist eine trigonometrische Reihe die *Fourier*reihe der dargestellten Funktion?

Diese Fragen konnten natürlich erst aufgeworfen werden, als man erkannt hatte, daß nicht jede konvergente Reihe gliedweise integriert werden darf. Für stückweise gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihen bewies *Heine*[123]) die Verneinung der ersten Frage unter Zuhilfenahme des obigen ersten *Riemann*schen Satzes.

---

119) Einen entsprechenden Satz für die Frage der gleichmäßigen Konvergenz gibt *Neder* unter gleichzeitiger Vereinfachung des Beweises durch Spezialisierung von $\varrho(t)$. *L. Neder*, Math. Ann. 84 (1921), p. 117—136. *Neder* gibt hier auch Anwendungen der *Riemann*schen Ergebnisse, u. a. in der Richtung des bekannten Satzes von *Fatou*. Vgl. für diesen Satz *L. Bieberbach*, II C 4, p. 85. Für andere Anwendungen des *Riemann*schen Grundgedankens verweisen wir noch auf *E. Phragmén*, 3. Skand. Math.-Kongr. Kristiania 1913 und insbesondere auf *W. H. Young*, London math. Soc. Proc. (2) 17 (1917), p. 353—366, außerdem Roy. Soc. Proc. (A) 93 (1917), p. 276—292 und 95 (1918), p. 22—29.

120) *G. Cantor*, J. f. Math. 72 (1870), p. 130—138. Einfacher in Math. Ann. 4 (1871), p. 139—143.

121) Nach *Riemann*, l. c. p. 255, kann man, wenn (53) wenigstens in einem Punkte konvergiert, (54) durch eine einfache Transformation erreichen.

122) *H. Lebesgue*, Leçons, p. 110. Verallgemeinerungen in anderer Richtung geben *A. Harnack*, Math. Ann. 19 (1882), p. 235—279, spez. p. 251 und *W. H. Young*, Messenger Nr. 447, 38 (1908), p. 44—48. Vgl. auch *W. H. Young*, London math. Soc. Proc. (2) 9 (1910), p. 421—433. Ferner *de la Vallée Poussin*, Belg. Ac. Bull. 14 (1912), p. 702—718 und 15 (1913), p. 9—14.

122a) *H. Steinhaus*, Wiadom. mat. 24 (1920), p. 197—201; *A. Rajchman*, Fund. Math. 3 (1922), p. 287—302, insb. p. 300—302.

123) *E. Heine*, J. f. Math. 71 (1870), p. 353—365.

Allgemein zeigt dann *Cantor*[124]):

Konvergiert eine trigonometrische Reihe überall oder mit Ausnahme einer reduktiblen Punktmenge gegen Null, dann verschwinden alle ihre Koeffizienten. Nach *F. Bernstein*[125]) genügt die Voraussetzung, daß die Ausnahmemenge abzählbar ist, bzw. keinen perfekten Bestandteil enthält.[126])

Die Beweismethoden bestehen darin, daß man nach dem Vorgange *Riemanns* zu $F(x)$ übergeht und vermittels der oben gegebenen *Riemann*schen Sätze und eines bekannten Satzes von *H. A. Schwarz* bzw. dessen Erweiterungen zeigt, daß $F(x)$ linear ist.

Bei Summierung (C, r) gilt nach *M. Riesz*[127]) der *Cantor*sche Satz noch für $r < 1$, wenn keine Ausnahmepunkte zugelassen werden. Bei Zulassung von Ausnahmepunkten oder auch ohne Ausnahmepunkte für $r > 1$ gilt der Satz nicht mehr.[128]) Für $r = 1$ ist der Fall ohne Ausnahmepunkte noch nicht vollständig entschieden.

Bezüglich der zweiten Frage bewies *Ascoli*[129]), daß eine konvergente trigonometrische Reihe, welche eine stückweise stetige Funktion darstellt, eine *Fourier*reihe ist. Nach *du Bois-Reymond*[130]) genügt, daß die Funktion der Klasse R angehöre[131]), nach *Lebesgue*[132]),

124) *G. Cantor,* J. f. Math. 72 (1870), p. 139—143, zunächst ohne Ausnahmepunkte; mit endlich vielen Ausnahmepunkten J. f. Math. 73 (1871), p. 294—296; für Ausnahmepunkte, deren abgeleitete Menge aus endlich vielen Punkten besteht, Math. Ann. 5 (1872), p. 123—132.

125) *F. Bernstein,* Leipz. Ber. 60 (1908), p. 325—338. Der Fall einer abzählbaren Ausnahmemenge wurde gleichzeitig auch durch *W. H. Young* erledigt, l. c. 122), erste Arbeit. Nach *Hausdorff,* Math. Ann. 77 (1916), p. 430—437, spez. Anm. p. 436, sind bei den Fragen 1. und 2. Ausnahmemengen ohne perfekten Bestandteil als *Borel*sche Mengen abzählbar.

126) *D. Menchoff,* Paris C. R. 163 (1916), p. 433—436, gibt eine mit Ausnahme einer perfekten Nullmenge überall gegen Null konvergierende trigonometrische Reihe. Vgl. auch *A. Rajchman,* l. c. 122a) und Fund. Math. 4 (1923), p. 366—367.

127) *M. Riesz,* Math. Ann. 71 (1911), p. 54—75, spez. p. 71—75. Der weiter unten gegebene Satz von *Lebesgue* bezüglich der zweiten Fragestellung wird hier entsprechend übertragen.

128) Vgl. die Beispiele $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx$.

129) *G. Ascoli,* Ann. di mat. (2) 6 (1873), p. 21—71, p. 298—351.

130) *P. du Bois-Reymond,* Münch. Abh. 12 (1875), p. 117—166.

131) *O. Hölder,* Math. Ann. 24 (1884), p. 181—216, vereinfacht wesentlich den *du Bois-Reymond*schen Beweis namentlich durch Anwendung eines von ihm und *Harnack* herrührenden Mittelwertsatzes und präzisiert die *du Bois-Reymond*schen Ergebnisse.

132) *H. Lebesgue,* l. c. 3) spez. erste Arbeit, p. 458—471 und Leçons, p. 122—124.

daß sie beschränkt sei, wobei sogar eine reduktible Menge allenfallsiger Ausnahmestellen zugelassen wird. *Lebesgue*[133]) gibt ein Beispiel einer überall konvergenten trigonometrischen Reihe, die eine Funktion der Klasse L_b, aber nicht der Klasse R darstellt. Die Gewinnung dieser Ergebnisse ist einer der schönsten Erfolge des *Lebesgue*schen Integralbegriffs. Noch weiter geht der folgende Satz von *de la Vallée Poussin*[134]): Jede sogar divergente trigonometrische Reihe ist die *Fourier*reihe einer Funktion der Klasse L, wenn (54) erfüllt ist und die Unbestimmtheitsgrenzen der Reihe[135]) endliche Funktionen der Klasse L sind.[136]) Es können dabei noch abzählbar unendlich viele Ausnahmepunkte zugelassen werden.[125])

Auch hier beruhen die Beweismethoden auf dem Übergang zu $F(x)$ durch zweimalige Integration, so daß $\frac{a_n}{n^2}$ und $\frac{b_n}{n^2}$ als *Fourier*koeffizienten ausgedrückt werden können. Den Rückgang zu $f(x)$ gewähren verschiedene der Integralrechnung angehörende Sätze, die ausdrücken, daß unter den jeweilig für die Reihe gemachten Voraussetzungen $F(x)$ sich, abgesehen von einer linearen Funktion, als zweifaches Integral seiner zweiten verallgemeinerten Ableitung ausdrücken läßt.

Trotz dieser weitgehenden Sätze gibt es elementare Funktionen[137]), welche in eine trigonometrische, aber in keine *Fourier*sche Reihe entwickelbar sind, selbst wenn man *Harnack-Lebesgue*sche (*A. Rosenthal*, II C 9, Nr. 34, Anm. 630) Integrale zuläßt. Jedoch gibt *Denjoy*[138]) in

133) *H. Lebesgue,* l. c. 3), p. 481 f.; Leçons, p. 68 f. Ein weitergehendes Beispiel bei *H. Steinhaus,* Krak. Anz. 1913, p. 291—304.

134) *Ch.-J. de la Vallée Poussin,* l. c. 122); vgl. auch Cours d'analyse, 3. Aufl. I 1914, p. 449—452. Für einen früheren, weniger weitgehenden Satz vgl. *W. H. Young,* l. c. 122), zweite Arbeit.

135) Es genügt auch, wenn dieses nur für die Unbestimmtheitsgrenzen der (C, k) summierten Reihe gilt. Für $k \leqq 1$, *W. H. Young,* Roy. Soc. Proc. 89 (1913), p. 150—157. Für beliebiges k, *A. Rajchman,* Monatsh. Math. Phys. 26 (1915), p. 263—288, für *Poisson*sche Summierung unter Voraussetzung von (54) *A. Rajchman,* Prace mat.-fiz. 30 (1919), p. 19—86 (polnisch), p. 86—88 (franz.).

136) *De la Vallée Poussin* hebt hervor, daß die a_n und b_n die *Fourier*koeffizienten der oberen und unteren Unbestimmtheitsgrenzen der trigonometrischen Reihe sind. Auch bei *du Bois-Reymond* und *Hölder* handelt es sich schon eigentlich um die Unbestimmtheitsgrenzen. Wir erwähnen noch den Satz von *H. Steinhaus,* Krak. Abh. 56 (1916), p. 176—225, daß eine beständig konvergente trigonometrische Reihe, deren Summe stets $\geqq 0$ ist, eine *Fourier*reihe ist.

137) *P. Fatou,* Paris C. R. 142 (1906), p. 765—767; *Lebesgue,* Leçons, p. 124; *O. Perron,* Math. Ann. 87 (1922), p. 84—89.

138) *A. Denjoy,* Calcul des coefficients d'une série trigonométrique convergente quelconque dont la somme est donnée, Paris (Gauthier-Villars) 1921, Zu-

Erweiterung seines Integralbegriffes (*A. Rosenthal*, II C 9, Nr. **35 c**) einen Integralprozeß an, der gestattet, die Koeffizienten einer überall konvergenten trigonometrischen Reihe in so erweiterter *Fourier*scher Weise darzustellen.

14. Konvergenz- und Divergenzerscheinungen bei allgemeinen trigonometrischen Reihen. Für die Konvergenz trigonometrischer Reihen liegen einige elementare hinreichende Bedingungen vor, die auf der *Abelschen* Transformation beruhen.[139]

In bezug auf absolute Konvergenz zeigen im Anschluß an *Fatou*[140]) *Denjoy*[141]) und *Lusin*[142]), daß, wenn die trigonometrische Reihe (53) in einer Menge vom Maße > 0 absolut konvergiert, auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ konvergiert also die trigonometrische Reihe überall absolut konvergiert.[143])

Die Punkte mit irgendeiner Konvergenz- oder Divergenzeigenschaft liegen allgemein bei Deutung der Veränderlichen auf dem Einheitskreise stets symmetrisch in bezug auf die Punkte der absoluten Konvergenz. Für weitere Folgerungen vgl. *Fatou*, *Denjoy* und *Lusin*, l. c.

Für Potenzreihen auf dem Einheitskreise bzw. für trigonometrische Reihen geben *Lusin* bzw. *Steinhaus*[144]) je ein Beispiel überall divergenter Reihen mit nach Null gehenden Koeffizienten. *Hardy* und *Littlewood*[145]) zeigen speziell, daß die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \cos n^2 \pi x \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin n^2 \pi x$$

bei $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ für kein irrationales x konvergieren oder durch irgendein *Cesàro*sches Mittel summierbar sind, und geben die rationalen Werte

---

sammenfassung von 5 Arbeiten aus den Paris C. R. 172 (1921), p. 653—655, 833—835, 903—906, 1218—1221; 173 (1921), p. 127—129.

139) Vgl. etwa *Lebesgue*, Leçons, p. 42 ff., und auch *W. H. Young*, London math. Soc. Proc. (2) 12 (1912), p. 41—70; ferner *T. W. Chaundy* und *A. E. Joliffe*, London math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 214—216.

140) *Fatou*, l. c. 8), p. 398.

141) *A. Denjoy*, Paris C. R. 155 (1912), p. 135—136.

142) *N. Lusin*, Paris C. R. 155 (1912), p. 580—582.

143) Für den Beweis vgl. *P. Fatou*, Bull. Soc. math. Fr. 41 (1913), p. 47 bis 53.

144) *N. Lusin*, Palermo Rend. 32 (1911), p. 386—390; *H. Steinhaus*, Warschau C. R. 1912, p. 223—227.

145) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, Acta math. 37 (1914), p. 193—238, spez. p. 232 ff.

von x an, für welche die Reihen konvergieren.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \cos(\beta n \log n + nx) \qquad (\alpha \leqq \tfrac{1}{2})$$

ist[146]) z. B. für $\beta = \frac{2\pi}{\log 2}$ nirgends konvergent oder durch arithmetische Mittel irgendwelcher Ordnung summierbar.[147])

W. Sierpiński[148]) gibt eine Potenzreihe, die nur in einem Punkte des Konvergenzkreises konvergiert. Nach einem vorbereitenden Beispiele von *Steinhaus*[149]), das zeigt, daß bei einer trigonometrischen Reihe und Potenzreihe sowohl die Konvergenzpunkte als auch die Divergenzpunkte je ein Intervall enthalten können, zeigt *Neder*[150]) durch zwei Beispiele, daß das Maß der Menge dieser Punkte jeden beliebigen Wert annehmen kann.

III. Anhang.

15. Mehrfache Fourierreihen und trigonometrische Reihen. Auf eine ausführliche Darstellung der Übertragung der Theorie auf mehrfache namentlich auf Doppelreihen können wir um so eher verzichten, da man leicht einen Überblick über den Stand dieses Gebietes aus den Arbeiten von *W. H. Young*[151]) und *H. Geiringer*[152]) gewinnen kann. Hinreichende Bedingungen für die Darstellung durch eine zweifache *Fourier*reihe geben[153]) u. a. *M. Krause, G. H. Hardy, A. Vergerio, W. H. Young, W. Küstermann*[154]) und *H. Geiringer.* Zum Unterschiede gegen die entsprechenden Fälle bei einer Veränderlichen hängt hier das Verhalten der Reihe auch bei Summierung nicht nur von dem Verhalten der Funktion in der unmittelbaren Nachbarschaft des betrachteten Punktes x_0, y_0, sondern auch von dem Ver-

---

146) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood,* Nat. Ac. of Sc. Proc. 2 (1916), p. 583—586.

147) Die Reihen sind daher keine *Fourier*reihen, da sie sonst fast überall (C, δ) summierbar wären.

148) *W. Sierpiński,* Warschau C. R. 5 (1912), p. 153—157 (poln.).

149) *H. Steinhaus,* Krak. Anz. 1913, p. 435—450.

150) *L. Neder,* l. c. 44), p. 88 ff. Vgl. auch *St. Mazurkiewicz,* Fund. math. 3 (1922), p. 52—58; *A. Rajchman,* Warschau C. R. 11, p. 143—146.

151) *W. H. Young,* London math. Soc. Proc. 11 (1912), p. 133—184.

152) *H. Geiringer,* Monatsh. Math. Phys. 29 (1918), p. 65—144.

153) *M. Krause,* Leipz. Ber. 55 (1903), p. 164—197; *G. H. Hardy,* Quart. J. 37 (1905), p. 53—79; *A. Vergerio,* Giorn. di mat. (3) 2 (1911), p. 181—206.

154) *W. Küstermann,* Über Fouriersche Doppelreihen und das Poissonsche Doppelintegral, Inaug.-Diss. München 1913 (60 S.).

halten in den beiden Streifen $|x - x_0| \leqq \delta$ bzw. $|y - y_0| \leqq \delta$, der sog. *kreuzförmigen Nachbarschaft*, ab. Für Summation vgl. *W. H. Young*, *C. N. Moore*[155]), *W. Küstermann*, *H. Geiringer* und *M. Kleberger*[155a]), für die sich an *Riemann* anschließenden Fragestellungen u.a. *G. Ascoli*[156]), *W. H. Young* und insbesondere *H. Geiringer*.

16. Der Grad der Annäherungen.[157]) Wir beschäftigen uns im folgenden mit der angenäherten Darstellung einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ durch eine ganze rationale Funktion vom Grade n

$$P_n(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n \tag{59}$$

oder einer gegebenen stetigen Funktion mit der Periode 2π durch eine endliche trigonometrische Summe

$$T_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \cdots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx. \tag{60}$$

Aus den durch *Kirchberger* und für trigonometrische Summen durch *Fréchet* und *J. W. Young* ergänzten Untersuchungen von *Tschebyscheff* folgt, daß bei einer gegebenen Funktion $f(x)$ es immer ein einziges Polynom $\pi_n(x)$ bzw. eine einzige trigonometrische Summe $\tau_n(x)$ von gegebenem Grade gibt, für welche das Maximum ϱ_n von

$$|f(x) - P_n(x)| \quad \text{bzw.} \quad |f(x) - T_n(x)|,$$

— *die Annnäherung* — zu einem Minimum wird. Vgl. hierzu *A. Rosenthal*, II C 9. Die explizite Bestimmung der *Tschebyscheff*-schen annähernden Folgen ist aber auch in einfachen Fällen außerordentlich schwierig.[158])

Uns interessiert hier in erster Linie die von *Lebesgue* und *de la Vallée Poussin*[159]) etwa gleichzeitig gestellte Aufgabe, die Größenordnung der ϱ_n für beide Parallelaufgaben näher zu untersuchen. Es handelt sich zunächst darum, durch spezielle Annäherungen obere

155) *C. N. Moore,* Amer. math. Soc. Bull. (2) 25 (1919), p. 258—276. Ferner Amer. math. Soc. Trans. 14 (1913), p. 73—104; Math. Ann. 74 (1913), p. 555 bis 572.

155a) *M. Kleberger*, Mitt. des Math. Sem. der Univ. Gießen. Bd. 1, Heft 2 (1922), p. 1—27.

156) *G. Ascoli,* Mem. Acc. Linc. (3) 4 (1879), p. 253—300 und (3) 8 (1880), p. 263—319.

157) Für die Literatur und im folgenden nicht berührte Fragen vgl. *Ch.-J. de la Vallée Poussin*, Ens. Math. 20 (1918), p. 5—29 (Bericht), ferner Leçons und das Referat darüber von *H. Lebesgue,* Scienc. math. Bull. 44 (1920), p. 137—153, sowie *D. Jackson*, Amer. math. Soc. Bull. 27 (1921), p. 415—431 (Bericht).

158) Vgl. jedoch 176).

159) *H. Lebesgue,* Palermo Rend. 26 (1908), p. 325—328; *de la Vallée Poussin,* Ac. Belg. Bull. 10 (1908), p. 319—410, spez. p. 403 f.

Schranken für ϱ_n zu erhalten.[160]) Da nun die beiden Fälle sich durch einfache Transformationen aufeinander zurückführen lassen[161]), beschränken wir uns fast ausschließlich auf die Frage bei trigonometrischen Summen, zumal die meisten Methoden auf Eigenschaften der letzteren beruhen.

Es sei zunächst $f(x)$ periodisch stetig und besitze eine r^{te} Ableitung $(r \geqq 0)$ mit dem Stetigkeitsmaß $\omega_r(\delta)$, dann ist[162])

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{A \log n\, \omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^r}, \qquad (n > 1)^{163})$$

wo A eine absolute Konstante, $s_n(x)$ die n^{te} Partialsumme der *Fourier*reihe ist.

Ist $\sigma_n(x)$ das n^{te} *Fejér*sche Mittel der *Fourier*reihe einer stetigen periodischen Funktion mit dem Stetigkeitsmaß $\omega(\delta)$, so ist

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{2}{n}\right)\left(2 + \left|\log \omega\left(\frac{2}{n}\right)\right| + \omega(\pi)\right).$$

Genügt $f(x)$ einer *Lipschitz*bedingung der Ordnung

$$0 < \alpha < 1, \quad \text{mit} \quad \omega(\delta) < M\delta^\alpha,$$

so ist

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{AM}{n^\alpha},$$

bzw. für $\alpha = 1$

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{AM \log n}{n}.^{164})$$

Auf andere Annäherungen durch trigonometrische Summen führen singuläre Integrale (vgl. *E. Hilb* und *O. Szász*, II C 11). Als am weit-

160) Für eine einer *Lipschitz*bedingung erster Ordnung genügende Funktion $f(x)$ erhält *Lebesgue* vom *Weierstraß*schen Integrale ausgehend die Annäherung $O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$; *de la Vallée Poussin*, l. c. 81), p. 222 ff., vermittels *Stieltjes-Landau*scher Polynome die Annäherung $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ und für Funktionen, deren Ableitung beschränkte Schwankung hat, die Annäherung $O\left(\frac{1}{n}\right)$. An die dort aufgeworfene Frage, ob sich diese letztere Annäherung verbessern lasse, knüpft sich die ganze weitere Entwicklung. Für die Beantwortung der Frage vgl. unten. $f(n) = O(\varphi(n))$ bedeutet bekanntlich, daß $\frac{f(n)}{\varphi(n)}$ für große n beschränkt ist.

161) Vgl. etwa *de la Vallée Poussin*, Leçons, p. 5—7.

162) *H. Lebesgue*, l. c. 7).

163) Der unendlich werdende Faktor $\log n$ hängt mit der möglichen Divergenz der *Fourier*reihe einer stetigen Funktion zusammen.

164) *S. Bernstein*, Mém. Cl. sc. Ac. Belg. (2) 4 (1912), p. 1—104, spez. p. 89.

tragendsten erwiesen sich die von *D. Jackson*[165]) (in erster Linie für $2r = 4$)[166]) eingeführten Integrale[167])

$$\frac{h_n}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\left(\frac{\sin nt}{n\sin t}\right)^{2r} dt \quad \text{mit} \quad \frac{1}{h_n} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{n\sin t}\right)^{2r} dt.$$

Man erhält auf diese Weise trigonometrische Polynome, welche gestatten, den Satz[168]) auszusprechen:

Ist $f(x)$ periodisch stetig und besitzt es eine Ableitung r^{ter} Ordnung mit dem Stetigkeitsmaß $\omega_r(\delta)$, dann ist

$$\varrho_n < A_r \frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^r}, \tag{61}$$

wo A_r nur von r abhängt.[169]) Genügt speziell die r^{te} Ableitung einer *Lipschitz*bedingung $\omega(\delta) < M\delta^\alpha$, so ist

$$\varrho_n < \frac{A_r M \pi^\alpha}{n^{r+\alpha}}. \tag{62}$$

Untere Schranken für ϱ_n erhält man zunächst aus folgendem Satz von *Lebesgue*[170]): Gibt die n^{te} Partialsumme $s_n(x)$ der *Fourier*reihe einer Funktion $f(x)$ eine Annäherung $\varphi(n)$, dann ist

$$\varrho_n > \frac{A\,\varphi(n)}{\log n}, \qquad (n > 1) \tag{63}$$

wo A eine numerische Konstante ist.[171]) *Jackson*[172]) beweist durch

---

165) *D. Jackson,* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch Polynome gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Inaug.-Diss. Göttingen 1911 (98 S.); Amer. math. Soc. Trans. 13 (1912), p. 491—515 und Amer. math. Soc. Trans. 14 (1913), p. 343—364.

166) Für $2r = 2$ erhält man den *Fejér*schen Ausdruck.

167) Für ein äquivalentes singuläres Integral und eine Vereinfachung der Beweise vgl. *de la Vallée Poussin,* Leçons, p. 43 ff.

168) *D. Jackson*, l. c. 165), vgl. auch *de la Vallée Poussin,* Leçons, p. 51—52.

169) Die r ersten Ableitungen werden durch die bezüglichen Ableitungen der trigonometrischen Summen entsprechend angenähert.

170) *H. Lebesgue,* l. c. 47), p. 114—117 Auf diesem Wege ergibt sich auch ein Beweis für die Konvergenz der *Fourier*reihe, wenn die *Dini-Lipschitz*sche Bedingung erfüllt ist; vgl. l. c. 47), p. 114—117; ferner l. c. 7), p. 201—220 und *D. Jackson,* Amer. math. Soc. Bull. 27 (1920), p. 108—110.

171) Für andere solche Ungleichungen vgl. *S. Bernstein,* l. c. 164), p. 86; ferner *de la Vallée Poussin,* Leçons, p. 13, 34 und p. 22, wo der *Lebesgue*sche Satz in der oben gegebenen Form sich findet.

172) *D. Jackso*[n], Diss. l. c. 165), p. 57 ff.

Beispiele, daß für die von ihm betrachteten Funktionsklassen die Größenordnung der oben gegebenen Annäherungen im allgemeinen die bestmögliche ist.

Auf eine neue Grundlage wird die ganze Theorie durch die Untersuchungen von *S. Bernstein*[173]) gestellt, der umgekehrt aus der Größenordnung der möglichen Annäherung auf das infinitesimale Verhalten der Funktion schließt. Er findet[174]):

Ist eine Funktion $f(x)$ für jedes n durch eine trigonometrische Summe $T_n(x)$ derart angenähert darstellbar, daß

$$|f(x) - T_n(x)| < \frac{M}{n^{r+\alpha}}, \tag{64}$$

wo r eine ganze Zahl ist, so besitzt, wenn $0 < \alpha < 1$ ist, $f(x)$ eine r^{te} Ableitung, die einer *Lipschitz*bedingung der Ordnung α genügt. Ist aber $\alpha = 1$, so kann man nur schließen, daß für die r^{te} Ableitung

$$\omega_r(\delta) < A\delta\,|\log\delta| \tag{65}$$

ist.

Der unter Voraussetzung (64) gewonnene Satz ist für $0 < \alpha < 1$ eine genaue Umkehrung von (62), und damit ist für diesen Fall wiederum gezeigt, daß die durch (62) gegebene Größenordnung der Annäherung die bestmögliche ist. Für $\alpha = 1$ gibt (65) diese Umkehrung nicht.

Besonders wichtig war für die Entwicklung die Frage nach der bestmöglichen Annäherung von $|x|$ bzw. $|\sin x|$, welche, wie *Bernstein*[175]) zuerst zeigte, von der Größenordnung $\frac{1}{n}$ ist.[176]) Damit ist eine von *de la Vallée Poussin* aufgeworfene Frage[160]) beantwortet.

Ist $f(x)$ unbegrenzt oft differenzierbar, so wächst nach dem Obigen die Annäherung stärker wie jede negative Potenz von n und umgekehrt.

Um einen Satz über analytische Funktionen und gleichzeitig über

---

173) *S. Bernstein,* l. c. 164).

174) Als wichtiges Hilfsmittel dient dabei der Satz: Ist der absolute Betrag einer trigonometrischen Summe n^{ter} Ordnung ≤ 1, dann ist der absolute Betrag ihrer ersten Ableitung $\leq n$. Vgl. *S. Bernstein,* l. c. p. 6 ff. Einfache Beweise und Vertiefungen des Satzes gibt *M. Riesz,* Paris C. R. 158 (1914), p. 1152—1154; ferner l. c. 41). Einer der Beweise wurde von *de la Vallée Poussin* wiedergefunden, Paris C. R. 166 (1918), p. 843—846; Leçons, p. 39 ff.

175) *S. Bernstein,* l. c. 164), p. 60; Acta math. 37 (1913), p. 1—57.

176) *Ch.-J. de la Vallée Poussin,* Ac. Belg. Bull. 12 (1910), p. 808—844, gibt unter Heranziehung des *Tschebycheff*schen Verfahrens, dessen sich dann auch *S. Bernstein* bedient, als untere Schranke $\frac{1}{n(\log n)^3}$, *D. Jackson,* Diss. p. 52 $\frac{1}{n\log n}$.

polynomiale Approximation zu bringen, greifen wir den folgenden Satz von *Bernstein*[177]) heraus:

Ist für alle x bei geeigneten Polynomen $P_n(x)$ im Intervalle $\langle -1, +1 \rangle$

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{A}{R^n}, \qquad (R > 1;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

so ist $f(x)$ im Innern der Ellipse mit den Brennpunkten -1, $+1$ und der Halbachsensumme R regulär analytisch. Die Umkehrung gilt z. B. unter der Zusatzannahme, daß $f(x)$ auf dem Rande der Ellipse beschränkt ist.[178])

---

177) *S. Bernstein*, l. c. 164), p. 36 u. 94. Vgl. hierzu auch *M. Riesz*, Acta math. 40 (1916), p. 337—347. Für weitere Ausführungen vgl. *S. Bernstein*, l. c. p. 65—76 und *de la Vallée Poussin*, Leçons, p. 110—150.

178) Für Funktionen zweier oder mehrerer Veränderlicher vgl. *S. Bernstein*, l. c. 164), p. 97—103; *P. Montel*, Bull. Soc. math. France 46 (1919), p. 151—192, spez. p. 184—192.

(Unter nachträglicher Berücksichtigung einzelner späterer Arbeiten abgeschlossen am 24. Juli 1922.)

II C 11. ALLGEMEINE REIHENENTWICKLUNGEN.

Von

EMIL HILB in Würzburg und **OTTO SZÁSZ** in Frankfurt.*)

Inhaltsübersicht.

Erster Teil.

Entwicklungen bei reellen unabhängigen Veränderlichen.

I. **Allgemeine Sätze über Entwicklungen nach orthogonalen, polaren und biorthogonalen Funktionensystemen.**

1. Auftreten orthogonaler und biorthogonaler Funktionensysteme.
2. Sätze über die *Fourier*koeffizienten.
3. Abgeschlossenheit eines orthogonalen Funktionensystems. Entsprechende Sätze für biorthogonale Systeme.
4. Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Möglichkeit der Reihenentwicklungen von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften. Singuläre Integrale.
5. Integraldarstellungen.

II. **Entwicklungen nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen.**

6. Auftreten der Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik.
7. Randwertaufgaben.
8. Die *Green*sche Funktion bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Entwicklungen nach den Eigenfunktionen sich selbst adjungierter Probleme.
9. Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus.
10. Angenäherte Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen für große Parameterwerte.
11. Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen nicht selbstadjungierter Probleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.
12. Historischer Überblick.
13. Darstellungen bei Auftreten singulärer Stellen der Differentialgleichungen.

---

*) Der 1. Teil rührt von *E. Hilb* her, der 2. Teil von *O. Szász*. Für mannigfache Ergänzungs- und Verbesserungsvorschläge des 1. Teiles ist der Verfasser den Herren *E. Hellinger, L. Lichtenstein, L. Schlesinger* und insbesondere *A. Kneser* zu Danke verpflichtet. In Nr. 4 wurde nachträglich ein kurzer Bericht über singuläre Integrale in Anschluß an ein zu diesem Zwecke von *H. Hahn* ausgearbeitetes Manuskript eingefügt.

Zweiter Teil.

Entwicklungen bei komplexen unabhängigen Veränderlichen.

Einleitung.
1. Der Konvergenzbereich der Faktoriellenreihen.
2. Gleichmäßige Konvergenz.
3. Absolute Konvergenz.
4. Summabilität der Faktoriellenreihen.
5. Beziehungen zu *Dirichlet*schen Reihen.
6. Darstellbarkeitsbedingungen.
7. Entwicklungen nach den Näherungsnennern eines Kettenbruches.
8. Entwicklungen nach den Integralen linearer Differentialgleichungen.
9. Sonstige Reihenentwicklungen.
10. Approximationen.

Literatur.

Erster Teil.

M. Bôcher, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Leipzig 1894.

— Boundary Problems in one dimension. Internat. Math. Kongreß in Cambridge 1912.

— Leçons sur les methodes de *Sturm* dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes. Collection Borel. Paris 1912.

H. Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Deutsche Math.-Ver. 10. 2. 1908.

U. Dini, Serie di *Fourier* ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale. Pisa 1880.

— Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale data arbitrariamente in un certo intervallo. Litogr. Pisa 1911.

D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Gött. Nachr. 1. Mitt. 1904, p. 49—91; 2. Mitt. p. 213—259; 4. Mitt. 1906, p. 157—227; 5. Mitt. p. 439—480; 6. Mitt. 1910, p. 355—411.

J. Horn, Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Samml. *Schubert* LX, 1910.

A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vieweg 1911. 2. Aufl. 1922.

A. Korn, Fünf Abhandlungen zur Potentialtheorie. Berlin 1902.

— Über freie und erzwungene Schwingungen. Leipzig-Berlin 1910.

F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig 1891.

G. Vivanti, Elementi della teoria della equazioni integrali lineari. Mailand 1916.

H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 5. Aufl. Braunschweig 1910 und 1912.

Zweiter Teil.

E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl. Berlin 1878—1881.

P. Montel, Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe. Paris 1910.

C. Neumann, Über die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen 1. und 2. Art. Halle 1862.
— Theorie der *Bessel*schen Funktionen. Leipzig 1867.
N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig (Teubner) 1906.
— Lehrbuch der unendlichen Reihen. Leipzig 1909.

Erster Teil.

Entwicklungen bei reellen unabhängigen Veränderlichen.

Bezeichnungen. Für spezielle Klassen ebener und räumlicher Gebiete schließen wir uns an die Bezeichnungen von *L. Lichtenstein,* II C 3, p. 183f. an. Wir bezeichnen ferner mit $\langle a, b\rangle$ das reelle Intervall $a \leqq x \leqq b$, mit (a, b) das Intervall $a < x < b$. Die Worte „*Integral*", „*integrierbar*" wenden wir stets im *Lebesgue*schen Sinne an. Daher ist mit $f(x)$ zugleich auch $|f(x)|$ integrierbar, vgl. *A. Rosenthal,* II C 9, Nr. 33. Wir nennen L die Klasse aller in $\langle a, b\rangle$ integrierbaren, L^2 die Klasse aller in L enthaltenen Funktionen, deren Quadrate in $\langle a, b\rangle$ integrierbar sind.

Einleitung. Wir beschäftigen uns im folgenden mit den wichtigsten Spezialfällen der Aufgabe: Gegeben sei in dem reellen Intervalle $\langle a, b\rangle$ ein System von unendlich vielen reellen Funktionen $\varphi_\nu(x)$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$; es ist zu untersuchen, welchen Bedingungen eine Funktion $f(x)$ zu unterwerfen ist, damit sie für alle x in $\langle a, b\rangle$ durch eine konvergente Reihe

$$\text{(I)} \qquad f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

darstellbar sei, wobei die c_ν von x unabhängig sind. Es werden auch die entsprechenden Fragen für Funktionen mehrerer Veränderlicher, wenn auch oft der Kürze halber nur andeutungsweise, behandelt, während in bezug auf die Darstellung analytischer Funktionen auf II C 4, *L. Bieberbach,* p. 490 und den von *O. Szász* verfaßten 2. Teil dieses Ref. zu verweisen ist.

J. Hoëne Wronski (vgl. II A 2, *A. Voss,* p. 78) hat die obige Fragestellung in der allgemeinsten Form vom formalen Standpunkt aus aufgeworfen und eine Methode zur Bestimmung der c_ν entwickelt; doch ist, wie *du Bois-Reymond*[1]) hervorhebt, die von *Wronski* gegebene Form der Koeffizienten entsprechend der Allgemeinheit des Ansatzes so verwickelt, daß sie schon in den einfachsten Fällen die Untersuchung der Konvergenz der Reihe und die Beantwortung der

1) *P. du Bois-Reymond,* München Abh. XII, 2. Abt. 1876, p. I.

Frage, welche Funktionen eine derartige Entwicklung gestatten, unmöglich macht. *E. Schmidt* und *F. Riesz*[2]) behandeln dagegen die Frage, wann sich eine in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach linearen Aggregaten der Funktionen $\varphi_\nu(x)$ entwickeln läßt. Wir haben es hier mit einem Probleme der Approximationen zu tun. (Bez. allgemeiner Ausführungen über Approximationen vgl. das Ref. *Rosenthal,* II C 9, Nr. **50.**) Bei den Anwendungen wird aber meistens die Lösung der *Wronski*schen Aufgabe gefordert, diese aber dadurch der Behandlung zugängig, daß zu den $\varphi_\nu(x)$ ein adjungiertes Funktionensystem $\psi_\nu(x)$ gehört, so daß

$$\text{(II)} \qquad \int_a^b \varphi_\nu(x)\psi_\mu(x)dx = \delta_{\nu\mu}; \ (\delta_{\nu\nu} = 1, \ \delta_{\nu\mu} = 0, \text{ wenn } \nu \neq \mu)$$

ist. Darf man dann (I) gliedweise integrieren, so ergibt sich

$$\text{(III)} \qquad c_\nu = \int_a^b f(x)\psi_\nu(x)dx.$$

Ist $\psi_\nu(x) = p(x)\varphi_\nu(x)$ und ist in $\langle a, b\rangle$ auch noch $p(x) > 0$, so bilden die $\varphi_\nu(x)$ ein orthogonales Funktionensystem, ist $p(x)$ in $\langle a, b\rangle$ teils positiv, teils negativ, ein polares Funktionensystem, im allgemeinen Falle ein biorthogonales System.

Im Abschnitte I sollen nun die wichtigsten Sätze über die Entwicklungen nach orthogonalen, polaren und biorthogonalen Systemen besprochen werden, wobei wir uns meistens der Kürze halber auf Funktionen einer Veränderlichen beschränken. Abschnitt II bringt dann Einzelausführungen über die wichtigsten derartigen Funktionensysteme, nämlich über solche, welche aus Randwertproblemen bei gewöhnlichen und partiellen linearen Differentialgleichungen entspringen.

I. Allgemeine Sätze über Entwicklungen nach orthogonalen, polaren und biorthogonalen Funktionensystemen.

1. Auftreten orthogonaler und biorthogonaler Funktionensysteme. Das einfachste Beispiel orthogonaler Funktionensysteme wird durch die trigonometrischen Funktionen $\sin \nu x$ und $\cos \nu x$ geliefert, wie in II A 12, *Burkhardt* und II C 10, *Hilb-Riesz,* näher ausgeführt wurde. Andere spezielle Beispiele und zwar auch von biorthogonalen Funktionensystemen werden im Abschnitt II betrachtet. Ferner bilden die Eigenfunktionen einer linearen Integralgleichung mit reellem

2) *E. Schmidt,* Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Diss. Gött. 1905, Math. Ann. 63 (1907), p. 433—476; *F. Riesz,* Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 33—62.

symmetrischen Kern ein reelles orthogonales Funktionensystem, die mit polarem Kern ein polares Funktionensystem, schließlich die Hauptfunktionen einer Integralgleichung mit unsymmetrischem Kerne ein biorthogonales Funktionensystem (*Hellinger-Toeplitz*, II C 13). Allgemein erhält man, wenn $p(x)$ eine in $\langle a, b\rangle$ positive Funktion ist, aus einem linear unabhängigen[3]) Funktionensysteme $\varphi_\nu(x)$, für welches alle Funktionen $\sqrt{p(x)}\varphi_\nu(x)$ zu L^2 gehören, nach dem Vorgange von *Gram*[4]) und *Schmidt*[5]) ein orthogonales Funktionensystem $u_\nu(x)$, indem man

$$(1)\quad u_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x) - \sum_1^{\nu-1} u_\mu(x) \int_a^b p(\xi) u_\mu(\xi)\varphi_\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\int_a^b p(x)\left(\varphi_\nu(x) - \sum_1^{\nu-1} u_\mu(x)\int_a^b p(\xi)u_\mu(\xi)\varphi_\nu(\xi)d\xi\right)^2 dx}}$$

setzt. Ist insbesondere $\varphi_\nu(x) = x^\nu$, so sind die Funktionen $u_\nu(x)$ abgesehen von konstanten Faktoren die Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$(2)\qquad \sigma = \int_a^b \frac{p(\xi)}{x-\xi} d\xi.$$

Szegö[6]) beweist, daß für einen Punkt x von (a, b), in dem $p(x)$ gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt, sämtliche Konvergenz- und Summabilitätsfragen auf die entsprechenden bei gewöhnlichen trigonometrischen *Fourier*reihen zurückführbar sind.

Durch geeignete Spezialisierung von a, b und $p(x)$ erhält man wichtige aus Polynomen bestehende, orthogonale Funktionensysteme, wie die der Kugelfunktionen, der *Jacobi*schen, der *Hermite*schen Funk-

---

3) Es kann also $\sum_1^n c_\nu \varphi_\nu(x)$ nur dann für alle x in $\langle a, b\rangle$ verschwinden, wenn alle c_ν verschwinden.

4) *J. P. Gram,* Om Raekkeudviklinger bestemte ved Hjaelp af de mindste Kvadraters Methode, Kopenhagen 1879; ferner J. f. Math. 94 (1883), p. 41—73.

5) *E. Schmidt,* l. c. 2), Math. Ann. p. 442.

6) *G. Szegö,* Math. Ztschr. 12 (1922), p. 61—94. Diese wichtige Arbeit ist erst nach Abschluß des Berichtes erschienen, sonst wären ihre Ergebnisse eingehender besprochen worden. Vgl. auch *G. Szegö,* Math. Ann. 86 (1922), p. 114—139, spez. p. 135—139. Spezialfälle behandeln a) *E. Heine,* Theorie der Kugelfunktionen, Berlin 1878, p. 286f.; b) *C. Possé,* Fractions continues algébriques, St. Petersburg 1886; c) *G. Darboux,* J. de math. (3) 4 (1878), p. 5—57, 377—417; d) *O. Blumenthal,* Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{z-\xi}$, Diss. Gött. 1898.

tionen u. a., in bezug auf welche auf II 28, *Appell* und *Lambert* der franz. Enc. verwiesen sei. Es sei hier nur die elegante Methode besonders erwähnt, vermittels der man nach *Markoff*[7]) Funktionalgleichungen für solche durch den Orthogonalisierungsprozeß gewonnene Polynome von einer oder mehreren Veränderlichen erhält. Das durch (1) gegebene Orthogonalisierungsverfahren führt nach *Pell*[8]) auch zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß zu einem in $\langle a, b\rangle$ zur Klasse L^2 gehörigen Funktionssystem $\varphi_\nu(x)$ ein ebenfalls zu L^2 gehöriges adjungiertes System $\psi_\nu(x)$ gehört, so daß (II) gilt. Beispielsweise besitzen die Potenzen $x^{\nu-1}$ im Intervalle $\langle -1, +1\rangle$ kein adjungiertes System.[9])

2. Sätze über die Fourierkoeffizienten. Die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ mögen im Intervalle $\langle a, b\rangle$ der Klasse L^2 angehören, und es sei[10])

$$(3)\qquad \int_a^b \varphi_\nu^2(x)\,dx = 1, \quad \int_a^b \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,dx = 0, \text{ wenn } \nu \neq \mu.$$

Dann bilden die $\varphi_\nu(x)$ ein normiertes orthogonales Funktionensystem. Die Verwendung der Indizes bei einem solchen System bedeutet keine Einschränkung[11]), da jedes orthogonale Funktionensystem aus endlich vielen oder aus abzählbar vielen Funktionen besteht. Die formal durch gliedweise Integration von (I) gewonnenen Koeffizienten

$$(4)\qquad c_\nu = \int_a^b f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx$$

nennt man in Erweiterung des bei den trigonometrischen Reihen gebräuchlichen Ausdrucks die *Fourier*koeffizienten von $f(x)$. Sie existieren für jede Funktion $f(x)$, welche in $\langle a, b\rangle$ zu L^2 gehört[12]), und haben die Eigenschaft, daß für diese Werte von c_ν

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_1^n c_\nu \varphi_\nu(x)\right)^2 dx$$

zu einem Minimum wird.

---

7) Vgl. *C. Possé,* l. c. 6 b); ferner für Polynome mehrerer Veränderlicher: *W. Stekloff,* Petersb. Denkschr. (8) 30 (1911), Nr. 4.

8) *A. J. Pell,* Amer. math. Soc. Trans. 12 (1911), p. 135—164.

9) Über biorthogonale Systeme von Polynomen einer und mehrerer Veränderlicher vgl. *H. Burkhardt,* Entwicklungen p. 892 f., 913 f.; ferner das Ref. II 28 a, *P. Appell* und *A. Lambert* der franz. Enc. p. 248 f.

10) Auf diesen Fall läßt sich der in der Einleitung erwähnte, scheinbar allgemeinere Fall zurückführen, indem man $\varphi_\nu(x)\sqrt{p(x)}$ durch $\varphi_\nu(x)$ ersetzt.

11) a) *E. Schmidt,* Paris C. R. 143 (1906), p. 955—957; b) *F. Riesz,* Paris C. R. 143 (1906), p. 738—741.

12) a) *H. Lebesgue,* Toul. Ann. (3) 1 (1909), p. 25—117, speziell p. 38; b) *H. Hahn,* Wiener Denkschr. math. Klasse 93 (1916), p. 585—692, spez. p. 677.

Es mögen nun $f(x)$ sowie die $\varphi_\nu(x)$ zu L^2 gehören. Dann ist

$$(5)\quad \int_a^b \left[f(x) - \sum_1^n{}^\nu \varphi_\nu(x) \int_a^b f(x)\varphi_\nu(x)\,dx \right]^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_1^n{}^\nu c_\nu^2.$$

Man erhält daraus unmittelbar die sogenannte *Bessel*sche Ungleichung

$$(6)\quad \sum_1^n{}^\nu c_\nu^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

(vgl. II A 12, *Burkhardt*, p. 1044 und II C 10, *E. Hilb* und *M. Riesz*); $\sum_1^\infty{}^\nu c_\nu^2$ konvergiert also stets, wenn die c_ν die *Fourier*koeffizienten einer in $\langle a, b\rangle$ zu L^2 gehörigen Funktion sind. Ist $g(x)$ eine andere in $\langle a, b\rangle$ zu L^2 gehörige Funktion mit den *Fourier*koeffizienten d_ν, so konvergiert auch $\sum_1^\infty{}^\nu c_\nu d_\nu$. Ist nun umgekehrt eine reelle Zahlenfolge c_ν gegeben, für welche $\sum_1^\infty{}^\nu c_\nu^2$ konvergiert, so gibt es eine in $\langle a, b\rangle$ zur Klasse L^2 gehörige Funktion $f(x)$, welche entsprechend (4) die *Fourier*koeffizienten c_ν hat und für welche $\int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_1^\infty{}^\nu c_\nu^2$ ist. Dieser Satz heißt der *Riesz-Fischer*sche Satz[13]) (vgl. hierzu II C 10, *E. Hilb* und *M. Riesz*). Natürlich reicht aber die Konvergenz von $\sum_1^\infty{}^\nu c_\nu^2$ im allgemeinen nicht zur Sicherung der Konvergenz der entsprechenden Reihe (I) aus; dagegen gibt es nach *Weyl*[14]) für jedes derartige Zahlensystem c_ν eine Folge ganzer Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ derart, daß die Reihe

$$(7)\quad \sum_1^{n_1}{}^\nu c_\nu \varphi_\nu(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}^\nu c_\nu \varphi_\nu(x) + \cdots$$

---

13) a) *F. Riesz,* Paris C. R. 144 (1907), p. 615—619, 734—736, Gött. Nachr. 1907, p. 116—122; *E. Fischer,* Paris C. R. 144 (1907), p. 1022—1024, 1148—1151. Für weitere Literatur vgl. *E. Hilb* und *M. Riesz,* II C 10, Nr. **10**. *F. Riesz,* Math. Ztschr. 18 (1923), p. 117—124 überträgt die dort erwähnten Verallgemeinerungen von *F. Hausdorff*, der *Bessel*schen Ungleichung und des *Riesz-Fischer*schen Satzes auf beliebige Orthogonalsysteme, sofern nur alle $|\varphi_\nu(x)|$ unterhalb einer festen Zahl liegen.

14) *H. Weyl,* Math. Ann. 67 (1909), p. 225—245, spez. p. 243—245. Vgl. auch *M. Plancherel*, Palermo Rend. 30 (1910), p. 289—335; *G. Lauricella*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_1 (1912), p. 675—685; *J. Rademacher,* Math. Ann. 87 (1922), p. 112—138.

in $\langle a, b\rangle$, „wesentlich-gleichmäßig" konvergiert (vgl. zu diesem Begriff II C 9, *Rosenthal*, p. 1181, wo speziell ausgeführt ist, daß jede fast überall konvergente Reihe meßbarer Funktionen „wesentlich gleichmäßig" konvergiert). *Rademacher*[14]) gibt eine einfache Methode zur expliziten Bestimmung dieser Zahlen n an, die unabhängig von den φ_ν durch die c_ν allein bedingt ist. Die Reihe definiert in $\langle a, b\rangle$ „fast überall", d. h. abgesehen von einer Punktmenge vom Maße 0, eine Funktion $f(x)$, welche zur Klasse L^2 gehört und die c_ν als *Fourier*koeffizienten hat, wenn man einer durch eine wesentlich gleichmäßig konvergente Reihe dargestellten Funktion an den Divergenzstellen, die eine Menge vom Maße 0 bilden, etwa den Wert 0 gibt. Was nun aber die Konvergenz der Reihe I selbst betrifft, so hat *Fatou*[15]) für die trigonometrische Reihe $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, c_\nu \sin \nu x$ bewiesen, daß sie in $\langle 0, \pi\rangle$ „fast überall" konvergiert, falls $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu c_\nu = 0$ ist. Auf Grund einer von *Jerosch* stammenden Methode hat *Weyl*[16]) die *Fatou*sche Bedingung durch die schärfere $|c_\nu| < \frac{C}{\nu^{\frac{2}{3}}}$ ersetzt, wo C eine Konstante ist, dann[14]) aber für ein allgemeines normiertes Orthogonalsystem gezeigt, daß die Reihe (I) „wesentlich gleichmäßig" in $\langle a, b\rangle$ konvergiert, wenn $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, \nu^{\frac{1}{3}} c_\nu^2$ konvergiert. Die durch (I) dargestellte Funktion gehört zur Klasse L^2 und hat die c_ν als *Fourier*koeffizienten. Nach *Hobson*[17]) genügt aber schon die Konvergenz von $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, c_\nu^2 \nu^k$ für $k > 0$, nach *Plancherel*[18]) die von $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, c_\nu^2 (\ln \nu)^3$, nach *Rademacher*[14]) sogar die von $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, c_\nu^2 (\ln \nu)^2$. Der Satz von *Rademacher* ist für trigonometrische *Fourier*reihen in dem in II C 10, *E. Hilb* und *M. Riesz*, p. 1216 besprochenen Satze von *Hardy* enthalten[18b]). Konvergiert

15) *P. Fatou*, Acta math. 30 (1906), p. 335—400.

16) *H. Weyl* und *F. Jerosch*, Math. Ann. 66 (1909), p. 67—80.

17) *E. W. Hobson*, London math. Soc. Proc. (2) 12 (1912), p. 297—308.

18) a) *M. Plancherel*, Paris C. R. 157 (1913), p. 539—542; b) *E. W. Hobson*, London math. Soc. Proc. (2) 14 (1915), p. 428—439. *L. Neder*, Math. Ann. 84 (1921), p. 117—136, spez. p. 131, zeigt, daß bei trigonometrischen *Fourier*reihen die Konvergenz von $\sum \frac{1}{\lambda_\nu} c_\nu^2$ für $0 < \lambda_\nu \to \infty$ nicht hinreicht. Nach *D. Menchoff*, Fund. Math. 4 (1923), p. 82—105 gibt es zu jeder positiven Funktion $W(n)$, für die $W(n) = o\,[(\log n)^2]$ ist, ein normiertes Orthogonalsystem und eine Zahlenfolge c_ν, so daß $\sum c_\nu^2 W(\nu)$ konvergiert, die Reihe (I) aber überall divergiert.

$\sum_1^\infty {}^\nu c_\nu^2 \ln \nu$, so konvergieren die ersten arithmetischen Mittel der Partialsummen wesentlich gleichmäßig.[19])

In diesem Zusammenhang sei noch der Satz von *Plancherel*[20]) erwähnt, wonach für den Fall, daß die $\varphi_\nu(x)$ beschränkt sind, d. h. daß alle $|\varphi_\nu(x)|$ unterhalb einer von x und ν unabhängigen Größe liegen, $\lim\limits_{\nu\to\infty} c_\nu = 0$ sein muß, wenn die Reihe (I) „fast überall" konvergieren soll. Andererseits zeigt *Mercer*[20a]) unter derselben Voraussetzung über die $\varphi_\nu(x)$, daß für die *Fourier*koeffizienten c_ν einer Funktion $f(x)$, die L angehört, $\lim\limits_{\nu\to\infty} c_\nu = 0$ ist.

3. Abgeschlossenheit eines orthogonalen Funktionensystems. Entsprechende Sätze für biorthogonale Systeme. Damit eine Funktion $f(x)$ durch ihre *Fourier*koeffizienten mit konvergenter Quadratsumme „fast überall" eindeutig bestimmt sei, darf es keine in L^2 enthaltene Funktion $\Theta(x)$ geben, die nicht „fast überall" verschwindet und für welche bei jedem ν

$$\int_a^b \varphi_\nu(x)\,\Theta(x)\,dx = 0 \tag{8}$$

ist. In diesem Falle heißt das System $\varphi_\nu(x)$ abgeschlossen, und es geht die Ungleichung (6) über in die *Parseval*sche Gleichung[21])

$$\text{(9a)}\quad \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_1^\infty {}^\nu c_\nu^2, \qquad \text{(9b)}\quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_1^\infty {}^\nu c_\nu d_\nu$$

---

19) *H. Weyl*, l. c. 14); *E. W. Hobson*, l. c. 18b). *M. Kuniyeda*, London math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 128—139, gibt die dem *Hardy-Littlewood*schen Satze in II C 10, *E. Hilb* und *M. Riesz*, Nr. 8 (31*) und (31**) entsprechende Verallgemeinerung.

20) *M. Plancherel,* Math. Ann. 68 (1910), p. 270—278.

20a) *J. Mercer,* London Phil. Trans. A 211 (1912), p. 111—118.

21) *H. Hahn*, l. c. 12b), p. 677, gibt notwendige und hinreichende Bedingungen, damit für ein vollständiges orthogonales Funktionensystem (9b) gilt, wenn $f(x)$ als beschränkt oder als beschränkt und von beschränkter Variation, $g(x)$ als nur integrierbar vorausgesetzt wird. Dann untersucht er auch die Frage der Summierbarkeit der rechten Seite von (9b). Setzt man in (9b) in $\langle a, X\rangle$ $g(x) = 1$, sonst $= 0$, so erhält man die Formel für die gliedweise Integrierbarkeit $\int_a^X f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^\infty c_\nu \int_a^X \varphi_\nu(x)\,dx$. *H. Hahn* untersucht l. c. 12b), p. 680, inwiefern diese Formel noch gilt, wenn $f(x)$ nicht zu L^2 gehört, ferner in Wiener Ber. 127 (1918), p. 1763—1785, spez. p. 1776, inwiefern man über jede meßbare Menge gliedweise integrieren darf.

(vgl. hierzu II A 12, *Burkhardt*, p. 947 sowie II C 10, *E. Hilb* und *M. Riesz*, p. 1210). Denn es gibt nach dem *Riesz-Fischer*schen Satze eine Funktion $\bar{f}(x)$, so daß

$$(10)\qquad \int_a^b [\bar{f}(x)]^2\, dx = \sum_1^\infty{}_\nu\, c_\nu^2$$

ist; andererseits haben $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ dieselben *Fourier*koeffizienten, so daß für alle ν

$$(11)\qquad \int_a^b (f(x) - \bar{f}(x))\varphi_\nu(x)\, dx = 0$$

ist. Es verschwindet daher $f(x) - \bar{f}(x)$ „fast überall", und es folgt daher aus (10) unmittelbar (9a). Gilt umgekehrt (9a) für jede Funktion $f(x)$ aus L^2, so folgt, daß jede Funktion, deren sämtliche *Fourier*koeffizienten verschwinden, „fast überall" verschwindet. Die Definitionen der Abgeschlossenheit in Anschluß an (8) und durch (9) sind also vollständig äquivalent.[22]) Es genügt aber schon zum Nachweise der Abgeschlossenheit, daß (9a) für alle p-mal differenzierbaren Funktionen[23]), für die etwa noch lineare Randbedingungen[24]) vorgeschrieben sind, gilt, wenn p irgendeine ganze Zahl ist, oder daß (9) für alle Polynome oder die Funktionen irgendeines abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems[25]) gilt. Alle diese Sätze gelten ohne weiteres für orthogonale Funktionensysteme mehrerer Veränderlichen. Speziell ergibt sich ohne weiteres, daß die in Nr. 1 eingeführten orthogonalen Systeme von Polynomen bei endlichem Intervalle abgeschlossen sind. Die tieferliegenden Bedingungen für die Gültigkeit des *Parseval*schen Satzes für ein aus Polynomen gebildetes Orthogonalsystem bei unendlich großem Intervall gibt *M. Riesz*[25a]).

Pell[8]) gibt Bedingungen an, unter denen für biorthogonale Funk-

22) a) *E. Fischer*, l. c. 13), Paris C. R. 144 (1907), p. 1148—1151; b) *W. Stekloff*, l. c. 7); c) *G. Lauricella*, Palermo Rend. 29 (1910), p. 155—163; d) *C. Severini*, Palermo Rend. 36 (1913), p. 177—202.

23) *W. Stekloff*, l. c. 7), ferner Petersb. Denkschr. (8) 15 (1904), Nr. 7, vgl. auch *O. D. Kellogg*, Amer. math. Soc. Bull. 27 (1920), p. 165—169.

24) *W. Westfall*, Amer. math. Soc. Bull. (2) 15 (1908), p. 76—79.

25) *G. Lauricella*, l. c. 14); *C. Severini*, l. c. 22d). Beide geben Methoden, um ein nicht abgeschlossenes System zu einem abgeschlossenen zu ergänzen, vgl. auch *M. Cipolla*, Napoli Rend. (3) 21 (1915), p. 235—248. Eine andere hinreichende Bedingung für die Abgeschlossenheit mit Anwendungen auf die *Sturm-Liouville*schen Reihenentwicklungen gibt *G. D. Birkhoff*, Nat. Ac. of Sc. Proc. 3 (1917), p. 656—659.

25a) Die Arbeit erscheint demnächst in den Acta Univ. hung. Franc.-Jos.; vgl. auch Arkiv för Mat., Astr. o. Fys. 17 (1923), Nr. 16, p. 52 Anm.

tionensysteme Sätze gelten, die dem *Riesz-Fischer*schen Satze und der *Parseval*schen Gleichung entsprechen.

4. Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Möglichkeit der Reihenentwicklungen von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften. Singuläre Integrale.[26]) Es mögen die $\varphi_\nu(x)$ ein in $\langle a, b\rangle$ abgeschlossenes, normiertes Orthogonalsystem bilden, und es sei $f(x)$ eine innerhalb einer gegebenen Funktionenklasse K willkürliche Funktion; dann entsteht die Frage, welchen Bedingungen die $\varphi_\nu(x)$ noch zu unterwerfen sind, damit die Entwicklung

$$f(x) = \sum_1^{\infty}{}^{\nu} \int_a^b f(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi\, \varphi_\nu(x) \tag{12}$$

für alle x in (a, b) gelte, d. h., daß

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(\xi)\, \varphi_n(\xi, x)\, d\xi \tag{13}$$

ist, wenn

$$\varphi_n(\xi, x) = \sum_1^{n}{}^{\nu} \varphi_\nu(\xi)\, \varphi_\nu(x) \tag{14}$$

gesetzt wird. Enthält die Funktionenklasse K die speziellen Funktionen $f(x)$, welche in einem Teilintervall (α, β) von (a, b) den Wert 1, sonst den Wert 0 besitzen, so muß

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n(\xi, x)\, d\xi = \begin{cases} 0 \text{ für } x \text{ außerhalb } (\alpha, \beta) \\ 1 \text{ für } x \text{ innerhalb } (\alpha, \beta) \end{cases} \tag{15}$$

sein. Ist (15) für jedes Teilintervall $\alpha\beta$ erfüllt, so heißt das in (13) auftretende Integral ein *singuläres Integral* (mit der singulären Stelle x), $\varphi_n(\xi, x)$ heißt sein *Kern.*

Damit (13) für jedes $f(x)$ aus L in einem Punkte x von (a, b), in dem es stetig ist, gelte, ist notwendig und hinreichend:

a) Das in (13) auftretende Integral ist ein singuläres.

b) Zu jedem hinlänglich kleinen $h > 0$ gibt es eine Zahl $M(h)$, so daß

$$|\varphi_n(\xi, x)| < M(h) \text{ für } a \leqq \xi \leqq x - h,\ x + h \leqq \xi \leqq b \text{ und alle } n.$$

c) Es gibt ein A, so daß

$$\int_a^b |\varphi_n(\xi, x)|\, d\xi < A \text{ für alle } n$$

---

26) Diese Nummer wurde an Hand eines mir zu diesem Zwecke von *H. Hahn* zur Verfügung gestellten kurzen Berichtes über die neuesten Untersuchungen über singuläre Integrale nachträglich etwas erweitert.

ist. Soll (13) nur für Funktionen aus L gelten, die in x stetig und außerdem in einer Umgebung von x von beschränkter Schwankung sind, so tritt an Stelle von c) die Bedingung

c′) Es gibt ein A, so daß für alle n und alle ξ von (a, b)

$$\left|\int_a^\xi \varphi_n(\xi, x)\, d\xi\right| < A$$

ist. Unter weiteren Voraussetzungen über den Kern gilt (13) auch an gewissen Unstetigkeitsstellen, z. B. wo $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ oder an solchen, wo $f(x)$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist.

Nach *Rademacher*[14]) ist für alle normierten Orthogonalsysteme fast überall in $\langle a, b\rangle \int_a^b |\varphi_n(\xi, x)|\, d\xi = O\left(n^{\frac{1}{2}}(\ln n)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$, und diese Abschätzung kann, wie er durch ein spezielles System zeigt, nicht wesentlich herabgedrückt werden.

Schon *du Bois-Reymond* und *Dini*[26a]) erkannten die prinzipielle Bedeutung der singulären Integrale für die Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen. *Kneser* und *Hobson*[27]) zeigen, daß die Bedingungen a), b) und c′) bei allen in x stetigen Funktionen von beschränkter Schwankung für die Gültigkeit von (12) hinreichend sind. *Hobson* untersucht auch die Frage der Darstellbarkeit durch die ersten arithmetischen Mittel[28]) der Partialsummen von (12). In Anschluß an die bekannten entsprechenden Untersuchungen bei trigonometrischen *Fourier*reihen konstruiert *Haar*[28]) für alle normierten orthogonalen Funktionensysteme $\varphi_\nu(x)$, bei denen statt c) nur c′) erfüllt ist, stetige

---

26a) *P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 69 (1868), p. 65—108; J. f. Math. 79 (1875), p. 38—66; *U. Dini*, Serie di Fourier, Pisa 1880; für mehrere Variable, *U. Dini*, Palermo Rend. 18 (1904), p. 318—359.

27) *A. Kneser*, Math. Ann. 60 (1905), p. 402—423; *E. W. Hobson*, London math. Soc. Proc. (2) 6 (1908), p. 349—395; vgl. auch *E. Helly*, Wien Ber. 121 (1912), p. 1539—1549; *H. Lebesgue*, l. c. 12a), p. 76 gibt auch notwendige und hinreichende Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz von (12) in einem Intervalle, wenn $f(x)$ von beschränkter Schwankung ist.

28) *E. W. Hobson*, l. c.; ferner *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Diss. Gött. 1909 und Math. Ann. 69 (1910), p. 331—371; 71 (1912), p. 38—53. Über die Anwendung der singulären Integrale auf die *Poisson*sche Summierung der trigonometrischen Reihen, vgl. *Haar*, Diss. l. c. p. 28; *H. Lebesgue*, l. c. 12a), p. 87; *H. Hahn*, l. c. 12b), p. 647. Der hier auftretende Kern ist der einfachste Repräsentant eines ganzen Typus von Kernen, den *Hahn* eingehend untersucht, ebenso faßt *Hahn* die im folgenden noch zu besprechenden Kerne als einfachste Beispiele allgemeiner Typen auf. Über die *Riemann*sche Summierung vgl. *M. Schechter*, Monatsh. f. Math. 22 (1911), p. 224—234, spez. p. 232; *H. Hahn*, l. c. p. 688.

Funktionen mit divergenter Entwicklung (12). Ferner bildet *Haar*[28a]) orthogonale Funktionensysteme $\varphi_\nu(x)$, für welche die Bedingungen a), b) und c) erfüllt sind, so daß für alle in $\langle a, b\rangle$ stetigen Funktionen die Entwicklung (12) gilt und sogar gleichmäßig konvergiert.

In Anschluß an diese Arbeiten gibt dann *Lebesgue*[12a]) eine systematische Theorie[29]) der singulären Integrale unter besonderer Herausarbeitung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit der Funktionen der Klassen L, L^2, der Klasse der Funktionen, welche nur Unstetigkeiten erster Art besitzen, und der Klasse der Funktionen beschränkter Schwankung durch (13). *Hahn*[29a]) erweitert die Theorie nach verschiedenen Richtungen.

Die Lehre von den singulären Integralen gestattet nun auch andere Fragen über die Darstellbarkeit gegebener Funktionen unter einheitlichem Gesichtspunkte zu betrachten. So erhält man aus ihr die bekannten Sätze über die Approximation stetiger Funktionen durch Polynome und durch endliche trigonometrische Summen (vgl. das Ref. *A. Rosenthal*, II C 9 und *E. Hilb* und *M. Riesz*, II C 10), dann sei auf eine der Lehre von den singulären Integralen formal ganz analoge Theorie des Interpolationsproblems, wie sie *Hahn*[30]) entwickelt hat, hingewiesen, ferner auf die formalen Analogien zu der von *Kojima* und *Schur*[31]) entwickelten Theorie der linearen Transformation unendlicher Reihen. Alle diese Theorien sind nach *Hahn*[32]) Spezialfälle einer umfassenden Theorie der Folgen linearer Operationen.

Wir sind jetzt auch in der Lage auseinanderzusetzen, inwiefern

---

28a) Vgl. auch *G. Faber*, Deutsche Math.-Ver. 19 (1910), p. 104—112.

29) Für mehrfache Integrale *B. H. Camp*, Amer. math. Soc. Trans. 14 (1913), p. 42—64.

29a) *H. Hahn*, l. c. 12b) untersucht u. a. die Frage, unter welchen Umständen die Formel $f^{(m)}(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(\xi)\varphi_n^*(\xi, x)\,d\xi$ für jede in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion $f(x)$ gilt, die in x eine m^{te} Ableitung $f^{(m)}(x)$ besitzt, was für die Frage der Differentiation unter dem Limes- und Integrationszeichen in (13) und damit auch für die gliedweise Differentiation von (12) von Bedeutung ist. Dann erweitert *Hahn* auch die Theorie der singulären Integrale auf unendlich große Intervalle, vgl. hierzu *W. Schlemper*, Einordnung des Fourierschen Integraltheorems in die Theorie der singulären Integrale, Diss. Bonn 1921.

30) *H. Hahn*, Math. Ztschr. 1 (1918), p. 115—142; *M. Theis*, Math. Ztschr. 3 (1919), p. 93—113; *Th. Radakovic*, Über singuläre Integrale und Interpolationsverfahren. Diss. Bonn 1921.

31) *T. Kojima*, Tôhoku J. 12 (1917), p. 291—326; 14 (1918), p. 64—79; *J. Schur*, J. f. Math. 151 (1920), p. 64—111.

32) *H. Hahn*, Monatsh. f. Math. 32 (1922), p. 3—88.

die Entwicklungstheoreme, welche sich aus der Theorie der Integralgleichungen ergeben, starke Voraussetzungen bei den zu entwickelnden Funktionen machen, Forderungen, die nicht durch die Natur der Entwicklung bedingt sind. In der Theorie der Integralgleichungen zeigt man nämlich den Satz: Sei $K(x, \xi)$ eine reelle, symmetrische Funktion von x und ξ, für welche $\int_a^b\int_a^b [K(x, \xi)]^2 dx\, d\xi$ endlich ist. Die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ seien die zu dem Kerne $K(x, \xi)$ gehörigen normierten Eigenfunktionen, λ_ν die entsprechenden Eigenwerte, so daß also

$$(18) \qquad \varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi$$

ist. Dann läßt sich jede Funktion $f(x)$, zu der eine L^2 angehörende Funktion $g(x)$ derart existiert, daß

$$(19) \qquad f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

ist, in die in $\langle a, b\rangle$ absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$(20) \qquad f(x) = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_a^b \varphi_\nu(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \sum_1^\infty{}^{\nu} \varphi_\nu(x) \int_a^b \varphi_\nu(\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

entwickeln.[33]) Ein ganz entsprechender Satz gilt bei Funktionen beliebig vieler Veränderlicher. Eine Funktion $f(x)$, die sich in der Form (19) darstellen läßt, nennt *Kneser* in seinem in der Literaturübersicht angegebenen Buch in Anschluß an die Wärmelehre „quellenmäßig" darstellbar. Es wird nun in (20) $\sum_1^n{}^{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$ herangezogen, statt wie oben $\varphi_n(x, \xi)$. Immerhin gewinnt *Kneser*[34]) in wichtigen Fällen auf diesem Wege eine weitgehende Verschärfung der hinreichenden Bedingungen für die zu entwickelnden Funktionen unter Heranziehung der Reihenentwicklung der ersten Ableitung des Kernes. In ähnlicher Richtung geht auch eine von *Mercer*[20a]) entwickelte, sehr weittragende Methode.

---

33) Ist $K(x, \xi)$ stetig und positiv definit, so konvergiert schon die Entwicklung für $K(x, \xi)$ absolut und gleichmäßig. *J. Mercer*, Phil. Trans. A. 209 (1909), p. 415—446; *A. Kneser*, Palermo Rend. 37 (1914), p. 169—197; *J. Schur*, Festschr. für *H. A. Schwarz*, Berlin 1914, p. 392—409.

34) *A. Kneser*, Math. Ann. 63 (1907), p. 477—524; ferner l. c. 27) und Palermo Rend. 27 (1909), p. 117—147. Vgl. ferner das in der Literaturübersicht genannte Buch *Knesers*.

Bezüglich der Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen eines polaren Kernes und eines symmetrisierbaren Kernes sowie nach den Eigenfunktionen einer belasteten Integralgleichung müssen wir auf II C 13, *Hellinger* und *Toeplitz* verweisen.

5. Integraldarstellungen. Neben die Reihenentwicklungen stellen sich die Integraldarstellungen, als deren einfachster Typus das *Fourier*sche Integraltheorem (vgl. II A 12, *Burkhardt*, p. 1085)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi = \tfrac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$$

anzusehen ist. Dieses gilt, wenn $f(x)$ in jedem endlichen Intervall zur Klasse L gehört, in dem betrachteten x eine der für die Gültigkeit der gewöhnlichen trigonometrischen *Fourier*reihen hinreichenden Bedingungen (vgl. *E. Hilb* und *M. Riesz*, II C 10, Nr. 4) erfüllt und wenn außerdem entweder $f(\xi)$ in der Umgebung von $\pm\infty$ absolut integrierbar ist oder mit $\xi \to \pm\infty$ monoton oder monotoid nach Null konvergiert.[35]) Als Verallgemeinerung des *Fourier*schen Integraltheorems sind zunächst die Integraldarstellungen *Hamiltons*[36]) vermittels fluktuierender Funktionen anzusehen, dann aber auch die in Nr. **13** zu besprechenden Darstellungen. Eine allgemeine Theorie der Integraldarstellungen ergibt sich aus der Theorie der singulären Integralgleichungen[37]), läßt sich aber auch, wie *Plancherel*[38]) zeigt, davon unabhängig aufbauen. Speziell gilt auch hier[38]) eine der *Parseval*schen Gleichung entsprechende Beziehung, ferner lassen sich auch die in Nr. 2 erwähnten Sätze über wesentlich gleichmäßige Konvergenz entsprechend übertragen.

---

35) *A. Pringsheim*, Deutsche Math.-Ver. 16 (1907), p. 2—16; Math. Ann. 68 (1910), p. 367—408; 71 (1911), p. 289—298 und *W. H. Young*, Edinb. Roy. Soc. Proc. 31 (1911), p. 559—586. Vgl. ferner *H. Weyl*, Deutsche Math.-Ver. 20 (1911), p. 129—141 und p. 339, sowie *H. Hahn*, l. c. 12b), p. 655, 671 und *W. Schlemper*, l. c. 29a). Eine wichtige Verallgemeinerung des *Fourier*schen Integraltheorems vermittelst konvergenzerzeugender Faktoren gibt *A. Sommerfeld*, Die willkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik, Diss. Königsberg 1891. Vgl. hierzu *G. H. Hardy*, Cambridge Phil. Soc. Trans. 21 (1911), p. 427—451.

36) *R. W. Hamilton*, Dubl. Trans. 19 (1843), p. 264—321; vgl. auch *E. W. Hobson*, London math. Soc. Proc. (2) 7 (1909), p. 338—358.

37) *H. Weyl*, Math. Ann. 66 (1909), p. 273—324; *M. Plancherel*, l. c. 14) und Riv. fis. math. nat. 10 (1909), p. 37—53; *T. Carleman*, Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken, Diss. Upsala 1916, behandelt Integraldarstellungen bei symmetrisierbaren Kernen.

38) *M. Plancherel*, l. c.

II. Entwicklungen nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen.

6. Auftreten der Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. Man kommt in der mathematischen Physik zu den wichtigsten Reihenentwicklungen auf folgende zwei Weisen:

1. Man kennt von einer linearen Differentialgleichung des elliptischen Typus (II A 7c, *Sommerfeld*, p. 515), etwa der Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{21}$$

im Bereiche $T + S$ (II C 3, *Lichtenstein*, p. 183) unendlich viele Lösungen $\varphi_\nu(x, y, z)$. Es sind dann die Konstanten c_ν so zu bestimmen, daß $\sum_1^\infty{}_\nu\, c_\nu \varphi_\nu(x, y, z)$ in T der Differentialgleichung (21) genügt und auf der Oberfläche S mit einer vorgegebenen Funktion $f(x, y, z)$ zusammenfällt.

2. Man hat eine Differentialgleichung vom parabolisch-elliptischen Typus

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(x, y, z)\Delta u, \tag{22}$$

bezüglich vom hyperbolisch-elliptischen Typus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k(x, y, z)\Delta u, \tag{23}$$

wobei $k(x, y, z)$ eine im Bereiche $T + S$ nicht verschwindende Funktion ist. Man sucht eine Lösung der Differentialgleichung (22) bzw. (23) innerhalb T, für welche auf der Oberfläche S

$$h_1(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n} + h_2(x, y, z)u = 0 \tag{24}$$

ist, (h_1 und h_2 sind dabei auf der Oberfläche S gegebene stetige Funktionen, $\frac{\partial}{\partial n}$ bedeutet die Ableitung nach der in das Innere gerichteten Flächennormale), welche ferner für $t = 0$ gleich einer vorgegebenen Funktion $f(x, y, z)$ ist. Im Falle der Differentialgleichung (23) soll außerdem $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$ gleich einer anderen vorgegebenen Funktion $f_1(x, y, z)$ werden. Man sucht nun zunächst etwa im Falle (22) spezielle Lösungen der Form

$$u_{\lambda_\nu} = e^{-\lambda_\nu t}\varphi_\nu(x, y, z), \tag{25}$$

wobei λ_ν ein Parameter ist, der so zu bestimmen ist, daß $\varphi_\nu(x, y, z)$,

welches in T der Differentialgleichung

$$\Delta\varphi + \frac{\lambda_\nu}{k(x,y,z)}\varphi = 0 \tag{26}$$

genügt, auf dem Rande S die Bedingung (24) erfüllt. Die Werte λ_ν, für welche eine solche Lösung existiert, heißen die Eigenwerte der Aufgabe, die entsprechenden Lösungen $\varphi_\nu(x, y, z)$ die Eigenfunktionen. Die Eigenwerte λ_ν sind reell und haben ∞ als Häufungspunkt. Man hat dann zu untersuchen, welchen Bedingungen die vorgegebene Funktion $f(x, y, z)$ zu unterwerfen ist, damit sie sich in der Form

$$f(x,y,z) = \sum_1^\infty{}^\nu c_\nu \varphi_\nu(x,y,z) \tag{27}$$

mit c_ν als Konstanten darstellen läßt und damit

$$u(x,y,z,t) = \sum_1^\infty{}^\nu c_\nu e^{-\lambda_\nu t}\varphi_\nu(x,y,z) \tag{28}$$

in T die Differentialgleichung (22) und auf S die Randbedingung (24) erfüllt. Dies ist dann der Fall, wenn man die rechte Seite von (28) für $t > 0$ einmal gliedweise nach t und zweimal gliedweise nach x, y und z differenzieren darf. In (27) haben wir eine Entwicklung der Form (I). Es genügt aber für den vorliegenden Fall zu zeigen, daß man zu zwei beliebig kleinen positiven Zahlen ε und δ eine Größe η so bestimmen kann, daß für $0 < t < \eta$, $d \geqq \delta$

$$|u(x,y,z,t) - f(x,y,z)| < \varepsilon \tag{29}$$

wird, wenn d den kleinsten Abstand des Punktes x, y, z vom Rande S bezeichnet. Gerade diese der Natur des Problems angepaßte Fragestellung ist bisher in der Literatur verhältnismäßig wenig behandelt. *Le Roy*[39]) löst die letztere Aufgabe für eine stetige Funktion $f(x, y, z)$ unter der Annahme, daß die Existenz der Lösung des Problems auf andere Art bewiesen sei, während *Zaremba* die Lösung direkt aus dem *Cauchy*schen Integralsatz (vgl. Nr. **11** und **12**) erhält. Auf ganz entsprechende Fragestellungen kommt man bei der Differentialgleichung (23) durch den Ansatz

$$u_{\lambda_\nu} = \cos\lambda_\nu t\ \ \varphi_\nu(x,y,z) \text{ bzw. } v_{\lambda_\nu} = \sin\lambda_\nu t\ \ \varphi_\nu(x,y,z). \tag{30}$$

Jedoch muß man in diesem Falle, um das Analogon zu der eben erwähnten Lösung von *Le Roy* und *Zaremba* zu erhalten, konvergenzerzeugende Faktoren $e^{-\lambda_\nu\Theta}$ einführen, wobei Θ ein Parameter ist, den

39) *Le Roy,* Ann. Éc. Norm. (3) 15 (1898), p. 9—178, spez. p. 160f.; *L. Zaremba,* Krak. Anz. 1905, p. 69—167; vgl. auch *A. Sommerfeld,* l. c. 35).

man nach 0 konvergieren läßt. (Vgl. hierzu auch II A 10, *Wangerin*, p. 718.)

Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen von Differentialgleichungen höherer Ordnung treten vor allem in der Elastizitätstheorie auf.

7. Randwertaufgaben. Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung

$$(31)\quad L(u)+\lambda q(x)u \equiv p_0\frac{d^n u}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n u+\lambda q(x)u=0,$$

deren Koeffizienten p_{n-k} reelle, im Intervalle $\langle a, b\rangle$ $k$mal stetig differenzierbare Funktionen sein sollen; λ ist ein Parameter, die stetige Funktion $p_0(x)$ soll in $\langle a, b\rangle$ nie Null werden, p_n und q sollen stetig sein. Dann sind die Koeffizienten der adjungierten Differentialgleichung (II A 4B, *Vessiot*, p. 270)

$$(32)\quad M(v)+\lambda q(x)v \equiv \sum_0^n{}^k (-1)^k\frac{d^k(p_{n-k}v)}{dx^k}+\lambda q(x)v=0$$

in $\langle a, b\rangle$ stetig, und es ist

$$(33)\quad \int_a^b [vL(u)-uL(v)]\,dx = P(u, v),$$

wo $P(u,v)$ eine bilineare Form der beiden Folgen

$$(34\text{a})\quad u(a),\ u'(a),\ \ldots\ u^{(n-1)}(a),\ u(b),\ u'(b),\ \ldots\ u^{(n-1)}(b)$$

und

$$(34\text{b})\quad v(a),\ v'(a),\ \ldots\ v^{(n-1)}(a),\ v(b),\ v'(b),\ \ldots\ v^{(n-1)}(b)$$

ist. Für u schreiben wir n lineare homogene Randbedingungen[40])

$$(35)\quad U_j(u)=0;\ (j=1, 2, \ldots n),$$

vor, wobei die U_j lineare homogene, voneinander linear unabhängige Funktionen der Größen (34a) sind. Ergänzt man dann die Formen (35) durch n weitere lineare Formen U_{n+j}, $(j=1, 2, \ldots n)$, zu $2n$ linear unabhängigen Formen, so kann man die in (34a) vorkommenden Größen durch die U_j, $(j=1, 2, \ldots 2n)$ linear ausdrücken und erhält

$$(36)\quad P(u, v)=\sum_1^{2n}{}^j\, U_j(u)V_{2n-j+1}(v),$$

wobei die V_j $2n$ linear unabhängige lineare Formen der Größen (34b)

---

40) *G. D. Birkhoff*, Amer. math. Soc. Trans. 9 (1908), p. 373—395; *M. Bôcher*, Amer. mat. Soc. Trans. 14 (1913), p. 403—420. *D. Jackson*, Amer. math. Soc. Trans. 17 (1916), p. 418—424 stellt die Bedingung auf, unter der die Randbedingungen sich selbst adjungiert sind.

sind. Die Bedingungen

$$V_j(v) = 0, \; (j = 1, 2, \ldots n) \tag{37}$$

heißen dann die zu (35) adjungierten Randbedingungen. Besitzt nun (31) für $\lambda = \lambda_\nu$ k linear unabhängige Lösungen, welche den Randbedingungen (35) genügen, dann hat auch (32) für $\lambda = \lambda_\nu$ k linear unabhängige Lösungen, welche den Randbedingungen (37) genügen.[41]) Es sind daher die „Eigenwerte" λ_ν des Problems (31), (35) identisch mit den Eigenwerten des Problems (32), (37). Es seien nun u_ν, v_ν; u_μ, v_μ zu den Eigenwerten λ_ν bzw. λ_μ gehörige Eigenfunktionen von (31), (35) und (32), (37). Dann folgt aus (33)

$$(\lambda_\nu - \lambda_\mu)\int_a^b q(x) u_\nu(x) v_\mu(x)\, dx = 0, \tag{38}$$

so daß also den Eigenfunktionen $u_\nu(x)$ bei geeigneter Normierung ein adjungiertes System $q(x)v_\mu(x)$ entsprechend (II) zugeordnet ist, wenn keines der Integrale

$$\int_a^b q(x)\, u_\nu(x)\, v_\nu(x)\, dx = J_\nu \tag{39}$$

verschwindet. Im Falle, daß λ_ν ein mehrfacher Eigenwert ist, d. h., daß zu ihm mehrere Eigenfunktionen gehören, hat man die Eigenfunktionen entsprechend (II) zu normieren.

Für die Anwendungen am wichtigsten ist der Fall, daß bei geradem n die Differentialgleichung (31) und die Randbedingungen (35) sich selbst adjungiert sind, d. h., mit den entsprechenden Gleichungen (32) und (37) identisch sind. In diesem Falle bilden die Eigenfunktionen, wenn $q(x)$ in $\langle a, b\rangle$ nicht Null wird, ein orthogonales Funktionensystem, geht aber $q(x)$ in $\langle a, b\rangle$ durch Null, ein polares Funktionensystem. Sind alle p und q reell, so sind im ersteren Falle, wie unmittelbar aus (38) folgt, alle Eigenwerte reell. (Vgl. hierzu II A 12, *Burkhardt*, p. 1059f.) Für eine sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left(p_0 \frac{du}{dx}\right) + p_2(x)u + \lambda q(x)u = 0 \tag{40}$$

hat man als wichtigste[42]) sich selbst adjungierte Randbedingungen

---

41) *G. D. Birkhoff* und *M. Bôcher*, l. c.

42) *D. Hilbert*, 2. Mitt. p. 216. Der Fall, daß in den Endpunkten des Intervalles singuläre Stellen der Differentialgleichung liegen, wird in Nr. **13** besprochen.

für das Intervall $\langle a, b \rangle$

$$(41) \quad \begin{cases} \text{a) } y(a) = 0,\ y(b) = 0; \quad \text{b) } y'(a) = 0,\ y'(b) = 0; \\ \text{c) } y'(a) + ky(a) = 0,\ y'(b) + ly(b) = 0; \\ \text{d) } y(a) = ky(b); \quad p(a)y'(a) = \frac{p(b)}{k} y'(b); \\ \text{e) } y(a) = kp(b)y'(b); \quad p(a)y'(a) = -\frac{1}{k} y(b), \end{cases}$$

k und l sind dabei reelle Zahlen. Vgl. hierzu II A 7a, *M. Bôcher* und II A 12, *H. Burkhardt*, p. 1180. Jedes andere sich selbst adjungierte System von Randbedingungen kann man durch Einführung einer neuen Veränderlichen auf einen dieser 5 Fälle[43]) zurückführen. Bezüglich der Charakterisierung der einzelnen Eigenfunktionen durch ihre Nullstellen (Oszillationstheoreme), verweisen wir auf II A 7a, *Bôcher*.[44])

Bei den partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus kommen fast ausschließlich sich selbst adjungierte Probleme in Betracht. Geht man im Falle von drei unabhängigen Veränderlichen von der Differentialgleichung

$$(42) \quad \Delta u - \lambda q(x, y, z)u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda q(x, y, z)u = 0$$

oder allgemeiner von

$$(43) \quad L(u) + \lambda q(x, y, z)u \equiv \frac{\partial}{\partial x} p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} p \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} p \frac{\partial u}{\partial z} + p_1 u + \lambda q u = 0$$

aus, wo p in einem beschränkten Innengebiete T der Klasse B (II C 3, *Lichtenstein*, p. 186) und auf dessen Rande S wesentlich positiv und einmal stetig differenzierbar sei, während p_1 und q daselbst stetig sein mögen, so tritt an die Stelle von (33) der *Green*sche Satz

$$(44) \quad \int_T [vL(u) - uL(v)]d\tau = \int_S p\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\omega,$$

wobei $d\tau$ das Raumelement von T, $d\omega$ das Flächenelement von S, $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der in das Innere gerichteten Flächennormale bedeutet (vgl. II C 3, *Lichtenstein*, p. 210; II A 7c, *Sommerfeld*, p. 514).

43) *O. Haupt*, Untersuchungen über Oszillationstheoreme, Diss. Würzburg 1911, p. 19.

44) Die Aufstellung des allgemeinen Oszillationstheorems für eine selbstadjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung bei positivem $q(x)$ bei selbstadjungierten Randbedingungen findet sich bei *G. D. Birkhoff*, Amer. math. Soc. Trans. (2) 15 (1909), p. 259—270; *O. Haupt*, l. c. 43). *O. D. Kellogg*, Amer. J. 38 (1916), p. 1—5; 40 (1918), p. 145—154, 225—234 untersucht das Bestehen einfacher Oszillationstheoreme bei allgemeinen Orthogonalsystemen.

Die Aufstellung der allgemeinsten sich selbst adjungierten Randbedingungen auf S ist in dem vorliegenden Falle noch nicht erledigt, wir beschränken uns daher auf die Aufzählung der wichtigsten

$$(45)\qquad a)\ u = 0,\qquad b)\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0,\qquad c)\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0,$$

wo h auf S eine stetige Funktion, insb. eine Konstante ist. Die Eigenfunktionen dieser Probleme bilden, wenn q in $T + S$ positiv ist, orthogonale Systeme. Von Systemen partieller Differentialgleichungen erwähnen wir hier nur dasjenige, welches aus der Gleichung

$$(46)\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} = a \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - b \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{u}$$

der elastischen Schwingungen, in der a und b positive Konstanten, $(3a > 4b)$ sind, durch die Substitution

$$(46a)\qquad \mathfrak{u} = e^{i\lambda t} u$$

hervorgeht. Als die drei wichtigsten Fälle von Randbedingungen auf S hat man

(47)
- a) $u = 0$;
- b) der durch die Verschiebung $\mathfrak{u}$ erzeugte Druck verschwindet auf S;
- c) $\operatorname{div} u = 0$, u normal zu S.

In allen drei Fällen erhält man orthogonale Systeme von Eigenfunktionen. Wir besprechen schließlich noch den Fall, daß der Parameter, statt in der Differentialgleichung, in den Randbedingungen auftritt. Geht man etwa von der Differentialgleichung

$$(48)\qquad \Delta u = 0$$

aus, so hat man als wichtigste Fälle derartiger Randbedingungen auf S

$$(49)\qquad \begin{cases} a)\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = 0; \\ b)\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = \lambda \varphi(x, y, z); \\ c)\ \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda \varphi(x, y, z) u = 0; \end{cases}$$

dabei ist $\varphi(x, y, z)$ stetig und positiv auf S, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a$ sind die Werte der Ableitungen in der Richtung der Innennormale bei Annäherung an S von innen bzw. von außen. Die Eigenfunktionen für a) und b) sollen im ganzen Raume mit Ausnahme von S, die für c) im Innen- oder Außenraume reguläre Potentialfunktionen sein, (II C 3, *Lichtenstein*, p. 197), ferner sollen die Eigenfunktionen für a) und b) beim Durchgang durch S stetig sein. Die (49a) entsprechenden

Eigenfunktionen sind von *Poincaré*[45]), die (49b) entsprechenden von *Le Roy*[46]), die (49c) entsprechenden von *Stekloff*[47]) eingeführt. Die *Le Roy*schen und *Stekloff*schen Eigenfunktionen bilden auf S ein orthogonales Funktionensystem. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, bei denen der Parameter λ in den Randbedingungen auftritt, vgl. man die Arbeiten[48]) von *Duhamel*, *Rayleigh*, *Wagner* und *Kneser*. Über den Zusammenhang der in dieser Nummer eingeführten Eigenfunktionen mit Aufgaben der Variationsrechnung[48a]) vgl. II A 7c, *Sommerfeld*, II A 8a, *Zermelo* und *Hahn*, p. 641.

8. Die Greensche Funktion bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen sich selbst adjungierter Probleme. Für die Gewinnung der Entwicklungstheoreme nach den in Nr. 7 besprochenen Eigenfunktionen ist die Einführung[49]) der *Green*schen Funktion von grundlegender Bedeutung. Wenn die Randwertaufgabe (31), (35) für einen gegebenen Parameterwert λ keine Lösung besitzt, so existiert eine den Randbedingungen (35) genügende Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda q(x) u = - g(x), \tag{50}$$

falls $g(x)$ in $\langle a, b \rangle$ eine stetige, nicht identisch verschwindende Funk-

---

45) *H. Poincaré*, Acta math. 20 (1897), p. 59—142. Vgl. hierzu *S. Zaremba*, Krak. Abh. 41 (1901), p. 350—405 und *A. Korn*, Über einen Satz von *Zaremba* in „Abhhandlungen zur Potentialtheorie“ 1902, sowie Palermo Rend. 35 (1913), p. 317—323; *J. Blumenfeld* und *W. Mayer*, Wien Sitzungsb. 123 (1914), p. 2011 bis 2047; *T. Carleman*, l. c. 37).

46) *Le Roy*, l. c. 39), p. 54f.; *W. Stekloff*, Ann. Éc. Norm. (3) 19 (1902), p. 455—490.

47) *W. Stekloff*, Paris C. R. 128 (1899), p. 984—987; *A. Korn*, Über die zweite und dritte Randwertaufgabe und ihre Lösung, in Abhandlungen zur Potentialtheorie 1901; *D. Hilbert*, 2. Mitt. p. 255. Über den von *Le Roy* auf Grund eines Versehens vermuteten Zusammenhang zwischen diesen Eigenfunktionen vgl. etwa *S. Zaremba*, Ann. Éc. Norm. (3) 20 (1903), p. 9—26.

48) *J. M. C. Duhamel*, J. Éc. Pol. (I.) 29 (1843), p. 1—36; *Lord Rayleigh*, The theory of sound (Cambridge 1893) I, p. 200f.; *K. W. Wagner*, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln (Leipzig, Teubner 1908), p. 60f.; *A. Kneser*, l. c. 33).

48a) Vgl. hierzu insbesondere *R. Courant*, Math. Ztschr. 7 (1920), p. 1—57.

49) *H. Poincaré*, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Paris 1895, p. 261; *H. Burkhardt*, Bull. Soc. math. 22 (1894), p. 71—75; *D. Hilbert*, 2. Mitt. p. 214; *M. Bôcher*, Amer. math. Soc. Bull. 7 (1901), p. 297—299; Ann. of math. (2) 13 (1911), p. 71—88; *W. Westfall*, Zur Theorie der Integralgleichungen, Diss. Göttingen 1905. Für Systeme von linearen Differentialgleichungen vgl. *D. Hilbert*, 5. Mitt. p. 476; *Bounitzky*, J. de math. (6) 5 (1909), p. 65—125 und *A. Schur*, Math. Ann. 82 (1921), p. 213—236.

tion ist. Man kann diese Lösung $u(x)$ in der Form

$$(51)\qquad u(x) = \int_a^b G(\lambda; x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

darstellen (vgl. II A 4b, *Vessiot*, p. 263); $G(\lambda; x, \xi)$ heißt, in Analogie zu der entsprechenden Darstellung in der Potentialtheorie, die zu (31) und (35) gehörige *Green*sche Funktion.[50]) $G(\lambda; x, \xi)$ genügt als Funktion von x der Differentialgleichung (31) und den Randbedingungen (35), hat aber an der Stelle $x = \xi$ eine unstetige $n - 1^{\text{te}}$ Ableitung, so daß

$$(52)\qquad \left[\frac{d^{n-1} G(\lambda; x, \xi)}{dx^{n-1}}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{d^{n-1} G(\lambda; x, \xi)}{dx^{n-1}}\right]_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

ist. Durch Anwendung von (33) folgt

$$(53)\qquad G(\lambda; x, \xi) = (-1)^n H(\lambda; \xi, x),$$

wenn $H(\lambda; x, \xi)$ die mit $G(\lambda; x, \xi)$ stets gleichzeitig existierende *Green*sche Funktion von (32), (37) ist. Da man bei geeigneter Normierung n linear unabhängige Integrale von (31) angeben kann, die ganze transzendente Funktionen des Parameters λ sind (vgl. II B 5, *Hilb*, p. 501), so folgt aus der expliziten Darstellung von $G(\lambda; x, \xi)$ durch diese Integrale, daß sich $G(\lambda; x, \xi)$ als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen von λ darstellen läßt, dessen Nenner von x und ξ unabhängig ist. Vgl. hierzu speziell die in Nr. **12** besprochene Arbeit von *Kneser*[83]). Die Pole von $G(\lambda; x, \xi)$ sind die zu (31), (35) gehörigen Eigenwerte. Es sei λ_ν ein solcher Eigenwert, $u_\nu(x)$ die dazugehörige entsprechend II normierte Eigenfunktion, so folgt aus (51)

$$(54)\qquad u_\nu(x) = (\lambda_\nu - \lambda) \int_a^b q(\xi)\, G(\lambda; x, \xi)\, u_\nu(\xi)\, d\xi;$$

$u_\nu(x)$ und $\lambda_\nu - \lambda$ sind also Eigenfunktionen und Eigenwerte einer Integralgleichung mit dem Kern $q(\xi)\, G(\lambda; x, \xi)$. Ist n gerade und sind (31) und (35) sich selbst adjungiert, so ist nach (53) $G(\lambda; x, \xi)$ symmetrisch in x und ξ[51]). Wenn daher $q(x)$ in $\langle a, b \rangle$ wesentlich positiv ist, so erhält man durch die Substitution

$$(55)\qquad u_\nu(x) \sqrt{q(x)} = U_\nu(x)$$

$U_\nu(x)$ als Eigenfunktion einer homogenen, linearen Integralgleichung mit dem symmetrischen Kerne $\sqrt{q(x)}\sqrt{q(\xi)}\, G(\lambda; x, \xi)$, der bei reellem Parameterwert λ reell ist. Ist beispielsweise $\lambda = 0$ kein Eigenwert,

50) Für den Fall, daß das betrachtete λ ein Eigenwert ist, führt *D. Hilbert*, 2. Mitt. p. 219 eine erweiterte *Green*sche Funktion ein.

51) *D. Hilbert*, 2. Mitt. p. 220f. Bei ungeradem n ist $G(\lambda; x, \xi)$ schiefsymmetrisch.

und ist $G(x, \xi)$ die zu $\lambda = 0$ gehörige *Green*sche Funktion, so kann man nach (51) jede den selbstadjungierten Randbedingungen (35) genügende n-mal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ vermittels einer stetigen Funktion $g(x)$ in der Form

$$(56)\quad \begin{cases} f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi \\ \text{oder} \\ f(x)\sqrt{q(x)} = \int_a^b G(x, \xi)\sqrt{q(x)}\sqrt{q(\xi)}\,\frac{g(\xi)}{\sqrt{q(\xi)}}\, d\xi \end{cases}$$

darstellen, so daß also nach Nr. 4 die Reihe

$$(57)\qquad f(x) = \sum_1^\infty {}_\nu \int_a^b f(\xi)\, q(\xi)\, u_\nu(\xi)\, d\xi\, u_\nu(x)$$

in $\langle a, b\rangle$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Sind $f(x)$ und $\frac{L(f(x))}{q(x)}$ n-mal stetig differenzierbar und genügen beide den Randbedingungen (35), so darf man die Reihe n-mal gliedweise differenzieren, und zwar gilt dieses auch, wenn man die einzelnen Summanden mit $\cos\sqrt{\lambda_\nu}\, t$ oder $\sin\sqrt{\lambda_\nu}\, t$, bezüglich bei positivem t mit $e^{-\lambda_\nu t}$ multipliziert hat. Man darf auch diese neuen Reihen gliedweise zweimal bzw. einmal nach t differenzieren. Die wichtigsten Methoden, welche das Entwicklungstheorem unter weniger einschränkenden Bedingungen liefern oder auch bei nicht selbstadjungierten Problemen zum Ziele führen, bedienen sich einer angenäherten Darstellung der Integrale von (31) bei großen Werten von $|\lambda|$. Es soll in Nr. **11** und **12** näher darauf eingegangen werden. Da diese angenäherten Darstellungen versagen, oder wenigstens sehr unhandlich werden, wenn $q(x)$ in $\langle a, b\rangle$ sein Vorzeichen wechselt, so wollen wir diesen Fall, der bisher nur bei selbstadjungierten Problemen behandelt ist, hier besprechen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf die Differentialgleichung

$$(58)\qquad L(u) + \lambda q u \equiv \frac{d^2 u}{dx^2} + p_2 u + \lambda q u = 0$$

beschränken; p_2 und q seien in $\langle a, b\rangle$ stetig. Nimmt $q(x)$ in $\langle a, b\rangle$ nur in einer endlichen Anzahl von Punkten den Wert 0 an, ein Fall, in welchem man übrigens noch die eben erwähnten angenäherten Darstellungen der Integrale von (58) angeben kann, und ist die zu den Randbedingungen gehörige *Green*sche Funktion $G(x, \xi)$ von (58) für $\lambda = 0$ positiv definit, d. h. ist stets

$$(59)\qquad \int_a^b\!\!\int_a^b G(x, \xi)\, g(x)\, g(\xi)\, dx\, d\xi > 0$$

für alle Funktionen $g(x)$ der Klasse L^2, so folgt aus der Theorie der polaren Integralgleichungen[52]), daß jede viermal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$, welche ebenso wie $L(f)$ die Randbedingungen und außerdem in den Nullstellen von $q(x)$ gewisse Bedingungen erfüllt, nach den Eigenfunktionen des Problems in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar ist. *Lichtenstein*[53]) wendet unter der Voraussetzung, daß p_2 in $\langle a, b\rangle$ negativ sei, im Falle der Randbedingungen (41) a), b) und c), wenn in (41c) $k < 0$, $l > 0$ ist, direkt die Methode der unendlich vielen Variabeln an, indem er etwa im Falle (41a) eine willkürliche, den Randbedingungen genügende, zweimal stetig differenzierbare Funktion $v(x)$ einführt, so daß

$$\int_a^b \left[\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - (p_2 + \lambda q)uv\right]dx = 0 \tag{60}$$

wird. Durch Anwendung von (9b) auf (60) für trigonometrische *Fourier*koeffizienten wird der Übergang zu einer vollstetigen symmetrischen Bilinearform von unendlich vielen Variabeln gewonnen. Auf diese Weise erhält dann *Lichtenstein* für eine Funktion $f(x)$, deren erste Ableitung zu L^2 gehört und die im Falle (41a) noch die Randbedingungen erfüllt, das Entwicklungstheorem unter der Voraussetzung, daß q in $\langle a, b\rangle$ nicht streckenweise verschwindet. Verschwindet q streckenweise, so muß man selbstverständlich $f(x)$ in jenen Intervallen weitere Bedingungen auferlegen. Etwas weniger weit kommt *Tamarkine*[54]) mit Hilfe von später noch zu erwähnenden Methoden, welche *Stekloff*[73]) für die Behandlung des orthogonalen Falles entwickelt hat. *Tamarkine* nimmt nämlich von $q(x)$ an, daß seine Nullpunkte eine Menge vom Maße Null bilden. In bezug auf $f(x)$ nimmt er statt der Existenz einer zu L^2 gehörigen ersten Ableitung an, daß eine endliche feste Größe C existiere, so daß

$$|f(x+h) - f(x)| < Ch \tag{61}$$

ist. *Mason*[55]) erhält das Entwicklungstheorem in diesem Falle unter Benützung von Methoden der Variationsrechnung für eine die Rand-

52) *D. Hilbert*, 5. Mitt. p. 473—474. Bez. neuerer weitertragender Arbeiten für Entwicklungstheoreme nach Eigenfunktionen polarer Integralgleichungen vgl. II C 13, *Hellinger-Toeplitz*. Es sei hier nur *E. Garbe*, Math. Ann. 76 (1915), p. 527—547 erwähnt.

53) *L. Lichtenstein*, Paris C. R. 156 (1913), p. 993—996; Palermo Rend. 38 (1914), p. 113—166; Festschrift für *H. A. Schwarz*, Berlin 1914, p. 274—285; Prace mat. fiz. 26 (1914), p. 219—262.

54) *J. Tamarkine*, Paris C. R. 156 (1913), p. 1589—1591.

55) *M. Mason*, Amer. math. Soc. Trans. 8 (1907), p. 427—432.

bedingungen erfüllende, mit Ausnahme endlich vieler Punkte stetige und einmal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$.

9. Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Vgl. hierzu auch *L. Lichtenstein*, II C 12, Nr. 5. Den Übergang zu den Integralgleichungen vermitteln auch hier die *Green*schen Funktionen. Für $\Delta u = 0$ wurde die Existenz der *Green*schen Funktion in II C 3, *L. Lichtenstein*, für alle drei Randwertaufgaben (44) behandelt, für (42) und (43) ist auf *L. Lichtenstein*, II C 12, zu verweisen. Es sei $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ eine *Green*sche Funktion, die zu (43) für $\lambda = 0$ gehöre. Man kann immer, allenfalls nach einer ganzen linearen Substitution, erreichen, daß $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist, wodurch die Existenz dieser *Green*schen Funktion gesichert ist. Ist $G(\lambda; x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ die zu (43) bei beliebigem λ gehörige *Green*sche Funktion, so folgt aus dem *Green*schen Satze, daß $G(\lambda; x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\sqrt{q(x, y, z)\,q(\xi, \eta, \zeta)}$ die lösende Funktion der Integralgleichung mit dem symmetrischen Kern $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\sqrt{q(x, y, z)\,q(\xi, \eta, \zeta)}$, also als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen von λ darstellbar ist, dessen Nenner von λ allein abhängt. Die Nullstellen des Nenners sind die Eigenwerte. Durch ganz analoge Schlüsse wie in Nr. 8 folgt dann aus der Theorie der Integralgleichungen, daß, wenn $q(x, y, z)$ in $T + S$ positiv ist, jede in $T + S$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x, y, z)$, welche die Randbedingung erfüllt, nach den Eigenfunktionen des Problems in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar ist. Wechselt $q(x, y, z)$ in $S + T$ sein Vorzeichen, so hat man die Theorie der polaren Integralgleichungen heranzuziehen. Zu weitergehenden Resultaten kommt aber *Lichtenstein*[56]) durch Verknüpfung dieser Theorie mit der oben erwähnten Methode der unendlich vielen Variabeln.

Die Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen von (46) ergeben sich nach Nachweis der Existenz der zu jeder der drei Randbedingungen (47) gehörigen *Green*schen Tensoren[57]) aus der Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem reellem Kern, auf entsprechende Weise ergeben sich die Entwicklungstheoreme nach den

---

56) *L. Lichtenstein,* Math. Ztschr. 3 (1919), p. 127—160. Einen Existenzbeweis für die Eigenwerte vermittels Variationsrechnung gibt *M. Mason,* J. de math. (5) 10 (1904), p. 445—489.

57) *H. Weyl*, J. f. Math. 143 (1913), p. 177—202, Palermo Rend. 39 (1915), p. 1—49. Daselbst findet sich auch eine kritische Übersicht der einschlägigen Literatur. Vgl. auch *A. Korn,* Math. Ann. 75 (1914), p. 497—544; Annaes da Porto 10 (1915), p. 128—156.

Eigenfunktionen von (48) bei den Randbedingungen (49b) und (49c), während die *Poincaré*schen Eigenfunktionen auf eine Integralgleichung mit symmetrisierbarem Kerne führen (vgl. hierzu II C 3, *Lichtenstein*, p. 239). Die Entwicklungen nach den letztgenannten Funktionen liefern eine Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie. In manchen Fällen gelingt diese Lösung durch Reihenentwicklungen nach Potentialfunktionen, die sich nach Einführung neuer unabhängiger Variabeln ξ, η, ζ in der Form

$$(62) \qquad U_k(x, y, z) = F(\xi, \eta, \zeta)\, u_k(\xi)\, v_k(\eta)\, w_k(\zeta)$$

darstellen lassen, wobei u_k, v_k und w_k gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen genügen (vgl. hierzu II A 7b, *Burkhardt* und *Meyer*, p. 490 und II C 3, *Lichtenstein*, p. 292). II A 10, *Wangerin*, ist wesentlich der Untersuchung solcher Fälle und der dabei auftretenden Funktionen gewidmet. Wie *Klein* als erster in einer von der Göttinger philosophischen Fakultät 1890 gestellten, von *Bôcher*[58]) in Anschluß an die Vorlesung von *Klein* gelösten Preisaufgabe hervorhebt, kann man die Mehrzahl dieser Reihenentwicklungen und der entsprechenden Integraldarstellungen (vgl. Nr. **13**) als Ausartungen der entsprechenden Entwicklungen für einen von 6 konfokalen Zykliden begrenzten Raum erhalten (II A 10, *Wangerin*, Nr. **41** und **42**). Auf jeder der 6 Grenzflächen ist eine der neu eingeführten Koordinaten konstant. Man bestimmt dann zunächst eine Potentialfunktion, die auf 5 Flächen verschwindet und auf der sechsten vorgeschriebene Werte annimmt, durch Entwicklung der auf dieser vorgegebenen Funktion nach den Eigenfunktionen der aus (48) durch den entsprechenden Ansatz (62) etwa für $W_k(\xi, \eta) = u_k(\xi) v_k(\eta)$ entstehenden Differentialgleichung

$$(63) \qquad \frac{\partial^2 W_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W_k}{\partial \eta^2} + \left[-\tfrac{5}{4}(\mu^3 - \nu^3) + A_k(\mu - \nu)\right] W_k = 0,$$

wobei der Parameter A_k so zu bestimmen ist, daß die Eigenfunktionen auf dem Rande des auf der Fläche durch die vier benachbarten Seitenflächen ausgeschnittenen krummlinigen Vierecks verschwinden. μ und ν sind bekannte Funktionen von ξ und η. Bei *Bôcher* findet sich eine ausführlichere Untersuchung der formalen Fragestellungen, dann aber auch der Zusammenhang mit dem Oszillationstheorem (II A 7a, *Bôcher*). Aus den obigen mit Hilfe der Integralgleichungen gewonnenen Entwicklungssätzen ergibt sich ohne weiteres die Entwicklung einer für das krummlinige Rechteck vorgegebenen Funktion, die zweimal stetig differenzierbar ist und auf den Rändern verschwindet, nach den ent-

58) *M. Bôcher*, Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894.

sprechenden Eigenfunktionen von (63). Der Beweis, daß sich alle Eigenfunktionen von (63) als Produkte $u_k(\xi)v_k(\eta)$ darstellen lassen, wurde von *Hilb* und *Hilbert*[59]) erbracht, eine direkte Ableitung für das Entwicklungstheorem wurde von *Dixon*[60]) vermittels des *Cauchy*schen Residuensatzes gewonnen. In ähnlicher Weise gelingt auch in einigen ebenen und räumlichen Fällen die Lösung der ersten Randwertaufgabe für (42) durch solche Reihenentwicklungen. Jedoch verhindert[61]) das Auftreten des Faktors $F(\xi, \eta, \zeta)$ im allgemeinen die entsprechende Lösung der zweiten und dritten Randwertaufgabe der Potentialtheorie.

10. Angenäherte Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen für große Parameterwerte. *Liouville*[62]) geht von der sich selbst adjungierten Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} p_0 \frac{du}{dx} + (p_2 + \lambda q)u = 0 \tag{64}$$

aus, in der p_0 und q in $< a, b >$ positiv und zweimal stetig differenzierbar sind, und setzt

$$z = \int_a^x \sqrt{\frac{q}{p_0}}\, dx, \quad \Theta = (qp_0)^{-\frac{1}{4}}, \quad u = \Theta U, \quad \lambda = r^2. \tag{65}$$

Dann geht (64) über in

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (r^2 - l_1)\, U = 0, \tag{66}$$

wobei l_1 in $< a, b >$ stetig und von r unabhängig ist. Setzt man dann

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + r^2 U = l_1 U \tag{67}$$

und faßt die rechte Seite vorübergehend als bekannt auf, so erhält man, wenn A und B Integrationskonstanten sind,

$$U = A \cos rz + B \sin rz + \frac{1}{r}\int_0^z l_1(z')\, U(z') \sin(r(z - z'))\, dz'. \tag{68}$$

Die Randbedingungen (41) a), b) und c) ändern bei der Transforma-

59) *E. Hilb,* Math. Ann. 63 (1907), p. 38—53; *D. Hilbert,* 6. Mitt., p. 58f.

60) *A. C. Dixon,* London math. Soc. Proc. (2) 5 (1907), p. 411—478.

61) *M. Bôcher,* l. c. p. 160.

62) *J. Liouville,* J. de math. (1) 1 (1836), p. 253—265; 2 (1837), p. 16—35, 418—436, spez. 2, p. 22f. und 420f. Vgl. hierzu II B 5 (*Hilb*), p. 502, ferner *A. Kneser,* Math. Ann. 58 (1904), p. 81—147; Deutsche Math.-Ver. 24 (1915), p. 25—41; *E. Hilb,* Math.-Ann. 71 (1912), p. 76—87; *O. Blumenthal,* Arch. Math. Phys. (3) 19 (1912) p. 136—174; *A. C. Dixon,* London Phil. Trans. A 211 (1912), p. 411—432.

tion ihre Form nicht. Betrachten wir den Fall (41c) und sei π die Länge des transformierten Intervalles, dann ergibt sich für den $n+1^{\text{ten}}$ Eigenwert r^2_{n+1}

$$(69) \qquad r_{n+1} = n + [0],$$

wenn wir mit *Birkhoff* die Abkürzung

$$(70) \qquad [v] = v + \frac{E(r)}{r}$$

einführen, wo v irgendeine von r unabhängige Größe ist, $E(r)$ aber unterhalb einer festen Schranke bleibt. Daß r^2_{n+1} der $n+1^{\text{te}}$ Eigenwert ist, folgt aus dem Oszillationstheorem. Man erhält dann, wenn l_1 von beschränkter Schwankung ist, für die normierten Eigenfunktionen die Darstellungen[63])

$$(71) \qquad U_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \left(1 + \frac{\alpha_1(n,z)}{n^2}\right) + \sin nz \left(\frac{\alpha(z)}{n} + \frac{\alpha_2(n,z)}{n^2}\right),$$

wobei $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$ und $|\alpha|$ unterhalb festen Schranken liegen. In manchen Fällen empfiehlt es sich zur Abschätzung der rechten Seite von (68) eine von *Bonnet*[64]) herrührende Methode anzuwenden, welche von der Voraussetzung ausgeht, daß man eine positive Funktion $\psi(z)$ kennt, so daß $\int\limits_0^\pi \psi(z')\, U_n^2(z')\, dz'$ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt. Diese Methode empfiehlt sich besonders dann, wenn in einem Randpunkte eine singuläre Stelle der Differentialgleichung liegt.[65]) In diesem Falle ist auch die Transformation (65) im allgemeinen nicht mehr in der unmittelbaren Umgebung der singulären Stelle anwendbar; man muß sich daher entschließen, durch andere einfache Funktionen, wie etwa im Falle der Kugelfunktionen durch *Bessel*sche Funktionen zu approximieren.[66]) Andererseits ist es aber manchmal nicht leicht, eine einfache approximierende Funktion aus der Differentialgleichung abzulesen, wie der von *Debye*[67]) behandelte Fall der Zylinderfunktionen zeigt, wenn Parameter und unabhängige Veränderliche gleichzeitig unendlich werden. *Darboux*[68]) gibt noch eine andere sehr wichtige Methode zur Gewinnung angenäherter Dar-

---

63) *E. W. Hobson*, l. c. 27), p. 378; *H. Weyl*, Palermo Rend. 29 (1910), p. 308—323.

64) *O. Bonnet*, J. de math. (1) 17 (1852), p. 265—300; *G. Darboux*, l. c. 6c), p. 47f.

65) *W. Stekloff*, Charkow Ber. (2) 10 (1907), p. 97—201.

66) *E. Hilb*, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 17—25.

67) *P. Debye*, Math. Ann. 67 (1909), p. 535—558.

68) *G. Darboux*, l. c. 6c), p. 29f.

stellungen der Eigenfunktionen für die Fälle an, in denen die Eigenfunktionen die Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung sind.

Allgemein stellen *Birkhoff* und *Perron*[69]) für die Integrale der Differentialgleichung

$$\text{(72)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n(x) y + \varrho^n y = 0,$$

in der $p_2(x), \ldots p_n(x)$ in $< a, b >$ reelle oder komplexe stetige Funktionen von x, $\lambda = \varrho^n$ ein reeller oder komplexer Parameter ist, angenäherte Darstellungen für große $|\varrho|$ auf. Für die Eigenwerte von (72) und (35) erhält man etwa bei geradem n durch Nullsetzen des Nenners von $G(\lambda;\, x, \xi)$ eine Gleichung der Form[70])

$$\text{(73)} \qquad [a_0]\, e^{\varrho w_\mu} + [a_1] + [a_2]\, e^{-\varrho w_\mu} = 0,$$

in der sich a_0, a_1 und a_2 aus den Koeffizienten der linearen Randbedingungen (35) berechnen lassen, w_μ aber eine der beiden Wurzeln vom absolut kleinsten reellen Teil der Gleichung

$$\text{(74)} \qquad w^n + 1 = 0$$

ist. Bei partiellen Differentialgleichungen führt die angenäherte Darstellung der *Green*schen Funktion gerade in der Umgebung der Eigenwerte auf bis jetzt noch nicht überwundene Schwierigkeiten. Trotzdem ist es *Weyl*[71]) durch eine genaue Analyse des Einflusses der Singularitäten eines symmetrischen Kernes auf die Verteilung der Eigenwerte der dazu gehörigen Integralgleichung gelungen, die Eigenwerte angenähert darzustellen. *Courant*[71]) gewinnt diese Resultate unabhängig von der Theorie der Integralgleichungen, indem er die Eigenwerte independent durch Extremumseigenschaften kennzeichnet. Diese Methode scheint dem Problem besonders angepaßt und daher auch besonders weittragend zu sein.

11. Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen nicht selbstadjungierter Probleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. In Weiterführung eines von *Cauchy* herrührenden Gedankens (II A 12, *Burkhardt,* p. 1227 ff.), auf den *Poincaré* besonders hinweist, betrachtet

---

69) *G. Birkhoff,* Amer. math. Soc. Trans. 9 (1908), p. 219—231; *O. Perron,* Heidelberg Abh. 1918, 13 und 1919, 6. Vgl. ferner *U. Dini,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 297—324, 3 (1899), p. 125—183, 11 (1905), p. 285—335, 12 (1906), p. 179—262.

70) *J. Tamarkine,* Palermo Rend. 34 (1912), p. 345—382, spez. p. 353.

71) *H. Weyl,* Math. Ann. 71 (1912), p. 441—479; J. f. Math. 141 (1912), p. 1—11, 163—181, ferner l. c. 57); *R. Courant,* Gött. Nachr. 1919, p. 255—264 und l. c. 48a); ferner Math. Ztschr. 15 (1922), p. 195—200.

Birkhoff den Ausdruck[72])

$$(75)\qquad J_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} d\lambda \int\limits_a^b G(\lambda;\, x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

in welchem $G(\lambda;\, x, \xi)$ die zu (72) und (35) gehörige *Green*sche Funktion, $f(x)$ eine in $\langle a, b\rangle$ einmal stückweise stetig differenzierbare Funktion, C_k eine geeignet gewählte, geschlossene Kurve in der komplexen λ-Ebene ist, als welche man bei den verschiedenen Werten von k etwa konzentrische Kreise wählen kann, deren Radius mit wachsendem k geeignet in das Unendliche wächst. J_k konvergiert dabei, wie aus der eben besprochenen angenäherten Darstellung von $G(\lambda;\, x, \xi)$ erschlossen werden kann, nach $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, bezüglich in den Randpunkten a und b nach bestimmten linearen Kombinationen von $f(a)$ und $f(b)$, wenn in (73) a_0 und a_2 von 0 verschieden sind. Anderseits erhält man aus (75) durch Anwendung des *Cauchy*schen Residuensatzes die gewünschte Entwicklung von $f(x)$ nach den normierten Eigenfunktionen des Problems, wobei aber im Falle mehrfacher Pole Modifikationen auftreten. Verschwindet a_0, aber nicht $[a_0]$ bzw. a_2, aber nicht $[a_2]$, so muß $f(x)$ weitergehenden Beschränkungen unterworfen werden, was aber bis jetzt noch nicht im einzelnen untersucht ist. Verschwindet aber $[a_0]$ bzw. $[a_2]$, so scheint überhaupt kein allgemeines Entwicklungstheorem zu existieren. *Tamarkine* beweist, wenn x in (a, b) liegt, mit derselben Methode das Entwicklungstheorem für Funktionen $f(x)$ von beschränkter Schwankung und unter Hinzuziehung einer von *Stekloff*[73]) herrührenden Methode für alle Funktionen[73a]), die in eine trigonometrische *Fourier*reihe entwickelbar sind. Ein entsprechendes Resultat gewinnt *Tamarkine* dann auch für die Darstellung durch die ersten arithmetischen Mittel der Partialsummen[74]) (vgl. *E. Hilb* und *M. Riesz*, II C 10).

72) l. c. 40); *J. Tamarkine,* l. c. 70); ferner *G. D. Birkhoff*, Palermo Rend. 36 (1913), p. 115—126; *J. Tamarkine,* Palermo Rend. 37 (1914), p. 376—378. Für Systeme linearer Differentialgleichungen vgl. *A. Schur,* l. c. 49).

73) *W. Stekloff,* Rend. dei Linc. 19 (1910), p. 490—496; *W. Stekloff* und *J. Tamarkine,* Palermo Rend. 31 (1911), p. 341—362.

73a) Für die *Sturm-Liouville*schen Reihen hat in dieser Richtung auch *J. Mercer*[20a]) besonders weitgehende Resultate erzielt. Für die allgemeinen Reihen gibt *W. E. Milne,* Amer. math. Soc. Trans. 19 (1918), p. 143—156 Restabschätzungen.

74) Diese Sätze beweist *A. Haar,* l. c. 28) für die Entwicklungen nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichung zweiter Ordnung bei selbstadjungierten Problemen. Vgl. auch *H. Weyl,* l. c. 63), *W. Stekloff* und *J. Tamarkine,* l. c. 73); *A. Haar* überträgt auf die *Sturm-Liouville*schen Entwicklungen den *Cantor*schen Eindeutigkeitssatz, den Satz von *du Boys-Reymond* und die *Riemann*sche Theorie der gewöhnlichen trigonometrischen Reihen, *H. Weyl*

Nachdem wir so über die am weitesten gehenden Resultate bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen berichtet haben, wenden wir uns zu einer historischen Übersicht über die die Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen betreffenden Fragen, wobei wir Gelegenheit haben werden, die Verwendbarkeit des *Cauchy*schen Satzes für die Entwicklungen nach den Eigenfunktionen partieller Differentialgleichungen zu besprechen.

12. Historischer Überblick. Als erste beschäftigen sich *Sturm*[75]) und *Liouville*[62]) mit der Frage nach der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen von (64) bei den Randbedingungen (41) a), b) und c). Nachdem *Sturm* die formalen Fragen für das Entwicklungstheorem sowie das Oszillationstheorem erledigt hatte, gelingt *Liouville* der Konvergenzbeweis in ganz korrekter Weise unter Heranziehung der in Nr. **10** besprochenen angenäherten Darstellungen der Eigenfunktionen $u_\nu(x)$ und der Eigenwerte λ_ν. Bildet man nun, wenn die c_ν die zu $f(x)$ gehörigen *Fourier*koeffizienten sind,

$$f(x) - \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} c_\nu u_\nu(x) = \psi(x), \tag{76}$$

so ist für alle ν

$$\int_a^b \psi(x) q(x) u_\nu(x)\, dx = 0. \tag{77}$$

Es ist dann zu zeigen, daß $\psi(x) \equiv 0$ ist, also zu zeigen, daß die Funktionen $u_\nu(x)$ ein abgeschlossenes System bilden. *Liouville*[76]) beweist dieses unter Heranziehung eines Satzes von *Sturm* unter der Voraussetzung, daß $\psi(x)$ in $\langle a, b\rangle$ nur eine endliche Anzahl von Nullstellen hat, welche Annahme aber unzulässig ist. Daher wenden sich die folgenden[77]) Beweisversuche der Methode des *Cauchy*schen Residuensatzes zu, ohne jedoch im allgemeinen *Sturm-Liouville*schen Falle auf die geeignete analytische Funktion (vgl. (75)) zu kommen, deren Residuen die Glieder der Entwicklung liefern. Die entscheidende Wendung für die Behandlung dieser Fragen bringt *Poincaré*[78]) und zwar

---

auch die Aussagen über die *Gibbs*sche Erscheinung. (Vgl. das Ref. II C 10, *E. Hilb* u. *M. Riesz.*) Vgl. ferner *M. Plancherel*, Ann. Éc. Norm. (3) 31 (1914), p. 223—262; (3) 39 (1922), p. 273—316.

75) *C. Sturm*, J. de math. 1 (1836), p. 106—186.

76) *J. Liouville*, J. de math. 1 (1836), p. 253—265. Vgl. II A 12 (*H. Burkhardt*), p. 1063.

77) Vgl. etwa *H. Heine*, J. f. Math. 89 (1880), p. 19—39 und besonders *U. Dini*, Serie di Fourier, Pisa 1880.

78) *H. Poincaré*, Palermo Rend. 8 (1894), p. 57—155.

gleich für die Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{78}$$

bei der Randbedingung (45a). *Poincaré* zeigt zunächst, daß, wenn $G(\lambda;\ x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta)$ die entsprechende *Green*sche Funktion, $f(x, y, z)$ eine gegebene stetige Funktion ist

$$J_\lambda = \int\limits_T G(\lambda;\ x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta)\, dT \tag{79}$$

eine meromorphe Funktion von λ ist (II A 7, *Sommerfeld*, p. 548), deren Residuen die Eigenfunktionen liefern. Auf Grund einer Abschätzung der Größe der Eigenwerte λ_ν und Eigenfunktionen u_ν folgert *Poincaré* die absolute Konvergenz der Reihen $\sum_1^\infty {}_\nu\, c_\nu u_\nu$ und $\sum_1^\infty {}_\nu\, \frac{c_\nu u_\nu}{\lambda_\nu}$, wenn f 6mal bzw. 4mal differenzierbar ist und außerdem $f, \Delta f$ und $\Delta\Delta f$ bzw. f und Δf auf dem Rande S verschwinden. Daraus ergibt sich die Darstellung von J_λ als Summe einer unendlichen Reihe von Partialbrüchen und einer ganzen transzendenten Funktion von λ, von der aber unter Benutzung ähnlicher Methoden, wie sie beim Beweise der Existenz der Eigenwerte (II A 7, *Sommerfeld*, p. 546f.) benutzt werden, gezeigt wird, daß sie ganz wegfällt. *Poincaré* erhält auf diesem Wege das Entwicklungstheorem für eine sechsmal stetig differenzierbare Funktion, für welche f, Δf und $\Delta\Delta f$ auf S verschwinden. *Poincaré* versuchte auch eine Ableitung des Entwicklungstheorems auf Grund des *Cauchy*schen Residuensatzes (Nr. **11**), scheiterte jedoch an der Schwierigkeit, eine angenäherte Darstellung von J_λ für große $|\lambda|$ in der Nähe der reellen λ-Achse zu gewinnen. In gewissem Umfange gelang dann *Zaremba*[79]) die Hebung dieser Schwierigkeit für eine Fläche S der Klasse B (*Lichtenstein*, p. 186), indem er durch Entwicklung von J_λ nach Potenzen von λ unter Benutzung des *Schwarz*schen Ansatzes (II A 7, *Sommerfeld*, p. 546) eine Abschätzung in der Nähe der reellen Achse erhält, die gestattet, das Entwicklungstheorem für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche die Randbedingungen erfüllt, abzuleiten. Eine weitere Einschränkung der Voraussetzungen für die zu entwickelnde Funktion setzt bei Anwendung dieser Methode eine angenäherte Darstellung von J_λ in der Nähe der Achse des Reellen voraus, wie sie in der übrigen komplexen λ-Ebene gelingt, was aber bisher noch nicht durchgeführt werden konnte. Die von *Poincaré* durchgeführte erste Methode erfuhr in der

79) *S. Zaremba*, Ann. Éc. Norm. (3) 16 (1899), p. 427—464; Paris C. R. 128 (1899), p. 1088—1089; J. de math. (5) 6 (1900), p. 47—72.

Folge eine wesentliche Verbesserung durch *Stekloff*[80]), welcher mit den von *Schwarz* und *Poincaré* geschaffenen Hilfsmitteln für jede einmal stetig differenzierbare Funktion, dann aber für jede quadratisch integrierbare Funktion die für den vorliegenden Fall (9a) entsprechende Gleichung ableitet, woraus dann das Entwicklungstheorem für jede zweimal stetig differenzierbare, der Randbedingung genügende Funktion folgt. Diese Methode wurde von *Korn*[81]) zur Lösung zahlreicher Einzelprobleme verwendet und auch dann noch von diesem beibehalten, als die Entwicklungssätze von *Hilbert* und *Schmidt* vorlagen, obwohl diese einfacher zu beweisen sind und obwohl die *Poincaré-Stekloff*sche Methode in jedem Einzelfall von *Korn* nochmals durchgeführt werden muß. *Stekloff* selbst wendet seine Methode auch auf das *Sturm-Liouville*sche Entwicklungstheorem an[82]) unter der Voraussetzung, daß in (41c) $k < 0$, $l > 0$ ist. Es gelingt ihm so die Ausfüllung der von *Liouville* gelassenen Lücke. Er muß aber von der zu entwickelnden Funktion voraussetzen, daß sie zweimal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen erfüllt. Erst *Kneser*[83]) gelingt es dann, das Entwicklungstheorem für jede den *Dirichlet*schen Bedingungen genügende Funktion zu beweisen, indem er die neugewonnenen Methoden mit den alten, von ihm weitergeführten *Liouville*schen vereinigt. Die letzteren liefern den Konvergenzbeweis; die oben erwähnte Lücke bei *Liouville* füllt *Kneser* unter Heranziehung der von *Schwarz* und *Poincaré* geschaffenen Methoden durch Beweis des Satzes aus, daß eine Funktion $\psi(x)$, für welche alle Gleichungen (77) erfüllt sind, für welche also alle Residuen von

$$J_\lambda = \int_a^b G(\lambda; x, \xi)\, \psi(\xi)\, d\xi$$

verschwinden, selbst identisch verschwindet. Das aus der Theorie der

---

80) *W. Stekloff,* l. c. 7), 23), 46) und 47), ferner Paris C. R. 126 (1898), p. 1022—1025, Paris C. R. 128 (1899), p. 279—282; in erster Linie Toulouse Ann. (2) 2 (1900), p. 273—303. Die Arbeit Toulouse Ann. (2) 6 (1904), p. 351 bis 475 steht schon unter dem Einflusse der Theorie der Integralgleichungen und ist in ihrem Gedankengang nahe dem von *E. Schmidt* l. c. 5) verwandt, wenn auch in der Durchführung lange nicht so einfach und durchsichtig.

81) Eine Zusammenstellung der einschlägigen Arbeiten *Korns* findet sich in dessen Buche *A. Korn,* Über freie und erzwungene Schwingungen, Leipzig 1910, Teubner.

82) *W. Stekloff,* Paris C. R. 126 (1898), p. 215—218; Toulouse Ann. (2) 3 (1901), p. 281—313. In späteren Arbeiten kommt *Stekloff* zu beträchtlich weitergehenden Resultaten, l. c. 65), 73), ferner Paris C. R. 144 (1907), p. 1329—1332, Petersb. Denkschr. 31 (1913), Nr. 7.

83) *A. Kneser,* Math. Ann. 58 (1904), p. 81—147 und l. c. 27).

Integralgleichungen gewonnene Entwicklungstheorem bedeutet für das *Sturm-Liouville*sche Problem insofern einen Fortschritt, als dieses Problem fast ohne weiteres durch die dort gegebenen allgemeinen Sätze gelöst wird; das so gewonnene Entwicklungstheorem macht aber dieselben Voraussetzungen wie das ursprüngliche *Stekloff*sche Theorem. Daher verfeinert *Kneser*[84]) das aus der Theorie der Integralgleichungen gewonnene Resultat in der in Nr. 4 angedeuteten Richtung so weit, daß die zu entwickelnde Funktion $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ nur den *Dirichlet*schen Bedingungen genügen muß. Besonders durchsichtig wird die *Kneser*sche Methode, wenn $f(x)$ als stückweise zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird, was für die physikalischen Anwendungen ausreicht. Dieselbe Methode[34]) führt auch bei gewissen Entwicklungen nach Eigenfunktionen partieller Differentialgleichungen zum Ziele, wenn die Eigenfunktionen sich als Produkte der Form (62) darstellen lassen, wenn man im Falle der Ebene von der zu entwickelnden Funktion annimmt, daß sie zweimal differenzierbar ist, aber die Randbedingungen nicht zu erfüllen braucht und längs einer beliebigen Anzahl sich selbst untereinander nicht schneidender, geschlossener oder von einem Punkte des Randes zu einem anderen Punkte des Randes gehender Kurven unstetige Ableitungen hat oder selbst unstetig ist. Wie schon in Nr. 4 erwähnt, ist mit dieser Methode von *Kneser* die von *Mercer*[20a]) nahe verwandt. Dieser geht im *Sturm-Liouville*schen Falle von der Formel

$$-\lambda\int_a^b G(\lambda;\, x, \xi)f(\xi)\,d\xi = \sum_\nu -\frac{\lambda}{\lambda_\nu-\lambda}\,\varphi_\nu(x)\int_a^b f(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi$$

aus und läßt λ auf der negativen reellen Achse ins Unendliche gehen. Unter Heranziehung der angenäherten Darstellung von $G(\lambda;\, x, \xi)$ für große $|\lambda|$ erhält *Mercer* unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über $f(x)$ für dieses zunächst eine Darstellung, welche als „Summationsformel" von I aufzufassen ist, und daraus dann das gewünschte Entwicklungstheorem selbst.

Für gewöhnliche Differentialgleichungen ist aber, wie erwähnt, die auf dem *Cauchy*schen Residuensatze beruhende Methode die weit-

84) *A. Kneser,* l. c. 34). Anwendungen dieser Methode finden sich in den Arbeiten von *E. Juretzka,* Die Entwicklungen unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen des schwingenden Stabes, Diss. Breslau 1909; *W. Sternberg,* Die Entwicklungen willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik mittels der Methode der Integralgleichungen, Diss. Breslau 1912; ferner *W. Sternberg,* Math. Ztschr. 3 (1919), p. 191—208; *W. Jaroschek,* Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Gliedern biorthogonaler Funktionensysteme bei einigen thermomechanischen Aufgaben, Diss. Breslau 1918.

tragendste. Sie wurde zuerst von *Dixon*[84a]) für das *Sturm-Liouville*sche Problem mit Erfolg herangezogen und wurde dann in der Folge die Quelle zahlreicher Entwicklungstheoreme, die nicht in den *Birkhoff*schen Resultaten enthalten und teilweise unabhängig von diesen entstanden sind.[85])

13. Darstellungen bei Auftreten singulärer Stellen der Differentialgleichungen. Um den Fall, daß in einem Endpunkte des Intervalls $\langle a, b \rangle$ eine singuläre Stelle der Differentialgleichung liegt, allgemein behandeln zu können, ist es zweckmäßig, die singuläre Stelle nach ∞ zu werfen und etwa das Intervall $0, \infty$ zu betrachten. Wir beschränken uns auf den Fall der Differentialgleichung

$$(80) \qquad L(u) + \lambda u \equiv \frac{d}{dx} p_0 \frac{du}{dx} + p_2(x) u + \lambda u = 0,$$

wobei $p_0(x)$ für $x \geqq 0$ positiv und stetig, $p_2(x)$ stetig ist. Indem *Weyl*[86]) zunächst λ komplex annimmt, zeigt er, daß entweder der absolute Betrag eines jeden Integrals von (80) oder der *eines* Integrals in $\langle 0, \infty \rangle$ quadratisch integrierbar ist. Im ersteren Falle, den *Weyl* im Anschluß an die geometrische Vorstellungen benutzende Ableitung den Grenzkreisfall nennt, kann man in 0 und ∞ eine der Randbedingungen (41) a), b) oder c) vorschreiben, und man kann jede in $\langle 0, \infty \rangle$ quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$, welche den Randbedingungen genügt und für welche auch $L(f)$ stetig und quadratisch integrierbar ist, in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen des Problems entwickeln. Im zweiten Falle, dem Grenzpunktfall, tritt an die Stelle einer Randbedingung für ∞ die Forderung, daß bei komplexem λ der absolute Betrag des Integrals in $\langle 0, \infty \rangle$ quadratisch integrierbar sei. Im Grenzpunkt-

84a) *A. C. Dixon,* London math. Soc. Proc. (2) 3 (1905), p. 83—103 und l. c. 62).

85) *E. Hilb,* J. f. Math. 140 (1911), p. 205—229; Math. Ztschr. 1 (1917), p. 58—69; *O. Haupt,* Münch. Ber. 1912, p. 289—301; *L. Koschmieder,* J. f. Math. 143 (1913), p. 285—293; *H. Laudien,* Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Funktionen spezieller orthogonaler und biorthogonaler Systeme, Diss. Breslau 1914 und *H. Laudien*, J. f. Math. 148 (1918), p. 79—87; *F. Betschler,* Über Integraldarstellungen, welche aus speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen entspringen, Diss. Würzburg 1914; *C. E. Wilder,* Amer. math. Soc. Trans. 18 (1917), p. 415—442; 19 (1918), p. 157—166 und *Teichmann,* Mechanische Probleme, die auf belastete Integralgleichungen führen, Diss. Breslau 1919. Vgl. ferner *A. Sommerfeld,* Deutsche Math.-Ver. 21 (1912), p. 309—353.

86) *H. Weyl,* Math. Ann. 68 (1910), p. 220—269; Gött. Nachr. 1909, p. 37 bis 63; Deutsche Math.-Ver. 20 (1911), p. 129—141.

falle kann man Reihenentwicklungen, Integraldarstellungen oder aus beiden zusammengesetzte Darstellungen erhalten. Fälle, in denen die gewöhnliche Theorie der Integralgleichungen mit reellem, symmetrischem Kerne anwendbar ist, werden von *Hilbert* und *Kneser*[87]) behandelt. Unter Heranziehung der Theorie der quadratischen Formen, dann aber direkt vermittelst des *Cauchy*schen Residuensatzes behandelt *Hilb*[88]) mehrere Fälle, in denen man auf Integraldarstellungen kommt; einer von diesen ist von *A. Kneser* in der zweiten Auflage seiner Integralgleichungen §§ 50—52 weiter verarbeitet. Bemerkenswert ist die im Anschluß an *Wirtinger*[89]) von *Hilb* gegebene Integraldarstellung, bei der das Integrationsintervall auf der reellen λ-Achse in ∞ viele getrennte Teilintervalle zerfällt. Von der Theorie der singulären Integralgleichungen ausgehend gibt *Weyl*[90]) die allgemeine Entwicklungsformel, jedoch in wenig übersichtlicher Gestalt. Eine weit einfachere Formel, die jedoch, da der Grenzübergang in die Achse der reellen λ zunächst nicht durchgeführt ist, als „Summationsformel" aufzufassen ist, gibt später *Hilb*.[91]) Um den Grenzübergang durchzuführen, hat man aber nur von der entsprechenden Darstellung für $\int\limits_0^a g(x)^2 dx$ auszugehen, in der a eine endliche Größe ist. Da für jede in $<0, \infty>$ zu L^2 gehörige Funktion $h(x)$

$$(81) \qquad \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty G_2(\lambda;\, x, \xi)\, h(x)\, h(\xi)\, dx\, d\xi$$

positiv ist, wenn $G_2(\lambda;\, x, \xi)$ der imaginäre Teil der *Green*schen Funktion $G(\lambda;\, x, \xi)$ ist, so kann man, wenn $g(x)$ in $\langle 0, \infty\rangle$ quadratisch

87) *D. Hilbert*, 2. Mitt., p. 216f.; *A. Kneser*, Arch. Math. Phys. (3) 7 (1904), p. 123—133; ferner l. c. 34) und *E. W. Hobson*, London math. Soc. Proc. (2) 7 (1909), p. 359—388; *E. Hilb*, l. c. 85), Math. Ztschr. 1; *L. Koschmieder*, Untersuchungen über *Jacobi*sche Polynome, Breslau 1919, Habilitationsschrift.

Hierher gehören auch die Entwicklungen nach den *Hermite*schen und *Laguerre*schen Polynomen. Vgl. *W. Lebedeff*, Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen, Diss. Göttingen 1906; Math. Ann. 64 (1907), p. 388—416; *H. Weyl*, l. c. 37) und: Singuläre Integralgleichungen, Diss. Göttingen 1908; *R. Neumann*, Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den *Hermite*schen und *Laguerre*schen Orthogonalfunktionen, Diss. Breslau 1912.

88) *E. Hilb*, Math. Ann. 66 (1908), p. 1—66; Erlanger Sitzungsber. 43 (1911), p. 68—71; vgl. auch *H. Weyl*, l. c. 87) und 37); *M. Plancherel*, Math. Ann. 67 (1909), p. 519—534; ferner l. c. 14).

89) *W. Wirtinger*, Math. Ann. 48 (1897), p. 365—389.

90) *H. Weyl*, l. c. 86), p. 250.

91) *E. Hilb*, Math. Ann. 76 (1915), p. 333—339; *Willi Windau*, Math. Ann. 83 (1921), p. 256—279.

integrierbar ist, den Grenzübergang in die reelle Achse der λ-Ebene durchführen und a dann ∞ werden lassen. Man erhält so die Darstellung für $\int_0^\infty G_2(\sqrt{-1};\, x, \xi) g(\xi) d\xi$ und daraus die Darstellung von $f(x)$ in der gewünschten einfachen Gestalt, wobei die von den Eigenfunktionen herrührenden Glieder von den anderen getrennt sind. Für viele Fälle ist aber die „Summationsformel" vorzuziehen.

Von Integraldarstellungen, die aus Randwertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen entspringen, sind die von *Hilb*[88]) bei gewissen Ausartungen des Zyklidensechsflaches (Nr. 9), die von *Sommerfeld*[92]) und von *Bär*[93]) bei unendlich großem Gebiete sowie die von *Carleman*[37]) bei der *Poincaré*schen Randbedingung (49a) und eckigem Rande aufgestellten zu erwähnen.

(Unter nachträglicher Berücksichtigung einzelner späterer Arbeiten abgeschlossen im Dezember 1920.)

Zweiter Teil.

Entwicklungen bei komplexen unabhängigen Veränderlichen.

Einleitung.[1]) Die Betrachtungen lassen sich in zwei Gruppen teilen:

1. *Reihenentwicklungen im engeren Sinne.* Der Ausgangspunkt ist hier eine unendliche Folge von Funktionen

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z), \ldots,\ \varphi_\nu(z), \ldots$$

der komplexen Variabeln z, und man betrachtet Reihen der Gestalt

$$c_0 \varphi_0(z) + c_1 \varphi_1(z) + \cdots + c_\nu \varphi_\nu(z) + \cdots \tag{1}$$

wo $c_0, c_1, \ldots$ Konstante bedeuten. Die hierher gehörigen Untersuchungen gruppieren sich um zwei Hauptfragen:

α) Welches ist der Konvergenz-(Summabilitäts-)Bereich der Reihe (1) bei gegebenen Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$, und welche Eigenschaften hat die dargestellte Funktion?

β) Wie bestimmt man zu einer gegebenen Funktion $f(z)$ die zugehörigen Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$, und wie läßt sich $f(z)$ durch die Reihe (1) berechnen?

---

92) *A. Sommerfeld*, Deutsche Math.-Ver. 21 (1912), p. 309—353.

93) *R. Bär*, Über Greensche Randwertaufgaben bei der Schwingungsgleichung, Diss. Würzburg 1915; Math. Ann. 78 (1917), p. 177—186.

1) Eine wesentliche Einschränkung dieses Teiles ergab sich daraus, daß manche Fragen dieses Gebietes in den Referaten II C 4 (*Bieberbach*) und II C 7 (*Nörlund*) behandelt sind. Auf diese wird an den betreffenden Stellen hingewiesen.

Die wichtigsten derartigen Funktionenfolgen sind:

a) $$\varphi_\nu(z) = e^{-\lambda_\nu z} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$
wo die λ_ν Konstante sind.

Die Reihe (1) heißt dann *Dirichletsche Reihe*; man vgl. hierüber das Ref. II C 8, *H. A. Bohr* und *H. Cramér*. Speziell erhält man bei $\lambda_\nu = \nu$ durch die Substitution $e^{-z} = x$ die Potenzreihen; vgl. hierzu das Ref. II C 4, *L. Bieberbach*.

b) $$\varphi_0(z) = 1,\ \varphi_\nu(z) = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\nu}{(z+\gamma_1)(z+\gamma_2)\cdots(z+\gamma_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$
Dieser Ansatz liefert die *Faktoriellenreihen erster Art*.

c) $$\varphi_0(z) = 1,\ \varphi_\nu(z) = (-1)^\nu \frac{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\cdots(z-\gamma_\nu)}{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$
die Reihe heißt *Faktoriellenreihe zweiter Art*.

Ich werde im folgenden diese beiden Arten so weit als möglich gemeinsam behandeln und nenne sie dann schlechtweg *Faktoriellenreihen*. Außerdem betrachte ich die Fälle:

d) Die $\varphi_\nu(z)$ sind die Näherungsnenner eines Kettenbruches.

e) Die $\varphi_\nu(z)$ sind Integrale linearer Differentialgleichungen.

f) Sonstige Reihenentwicklungen.

Für die Koeffizientenbestimmung bei den *Dirichlet*schen Reihen sei auf das Ref. II C 8, *H. A. Bohr* und *H. Cramér*, Nr. 4 verwiesen. Bei den Entwicklungen nach den Funktionen b) und c) ist sie in expliziter Form nur bei den Fakultätenreihen und Binomialkoeffizientenreihen vermittels einer Integraldarstellung der zu entwickelnden Funktion durchgeführt. In den Fällen d) und e) ergeben sich die Koeffizienten aus der Tatsache, daß die Funktionensysteme orthogonale bzw. biorthogonale sind; vgl. hierzu sowie auch für die entsprechenden Probleme im Reellen den 1. Teil.

Über die Anwendungen der Faktoriellenreihen auf Differenzengleichungen vgl. das Ref. II C 7 von *Nörlund*.

2. *Reihenentwicklungen im weiteren Sinne (Approximationen).* Darunter verstehen wir das Problem: Eine Funktion $f(z)$ durch lineare Aggregate der gegebenen Funktionen $\varphi_\nu(z)$ zu approximieren; es ist gleichbedeutend mit einer Entwicklung von $f(z)$ in der Gestalt:
$$\psi_1(z) + \psi_2(z) + \psi_3(z) + \cdots,$$
wobei
$$\psi_\nu = c_{\nu 0}\varphi_0 + c_{\nu 1}\varphi_1 + \cdots + c_{\nu\nu}\varphi_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$
ist und die $c_{\varkappa\nu}$ Konstante sind.

Für das entsprechende Problem im Reellen vgl. *A. Rosenthal* (II C 9).

1. Der Konvergenzbereich der Faktoriellenreihen (abgekürzt F.R.). Die Reihen

$$c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\nu}{(z+\gamma_1)(z+\gamma_2)\ldots(z+\gamma_\nu)}, \tag{2a}$$

$$c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_\nu)}{(-1)^\nu \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\nu} \tag{2b}$$

heißen *F.R. 1. bzw. 2. Art;* die γ_ν sind Konstante, die gewissen Bedingungen genügen. Die wichtigsten Untersuchungen beziehen sich auf den Spezialfall $\gamma_\nu = \nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$; die so entstehenden Reihen

$$c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{\nu!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+\nu)}, \tag{3a}$$

$$c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu c_\nu \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-\nu)}{\nu!} \tag{3b}$$

heißen *gewöhnliche F.Reihen 1. bzw. 2. Art;* oder auch schlechthin *Fakultätenreihen* bzw. *Binomialkoeffizientenreihen.* Mit Rücksicht auf die Referate II C 7, *Nörlund* und II C 8, *Bohr* und *Cramér* können wir uns hier ganz kurz fassen. Der Konvergenzbereich der Reihen (3) ist eine Halbebene, welche links durch eine Parallele zur Achse des Imaginären begrenzt ist.[2]) Das gleiche gilt für die Reihen (2), wenn die γ_ν reell sind und den Bedingungen genügen:

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots, \; \gamma_\nu \to \infty, \; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} \text{ divergiert;} \tag{4}$$ [3])

und sogar unter den allgemeineren Bedingungen:

$$\gamma_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu, \; \alpha_\nu \to +\infty, \; \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} \to 0, \; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|} \text{ divergiert.} \tag{5}$$ [4])

Mit anderen Worten: unter den obigen Bedingungen gibt es eine reelle Zahl λ, so daß für $R(z) > \lambda$ die Reihen (2) konvergieren, für $R(z) < \lambda$ divergieren. ($R(z)$ bedeutet: reeller Teil von z.) Dabei ist für die Reihe (2a) von den Punkten $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots$ abzusehen. Über

2) *I. L. W. V. Jensen,* a) Tidsskr. for Math. (4) 5 (1881), p. 130; b) Ebenda (5) 2 (1884). p. 63—72; c) Nyt Tidsskr. for Math. 2B (1891), p. 66; *N. Nielsen,* a) Ann. Éc. Norm. (3) 19 (1902), p. 409—453; b) Math. Ann. 59 (1904), p. 356 bis 359; c) Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig (Teubner) 1906, p. 239, 245; *E. Landau,* Münch. Ber. 36 (1906), p. 151—218; *J. Bendixson,* Acta math. 9 (1887), p. 1—34.

3) *Jensen,* l. c. 2 b), p. 72; *Landau,* l. c. 2), p. 154 u. 198—200; *Bendixson,* l. c. 2).

4) *W. Schnee,* Berliner Inaug.-Diss., Göttingen 1908, p. 74 ff.

das Verhalten der Reihen *auf der Konvergenzgeraden* $R(z) = \lambda$ gelten analoge Sätze wie bei *Dirichlet*schen Reihen[5a]). Ist die Reihe überall konvergent, so setzt man $\lambda = -\infty$, ist sie nirgends konvergent, dann $\lambda = +\infty$.

Ist für die Reihen (3) $\lambda \geqq 0$, so ist

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \left| \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu \right|}{\log n},$$

und allgemeiner im Falle (4), falls $\lambda \geqq 0$ ist[5b]):

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \left| \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu \right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}.$$

Für $\lambda < 0$ sind entsprechende Formeln noch nicht bekannt.

Über die Konvergenzverhältnisse unter anderen Bedingungen für die γ_ν ist folgendes zu sagen:

Konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|}$ (sonst γ_ν beliebig komplex), so sind die Reihen (2) entweder nirgends oder in der ganzen Ebene (abgesehen bei (2a) von den Punkten $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots$) konvergent und stellen im Konvergenzgebiet reguläre Funktionen dar.[6])

Wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty} \gamma_\nu$ eine bestimmte endliche Zahl ist, so ist die Konvergenzgrenze ein Kreis.[7])

S. Pincherle[8]) betrachtet die Reihe (2a) unter den Bedingungen:

(6) $|\operatorname{Arg}\gamma_\nu| \leqq \chi < \frac{\pi}{2}$, $|\gamma_\nu| \to \infty$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|}$ divergiert, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}$ konvergiert.

Die Frage nach dem Konvergenzbereich ist hier noch nicht restlos beantwortet; doch gilt der Satz: Konvergiert die Reihe in einem Punkte P, so konvergiert sie in allen Punkten innerhalb des Winkels, dessen Scheitel P ist, und dessen Schenkel mit der positiven reellen Achse die Winkel $\frac{\pi}{2} - \chi$ bzw. $-\frac{\pi}{2} + \chi$ bilden.[8a])

Mit gewissen allgemeineren Entwicklungen beschäftigt sich *R. D. Carmichael.*[9])

5a) *Landau,* l. c. 2), p. 172—173; *Schnee,* l. c. 4).

5b) *Landau,* l. c. 2), p. 176, 203.

6) *Jensen,* l. c. 2b), p. 72; *Bendixson,* l. c. 2), p. 25—26; *Schnee,* l. c. 4), p. 74—75.

7) *Jensen,* l. c. 2b), p. 72; *Bendixson,* l. c. 2), p. 2—3.

8) Palermo Rend. 37 (1914), p. 379—390.

8a) Dies gilt auch, wenn statt (6) nur $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} |\operatorname{Arg}\gamma_\nu| \leqq \chi < \frac{\pi}{2}$, $|\gamma_\nu| \to \infty$ vorausgesetzt wird.

9) Amer. J. 36 (1914), p. 267—288.

Bezüglich der Fundamentaloperationen an Fakultätenreihen wie Differenzenbildung, Differentiation usw. vgl. *Nielsen,* l. c. 2 c).

2. Gleichmäßige Konvergenz. Die Reihen (2) sind unter den Bedingungen (4) in einer gewissen Umgebung jeder Stelle im Innern ihrer Konvergenzhalbebene gleichmäßig konvergent (abgesehen von den Stellen $-\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3, \ldots$ für die Reihe (2a)[10]). Infolgedessen stellen die Reihen in ihrer Konvergenzhalbebene reguläre analytische Funktionen dar (mit eventueller Ausnahme der Punkte $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots$ für die Reihe (2a)), und sind gliedweise differentiierbar. Entsprechendes gilt bei den sonstigen für die γ_ν eingeführten Bedingungen.

Auch auf der Konvergenzgeraden $R(z) = \lambda$ braucht kein singulärer Punkt der durch die Reihen (2) bestimmten Funktionen zu liegen.[11]) Sind aber alle Koeffizienten c_ν von einer gewissen Stelle an reell und $\geqq 0$ und gilt (4), so ist $z = \lambda$ eine singuläre Stelle der Funktion (für endliches λ).[12]) Es kann auch jeder Punkt der Konvergenzgeraden singulärer Punkt der Funktion sein.[13])

3. Absolute Konvergenz. Das Gebiet der absoluten Konvergenz der Reihen (2) ist — sofern die γ_ν den Bedingungen (4) genügen und die Reihe weder überall noch nirgends absolut konvergiert — eine Halbebene, welche links durch eine Gerade $R(z) = \mu$ begrenzt ist, und zwar gehört entweder die ganze Gerade dazu oder keiner ihrer Punkte[14]). Ist $\mu \geqq 0$, so gilt[15])

$$\mu = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \sum\limits_{\nu=1}^{n} |c_\nu|}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}.$$

Zwischen λ und μ besteht für die Reihen (3) die Beziehung[16])

$$0 \leqq \mu - \lambda \leqq 1;$$

und allgemeiner[17]), falls (4) bzw. (5) gilt,

$$0 \leqq \mu - \lambda \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}.$$

Setzt man

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |c_n|}{\log n} = \varkappa,$$

10) *Landau,* l. c. 2), p. 161, 200; *Bendixson,* l. c. 2).

11) *Pincherle,* Bologna Rend. (2) 8 (1904), p. 5—13.

12) *Landau,* l. c. 2), p. 188, 196 und 208.

13) *Landau,* l. c. 2), p. 191.

14) *Nielsen,* l. c. 2a), p. 415; 2c) p. 238; *Landau,* l. c. 2), p. 164 und 201; Auch unter den Bedingungen (5) existiert die Zahl μ; vgl. *Schnee,* l. c. 4), p. 77.

15) *Landau,* l. c. 2), p. 203; *Schnee,* l. c. 4).

16) *Nielsen,* l. c. 2a), p. 415; b) p. 358; c) p. 238; *Landau,* l. c. 2), p. 171ff.

17) *Landau,* l. c. 2), p. 202; *Schnee,* l. c. 4).

so gilt für Fakultätenreihen die Beziehung

$$\varkappa \leqq \lambda \leqq \mu \leqq \varkappa + 1.$$ [18]

Unter den allgemeineren Bedingungen

$$|\operatorname{Arg} \gamma_\nu| \leqq \chi < \frac{\pi}{2}, \quad |\gamma_\nu| \to \infty$$

findet *Pincherle*[19]), daß aus der absoluten Konvergenz der Reihe (2a) im Punkte P die absolute Konvergenz innerhalb eines Winkels folgt, dessen Scheitel P ist und dessen Schenkel mit der positiv-reellen Achse die Winkel $\frac{\pi}{2} - \chi$ bzw. $-\frac{\pi}{2} + \chi$ bilden.

4. Summabilität der Faktoriellenreihen. Das Gebiet der Punkte, in denen die Reihen (3) mit den *Cesàro*schen Mitteln n^{ter} Ordnung summierbar sind, ist eine Halbebene $R(z) > \lambda_n$[20]). Die λ_n sind monoton abnehmend, daher existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \varDelta$. *Nörlund*[21]) betrachtet daneben eine zur Reihe (3a) gehörige Zahl l, die folgendermaßen bestimmt ist: Die durch die Reihe bestimmte Funktion $\Omega(z)$ ist regulär und beschränkt für $R(z) > l + \varepsilon$, aber nicht mehr in der Halbebene $R(z) > l - \varepsilon$, wobei ε beliebig > 0 ist; es ist dann i. a. $l < \varDelta$. Dagegen reicht die *Borel*sche Summationsmethode i. a. bis zur Geraden $R(z) = l$. Die Frage der Summabilität hängt zusammen mit den allgemeineren Entwicklungen

$$\Omega(z) = b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{(z+\omega)(z+2\omega)\ldots(z+\nu\omega)}, \quad \omega > 1.$$

Näheres darüber im Ref. II C 7 von *Nörlund.*

Wigert transformiert die Binomialkoeffizientenreihe in eine Fakultätenreihe mit größerem Konvergenzbereich.[21a])

5. Beziehungen zu Dirichletschen Reihen. *Kluyver*[22]) fand den Satz:

Die Punkte absoluter Konvergenz sind für die beiden Reihen

$$(3') \qquad \Omega(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{\nu!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+\nu)}$$

$$(7) \qquad \Psi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^z}$$

dieselben. Viel tiefer liegt der Satz, daß auch die *Konvergenzpunkte* dieselben sind für beide Reihen[23]) (abgesehen von den Stellen -1,

18) *Pincherle,* Rom Acc. L. Rend. (5) 11_1 (1902), p. 140—141.

19) l. c. 8), p. 386.

20) *Bohr,* Gött. Nachr. 1909, p. 247.

21) a) Paris C. R. 158 (1914), p. 1252—1253; b) Ebenda, p. 1325—1327.

21a) Arkiv för Mat., Astr. o. Fys. 7 (1911), No. 26.

22) Nieuw Arch. (2) 4 (1899), p. 74.

23) *Landau,* l. c. 2), p. 167.

— 2, . . .). Ferner ist jede (von — 1, — 2, . . . verschiedene) Stelle der Konvergenzgeraden $R(z) = \lambda$ für die beiden Funktionen $\Omega(z)$ und $\Psi(z)$ regulär oder für beide singulär.[24]) Die entsprechenden Sätze gelten für die Binomialkoeffizientenreihe.[25])

Auch die Punkte, in denen die Reihe (3a) bzw. (3b) und die Reihe (7) summierbar n^{ter} Ordnung sind, stimmen überein.[26])

Unter den Bedingungen (6) sind ferner die F. R. (2a) und die *Dirichlet*sche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\cdots+\frac{1}{\gamma_\nu}\right)z}$ gleichzeitig konvergent oder divergent für irgendein z, das von $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots$ verschieden ist.[27])

6. Darstellbarkeitsbedingungen. Nach *Pincherle* und *N. Nielsen* gilt der Satz[28]):

Damit die Funktion $\Omega(z)$ eine Entwicklung (3') besitze, ist notwendig und hinreichend, daß die Integraldarstellung existiere:

$$\Omega(z) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{z-1}\, dt,$$

mit den Bedingungen

1. $\varphi(t)$ ist im Punkte $t = 1$ regulär und die Potenzreihe $\varphi(1-t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu$ hat mindestens den Konvergenzradius 1.

2. Es existiert eine Zahl λ', so daß

$$\lim_{t \to +0} t^{z+p} \varphi^{(p)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } R(z) > \lambda' \\ \infty, & \text{falls } R(z) < \lambda'. \end{cases}$$

3. Es existiert eine Zahl λ'', so daß

$$\lim_{t \to 1} \left| \frac{\varphi^{(n)}(t)\, t^{z+n}}{\Gamma(z+n+1)} \right| \begin{cases} < \varepsilon_1, & \text{für } R(z) > \lambda'' \\ > \varepsilon_2, & \text{für } R(z) < \lambda'', \end{cases}$$

wobei $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ und n größer als eine geeignete Zahl N ist.

Ist $t = 1$ der einzige singuläre Punkt von $\varphi(1-t)$ auf dem Konvergenzkreise $|t| = 1$, so ist $\lambda' = \lambda''$ die Konvergenzabszisse der Reihe (3').

Liegt kein singulärer Punkt auf dem Kreise $|t| = 1$, so ist die Konvergenzabszisse $\lambda = \infty$.

24) *Landau*, l. c. 2), p. 179.

25) *Landau*, l. c. 2), p. 194—195.

26) *Bohr*, l. c. 20).

27) *Pincherle*, l. c. 8).

28) *N. Nielsen*, l. c. 2a), p. 416—421 und Ann. Éc. Norm (3) 21 (1904), p. 449—458; *Pincherle*, l. c. 11), 18) und a) Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1 (1902), p. 417—426; (5) 12_2 (1903), p. 336—343; b) Ann. Éc. Norm. (3) 22 (1905), p. 9—68. Schon *Schlömilch* hat den Zusammenhang mit dem Integral erkannt; vgl. Ber. Ges. Leipzig 11 (1859), p. 109—137; 15 (1863), p. 58—62.

Hat $\varphi(1-t)$ außer $t=1$ auch andere singuläre Stellen auf dem Kreise $|t|=1$, so ist $\lambda = \operatorname{Max}(\lambda', \lambda'')$.

Ist $t=1$ ein regulärer Punkt der Funktion $\varphi(1-t)$, so ist $\lambda = \lambda'$.

Es gelten analoge Sätze für die Binomialkoeffizientenreihe, doch ist hier die Untersuchung nicht vollständig durchgeführt.[29]).

Das Problem, die Konvergenzabszisse unmittelbar aus den Eigenschaften der zu entwickelnden Funktion zu bestimmen, haben *Nörlund* und *Carlson* in Angriff genommen.[30]) Es spielen dabei die Wachstumseigenschaften der Funktion bei wachsendem z eine wichtige Rolle. Näheres darüber sowie weitere Literatur im Ref. II C 7 von *Nörlund.*

7. Entwicklungen nach den Näherungsnennern eines Kettenbruches. Im ersten Teil, Nr. **1**, wurden die unter Zugrundelegung einer im Intervalle $(-1, +1)$ positiven Funktion $p(x)$ orthogonalisierten Polynome $Q_\nu(z)$ eingeführt (l. c. $u_\nu(x)$) und als Näherungsnenner gewisser Kettenbruchentwicklungen charakterisiert. Da die so gewonnenen Funktionensysteme abgeschlossen sind (vgl. I. Teil, Nr. 3), so hängt das Entwicklungsproblem nur von der Konvergenz der formal angesetzten Reihe ab; die Konvergenz aber wird vermittels geeigneter asymptotischer Darstellungen dieser Polynome nachgewiesen.[31]) Das weitestgehende Resultat erhält in dieser Hinsicht *Szegö*[32]) mit folgendem Satz:

Es sei $p(x)$ für $-1 \leqq x \leqq 1$ fast überall positiv und samt $\frac{\log p(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ integrierbar. Es sei ferner $F(z)$ regulär-analytisch für $-1 \leqq z \leqq 1$. Dann konvergiert die Entwicklung

$$a_0 Q_0(z) + a_1 Q_1(z) + \cdots a_n Q_n(z) + \cdots \left(a_n = \int_{-1}^{1} p(x) F(x) Q_n(x)\, dx\right)$$

im Innern der größten Ellipse mit den Brennpunkten -1, 1, welche keinen singulären Punkt von $F(z)$ in ihrem Innern enthält, und stellt dort $F(z)$ dar. Sie divergiert hingegen überall außerhalb dieser Ellipse. *Szegö* erhält diese Resultate vermittels asymptotischer Darstellung der $Q_n(z)$.

---

29) *Pincherle,* l. c. 28 b).

30) *Nörlund,* l. c. 21 a), b); c) Acta math. 37 (1914), p. 327—387; *F. Carlson,* Nova Acta Ups. (4) 4 (1915), Nr. 3.

31) Literatur: *E. Heine,* Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl. Berlin 1878—1881; *Darboux,* J. de math. (3) 4 (1878), p. 5—56, 377—416; *Pincherle,* a) Rom. Acc. L. Rend. (4) 5 (1889), p. 8—12, 323—327, 642—643; b) Ann. di mat. (2) 12 (1884), p. 11—41, 107—137; c) Acta math. 16 (1892), p. 341—363; *O. Blumenthal,* Inaug.-Diss. Göttingen 1898.

32) Math. Ann. 82 (1921), p. 188—212; vgl. auch *G. Faber,* München Ber. 1922, p. 157—178.

8. Entwicklungen nach den Integralen linearer Differentialgleichungen. Im Komplexen kommt man auf Entwicklungen nach Integralen von Differentialgleichungen der Form

$$P_2(z)\frac{d^2y}{dz^2} + P_1(z)\frac{dy}{dz} + (P_0(z) + \lambda^2)y = 0,$$

indem man bei geeigneten Festsetzungen über P_2, P_1, P_0 die Eigenwerte λ^2 so bestimmt, daß die zugehörigen Eigenfunktionen in einem singulären Punkte der Differentialgleichung regulär sind.[33]) Zu anderen Entwicklungen gelangt man unter der Voraussetzung, daß $P_2(z)$ zwei einfache Nullstellen hat, indem man die Eigenwerte λ^2 so bestimmt, daß die zugehörigen Eigenfunktionen bei geeigneter Umkreisung der singulären Stellen eindeutig bleiben. Zum ersten Typus gehören z. B. die Entwicklungen nach *Bessel*schen Funktionen[34]), zum zweiten die nach Kugelfunktionen[35]), nach *Hermite*schen und *Laguerre*schen Polynomen[36]), sowie die nach den Funktionen des elliptischen Zylinders.[37])

In beiden Fällen geht man zweckmäßig von der, analog wie im Reellen zu gewinnenden, Entwicklung für $\frac{1}{\zeta - z}$ aus und erhält das Konvergenzgebiet mit Hilfe asymptotischer Abschätzungen für die Eigenwerte und die Eigenfunktionen.

Weitere Literatur ist in den unter 36) und 37) zitierten Arbeiten von *Volk* angegeben.

9. Sonstige Reihenentwicklungen. Hier sind gewisse Untersuchungen von *C. Runge, D. Hilbert, G. Faber, L. Fejér, M. Krafft* usw. zu nennen, die zu Entwicklungen nach Polynomen führen, über die das *Bieberbach*sche Ref. II C 4, Nr. **57—59** näheres bringt.

G. Szegö[38]) bestimmt zu der regulär-analytischen Begrenzung C eines Bereiches D auf folgende Weise ein System von Polynomen $P_0(z)$, $P_1(z)$, ...: Es sei

$$\frac{1}{l}\int\limits_C P_\nu(\xi)\,P_\mu(\xi)\,d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{für } \nu = \mu, \end{cases}$$

wobei l die Länge und $d\sigma$ das Bogenelement der Kurve C bezeichnet.

33) *Pochhammer,* J. f. Math. 74 (1872), p. 315ff.; *G. Löwenstein,* Inaug.-Diss. Würzburg 1915.

34) *C. Neumann,* Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig 1867.

35) *C. Neumann,* Über die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen 1. und. 2. Art, Halle 1862.

36) *O. Volk,* Math. Ann. 86 (1922), p. 296—316.

37) *O. Volk,* Inaug.-Diss. München 1920.

38) Math. Ztschr. 9 (1921), p. 218—270. Für verwandte Entwicklungen vgl. *St. Bergmann,* Math. Ann. 86 (1922), p. 238—271; *S. Bochner,* Math. Ztschr. 14 (1922), p. 180—207.

$P_n(z)$ ist vom n^{ten} Grade und sein höchster Koeffizient sei > 0. *Szegö* beweist: Jede im Bereich D reguläre analytische Funktion $F(z)$ besitzt eine Reihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu P_\nu(z),$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{l} \int_C F(\xi) \overline{P_n(\xi)}\, d\sigma, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und $\overline{P_n(x)}$ zu $P_n(x)$ konjugiert komplex ist. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig im Innern des größten Kreisbildes C_{R_0}, welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(z)$ enthält; sie divergiert überall außerhalb von C_{R_0}. Unter Kreisbild ist eine Kurve verstanden, welche bei der konformen Abbildung des Außengebietes der Kurve C auf das Gebiet $|x| > 1$ den Kreisen $|x| = R\,(>1)$ entspricht. Es genügt auch vorauszusetzen, daß die Kurve C stetig, geschlossen, rektifizierbar und doppelpunktlos ist. Die Entwicklungen weisen manche Analogie mit den Potenzreihen auf.

Neue Entwicklungen nach Polynomen, die im ganzen *Mittag-Leffler*schen Stern gelten, gibt *O. Perron.*[38a])

N. Nielsen[39]) untersucht Entwicklungen analytischer Funktionen nach *Bernoulli*schen Polynomen mit Hilfe ihrer asymptotischen Abschätzung. Ferner Entwicklungen nach hypergeometrischen Funktionen und allgemeineren Funktionen.[40])

Reihen der Gestalt $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{z^\nu}{1 - z^\nu}$ nennt man *Lambert*sche Reihen. Ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu$ konvergent, so konvergiert die *Lambert*sche Reihe für jedes z, das nicht auf dem Einheitskreise liegt; ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu$ divergent, so konvergiert die *Lambert*sche Reihe im Innern des Einheitskreises in denselben Punkten wie die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$. Das Verhalten, wenn z sich dem Einheitskreise nähert, ist eingehend untersucht worden. Die Reihen hängen mit zahlentheoretischen Problemen zusammen, deren Grundlage die Identität ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{z^\nu}{1 - z^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

wobei

$$a_n = \sum_{d/n} c_d, \quad \text{also} \quad c_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d \quad \text{ist.}^{41)}$$

38a) Sitzungsb. Heidelberg 1922, Abt. A, 1. Abh.

39) Math. Ann. 59 (1904), p. 103 ff.

40) Ann. Éc. Norm. (3) 30 (1913), p. 121—170.

($\sum_{d/n}$ bedeutet, daß die Summe über alle Teiler d von n zu erstrecken ist.)

10. Approximation. Das Problem, eine Funktion durch lineare Aggregate gegebener Funktionen zu approximieren, hängt mit gewissen Reihenentwicklungen zusammen. Hierher gehört insbesondere das Problem der Interpolation, das im einfachsten Falle lautet: zu einer Funktion $F(z)$ ein Polynom m^{ten} Grades $P_m(z)$ zu bestimmen, das an $n+1$ gegebenen Stellen $z_0, z_1, \ldots, z_n$ mit $F(z)$ übereinstimmt. Dabei wird für $m > n$ das Polynom noch weiteren Bedingungen unterworfen. Die Frage ist: unter welchen Bedingungen und mit welcher Genauigkeit bei wachsendem n das Polynom die Funktion $F(z)$ in einem Gebiete approximiert. Ist $m = n$, so heißt $P_n(z)$ das n^{te} zu $F(z)$ gehörige *Lagrange*sche Polynom; sind außerdem $z_0, z_1, \ldots z_n$ äquidistante Stellen in einem reellen Intervall, so heißt $P_n(z)$ das n^{te} *Newton*sche Polynom. Einige hierher gehörige Arbeiten sind schon im *Bieberbach*schen Ref. Nr. **57—59** besprochen; man vgl. auch das Ref. II C 7 von *Nörlund.*

S. Bernstein[42]) fügt den Punkten z_ν noch einen beliebigen Punkt im gegebenen Intervall hinzu und stellt Beziehungen zwischen den so entstehenden Polynomfolgen und dem analytischen Charakter der Funktion $F(z)$ her.

Während für die Approximation reeller Funktionen weitgehende Resultate vorliegen, sind die entsprechenden Fragestellungen für komplexe Gebiete noch wenig behandelt. Insbesondere harrt noch die Frage der Beantwortung: Die Funktion $F(z)$ sei in einem Gebiete regulär und mit Einschluß des Randes stetig; ist dann $F(z)$ durch Polynome mit beliebiger Genauigkeit gleichmäßig im abgeschlossenen Gebiet approximierbar? Es ist leicht, zu zeigen, das Konvexität genügt. Für weitere Ausführungen, insbesondere bezüglich *Tschebyscheff*scher Approximation, vgl. *P. Montel,* Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris 1910.

41) Literatur: *K. Knopp,* J. f. Math. 142 (1913), p. 283—315; *Landau,* Paris C. R. 156 (1913), p. 1451—1454; *Hardy,* London math. Soc. Proc. (2) 13 (1913), p. 192 bis 198; *S. Wigert,* Acta math. 41 (1918), p. 197—218; *Hardy* and *Littlewood,* London math. Soc. Proc. (2) 19 (1919), p. 21—29.

42) Math. Ann. 79 (1919), p. 1—12. Vgl. auch das Ref. II C 10 von *E. Hilb* und *M. Riesz.*

(Abgeschlossen im Juli 1922.)

II C 12. NEUERE ENTWICKLUNG DER THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG VOM ELLIPTISCHEN TYPUS.*)

Von

L. LICHTENSTEIN

IN LEIPZIG.

Inhaltsübersicht.

I. Bezeichnungen und Abkürzungen.

1. Bezeichnungen und Abkürzungen.

II. Lineare Differentialgleichungen.

2. Die erste Randwertaufgabe.
   a) Beschränkte ebene Gebiete. Lineare Differentialgleichungen in der Normalform. Methode der sukzessiven Approximationen. Das alternierende Verfahren.
   b) Beschränkte Gebiete der Klasse B oder D in $\mathfrak{E}$. Zurückführung auf eine lineare Integralgleichung.
   c) Beschränkte Gebiete der Klasse B oder D in $\mathfrak{E}$. Die am Rande verschwindende *Green*sche Funktion.

---

*) Das vorliegende Referat schließt an den Artikel II A 7 c von *A. Sommerfeld* über die Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen an. An der bezeichneten Stelle wird zunächst dem historischen Werdegang folgend die Entwicklung der betrachteten Theorien seit *Fourier* und *Riemann* bis etwa 1900 wiedergegeben. Darüber hinaus werden für elliptische Differentialgleichungen eine Anzahl Sätze, die als Verallgemeinerungen bekannter Sätze der Potentialtheorie aufzufassen sind, postuliert. Seitdem hat die Theorie der Randwertaufgaben, namentlich bei Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, gestützt auf die Theorie der Integralgleichungen, einen lebhaften Aufschwung genommen. Vor allem ist jetzt bei linearen Randwertproblemen ein gewisser Abschluß erreicht. Aber auch in der so wichtigen Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen ist eine Reihe grundlegender Resultate gewonnen worden. Eine übersichtliche zusammenhängende Darstellung der neuen Ergebnisse bei *elliptischen* Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung ist das Ziel dieses Referats, das sich demnach eine enger umgrenzte Aufgabe stellt als die *Sommerfeld*sche Arbeit. Auf einen möglichst lückenlosen Zusammenhang der vorgetragenen Lehren wird besonderes Gewicht gelegt, weil von diesem Gebiet eine zusammenfassende Darstellung in der Literatur bis jetzt nicht vorliegt. Wie in dem Artikel über die neuere Entwicklung der Potentialtheorie und die konforme Abbildung wird in den Literaturhinweisen Vollständigkeit angestrebt.

d) Beschränkte Gebiete allgemeiner Natur in $\mathfrak{E}$.

e) Beschränkte Gebiete in $\mathfrak{E}$. Allgemeine lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zurückführung auf die Normalform. Konforme Abbildung nichtanalytischer Flächenstücke auf ebene Gebiete.

f) Unitätssätze.

g) Gebiete in $\mathfrak{E}_m$. Räumliche Gebiete.

3. Das zweite Randwertproblem. Höhere Randwertaufgaben.

4. Einige allgemeine Eigenschaften der Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

5. Sich selbst adjungierte lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

a) Existenz der Eigenwerte. Entwicklungssätze.

b) Eigenwerte in Abhängigkeit von dem Gebiete und der Randbedingung. Asymptotische Verteilung der Eigenwerte.

III. Nichtlineare Differentialgleichungen.

6. Analytischer Charakter der Lösungen.

7. Randwertaufgaben.

a) Lösungen in der Nachbarschaft einer gegebenen Lösung.

b) Randwertaufgaben ohne einschränkende Voraussetzungen über die Größe des Gebietes oder den Wert etwaiger in der Differentialgleichung vorkommenden Parameter.

c) Die Differentialgleichung $\Delta u = ke^u$ $(k > 0)$.

Literatur.

H. Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., 10. Bd., 2. Heft, Leipzig 1908.

— Trigonometrische Reihen und Integrale bis etwa 1850, Encykl. d. math. Wiss. II A 12, p. 820—1354.

T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala Universitets Årsskrift 1923; Matematik och Naturvetenskap. 3, p. 1—228.

R. Courant und *D. Hilbert,* Methoden der mathematischen Physik, Berlin 1924.

J. Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, London 1923.

D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1912.

J. Horn, Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Leipzig 1910.

A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl., Braunschweig 1922.

M. Mason, Selected topics in the theory of boundary value problems of differential equations. The New Haven mathematical Colloquium, New Haven 1910.

F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik, Leipzig 1891.

A. Sommerfeld, Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Encykl. d. math. Wiss. II A 7c, p. 504—570.

H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 5. Aufl., 1. Bd. 1910, 2. Bd. 1912, Braunschweig.

I. Bezeichnungen und Abkürzungen.

1. Bezeichnungen und Abkürzungen. Die in dem Artikel II C 3 gebrauchten Definitionen und Bezeichnungen[1]) werden auch in dem vorliegenden Referat durchgängig zur Anwendung kommen. Die wichtigsten seien im folgenden zusammengestellt.

$\mathfrak{E}$ bezeichnet eine schlichte Ebene.

$\mathfrak{E}_m$ ist eine ganz oder teilweise mehrfach überdeckte Ebene (II C 3, p. 181). Wir nennen „Gebiet" was gelegentlich „offenes Gebiet" genannt wird. Sei S der Rand eines Gebietes T; die abgeschlossene Menge $T + S$ heißt „Bereich". (Vgl. den Artikel von *L. Zoretti* und *A. Rosenthal*, Nr. **10**.) Die Klasse A (bzw. B) umfaßt einfach oder mehrfach (d. h. endlich vielfach) zusammenhängende Gebiete in $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_m$, deren sämtliche Randkomponenten (beschränkte) einfache Kurven (a. a. O., p. 183) mit stetiger Tangente (bzw. Krümmung) sind.

Die Klasse C umfaßt Gebiete der Klasse A, deren sämtliche Randkomponenten geschlossene analytische und reguläre Linien sind.

Die Klassen $D(L, M)$ umfassen einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiete in $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_m$, deren (beschränkte) Randkomponenten aus je einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer und regulärer Linien (bzw. Kurven mit stetiger Tangente, stetiger Krümmung) bestehen und keine nach außen gerichteten Spitzen haben. Kommen auch noch nach außen gerichtete Spitzen vor, so gehören die fraglichen Gebiete entsprechend in die Klassen E (bzw. N, Q) hinein.

Es sei $f(x, y)$ eine in einem beschränkten Bereiche $T + S$ der Klasse A in $\mathfrak{E}$ erklärte Funktion. Ist

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < c_1 \varrho_{12}^{\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \varrho_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
$$(c_1 \text{ konstant}),$$

unter (x_1, y_1), (x_2, y_2) zwei Punkte in $T + S$ verstanden, so sagen wir, $f(x, y)$ genüge in $T + S$ einer *Hölder*schen, kürzer einer H-Bedingung, (auch einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ). Eine Funktion $f(x, y)$ genügt in T einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ, wenn sie diese in jedem Bereiche $T' + S'$ in T erfüllt. Konvergiert T' gegen T, so kann c_1 dabei über alle Grenzen wachsen.

Gebiete der Klasse Ah sind Gebiete der Klasse A, deren sämtliche Randkurven überdies den Ungleichheiten von der Form

$$\left|\frac{d}{d\mathfrak{s}} x(\mathfrak{s} + h) - \frac{d}{d\mathfrak{s}} x(\mathfrak{s})\right|, \quad \left|\frac{d}{d\mathfrak{s}} y(\mathfrak{s} + h) - \frac{d}{d\mathfrak{s}} y(\mathfrak{s})\right| < \delta_1 |h|^{\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1$$
$$(\mathfrak{s} = \text{Bogenlänge})$$

genügen. In ähnlicher Weise werden Gebiete der Klasse Bh erklärt (II C 3, p. 185).

1) Vgl. II C 3, p. 181—197, insb. p. 181—193.

II. Lineare Differentialgleichungen.

2. Die erste Randwertaufgabe. a) *Beschränkte ebene Gebiete. Lineare Differentialgleichungen in der Normalform. Methode der sukzessiven Approximationen. Das alternierende Verfahren.*[2]) Es sei $\overline{T}$ ein beschränktes Gebiet der Klasse B in $\mathfrak{E}$, und es seien $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ Funktionen, die in einem $\overline{T} + \overline{S}$ enthaltenden konvexen Bereich definiert sind und einer H-Bedingung genügen. Es möge ferner $\varphi(\bar{s})$ eine auf $\overline{S}$ erklärte abteilungsweise stetige (oder auch nur beschränkte und im *Riemann*schen oder *Lebesgue*schen Sinne integrierbare) Funktion bezeichnen. Es sei T das Gebiet, das aus $\overline{T}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation in bezug auf den Koordinatenursprung, der in $\overline{T}$ liegen soll, gewonnen wird (das Ähnlichkeitsverhältnis $\alpha \leqq 1$). Der Rand von T heiße S, der dem Punkte $\bar{s}$ auf $\overline{S}$ entsprechende Punkt von S heiße s. Schließlich sei $\overline{\varphi}(\bar{s}) = \varphi(s)$ gesetzt.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$L(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f. \tag{1}$$

Für hinreichend kleine Werte von α gibt es eine und nur eine beschränkte, in T „reguläre“, d. h. nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u(x, y)$ der Gl. (1), die auf S die Werte $\varphi(s)$ annimmt. Sie kann durch sukzessive Approximationen als Summe der unendlichen Reihe $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$,

$\Delta v_0 = f$ in T, $v_0 = \varphi$ auf S,

$$\Delta v_n = -a\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} - b\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} - cv_{n-1} \text{ in } T,\ v_n = 0 \text{ auf } S \quad (n \geqq 1)$$

gewonnen werden. Die Funktionen $\left|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial v_0}{\partial y}\right|$; $\left|\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|$ werden am Rande entsprechend wie $\mathfrak{r}^{-1}$ und $|\log \mathfrak{r}|$ ($\mathfrak{r}$ = Entfernung vom Rande) unendlich, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v_n}{\partial x}$, $\frac{\partial v_n}{\partial y}$ $(n \geqq 2)$ sind in $T + S$ stetig. Das Verfahren der sukzessiven Näherungen ist also anwendbar, auch wenn man von den Randwerten nicht mehr voraussetzt, als daß sie abteilungsweise stetig oder auch nur beschränkt und integrierbar sind.[3]) In der älteren Literatur wird demgegenüber in der Regel angenommen, daß $\varphi'(s)$ und $\varphi''(s)$ existieren und sich stetig verhalten.[4])

---

2) Vgl. II A 7c, *A. Sommerfeld,* Nr. 5 und 6.

3) Vgl. *L. Lichtenstein,* Ber. d. Berl. Math. Ges. 14 (1915), p. 130—136.

4) Ältere Literatur (vgl. l. c. 2) Nr. 5): *É. Picard,* Paris C. R. 150 (1910), p. 61—67; J. de math. (4) 6 (1890), p. 145—210; (4) 9 (1893), p. 217—271; (5) 6

Ist $c \leqq 0$, so läßt sich bei Behandlung der ersten Randwertaufgabe der Differentialgleichung $L(u) = 0$ das alternierende Verfahren in der klassischen Fassung heranziehen (II C 3, Nr. 24a).[5] Man gelangt so bei dieser Differentialgleichung zu einer Auflösung der ersten Randwertaufgabe für Gebiete der Klasse M in $\mathfrak{E}$ und für beliebige abteilungsweise stetige Randwerte. Von hier aus kann man leicht zu der Differentialgleichung $L(u) = 0$ bei beliebigem c gelangen, wenn man sich einer Integralgleichung bedient (Nr. 2d). Weiteres über kombinatorische Verfahren siehe Nr. 3, Fußnote 59) sowie II C 3, Nr. 24j.

b) *Beschränkte Gebiete der Klasse B oder D in $\mathfrak{E}$. Zurückführung auf eine lineare Integralgleichung.* Sei T ein beschränktes Gebiet der Klasse B in $\mathfrak{E}$. Es seien a und b beliebige nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T + S$ stetige Funktionen, c und f Funktionen, die in $T + S$ stetig sind und in T einer H-Bedingung genügen.[6] Es möge schließlich $\varphi(s)$ eine auf S erklärte abteilungsweise stetige Funktion bezeichnen.

Wir suchen diejenigen etwa vorhandenen beschränkten, in T regulären Lösungen $u(x, y)$ der Differentialgleichung

$$L(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \tag{1}$$

zu bestimmen, die auf S den Wert $\varphi(s)$ annehmen.

Sei S' eine zu S parallele Kurve (der Klasse B) in T und es möge T' das von S' begrenzte beschränkte Gebiet bezeichnen. Ist $v'(x, y)$ diejenige in $T' + S'$ stetige, in T' reguläre Potentialfunktion, die auf S' den Wert $u(x, y)$ annimmt, ist ferner $G'(x, y; \xi, \eta)$ die zu

---

(1900), p. 129—140; J. Éc. Polyt. LXe Cahier 1890, p. 89—105; *A. Paraf*, Ann. de Toulouse 6 (1892) H, p. 1—75; *S. Zaremba*, Prace matem.-fizyczne 9, p. 1—27. Ferner: *É. Picard*, Paris C. R. 128 (1899), p. 1487—1489; 130 (1900), p. 447—449 1088—1094; Acta math. 25 (1902), p. 121—137; *U. Dini*, ebendort p. 185—230; *L. Lichtenstein*, Palermo Rend. 28 (1909), p. 267—306. In der Acta-Arbeit betrachtet *Picard* speziell Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten und gewinnt die Lösung unter Zugrundelegung schlechthin stetiger Randwerte.

5) Vgl. *L. Lichtenstein*, a) Monatsh. Math. Phys. 21 (1910), p. 172—177; b) J. f. Math. 142 (1913), p. 1—40, insb. p. 16—18, wo die Existenz einer charakteristischen Zahl $q < 1$ bewiesen wird. An den bezeichneten Stellen wird übrigens $c < 0$ angenommen. Der Beweis gilt indessen ohne jede Änderung, auch wenn $c \leq 0$ ist, da der *Paraf*sche Satz von der Nichtexistenz eines positiven Maximums sowie eines negativen Minimums (II A 7c, Nr. 4) auch für $c \leq 0$ (Nr. 4, Fußnote 73)) gilt.

6) In dem Folgenden werden, sofern nicht ausdrücklich anderes vermerkt ist, bezüglich a, b, c, f stets die Voraussetzungen des Textes gemacht.

T' gehörige klassische *Green*sche Funktion, so gilt für alle (x, y) in T'

$$(2)\quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{T'} G'(x, y; \xi, \eta)\left[c(\xi,\eta)u(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} - f(\xi,\eta)\right] d\xi\, d\eta + v'(x, y),$$

woraus sich nach einer teilweisen Integration und dem Grenzübergang $T' \rightarrow T$ ergibt

$$(3)\quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{T}\Big\{G(x, y; \xi, \eta)c(\xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \xi}[a(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)] - \frac{\partial}{\partial \eta}[b(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)]\Big\} u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{2\pi}\int_{T} G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v(x, y),$$

unter $v(x, y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Potentialfunktion verstanden, die auf S den Wert $\varphi(s)$ annimmt. Jede den angegebenen Stetigkeits- und Grenzbedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung (1) oder des zugehörigen homogenen Problems ($f = 0$, $\varphi = 0$) ist eine Lösung der Integralgleichung (3) oder der zugehörigen homogenen Integralgleichung ($f = 0$, $v = 0$). Auch der umgekehrte Satz ist richtig.[7]) Die Bestimmung regulärer Lösungen der Differentialgleichung (1), die auf S vorgeschriebene Randwerte annehmen, bzw. die Auflösung der zugehörigen homogenen Randwertaufgabe einerseits, die Auflösung der Integralgleichung (3) oder der zugehörigen homogenen Integralgleichung anderseits sind, wie wir sehen, zwei völlig äquivalente Probleme. Wir finden darum:

Von zwei möglichen Fällen tritt entweder der eine oder der andere ein: Entweder hat die Differentialgleichung (1) für alle f eine und nur eine beschränkte, in T reguläre Lösung, die auf S eine beliebige abteilungsweise stetige Wertfolge $\varphi(s)$ annimmt, oder die Differentialgleichung $L(u) = 0$ hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger, in T regulärer, auf S verschwindender Lösungen. Im letzteren Falle ist die nicht homogene Randwertaufgabe nur lösbar, wenn gewisse Integralbeziehungen erfüllt sind —, es gibt dann eine einfach oder mehrfach unendliche lineare Schar von Lösungen.[8])

---

7) Der Kern der Integralgleichung (3) wird für $\xi = x$, $\eta = y$ wie $[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{-\frac{1}{2}}$ unendlich. Der zweite iterierte Kern ist in $T + S$ stetig.

8) Der vorstehende Satz ist zuerst von *D. Hilbert* bewiesen worden [a) Gött. Nachr. 1904, p. 213—259 insb. p. 247—250, s. auch b) Grundzüge, p. 39—81, insb. p. 70—73]. *Hilbert* bestimmt nur die auf S verschwindenden Lösungen,

Bei „hinreichend kleinen“ Gebieten liegt stets der erste Fall vor. Das gleiche gilt, wenn in T $c \leqq 0$, oder $c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \leqq 0$ oder endlich $c - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y} \leqq 0$ ist, wobei diesmal keinerlei Einschränkungen bezüglich der Größe des Gebietes T gemacht zu werden brauchen. (Vgl. Nr. 2f.)

Liegt ein beschränktes Gebiet der Klasse D vor, so kann man von diesem durch konforme Abbildung zu einem von Vollkreisen begrenzten beschränkten Gebiete T' in der Ebene x', y' übergehen. Die Differentialgleichung (1) wird zugleich in eine Differentialgleichung von der Form

$$(4)\quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' = f', \quad u'(x', y') = u(x, y)$$

übergeführt. Die neuen Koeffizienten haben im allgemeinen in denjenigen Punkten auf S', die den Eckpunkten auf S entsprechen, Singularitäten. Gleichwohl erfüllt $u'(x', y')$ eine zu (3) völlig analoge Integralgleichung. Ihr Kern geht durch eine n-fache Iteration $(n \geqq 2)$ nach Abspaltung eines nur von *einem* Variablenpaar abhängigen am Rande ev. unendlich groß werdenden Faktors in einen stetigen Kern über. Die Integralgleichung wird damit der *Fredholm*schen Theorie zugänglich. Kehrt man in die Ebene x, y zurück, so findet man den vorhin ausgesprochenen Äquivalenzsatz wieder.[9])

Sei T wieder ein beschränktes Gebiet der Klasse B in $\mathfrak{E}$; a, b, c und f mögen in $T + S$ stetig sein und darüber hinaus nur noch in T einer H-Bedingung oder einer etwas weniger fordernden *Dini*schen Bedingung[10]) genügen. Die Randfunktion $\varphi(s)$ sei auf S nebst ihren Ableitungen

---

insb. die zu T gehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung (1) (Nr. 2b), doch führt sein Verfahren unmittelbar auch zur Auflösung der Randwertaufgabe, sofern $\varphi(s)$ stetig ist und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat. An dieselben Voraussetzungen sind die analogen Entwicklungen von *É. Picard* [a) Paris C. R. 142 (1906), p. 1459—1462; b) Ann. Éc. Norm. (3) 23 (1906), p. 509—516; c) Palermo Rend. 22 (1906), p. 241—259, insb. p. 250—254] gebunden. Für beliebige stetige Randwerte ist der Satz auf einem anderen Wege, ebenfalls durch Zurückführung auf eine Integralgleichung, von *L. Lichtenstein*, Math. Ann. 67 (1909), p. 559—575, für abteilungsweise stetige $\varphi(s)$ durch die Entwicklungen des Textes, Paris C. R. 149 (1909), p. 624—627 [vgl. auch l. c. 5) b), p. 3—8] dargetan worden. Die Betrachtungen des Textes gelten unverändert, auch wenn die Randfunktion $\varphi(s)$ nur beschränkt und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar ist.

9) Vgl. *L. Lichtenstein*, a) Paris C. R. 149 (1909), p. 977—979 sowie b) Acta math. 36 (1913), p. 345—386, insb. p. 347—367.

10) Vgl. II C 3, Fußnote 83, p. 207.

erster und zweiter Ordnung stetig. Aus (1) folgt, wenn man die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf S voraussetzt, daß Δu in $T + S$ stetig ist und in T einer H-Bedingung bzw. der Bedingung von *Dini* genügt. Setzt man darum $\Delta u = w$, so gilt

$$(5) \quad u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_T G(x, y; \xi, \eta) w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v(x, y),$$

$$\Delta v = 0 \text{ in } T,\; v = \varphi(s) \text{ auf } S,$$

mithin wegen (1)

$$(6) \quad w(x,y) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_T \Big\{a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}G(x,y;\xi,\eta) + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}G(x,y;\xi,\eta) + c(x,y)\,G(x,y;\xi,\eta)\Big\} w(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = f(x,y) - a(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} - b(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} - c(x,y)v(x,y).$$

Auch diese Integralgleichung kann zur Bestimmung von $u(x, y)$ herangezogen werden.[11])

Nach einer Bemerkung von *M. Gevrey* kann man auf diesem Wege zu einer vollständigen Lösung des ersten Randwertproblems gelangen, auch wenn $\varphi(s)$ lediglich als abteilungsweise stetig oder selbst nur beschränkt und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar vorausgesetzt wird. Es genügt also bei Behandlung des ersten Randwertproblems, so lange es sich um Gebiete der Klasse B handelt, vorauszusetzen, daß a, b, c und f in $T + S$ beschränkt sind und in T eine H-Bedingung oder eine Bedingung von *Dini* erfüllen.[12])

Es mag sich zunächst um ein Kreisgebiet K handeln. Sind $\mathfrak{r}$ und ϱ die Abstände der Punkte x, y und ξ, η von der Peripherie C von K, so gelten, wie sich leicht zeigen läßt, die Ungleichheiten

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\left|\frac{\partial}{\partial x}G(x, y; \xi, \eta)\right|, \\ &\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\left|\frac{\partial}{\partial y}G(x, y; \xi, \eta)\right| < \text{Const.}\,\frac{1}{r_*} \quad (r_*^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2). \end{aligned} \right.$$

Setzt man darum mit *M. Gevrey* $\mathfrak{r}w(x, y) = W(x, y)$, so findet man

---

11) Vgl. *L. Lichtenstein,* Math. Ann. 67 (1909), p. 559—575 (p. 565—568). Dort werden bezüglich a, b, c und f weitergehende einschränkende Voraussetzungen gemacht. Gewisse Substitutionen, die zu (5) analog sind, kommen übrigens schon früher bei *E. E. Levi,* a) Rend. Acc. Linc. (5) 16 (1907), p. 932—938; b) Palermo Rend. 24 (1907), p. 275—317 vor. Sie werden dort zur Bestimmung einer Grundlösung [Nr. 2c, Fußnote 22) sowie Nr. 2e] rein elliptischer Differentialgleichungen $2p^{\text{ter}}$ Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen herangezogen.

12) Vgl. *M. Gevrey,* Ann. Éc. Norm. (3) 35 (1918), p. 129—190, insb. p. 145—159 sowie die vorläufige Mitteilung, Paris C. R. 157 (1913), p. 1121—1124.

zur Bestimmung von $W(x, y)$ die wegen (7) der *Fredholm*schen Theorie nach zweimaliger Iteration zugängliche Integralgleichung

$$(8)\quad W(x,y)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_T\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\Big\{a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}G(x,y;\xi,\eta)+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}G(x,y;\xi,\eta)$$
$$+c(x,y)G(x,y;\xi,\eta)W(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\Big\}$$
$$=\mathfrak{r}\Big\{f(x,y)-a(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}-b(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}-c(x,y)v(x,y)\Big\}.$$ [13]

Damit ist das erste Randwertproblem für ein Kreisgebiet erledigt. Durch konforme Abbildung gelangt man jetzt zu einem beliebigen beschränkten einfach zusammenhängenden Gebiete der Klasse B.[14]

Ist T ein Gebiet der Klasse B und hat $\varphi(s)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung, so sind, wenn das nicht homogene Randwertproblem eine Lösung hat, $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in $T+S$ stetig. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung der etwa vorhandenen Lösungen des homogenen Randwertproblems sind gleichfalls auf S stetig.[15]

Wir nehmen jetzt an, daß das erste Randwertproblem unbeschränkt lösbar ist. Es gilt dann das folgende Analogon zu dem ersten Satze von *Harnack* in der Potentialtheorie (II C 3, Nr. **16**). Es sei $\varphi(s)$ eine abteilungsweise stetige Funktion auf S und es sei $\varphi_j(s)$ $(j=1,2,\ldots)$ eine Folge in ihrer Gesamtheit beschränkter stetiger Funktionen, die in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden abgeschlossenen Teile von S gegen $\varphi(s)$ gleichmäßig konvergieren. Ist $u_j(x, y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (1), die auf S die Werte $\varphi(s)$ annimmt, so ist in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden abgeschlossenen Teile von $T+S$ gleichmäßig

$$(9)\qquad \lim_{j=\infty} u_j(x,y)=u(x,y).$$ [16]

---

13) Die Funktion auf der rechten Seite dieser Gleichung ist beschränkt (Nr. 2a).

14) In ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn ein beschränktes mehrfach zusammenhängendes Gebiet der Klasse B vorliegt. Ist T ein beschränktes Gebiet, dessen Begrenzung S eine beliebige *Jordan*sche Kurve ist, so führt das Verfahren von *Gevrey* nicht mehr zum Ziele, da bei der konformen Abbildung auf ein Kreisgebiet die Koeffizienten der Differentialgleichung in $T+S$ nicht mehr notwendigerweise beschränkt bleiben.

15) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 5) b), p. 11 sowie l. c. 9) b), p. 374—377, wo der analoge Satz für Gebiete der Klasse D bewiesen wird. An beiden zuletzt genannten Stellen wird speziell das Verhalten der partiellen Ableitungen der *Green*schen Funktion $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ (Nr. 2c) am Rande diskutiert.

16) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 5) b), p. 14—15. Der zuletzt angegebene

Der gleiche Satz gilt auch in Gebieten allgemeinerer Natur (Nr. 2d).

Enthält die Randfunktion $\varphi(s; \lambda)$ einen Parameter und sind $\varphi(s; \lambda)$ und $\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi(s; \lambda)$ für alle s auf S und $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ stetig, so ist

$$\bar{u}(x, y) = \frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, y) \quad (\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$$

diejenige in $T + S$ stetige, in T reguläre Lösung der zu (1) gehörigen homogenen Differentialgleichung, die auf S die Werte $\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi(s; \lambda)$ annimmt.[17])

Bis jetzt sind die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) als stetig vorausgesetzt worden. *Lichtenstein* behandelt darüber hinaus eingehend den Fall, wo sie nur abteilungsweise stetig sind.[18]) Sei C ein Kurvenstück der Klasse B, das zwei Punkte von S verbindet und, abgesehen von seinen Endpunkten, ganz in T verläuft. Die beiden Gebiete, in die T durch C geteilt wird, heißen T_1 und T_2. Wir nehmen an, daß a, b, c sowie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung im Innern und auf dem Rande von T_1 einerseits, T_2 anderseits stetig sind, sich auf C jedoch sprungweise ändern; f ist in jedem der beiden Bereiche stetig und erfüllt in T_1 und T_2 eine H-Bedingung. Das Problem lautet jetzt so. Es ist diejenige beschränkte, in T stetige, in T_1 und in T_2 reguläre Lösung der Differentialgleichung (1) zu bestimmen, die auf S die Wertfolge $\varphi(s)$ annimmt, wenn man darüber hinaus weiß, daß auf C, die Endpunkte möglicherweise ausgenommen, die Normalableitung existiert und sich stetig verhält, d. h. $\frac{\partial u}{\partial \nu_1} = -\frac{\partial u}{\partial \nu_2}$ ist.[19])

Wie leicht ersichtlich, kann man das vorliegende Randwertproblem auch wie folgt fassen. Es sind diejenigen beschränkten, in T_1 und T_2 regulären Lösungen u_1 und u_2 *der beiden voneinander verschiedenen* Differentialgleichungen $L(u_1) = f_1$ in T_1 und $L(u_2) = f_2$ in T_2 zu

---

Satz gilt, wie sich leicht zeigen läßt, auch wenn man bezüglich a, b, c und f nur die von *Gevrey* eingeführten Voraussetzungen macht.

17) Siehe *L. Lichtenstein,* l. c. 11), p. 574. Auch hier gilt übrigens die Schlußbemerkung der Fußnote 16).

18) Vgl. *L. Lichtenstein,* J. f. Math. 143 (1913), p. 51—105. Auf Voraussetzungen dieser Art kommt man, wenn man das zweite Randwertproblem wie in der Potentialtheorie (II C 3, Nr. 24 i) auf das erste zurückführen will (Nr. 3).

19) Die Symbole $\frac{\partial}{\partial \nu_1}$ und $\frac{\partial}{\partial \nu_2}$ bezeichnen die Ableitungen in der Richtung der beiden Innennormalen an C. Die Aussagen des Textes sind sinngemäß zu ändern, wenn T durch C nicht zerstückelt wird.

bestimmen, die auf den zu T_1 und T_2 gehörigen Teilen von S vorgegebene Wertfolgen annehmen, wenn man weiß, daß auf $C \ldots u_1 = u_2$ $\frac{\partial u_1}{\partial v_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial v_2}$ ist.[20])

Der vorhin für den Fall stetiger Koeffizienten angegebene Fundamentalsatz von der Existenz der Lösung bleibt in seinem vollen Umfange bestehen. Er gilt auch noch, wenn in T mehrere Unstetigkeitslinien, die einander auch schneiden oder berühren können, vorliegen. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ erweisen sich in T als stetig, partielle Ableitungen zweiter Ordnung ändern sich auf den Unstetigkeitslinien (mit etwaiger Ausnahme der gemeinsamen Punkte mehrerer Unstetigkeitslinien, wo möglicherweise höhere Singularitäten vorkommen) sprungweise. Auch das Analogon des ersten *Harnack*schen Satzes der Potentialtheorie sowie der vorhin angegebene Satz über die Abhängigkeit der Lösung von dem in der Randfunktion auftretenden Parameter bleiben in Kraft.

c) *Beschränkte Gebiete der Klasse B oder D in* $\mathfrak{E}$. *Die am Rande verschwindende Greensche Funktion.* Sei T ein beschränktes Gebiet der Klasse B in $\mathfrak{E}$, und es sei (X, Y) irgendein Punkt in T. Wir nehmen an, daß die Differentialgleichung $L(u) = 0$ (Nr. 2 b) keine in $T + S$ stetige, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung hat. Alsdann gibt es eine in $T + S$, außer in (X, Y), stetige, in T reguläre, auf S verschwindende Funktion $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$, die „*Green*sche Funktion", die sich in der Umgebung von (X, Y) wie

$$\log\frac{1}{r} \quad (r^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2)$$

verhält. Die Ausdrücke

$$(1) \qquad U(x, y) = \mathfrak{G}(X, Y; x, y) - \log\frac{1}{r}, \quad \frac{\partial U}{\partial x}\left|\log\frac{1}{r}\right|^{-1}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}\left|\log\frac{1}{r}\right|^{-1}$$

sollen, als Funktionen von (x, y) aufgefaßt, in der Umgebung von (X, Y) beschränkt sein.

Die Funktion $U(x, y)$ nimmt auf S die Werte $-\log\frac{1}{r}$ an und genügt der Differentialgleichung

$$(2) \qquad L(U) = -L\left(\log\frac{1}{r}\right).$$

20) Hier handelt es sich also um ein *System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Aufgaben dieser Art kommen in der mathematischen Physik häufig vor; sie sind bisher nur selten behandelt worden. Man vergleiche die allgemeinen Bemerkungen von *A. Sommerfeld,* II A 7c, p. 506—507. Mit einem Problem der Eigenwertbestimmung dieser Kategorie beschäftigen sich *É. Picard,* Palermo Rend. 37 (1914), p. 249—261, vgl. die Fußnote 66) und *M. Bottasso,* ebendort 38 (1914), p. 387—394.

Sie kann, wie sich leicht zeigen läßt, als Lösung einer zu (3) Nr. 2b analogen Integralgleichung gewonnen werden.[21]) Man findet so zugleich, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}$ auf S stetig sind. Es läßt sich zeigen, daß

$$\mathfrak{G}(X, Y; x, y) = -\tfrac{1}{2}\log[(X-x)^2+(Y-y)^2]\cdot U^*(x,y) + V^*(x,y)$$
$$U^*(X, Y) = 1$$

gesetzt werden kann, unter $U^*(x, y)$ eine reguläre Lösung der Gleichung $L(u) = 0$, unter $V^*(x, y)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion verstanden.[22]) Die *Green*sche Funktion $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ erfüllt die folgenden, zu den bekannten Ungleichheiten der Potentialtheorie (s. II C 3, p. 247—248) analogen Relationen:

---

21) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 5) b), p. 8—13, für Gebiete der Klasse D l. c. 9) b), p. 368—386.

22) Die Existenz der *Green*schen Funktion $\mathfrak{G}$ ist auf einem etwas anderen Wege zuerst von *D. Hilbert*, l. c. 8) a), p. 248—250, b) p. 70—73 bewiesen worden (vgl. die Fußnote 8)). Die Existenz einer „Grundlösung" der Differentialgleichung $L(u) = 0$, d. h. einer Lösung, die sich wie $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ verhält, ohne notwendigerweise auf S zu verschwinden, ist für Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten und für „hinreichend kleine" Gebiete von *É. Picard*, Paris C. R. 112 (1891), p. 685—688; Paris C. R. 136 (1903), p. 1293—1296; *R. Hedrick*, Inaug.-Diss. Göttingen 1901; *E. Holmgren*, Math. Ann. 58 (1904), p. 404—412 (von *Hedrick* und *Holmgren* durch sukzessive Approximationen) dargetan worden. Für „hinreichend kleine" Gebiete war damit natürlich auch die *Green*sche Funktion gewonnen. Es sei übrigens bemerkt, daß *Picard* Lösungen der Differentialgleichung $L(u) = 0$ betrachtet, die Singularitäten von einer etwas allgemeineren Natur als die Funktion $\mathfrak{G}$ aufweisen.

Es bietet natürlich keine Schwierigkeiten die Existehz der Lösung $U(x, y)$ der Differentialgleichung $L(U) = -L\left(\log\frac{1}{r}\right)$ darzutun, wenn man über a, b, c und f nur die von *M. Gevrey* eingeführten Voraussetzungen macht.

Weiteres über Grundlösungen s. Nr. 2e.

Die Bestimmung der *Green*schen Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) - qu = 0,$$

unter p eine in $T+S$ positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion verstanden, läßt sich nach einer Bemerkung von *H. Weyl* (Math. Ann. 71 (1911), p. 441—479, insb. p. 463 durch die Substitution $v = u\sqrt{p}$ auf die Bestimmung der *Green*schen Funktion der Differentialgleichung $\Delta v - v\left(\frac{q}{p} + \frac{\Delta\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\right) = 0$ zurückführen. Weitere Literatur: *M. Gevrey*, Paris C. R. 171 (1920), p. 610—612, 839—842; 173 (1921), p. 761—763, 1445—1447; 177 (1923), p. 571—574. Hier wird auch die zu dem zweiten und dem dritten Randwertproblem (Nr. 3) gehörige *Green*sche Funktion betrachtet. Auch handelt es sich daselbst zum Teil um rein elliptische Differentialgleichungen $2p^{\text{ter}}$ Ordnung.

1. Es ist

$$(3) \qquad |\mathfrak{G}(X, Y; x, y)| < \left|\log \frac{1}{r}\right| + A \quad (A \text{ konstant}).$$

2. Sei (x', y') ein willkürlicher Punkt auf S, und es seien ω und ε beliebig kleine positive Zahlen. Es gibt einen positiven Wert $\delta(\varepsilon) < \omega$, so daß für alle (X, Y) und (x, y) in T und auf S, die den Beziehungen

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 > \omega^2, \quad (X - x')^2 + (Y - y')^2 < [\delta(\varepsilon)]^2$$

genügen,

$$(4) \qquad |\mathfrak{G}(X, Y; x, y)| < \varepsilon$$

gilt.[23])

Sei noch einmal T ein Gebiet der Klasse B, und es möge diesmal auch die Funktion $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$ in T einer H-Bedingung genügen. Ist, wie wieder vorausgesetzt werden soll, das nicht homogene Randwertproblem der Differentialgleichung $L(u) = 0$ unbeschränkt lösbar, so gilt das gleiche für die zu ihr adjungierte Differentialgleichung

$$(5) \qquad M(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)u = 0.$$ [24])

Also existiert die zu $M(u) = 0$ und zu dem Gebiete T gehörige *Green*sche Funktion $\mathfrak{H}(X, Y; x, y)$. Es gilt, unter (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei verschiedene Punkte in T verstanden,

$$(6) \qquad \mathfrak{G}(x_1, y_1; x_2, y_2) = \mathfrak{H}(x_2, y_2; x_1, y_1).$$ [25])

Die Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung $L(u) = f$, die auf S eine abteilungsweise stetige, oder auch nur beschränkte und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbare Wertfolge $\varphi(s)$ annimmt, läßt sich in der Form

$$(7) \quad u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \mathfrak{H}(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(x,y;s)\varphi(s)\, ds$$

darstellen.[26]) Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der bekannten *Green*schen Formel der Potentialtheorie (II C 3, Nr. **20**, p. 249).

---

23) Vgl. *L. Lichtenstein,* l. c. 5) b), p. 11—13. Die Ungleichheiten (3) und (4) gelten auch in Gebieten allgemeinerer Natur (vgl. Nr. 2d).

24) Vgl. *L. Lichtenstein,* l. c. 5) b), p. 13, l. c. 9) b), p. 381—382, hier in Gebieten der Klasse D. Der betrachtete Satz gilt auch in der Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

25) Vgl. l. c. 5) b), p. 13. Der Reziprozitätssatz (6) ist zuerst von *A. Sommerfeld*, II A 7c, p. 516 postuliert worden. Er gilt auch in Gebieten allgemeiner Natur (Nr. 2d).

26) Vgl. *L. Lichtenstein,* a) l. c. 5) b), p. 15—16 [der Beweis wird unter Zuhilfenahme des in der Nr. 2b angegebenen Konvergenzsatzes (des Analogons zum ersten *Harnack*schen Satze der Potentialtheorie) geführt]; b) l. c. 9) b), p. 381—384. Hier werden der Betrachtung beschränkte Gebiete der Klasse D

Sei S' irgendeine zu S parallele, in hinreichend kleinem Abstande gelegene Kurve in T und es sei Θ das von S und S' begrenzte ringförmige Gebiet. Wir nehmen wie zuletzt an, daß die erste Randwertaufgabe in T unbeschränkt lösbar ist. Für alle (X, Y) und (x, y) in Θ ist

$$\mathfrak{G}(X, Y; x, y) = \log \frac{r_1}{r} + \gamma(X, Y; x, y), \tag{8}$$

unter r und r_1 die Abstände des Punktes (x, y) von dem Punkte (X, Y) bzw. von seinem „Spiegelbilde" in bezug auf S, unter $\gamma(X, Y; x, y)$ eine gewisse in $\Theta + S + S'$ stetige Funktion verstanden. Das asymptotische Verhalten der Funktion $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ am Rande des Gebietes ist demjenigen der klassischen *Green*schen Funktion ganz analog (II C 3, Nr. **20**, p. 248).[27])

Wir wollen noch eine interessante Eigenschaft der Funktion $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ erwähnen, die ebenfalls eine Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft der klassischen *Green*schen Funktion (II C 3, p. 247) darstellt.

Sei $\widetilde{T}$ irgendein Bereich der Klasse B in $T + S$, sein Durchmesser heiße $\widetilde{D}$. Liegt $\widetilde{D}$ unterhalb einer angebbaren Schranke, $\widetilde{D} < D_0$, so ist das erste Randwertproblem in $\widetilde{T}$ gewiß unbeschränkt lösbar. Sei $\widetilde{\mathfrak{G}}(X, Y; x, y)$ die zu $\widetilde{T}$ gehörige *Green*sche Funktion der Gleichung $L(u) = 0$. Man kann D_0 so klein wählen, daß

$$\frac{\partial}{\partial n} \widetilde{\mathfrak{G}}(X, Y; x, y) > 0 \tag{9}$$

wird.[28]) Dieser Satz läßt sich sinngemäß auf die allgemeinen linearen

zugrunde gelegt; die in den Ecken eingeschlossenen Winkel werden $> \frac{\pi}{4}$, oder falls $c = 0$ ist, > 0 vorausgesetzt.

Die Formel (7) ist zuerst von *A. Sommerfeld*, II A 7c, p. 516, postuliert und von *Hilbert* später ohne Beweis vielfach benutzt worden (vgl. *D. Hilbert*, l. c. 8) a) und b) passim).

Sind die Koeffizienten der Differentialgleichung $L(u) = 0$ in T abteilungsweise stetig und erfüllen sie die übrigen am Schluß der Nr. 2b angegebenen Bedingungen, so existieren, falls auch die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung $M(u) = 0$ unbeschränkt lösbar ist, die *Green*schen Funktionen $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ und $\mathfrak{H}(X, Y; x, y)$, sie hängen freilich in einer komplizierteren Weise miteinander zusammen. (Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 18), p. 71—77.)

27) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 18), p. 77—80. Dort finden sich auch nähere Angaben über das Verhalten der Funktionen $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ und $\frac{\partial \gamma}{\partial y}$. Beim Beweise wird von den am Schluß der Nr. 2b skizzierten Resultaten betreffend Differentialgleichungen mit unstetigen Koeffizienten Gebrauch gemacht.

28) *L. Lichtenstein*, a) Palermo Rend. 33 (1912), p. 201—211; 34 (1912), p. 278—279; b) Math. Ztschr. 20 (1924), p. 194—212, insb. p. 206—209.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus ausdehnen (Nr. 2e).

d) *Beschränkte Gebiete allgemeiner Natur in* $\mathfrak{E}$. Die vorhin skizzierten Ergebnisse (Nr. 2b, c) bilden den Ausgangspunkt für weitergehende Verallgemeinerungen, die in der vollständigen Erledigung des ersten Randwertproblems für beliebige beschränkte einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiete gipfeln.

Sei zunächst T^0 ein beschränktes Gebiet der Klasse B in $\mathfrak{E}$ und T ein von einer *Jordan*schen Kurve S begrenztes Gebiet in T^0. Wir nehmen an, daß a, b, c und f in $T^0 + S^0$ den eingangs der Nr. 2b genannten Bedingungen genügen und ferner $c < 0$ ist. Der Einfachheit halber möge überdies $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$ in T^0 eine H-Bedingung erfüllen. Sei $T_1, T_2, \ldots$ eine Folge ineinandergeschachtelter Gebiete der Klasse B, die gegen T konvergieren (II C 3, Nr. 4, Fußnoten 37) und 38)), und es möge $\mathfrak{G}_k(X, Y; x, y)$ die zu T_k gehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$ bezeichnen. Wie sich ohne Mühe zeigen läßt, ist die unendliche Reihe

$$(1) \qquad \sum_{\nu=k}^{\infty}(\mathfrak{G}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_\nu)$$

im Innern und auf dem Rande von T_k gleichmäßig konvergent. Die Reihe

$$(2) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{G}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_\nu)$$

stellt eine in T, außer im Punkte (X, Y), reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ dar. In der Umgebung von (X, Y) werden $\mathfrak{G}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}$ wie $\mathfrak{G}_1, \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial y}$ unendlich. Ist, wie von nun an vorausgesetzt werden soll, T so beschaffen, daß es möglich ist, jeden Punkt von S mit einem Punkte von S^0 durch ein Stück einer Kurve der Klasse B zu verbinden, die keinen in T gelegenen Punkt enthält, so läßt sich durch Heranziehung einer geeigneten Vergleichsfunktion zeigen, daß $\mathfrak{G}$ auf S verschwindet. Demnach ist $\mathfrak{G}$ die zu T gehörige *Green*sche Funktion. Sie genügt den Ungleichheiten (3) und (4) Nr. 2c. Durch eine Weiterführung des angedeuteten Verfahrens gelangt man u. a. zum Nachweis der Existenz der *Green*schen Funktion für alle Gebiete der Klasse N.[29])

Es mag jetzt auch noch $c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0$ sein. Dann existiert gewiß die zu T gehörige *Green*sche Funktion $\mathfrak{H}(X, Y; x, y)$ der Diffe-

29) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 5) b), p. 20—27.

rentialgleichung $M(u) = 0$, und es gilt wieder der Reziprozitätssatz (6) Nr. 2c. Betrachten wir die in T stetige Funktion

$$(3) \qquad \mathfrak{U}(X, Y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{k\to\infty}\int_{T_k} \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Wie unter wesentlicher Benutzung des in der Nr. 2b besprochenen Konvergenzsatzes sowie der Ungleichheiten (3) und (4) Nr. 2c gezeigt werden kann, ist $\mathfrak{U}(X, Y)$ eine in $T + S$ stetige, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung der Differentialgleichung $L(u) = f$.[29a]

Es möge jetzt auf S eine beliebige stetige Wertfolge vorgegeben sein, und es sei $F(x, y)$ eine in $T^0 + S^0$ stetige Funktion, die auf S jene Werte annimmt. Wir setzen, wie dies ja stets möglich ist,

$$(4) \qquad F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x, y) \quad \left(|P_k(x, y)| < \delta_k,\ \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k \text{ konvergent}\right),$$

unter $P_k(x, y)$ Polynome verstanden. Die Funktion

$$(5) \qquad -\frac{1}{2\pi}\int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{P_k(x, y) + \frac{1}{2\pi}\int_T L(P_k(\xi, \eta))\, \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right\}$$

ist diejenige in $T + S$ stetige, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = f$, die auf S die vorgeschriebenen Werte annimmt. Ein weiterer Grenzübergang führt zur Erledigung der Randwertaufgabe unter Zugrundelegung abteilungsweise stetiger Randwerte.[30]

Bis jetzt handelte es sich um den besonderen Fall

$$c < 0,\ c < \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Der Übergang zu der allgemeinen Differentialgleichung $L(u) = f$ macht jetzt keine Schwierigkeiten. Sei c_0 irgendeine den Ungleichheiten $c_0 < 0$, $c_0 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0$ genügende Zahl. Für $L(u) = f$ wird die äquivalente Differentialgleichung

$$(6) \qquad \bar{L}(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c_0 u = f + (c_0 - c)u$$

29a) l. c. 5) b), p. 26, wird angenommen, daß T quadrierbar ist. Diese Voraussetzung ist überflüssig.

30) Was den Begriff einer auf S abteilungsweise stetigen Funktion betrifft, s. II C 3, Nr. 3, p. 190.

gesetzt. Ist $\bar{\mathfrak{H}}(X, Y; x, y)$ die zu T gehörige *Green*sche Funktion der zu $\bar{L}(u) = 0$ adjungierten Differentialgleichung, so ist, wie leicht ersichtlich,

$$(7) \quad u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \bar{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T \bar{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta)[c_0 - c(\xi, \eta)] u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v_0(x, y),$$

unter $v_0(x, y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $\bar{L}(u) = 0$ verstanden, die auf S die vorgeschriebenen Werte annimmt. Die Integralgleichung (7) führt jetzt ohne weiteres auf die bekannte Alternative (Nr. 2b).[31]

Bei den im vorstehenden skizzierten Betrachtungen handelt es sich um einfach oder mehrfach zusammenhängende beschränkte Gebiete, die gewissen weiteren Voraussetzungen genügen. Auf dem folgenden Wege kann man nun zu einer vollständigen Auflösung des ersten Randwertproblems bei einem beliebigen beschränkten, endlich vielfach zusammenhängenden Gebiete T in $\mathfrak{E}$ gelangen.[32]

Als wesentliches Hilfsmittel dient hierbei der folgende Hilfssatz von *Lebesgue* (II C 3, Nr. 45c, p. 336 insb. Fußnote 539)).[33] Mit *Lebesgue* wird eine in T erklärte stetige Funktion $F(x, y)$ monoton genannt, wenn, unter $\Theta + \Sigma$ einen beliebigen Bereich in T verstanden, die obere und die untere Grenze von F in Θ mit der oberen und der unteren Grenze derselben Funktion auf Σ identisch ist. Sei T_j $(j = 1, 2, \ldots)$ eine Folge ineinander geschachtelter Gebiete der Klasse C in T, die gegen T konvergieren; sei ferner $\psi(x, y)$ eine in $T + S$ stetige Funktion, die in T stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und überdies so beschaffen ist, daß das *Dirichlet*sche Integral

$$D_T(\psi) = \lim_{T_j \to T} \int_{T_j} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = \lim D_{T_j}(\psi)$$

existiert. Sei schließlich $U_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ eine Folge in $T + S$ stetiger, in T_j monotoner Funktionen, die in $T_j + S_j$ stetige Ableitungen erster Ordnung haben, in $T - T_j$ gleich $\psi(x, y)$ und überdies so beschaffen sind, daß

$$(8) \qquad D_T(U_j) < M \quad (M \text{ konstant})$$

31) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 5) b), p. 32—34.

32) Vgl. *L. Lichtenstein*, Ber. d. Berl. Math. Ges. 15 (1916), p. 123—130.

33) Vgl. *H. Lebesgue*, Palermo Rend. 24 (1907), p. 371—402.

gilt. Nach *Lebesgue* kann man aus U_j eine Teilfolge $U^{(j)}$ $(j = 1, 2 \ldots)$ aussondern, die in $T + S$ gleichmäßig konvergiert.

Wir gehen jetzt von der Differentialgleichung

$$L^*(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

$$\left(a, b, \frac{\partial a}{\partial x}, \ldots \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \text{ in } T + S \text{ stetig}\right)$$

aus. Jede in T reguläre Lösung dieser Differentialgleichung ist in T monoton.[34] Sei K^* ein Kreisgebiet, das $T + S$ enthält, und es sei $\varphi(x, y)$ irgendeine in K^* nebst ihren partiellen Ableitungen der drei ersten Ordnungen stetige Funktion. Es möge jetzt $u_j(x, y)$ diejenige in $T + S$ stetige Funktion bezeichnen, die folgende Eigenschaften hat. Sie besitzt in T abteilungsweise stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung, ist in $T - T_j$ gleich $\varphi(x, y)$ und erfüllt in T_j die Differentialgleichung (9). Es läßt sich zeigen, daß für alle j

$$D_T(u_j) < \overline{M} \quad (\overline{M} \text{ konstant}) \tag{10}$$

gilt. Dem soeben genannten *Lebesgue*schen Hilfssatze gemäß läßt sich aus der Folge $u_j(x, y)$ eine Teilfolge aussondern, die in $T + S$ gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion ist eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Lösung der Differentialgleichung (9), die auf S die Werte $\varphi(x, y)$ annimmt. Da es nur eine Lösung dieser Art geben kann (vgl. Nr. 2f), so konvergiert bereits die Folge $u_j(x, y)$ gleichmäßig.

Von der so gewonnenen Lösung der Differentialgleichung $L^*(u) = 0$ gelangt man zu der vollständigen Erledigung des ersten Randwertproblems der Gleichung $L(u) = 0$ durch Betrachtungen, die den vorhin skizzierten (p. 1291—1293) analog sind.

e) *Beschränkte Gebiete in* $\mathfrak{E}$. *Allgemeine lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zurückführung auf die Normalform. Konforme Abbildung nichtanalytischer Flächenstücke auf ebene Gebiete.* Das erste Randwertproblem der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus

$$\Lambda(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = H, \tag{1}$$

$$AC - B^2 = 1$$

kann als erledigt gelten, sobald es gelingt, (1) auf die Normalform

34) Vgl. *L. Lichtenstein,* l. c. 28), a) p. 211. Für Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten ist dieser Satz schon früher von *É. Picard* bewiesen worden. Vgl. *É. Picard,* Traité d'Analyse, Bd. II, 2. Aufl., Paris 1905, p. 35—36.

zu bringen.[35]) Diese Aufgabe kann, wenn die Funktionen A, B und C analytisch sind, auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung im komplexen Gebiete zurückgeführt werden.[36]) Eine andere Möglichkeit bietet die Bestimmung einer „Grundlösung" der sich selbst adjungierten Differentialgleichung

$$(2)\qquad \bar{\Lambda}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Sei (X, Y) irgendein Punkt in T. Unter einer Grundlösung der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ bzw. $\bar{\Lambda}(u) = 0$ versteht man eine Lösung $\Gamma(X, Y; x, y)$, die sich in T, außer in (X, Y), regulär verhält, in (X, Y) dagegen unendlich ist. Die Funktion

$$(3)\qquad \Gamma^*(x, y) = \Gamma(X, Y; x, y) + \tfrac{1}{2}\log\{C(X, Y)(x - X)^2 - 2B(X, Y)(x - X)(y - Y) + A(X, Y)(y - Y)^2\}$$

soll dabei in (X, Y) stetig, die Ausdrücke

$$(4)\qquad \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x}\cdot|\log\{(X - x)^2 + (Y - y)^2\}|^{-1},$$
$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial y}\cdot|\log\{(X - x)^2 + (Y - y)^2\}|^{-1}$$

sollen in (X, Y) beschränkt sein.[37])

Die Bestimmung einer Grundlösung der Gleichung (2) ist von *E. E. Levi* auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückgeführt worden. *E. E. Levi* nimmt an, daß A, B, C stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben und daß $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ einer *Hölder*schen Bedingung oder allgemeiner einer *Dini*schen Be-

35) Über das erste Randwertproblem in der Theorie rein elliptischer Differentialgleichungen $2p^{\text{ter}}$ Ordnung, ohne Zurückführung auf die Normalform, vergleiche bei *E. E. Levi,* I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Memorie della Società italiana delle Scienze (3) 16 (1909), p. 1—112.

36) Siehe *C. F. Gauß,* Werke 4, p. 193—216. Man vergleiche ferner bei *É. Picard,* Traité d'Analyse 2, 2. Aufl., Paris 1905, p. 27—29.

37) Übrigens ist für die Reduktion der Differentialgleichung (1) auf die Normalform die Kenntnis einer Grundlösung der Gleichung (2) nicht notwendig. Es genügt, wenn man in der Umgebung eines jeden Punktes (x, y) von T eine von einer Konstanten verschiedene partikulare Lösung $u(x, y)$ der Gleichung (2) angeben kann, so daß $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ ist.

Über Grundlösungen der Differentialgleichung $L(u) = 0$ vergleiche die Fußnote 22).

dingung[38])[39]) genügen. Diese Voraussetzungen lassen sich nach *Lichtenstein* durch die folgenden, weniger einschränkenden ersetzen:

A, B, C haben stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, $\frac{\partial A}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial C}{\partial y}$ genügen einer *Hölder*schen Bedingung.[40]) Das von *E. E. Levi* und von *Lichtenstein* benutzte Verfahren ist mit der „Parametrix-Methode" von *Hilbert* verwandt[41]) (Nr. 3).

Eine ganz andere Methode zur Bestimmung partikularer Lösungen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$, die von einer Konstanten verschieden sind, hat *A. Korn* angegeben.[42]) *Korn* begnügt sich mit der

---

38) Vgl. *E. E. Levi,* Palermo Rend. 24 (1907), p. 275—317. An der bezeichneten Stelle werden allgemeiner Grundlösungen der Differentialgleichung (1) und darüber hinaus einer beliebigen partiellen Differentialgleichung $2p^{\text{ter}}$ Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen vom rein elliptischen Typus bestimmt. Man vergleiche ferner *E. E. Levi,* l. c. 35). Eine Grundlösung der Differentialgleichung $\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + du = 0$ (a, b, c, d analytisch) bestimmt *E. Holmgren,* Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 1 (1903), p. 209—224. *I. Fredholm* behandelt partielle Differentialgleichungen von der Form $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = 0$, unter f eine definite Form mit konstanten Koeffizienten verstanden, beweist die Existenz einer Grundlösung und zeigt ihren Zusammenhang mit den zu der Kurve $f(x, y, z)$ gehörigen *Abel*schen Integralen. [*I. Fredholm,* Palermo Rend. 25 (1908), p. 346—351. S. ferner *I. Fredholm,* Acta math. 23 (1900), p. 1—42; Paris C. R. 129 (1899), p. 32—34.] *J. Hadamard* gibt in den Ann. Éc. Norm. 21 (1904), p. 535—556 u. a. die Grundlösung einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus mit analytischen Koeffizienten und $n \geq 2$ unabhängigen Veränderlichen an. [Man vgl. ferner *J. Hadamard,* Notice scientifique 1901; Paris C. R. 137 (1903), p. 1028—1030.] *E. E. Levi* beweist l. c. 11) b), p. 311—317 die Existenz einer Grundlösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen, ohne die Koeffizienten analytisch vorauszusetzen (durch Zurückführung auf die Auflösung einer Integralgleichung). Weitere Literatur: *J. Le Roux,* Paris C. R. 137 (1903), p. 1230—1232; Paris C. R. 136 (1903), p. 1426—1427; *N. Zeilon,* Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 6 (1910), Nr. 38; *M. Gevrey,* l. c. 22).

39) Vgl. II C 3, p. 207, Fußnote 83).

40) Vgl. *L. Lichtenstein,* Berlin Abh. 1911, Anhang; l. c. 5) b), p. 35—40. An der zuletzt genannten Stelle findet sich die Reduktion der Gleichung (1) auf die Normalform in allen Einzelheiten durchgeführt.

41) Vgl. *D. Hilbert,* Gött. Nachr. 1910, p. 1—65 insb. p. 8—34; *Grundzüge,* p. 219—242. Hier handelt es sich um die Bestimmung der auf der ganzen Kugel stetigen Lösungen gewisser Differentialgleichungen von der Form $\Lambda(u) + \lambda u = 0$. Der Einfachheit halber nimmt *Hilbert* die Koeffizienten analytisch an. Es würde indessen genügen, die Existenz und Stetigkeit partieller Ableitungen bis zu einer gewissen endlichen Ordnung vorauszusetzen.

42) Vgl. *A. Korn,* Schwarz-Festschrift 1914, p. 215—229. Man vergleiche die Bemerkung der Fußnote 37).

Annahme, daß die Koeffizienten $A, \ldots, F$[43]) stetig sind und die *Hölder*sche Bedingung erfüllen. Er schreibt für $\Lambda(u) = 0$ mit $F = 0$, wenn (x_0, y_0) einen Punkt in T bezeichnet,

$$(5)\quad A(x_0, y_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x_0, y_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x_0, y_0)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= -(A(x,y) - A(x_0, y_0))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2(B(x,y) - B(x_0, y_0))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$-(C(x,y) - C(x_0, y_0))\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}$$

und findet die Lösung des ersten Randwertproblems durch sukzessive Approximationen. Vorausgesetzt dabei wird: 1. daß der Durchmesser des Gebietes T (der Klasse Bh) hinreichend klein ist, 2. daß die Randfunktion $\varphi(s)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, und $\varphi''(s)$ einer H-Bedingung genügt. Die Annahmen bezüglich der Koeffizienten sind von bemerkenswerter Allgemeinheit. Handelt es sich freilich speziell um die Differentialgleichung (2), die für die Reduktion auf die Normalform in Betracht kommt, so leistet diese Methode nicht mehr als diejenige von *Lichtenstein.*

Auf die Aufgabe, eine Differentialgleichung von der Form (2) auf die Normalform zu bringen, wird man geführt, wenn man versucht, ein nicht analytisches Flächenstück auf ein ebenes Gebiet konform abzubilden. Aus den vorhin besprochenen Resultaten ergibt sich die Möglichkeit der fraglichen Abbildung für Flächenstücke der Klasse Bh. Darüber hinaus hat *Lichtenstein* gezeigt, daß auch Flächenstücke der Klasse B' und selbst der Klasse Ah auf ebene Gebiete abgebildet werden können.[44])

f) *Unitätssätze.* Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(1)\quad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0.$$

Von den beiden bei dem ersten Randwertproblem überhaupt möglichen Fällen (Nr. 1b) tritt bestimmt der erste ein, d. h. die nichthomogene Randwertaufgabe hat stets eine und nur eine Lösung, wenn das Gebiet „hinreichend klein"[45]) oder wenn $F < 0$ ist. In dem zuletzt genannten Falle unterliegt die Größe des Gebietes keiner Einschränkung; der Unitätssatz ist nach *Paraf* eine einfache Folge der Tatsache, daß Lösungen der Gleichung (1) für $F < 0$ in ihrem Regularitätsgebiete

43) Bei *Korn* ist übrigens $F = 0$, doch ist dies natürlich nebensächlich.

44) Siehe l. c. 40) und namentlich Bull. Acad. sc. Cracovie 1916, p. 192—217. Näheres vgl. in dem Artikel II C 3, p. 264, insb. Fußnote 301).

45) Vgl. den Artikel II A 7c von *A. Sommerfeld,* Nr. 4.

weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum zulassen.[46]) Ist in T durchweg $F = 0$, so kann eine Lösung der Gleichung (1) in ihrem Regularitätsgebiete weder ein Maximum noch ein Minimum haben.[47]) Der Unitätssatz gilt also unbeschränkt, auch wenn in T überall $F = 0$ ist. Ist schließlich in T allgemeiner $F \leqq 0$, so läßt sich, wie *Picard* zeigte, bei geeigneter Wahl einer Funktion,

$$z(x) > 0 \quad \text{für} \quad v(x, y) = \frac{1}{z(x)} u(x, y)$$

eine Differentialgleichung ableiten, in der der Koeffizient von $v(x, y)$ durchweg negativ ist. Darum gilt der Unitätssatz ohne Einschränkung, auch wenn in T allgemeiner $F \leqq 0$ ist.[48]) Wendet man dieses Resultat auf die zu (1) adjungierte Differentialgleichung an, so findet man als eine weitere hinreichende Bedingung für die unbeschränkte Unität der Lösung des ersten Randwertproblems in der Theorie der Differentialgleichung (1) die Ungleichheit

$$(2) \qquad F - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \leqq 0.$$

In dem besonderen Falle der Gleichung $L(u) = 0$, nimmt (2) die einfachere Form

$$(3) \qquad c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \leqq 0$$

an. Nach *Picard* gilt der Unitätssatz unbeschränkt, auch wenn

$$(4) \qquad c - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y} \leqq 0$$

ist.[49])

Zahlreiche weitere Unitätssätze für Differentialgleichungen vom

---

46) Vgl. *A. Paraf,* Ann. Fac. Sc. Toulouse 6 (1892) H, p. 1—75, insb. p. 49—50. Siehe auch l. c. 18), p. 64—65, wo Differentialgleichungen in der Normalform mit abteilungsweise stetigen Koeffizienten betrachtet werden. Der *Paraf*sche Satz gilt auch dort noch.

47) Für Gleichungen mit analytischen Koeffizienten ist dieser Satz von *É. Picard,* Traité d'Analyse, 2. Aufl., Bd. II, Paris 1905, p. 29—30, für Gleichungen mit nichtanalytischen Koeffizienten von *L. Lichtenstein,* l. c. 28) a), p. 210 bis 211 bewiesen worden. Der von *A. Sommerfeld,* l. c. 45), p. 521—522 gegebene Beweis ist unzureichend.

48) Vgl. *É. Picard,* l. c. 47), p. 35—36.

49) Vgl. *É. Picard,* l. c. 47), p. 23—24. *Picard* benutzt bei seinem Beweise eine teilweise Integration und führt darum als eine besondere Voraussetzung Existenz partieller Ableitungen erster Ordnung der von ihm betrachteten Lösungen auf S ein. Bei Gebieten der Klasse B ist die in Betracht kommende teilweise Integration indessen stets ausführbar, mithin das Kriterium (4) allgemein gültig, weil bei Lösungen, die auf S verschwinden, partielle Ableitungen erster Ordnung stets auch noch auf S stetig sind (Nr. 2b, p. 1285).

elliptischen (oder parabolischen) Typus sind von *U. Dini* und *M. Picone* angegeben worden. Hier handelt es sich namentlich um „hinreichend kleine“ Gebiete und um die Bestimmung geeigneter Schranken, innerhalb deren der Unitätssatz noch gilt.[50]) Gewisse dahin zielende Betrachtungen finden sich bereits bei *Picard* und *Paraf*.[51])

g) *Gebiete in* $\mathfrak{E}_m$. *Räumliche Gebiete.* Sei T ein Gebiet in $\mathfrak{E}_m$ und es mögen die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) Nr. 2b den a. a. O. angegebenen Stetigkeitsbedingungen genügen.[51a]) Ist T schlichtartig, so führt eine konforme Abbildung das Problem auf das in der Nr. 2b und 2d behandelte zurück.[52]) Sei jetzt T nicht schlichtartig. Ist zunächst $c = 0$, so kann man zu der Auflösung des ersten Randwertproblems durch alternierendes Verfahren gelangen. Der Übergang zu dem allgemeinen Falle eines beliebigen c bietet keinerlei Schwierigkeiten dar (Nr. 2d). In ähnlicher Weise kann man vorgehen, wenn es sich um die allgemeine elliptische Differentialgleichung (1) Nr. 2e handelt.

Liegt ein unendliches Gebiet (in $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_m$) vor und genügen die Koeffizienten im Unendlichen nicht den in der Fußnote 51a) erwähnten Bedingungen, so sind bei den Lösungen Singularitäten zu erwarten.

---

50) Vgl. *U. Dini*, Rend. Accad. Linc., Memorie (5) 3, p. 33—104; *M. Picone*, Rend. Accad. Linc. (5) 20 (1911), p. 213—219, 331—338; (5) 22 (1913), p. 275—282; (5) 23 (1914), p. 413—420. Einige aus den Unitätssätzen des Textes in naheliegender Weise folgende Unitätssätze in der Theorie nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus gibt *S. Bernstein*, l. c. 112) b), p. 68—69 an. Eine Zusammenstellung der Sätze dieser Art findet sich bei *L. Lichtenstein*, Palermo Rend. 28 (1909), p. 267—306, insb. p. 302—306.

51) Vgl. *É. Picard*, l. c. 47), p. 24—26; *A. Paraf*, l. c. 46), p. 302—306.

51a) Es wird angenommen, daß der Rand S von T aus einer endlichen Anzahl ganz im Endlichen gelegener Komponenten besteht und keinen Windungspunkt enthält. Wird die Umgebung der etwa in T gelegenen Windungspunkte bzw. unendlich fernen Punkte durch konforme Abbildung auf ein schlichtes Gebiet übertragen, so sollen sich die Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung wie in der Nr. 2b angegeben verhalten. (Die Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichung müssen in der Umgebung unendlich ferner Punkte gewissen leicht aufzustellenden Bedingungen genügen.) Als „reguläre Lösungen“ sind diejenigen zu bezeichnen, die sich nach Überpflanzung nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig verhalten.

52) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 9) b), wo sich p. 348—349 die Transformationsformeln finden. Gebiete, die über einer Ebene mehrfach ausgebreitet sind, hat bereits *H. A. Schwarz* in seiner Jubiläumsschrift, Ges. Abh. Bd. 1, p. 223—269, insb. p. 241—269, bei der Untersuchung der Differentialgleichung $\Delta u + pu = 0$ $(p > 0)$ herangezogen. Bei *Schwarz* ist T nicht notwendig schlichtartig.

Das gleiche tritt auch bei beschränkten Gebieten in $\mathfrak{E}$ ein, wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung in einzelnen Punkten unendlich werden, sofern dabei die Ordnung des Unendlichgroßwerdens hinreichend groß ist.

Die im Vorstehenden (Nr. 2b, 2d) besprochenen Ergebnisse lassen sich sinngemäß auf die partielle Differentialgleichung in der Normalform

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+du=f$$

übertragen.[53]) Handelt es sich jetzt um das erste Randwertproblem in der Theorie der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung

$$(2)\quad \sum_{j,k}^{1\ldots 3} A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j}^{1\ldots 3} B_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+Fu=0\quad (x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z),$$[54])

so führt eine Übertragung der Methoden der Nr. 2e nicht zum Ziele. Wollte man nämlich (2) auf die Normalform zurückführen, so hätte man fünf Beziehungen zu erfüllen, während bei einer beliebigen Transformation der unabhängigen Variablen nur drei Funktionen verfügbar sind. Wie *W. Sternberg* in einer in Veröffentlichung begriffenen Arbeit zeigte, läßt sich die erste und übrigens auch die zweite Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\sum\limits_{j,k}^{1..3} A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}=0$ in Anlehnung an das *Neumann-Fredholm*sche Verfahren in der Potentialtheorie (II C 3, p. 231, 238—239) erledigen (vgl. *W. Sternberg*, Math. Ztschr. 1924). Die Methoden der Nr. 2b führen von hier aus zu der Auflösung der ersten Randwertaufgabe in der Theorie der Gleichung (2). Eine andere Möglichkeit bieten die folgenden Überlegungen.

Sei T etwa ein von einer geschlossenen analytischen und regulären Fläche S begrenztes Gebiet ganz im Innern von T^*.

Sei ferner K ein Kugelkörper um einen beliebigen Punkt in $T+S$ als Mittelpunkt vom Radius R.[55])

Ist $R\leqq R_0$, unter R_0 eine nur von A_{jk}, B_j, F abhängige Schranke verstanden, so hat nach *Korn* sowohl die Gleichung (2) als auch die

53) Ältere Literatur vgl. II A 7 c, p. 528, 529, 569.

54) Die Form $\sum\limits_{j,k}^{1\ldots 3} A_{jk}u_j u_k$ $(A_{jk}=A_{kj})$ ist definit. Der Einfachheit halber wird im folgenden angenommen, daß die Koeffizienten der Gleichung (2) in einem von einer stetig gekrümmten Fläche S^* begrenzten beschränkten Gebiete T^* erklärt sind und sich dort analytisch und regulär verhalten. Doch ist die zuletzt genannte Voraussetzung nicht notwendig.

55) Wir nehmen R kleiner als der Abstand der Randflächen S und S^* an.

zu ihr adjungierte Gleichung eine und nur eine in $K+C$ stetige, in K reguläre Lösung, die auf C vorgeschriebene analytische und reguläre Werte annimmt, wie auch der Mittelpunkt von K sonst in $T+S$ gelegen sein mag.[56])

Es möge jetzt speziell $F<0$ sein. Wir bezeichnen mit $\Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ irgendeine Grundlösung der zu (2) adjungierten Differentialgleichung.[56a]) Das vorhin angegebene Resultat gestattet augenscheinlich die *Green*sche Funktion $\mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ der zu (2) adjungierten Gleichung herzuleiten. Als Funktion von (x, y, z) aufgefaßt, genügt $\mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ der Differentialgleichung (2). Sei jetzt $\varphi(s)$ irgendeine analytische und reguläre Ortsfunktion auf C. Für die Lösung $u(x, y, z)$ der zu $\varphi(s)$ gehörigen ersten Randwertaufgabe der Gleichung (2) ergibt die klassische Schlußweise der teilweisen Integration eine Formel von der Form

$$u(x, y, z) = \int_C \varphi(s) \{ \mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \} d\omega. \tag{3}$$ [57])

In (3) bezeichnet $s = (\xi, \eta, \zeta)$ einen Punkt auf C, $d\omega$ das Flächenelement in (ξ, η, ζ), $\{\mathfrak{H}\}$ einen Differentialausdruck, der sich in bekannter Weise aus den partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\mathfrak{H}$ in bezug auf ξ, η und ζ zusammensetzt.

Sei jetzt $\varphi(s)$ eine beliebige stetige Ortsfunktion auf C, und es sei $\varphi(s) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(s)$, unter $\varphi_n(s)$ analytische und reguläre Funktionen auf C verstanden. Ist $u_n(x, y, z)$ die zu $\varphi_n(s)$ gehörige Lösung der Gleichung (2), so ist nach (3)

$$u_n(x, y, z) = \int_C \varphi_n(s) \{ \mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \} d\omega. \tag{4}$$

Aus der Nichtexistenz eines positiven Maximums und negativen Minimums in T folgt in bekannter Weise, daß die Folge $u_n(x, y, z)$ in $K+C$ gleichmäßig konvergiert. Sei $u(x, y, z) = \lim u_n(x, y, z)$, und es sei $\overline{K}$ irgendein Gebiet ganz im Innern von K. Aus (4) folgt durch Grenzübergang, $n \to \infty$, fast unmittelbar, daß in $\overline{K}$

$$u(x, y, z) = \int_C \varphi(s) \{ \mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \} d\omega \tag{5}$$

gilt. Die Funktion $u(x, y, z)$ hat in $\overline{K}$, mithin auch in K, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und erfüllt die Differential-

56) Der Beweis wäre wie bei *Korn*, l. c. 42) zu führen.

56a) Was die Existenz einer Grundlösung Γ betrifft, vgl. *J. Hadamard* und *E. E. Levi*, l. c. 38). S. auch *M. Gevrey*, Paris C. R. 171 (1920), p. 610—612.

57) Vgl. II A 7c, p. 513—517, wo analoge Betrachtungen in der Ebene durchgeführt sind.

gleichung (2), so daß sie die zu $\varphi(s)$ gehörige Lösung des betrachteten Randwertproblems darstellt. Von diesem Resultat gelangt man durch einen weiteren Grenzübergang zu abteilungsweise stetigen Randwerten. Von hier aus könnte man versuchen, durch alternierendes Verfahren zu beliebigen beschränkten Gebieten in T, deren Randflächen aus endlichvielen Stücken von Kugelflächen begrenzt sind, überzugehen. (Zu dem Gebiete T selbst und zu beliebigen Werten von F käme man sodann auf dem in der Nr. 2d skizzierten Wege.) Doch dürfte der Nachweis der Existenz einer *Schwarz*schen Zahl $q < 1$ ein vertieftes Studium der Funktion $\mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ erfordern.[57a]) Eine andere Möglichkeit, die erste Randwertaufgabe unter Zugrundelegung des Gebietes T zu behandeln, bieten die Variationsmethoden (II C 3, Nr. 45).

Man würde dabei von der sich selbst adjungierten elliptischen Differentialgleichung

$$(6)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + A_{13}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + A_{23}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_{31}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{32}\frac{\partial u}{\partial y} + A_{33}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \quad (A_{jk} = A_{kj})$$

ausgehen, die in dieser Theorie dieselbe Rolle spielt, wie die Gleichung $\Delta u = 0$ in der Theorie der Differentialgleichungen in der Normalform. In der Ebene ist die erste Randwertaufgabe der zu (6) analogen Gleichung von *B. Levi* und *G. Fubini* durch Variationsbetrachtungen behandelt worden, wobei die Lösung derselben Aufgabe für irgendein Elementargebiet, z. B. eine Kreisfläche (im Raume etwa einen Kugelkörper), als bereits bekannt betrachtet wurde.[57b]) Man könnte versuchen, im Raume ein analoges Verfahren einzuschlagen. Der Übergang zu der allgemeineren Gleichung (2) könnte dann ähnlich wie in der Nr. 2b geschehen.

Bezüglich unendlicher Gebiete sowie der Fälle, wo die Koeffizienten der Differentialgleichung mit Singularitäten im Endlichen behaftet sind, gelten hier analoge Bemerkungen wie bei zwei unabhängigen Variablen. Man gelangt hier wie dort unter Umständen zu singulären Integralgleichungen, bei denen die Fundamentalsätze von *Fredholm* nicht mehr gelten.[57c])

57a) Dagegen gelangt man ohne Mühe zum Ziele, wenn man sich eines anderen kombinatorischen Verfahrens bedient, das in II C 3, p. 272 auseinandergesetzt worden ist. Vgl. *L. Lichtenstein,* l. c. 60), p. 198—204.

57b) Vgl. *B. Levi,* Palermo Rend. 22 (1906), p. 293—360, 387—394 (insb. p. 390—394); *G. Fubini,* ebenda p. 383—386; 23 (1907), p. 58–84, 300—301 (insb. p. 78—80).

57c) Vgl. *É. Picard,* Paris C. R. 151 (1910), p. 606—610; auch Ann. Éc. Norm. 25 (1908), p. 585—591; 28 (1911), p. 313—324; *G. Bouligand,* Paris C. R.

3. Das zweite Randwertproblem. Höhere Randwertaufgaben. Ein Verfahren, das die Auflösung der zweiten Randwertaufgabe in der Theorie der Differentialgleichung $L(u) = f$ auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückzuführen gestattet, ist von *É. Picard* skizziert worden.[58]) Eine ins einzelne ausgearbeitete, ganz anders geartete Methode ist von *L. Lichtenstein* angegeben worden.[59])

---

157 (1913), p. 1124—1127, 1397—1398; Soc. Math. France, Comptes Rendus des Séances de l'année 1913, p. 56—58; siehe auch Paris C. R. 169 (1919), p. 1020—1023, woselbst es sich um die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda u$ (λ konstant) und um ein unendliches Gebiet handelt; *A. Sommerfeld,* Ber. Deutsch. Math.-Ver. 21 (1912/13), p. 309—353; *R. Bär,* Inaug.-Diss. Würzburg 1915 (gedruckt im Jahre 1916), auch auszugsweise erschienen in den Math. Ann. 78 (1917), p. 177—186. *Sommerfeld* behandelt u. a. die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = f$ in einem etwa von einer regulären und analytischen Fläche begrenzten unendlichen dreidimensionalen Gebiete und zeigt, daß die Lösung durch die Randwerte und durch die Bedingung, daß für $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \to \infty \cdots u$ gegen Null konvergieren, Ru beschränkt bleiben soll, noch nicht bestimmt ist. Dies tritt hingegen ein, wenn man darüber hinaus voraussetzt, daß $\lim\limits_{R \to \infty} R\left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku\right) = 0$ sein soll („Ausstrahlungsbedingung"). Nach einer Bemerkung von *E. Hilb* bei *P. Epstein,* Ann. d. Phys. (4) 53 (1917), p. 33—42, insb. p. 36, kann man, wenn man von komplexen Werten von k ausgeht und ein reelles k nur als Grenzfall betrachtet, statt dessen verlangen, daß u und $\frac{\partial u}{\partial R}$ für $R \to \infty$ nicht stärker unendlich werden, als eine beliebige Potenz von R. Siehe auch *R. Bär,* a. a. O. Man vgl. hierzu ferner die neueren Ausführungen von *G. Bouligand,* Paris C. R. 172 (1921), p. 437—439, sowie Paris C. R. 169 (1919), p. 893—894. An der zuletzt genannten Stelle wird u. a. gezeigt, daß eine beschränkte, in einem unendlichen Gebiete reguläre, auf den (ganz im Endlichen gelegenen) Randflächen verschwindende Lösung der Gleichung $\Delta u - \lambda u = 0$ ($\lambda > 0$) identisch verschwindet. Von großem prinzipiellen Interesse sind die neuesten Ergebnisse von *T. Carleman,* Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala 1923, p. 174—185, in denen das uns interessierende Problem mit der von *Carleman* neuerdings wesentlich geförderten Theorie der singulären Integralgleichungen in Zusammenhang gebracht wird.

58) Vgl. *É. Picard,* Ann. Éc. Norm. 14 (1907), p. 335—340. Die gleiche Methode führt auch noch bei dem dritten Randwertproblem zum Ziele.

59) Vgl. *L. Lichtenstein,* l. c. 18), p. 81—93. Durch eine konforme Abbildung wird vor allem von dem Gebiete T (der Klasse Bh) zu einem beschränkten Gebiete T' übergegangen, das von Vollkreisen begrenzt ist. Wie sich leicht zeigen läßt, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß auf $S \ldots \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ist. Da auf S' jetzt $\frac{\partial u}{\partial n'} = 0$ ist, so läßt sich u, wie in der Potentialtheorie, durch eine „Spiegelung" über die Rückseite der Ebene fortsetzen (vgl. II C 3, Nr. 24i, p. 270). Man kommt dabei zu einer Differentialgleichung mit abteilungsweise stetigen Koeffizienten. An Stelle des in der Poten-

Eine weitere Auflösungsmöglichkeit, die sich durch besondere Einfachheit auszeichnet, bietet die folgende Überlegung.[60])

Sei T ein beschränktes Gebiet der Klasse Bh in $\mathfrak{E}$, und es möge $q(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige, in T einer H-Bedingung genügende, wesentlich negative Funktion, $q < 0$, bezeichnen. Wie sich leicht zeigen läßt, ist das zweite Randwertproblem in der Theorie der Gleichung $\Delta u + qu = 0$ stets, und zwar in einer einzigen Art und Weise lösbar. Also existiert die zu dem zweiten Randwertproblem gehörige *Green*sche Funktion dieser Gleichung, $\Gamma^{II}(x, y; \xi, \eta)$. Handelt es sich jetzt um die Gleichung $L(u) = f$, und soll auf S etwa $\frac{\partial u}{\partial n} = g(s)$ sein, unter $g(s)$ eine abteilungsweise stetige Funktion verstanden, so setze man vor allem $u = v + w$ $\left(\Delta w + qw = 0,\ \frac{\partial w}{\partial n} = g(s)\right)$. Man findet so

$$(1)\quad \Delta v + a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + cv = f + qw - a\frac{\partial w}{\partial x} - b\frac{\partial w}{\partial y} - cw = f_1.$$

Hier wird f_1 im allgemeinen bei der Annäherung an S logarithmisch unendlich, $|f_1| <$ Const. $|\log \mathfrak{r}|$.[61]) Setzt man jetzt $\Delta v + qv = V$, so findet man der Reihe nach

$$(2)\qquad v(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \Gamma^{II}(x, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$(3)\quad V(x,y) - \frac{1}{2\pi}\int_T \Big\{a(x,y)\frac{\partial \Gamma^{II}}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial \Gamma^{II}}{\partial y} + (c(x,y) - q(x,y))\Gamma^{II}\Big\}\, V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f_1(x, y).$$

Das Problem ist damit auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückgeführt.

In einer ganz ähnlichen Weise läßt sich das dritte Randwert-

---

tialtheorie angewandten alternierenden Verfahrens tritt ein kombinatorisches Verfahren, das sich der linearen Integralgleichungen bedient (II C 3, Nr. 24j). Man gelangt so zu einer vollständigen Auflösung der zweiten Randwertaufgabe, wobei bezüglich der ursprünglich vorgeschriebenen Werte der Normalableitung auf S lediglich vorausgesetzt zu werden braucht, daß sie abteilungsweise stetig sind. Das Problem wird zu einem völlig bestimmten, wenn man darüber hinaus annimmt, daß eine Ungleichheit von der Form $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \alpha_1 |\log \mathfrak{r}| + \alpha_2$ (α_1, α_2 konstant, $\mathfrak{r}$ der Abstand des Punktes (x, y) von S) besteht. An der bezeichneten Stelle wird zuletzt die zu der zweiten Randwertaufgabe gehörige *Green*sche Funktion der Gleichung $L(u) = f$ konstruiert.

Weitere Literatur: *J. W. Lindeberg*, Ann. Éc. Norm. (3) 18 (1901), p. 127—142. Hier handelt es sich speziell um die Gleichung $\Delta u + fu = 0$, $f < 0$.

60) Vgl. *L. Lichtenstein*, Math. Ztschr. 20 (1924), p. 194—212, insb. p. 194—197.

61) Vgl. die Fußnote 59).

problem erledigen. Hier handelt es sich um die Bestimmung der etwa vorhandenen, in T und auf S beschränkten, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung $L(u) = f$, die auf S der Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = g \tag{4}$$ [62])

genügen. Ist $h \leqq 0$, $\int\limits_S h\,ds \neq 0$, so existiert gewiß die zu der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ gehörige *Green*sche Funktion $\Gamma^*(x, y; \xi, \eta)$ der Gleichung $\Delta u = 0$. Man wird dann setzen

$$u = v + w,\ \Delta w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial n} + hw = g,$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \Gamma^*(x, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{5}$$

Ist die *Green*sche Funktion $\Gamma^*(x, y; \xi, \eta)$ nicht vorhanden, was bei beliebigem h vorkommen kann, so müßte man sich nach einer geeigneten *Green*schen Funktion im weiteren Sinne umsehen. Auch bietet eine Auflösungsmöglichkeit die Benutzung der zu der zweiten Randwertaufgabe gehörigen *Green*schen Funktion der zu $L(u) = 0$ adjungierten Differentialgleichung.[63])

Wie vorhin angedeutet (vgl. die Fußnote 59)), läßt sich das zweite Randwertproblem durch eine geeignete „Fortsetzung" der Lösung in analoger Weise wie in der Potentialtheorie auf die erste Randwertaufgabe zurückführen. *Lichtenstein* erledigt in ähnlicher Weise den Fall gemischter Randbedingungen, wenn nämlich auf einem Teile, S', des Randes $u(s)$, auf dem Rest, S'', $\frac{\partial u}{\partial n}$ vorgeschrieben ist.[64])

Es sei jetzt T ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet der Klasse C in $\mathfrak{E}$. *Poincaré* bestimmt diejenige in $T + S$ stetige, in T reguläre Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung $L(u) = f$, die

62) In (4) bezeichnen h und g beliebige auf S erklärte abteilungsweise stetige, oder auch nur beschränkte, im *Lebesgue*schen Sinne integrierbare Funktionen.

63) Vgl. l. c. 18), p. 90—93. Ist diese vorhanden, so läßt sich die dritte Randwertaufgabe der Gleichung $L(u) = f$ in ähnlicher Weise wie in der Potentialtheorie auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückführen (vgl. II C 3, Nr. 28, p. 281).

64) Vgl. l. c. 18), p. 93—105. Dort wird auch die zu den gemischten Randbedingungen gehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$ gewonnen. Die zuletzt genannte *Green*sche Funktion ermöglicht wie in der Potentialtheorie (II C 3, Nr. 24i, p. 271, Nr. 28, p. 281) die Behandlung des durch folgende Vorschriften charakterisierten Randwertproblems. Auf S' ist $u(s)$ vorgegeben, auf S'' ist $\frac{\partial u(s)}{\partial n} + h(s)u(s) = g(s)$.

auf S der Bedingung

$$(6) \qquad \frac{\partial u(s)}{\partial n} + k(s)\frac{\partial u(s)}{\partial s} + l(s)u(s) = g(s)$$

genügt, unter $k(s)$, $l(s)$, $g(s)$ analytische und reguläre Funktionen verstanden.[65]) Auch diese Aufgabe ist der soeben skizzierten Methode zugänglich. Wir nehmen an, daß die durch die Beziehung (6) charakterisierte Randwertaufgabe der Potentialtheorie unbeschränkt lösbar ist. Dann existiert die zu der Randbedingung

$$(7) \qquad \frac{\partial u(s)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}(ku) + l(s)u = 0$$

gehörige *Green*sche Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$. Wir bezeichnen sie mit $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$. Wir setzen ferner

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \ \Delta w = 0, \ \frac{\partial w}{\partial n} + k\frac{\partial w}{\partial s} + lw = g,$$

$$(8) \qquad v(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \Gamma(x, y; \xi, \eta)V(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

und erhalten zur Bestimmung von $V(x, y)$ eine zu (3) analoge Integralgleichung.[65a])

Den vorhin betrachteten Randwertaufgaben entsprechen sinngemäß gewisse Randwertaufgaben der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung (1) Nr. 2e.

Auch im Raume läßt sich die zweite und die dritte Randwertaufgabe durch Vermittelung geeigneter *Green*scher Funktionen wie vorhin auf die Auflösung linearer Integralgleichungen zurückführen. Das in der Fußnote 59) angedeutete Verfahren ist hier nicht anwendbar.

So viel über die Differentialgleichung (1) Nr. 2a. Eine Reihe von Arbeiten beschäftigen sich mit speziellen Randwertaufgaben der sich selbst adjungierten elliptischen Differentialgleichung

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Fu = 0, \ AC - B^2 = 1$$

oder der analogen Differentialgleichung im Raume. So untersucht

65) Vgl. *H. Poincaré,* Leçons de mécanique céleste 3 (1910), p. 251—293, insb. p. 251—266; sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und der mathematischen Physik, Leipzig und Berlin 1910, p. 13—19. Siehe auch *F. Jager,* J. de math. 7 (1915), p. 297—352; *A. Blondel,* Paris C. R. 152 (1911), p. 1287—1290; Ann. de Toulouse (3) 3 (1911), p. 151—208; *G. Bertrand,* Paris C. R. 172 (1921), p. 1458—1461; 173 (1921), p. 1448—1449; Ann. Éc. Norm. (3) 40 (1923), p. 150—258; *F. Noether,* Math. Ann. 82 (1920), p. 42—63. S. auch II C 3, die Fußnoten 372) und 373).

65a) Vgl. *L. Lichtenstein,* l. c. 60), p. 198.

É. Picard Lösungen der Gleichung (9), die auf einer geschlossenen, singularitätenfreien Fläche, außer in einer endlichen Anzahl von Punkten, regulär sind, in den Ausnahmepunkten dagegen vorgeschriebene logarithmische Unstetigkeiten haben.[66])

Wie bereits erwähnt (s. die Fußnote 41)), bestimmt *D. Hilbert* gewisse auf einer Kugel reguläre Lösungen einer Differentialgleichung von der Form (9).[67]) Die prinzipielle Bedeutung dieser *Hilbert*schen Arbeit besteht darin, daß hier (im Gegensatz zu der soeben genannten *Picard*schen Arbeit) eine Grundlösung der Gleichung (9) nicht als bekannt vorausgesetzt, vielmehr erst konstruiert wird.[68])

E. Hilb behandelt das folgende Randwertproblem. Es sei die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0$ (λ konstant) vorgelegt. Gesucht werden die in der Kreisfläche $x^2 + y^2 \leqq 4$ stetigen, für $x^2 + y^2 < 4$ regulären Lösungen dieser Differentialgleichung, die für alle $\varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$

---

66) Vgl. *É. Picard*, Ann. Éc. Norm. (3) 26 (1909), p. 9—17. Hier bezeichnen x und y ein System von *Gauß*schen Parametern der Fläche. Das Problem wird auf die Diskussion einer linearen Integralgleichung zurückgeführt. Man vergleiche hierzu *É. Picard*, Paris C. R. 130 (1900), p. 1499—1504, sowie Paris C. R. 172 (1921), p. 20—23; *S. Sanielevici*, l. c. 85). Weitere Literatur: *É. Picard*, Ann. Éc. Norm. (3) 25 (1908), p. 585—591; Palermo Rend. 37 (1914), p. 249—261. An der zuletzt bezeichneten Stelle wird u. a. ein spezielles Problem der Wärmeleitung betrachtet, das auf eine bis jetzt wenig behandelte Art von Randwertaufgaben führt. Es seien T und T' zwei Gebiete in $\mathfrak{E}$ (oder im Raume), deren Ränder einen Bogen (oder ein Flächenstück) gemeinsam haben. Es sind zwei in T bzw. T' reguläre Lösungen u und u' gewisser elliptischer Differentialgleichungen zu bestimmen, die auf dem gemeinsamen Teile des Randes unter sich linear zusammenhängen (in diese Randbedingungen können auch Ableitungen von u und u' eingehen), auf dem übrigen Teile beliebigen linearen Randbedingungen genügen. Insbesondere kann T' von T vollkommen umschlossen sein (vgl. die Fußnote 20). *M. Mason*, l. c. 86) bestimmt doppeltperiodische Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda k u = 0$, woselbst $k(x, y)$ eine reelle doppeltperiodische Funktion von x und y bezeichnet. Eine analoge etwas allgemeinere Aufgabe behandelt *L. Lichtenstein*, Bull. Ac. sc. Cracovie 1911, p. 219—254.

67) Vgl. *D. Hilbert*, l. c. 41). Ausgegangen wird dabei von einer allgemeinen (nicht notwendig sich selbst adjungierten) linearen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Weiter reichende Betrachtungen dieser Art finden sich bei *O. Haupt*, Math. Ann. 88 (1922), p. 136—150. Hier handelt es sich um die Bestimmung eines Systems von Lösungen einer Differentialgleichung von der Form (1) Nr. 2e auf einer *Riemann*schen Fläche vom Range p, die beim Überschreiten gewisser Querschnitte vorgeschriebene lineare Substitutionen erleiden. Man vgl. auch *O. Haupt*, Sitzgsber. d. Heidelberger Akad., math.-nat. Kl., Abt. A (1920), 16. Abh.

68) Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Ergebnisse von *E. E. Levi* und *L. Lichtenstein* (Nr. 2e).

in den Punkten $r = 1$ und $r = 2$ $(r^2 = x^2 + y^2)$ gleiche Werte annehmen. Lösungen dieser Art sind für eine abzählbare, sich im Unendlichen häufende Folge positiver Werte des Parameters λ (Eigenwerte des Problems) vorhanden.[68a]) Zahlreiche Arbeiten beschäftigen sich, im Zusammenhang mit Problemen der mathematischen Physik, mit speziellen Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in der Ebene oder im Raume $(\lambda \gtrless 0)$. Besonderer Wert wird hierbei auf Gewinnung von Formeln gelegt, die die gesuchte Lösung exakt oder doch mit hinreichender Annäherung zu berechnen gestatten oder aber eine weitgehende Diskussion ihrer Eigenschaften ermöglichen. Wir nennen an dieser Stelle Arbeiten von *A. Sommerfeld, H. Lamb, C. W. Oseen, E. T. Whittaker, A. G. Webster, H. S. Carslaw, C. E. Weatherburn, C. Zedda.*[69])

4. Einige allgemeine Eigenschaften der Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.[70]) Betrachten wir die Differentialgleichungen $L(u) = 0$ (Nr. 2b) und $\Lambda(u) = 0$ (Nr. 2e). Hat das erste Randwertproblem in einem Gebiete T in $\mathfrak{E}$ stets eine (und darum auch nur eine) Lösung, so verhalten sich die in T regulären Lösungen dieser Gleichungen in mancher Hinsicht ähnlich wie die in T regulären Potentialfunktionen. So gilt z. B. der erste Satz von *Harnack* (Nr. 2b sowie II C 3, Nr. **16**), es gilt die Fundamentalformel (7) (Nr. 2c). Ist insbesondere $c = 0$, bzw. $F = 0$, so gelten die Sätze von der Nichtexistenz der Maxima und Minima (selbst im weiteren Sinne) im Innern des Regularitätsgebietes (Nr. 2f). Wie ferner *Lichtenstein* gezeigt hat, gilt das folgende Analogon zu dem zweiten *Harnack*schen Satze.

68a) Vgl. *E. Hilb,* Math. Ztschr. 1 (1918), p. 58—69.

69) *A. Sommerfeld* betrachtet mehrdeutige Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ $(\lambda > 0)$ in der Theorie der Diffraktion. Vgl. *A. Sommerfeld,* Gött. Nachr. 1894, p. 338—342; Math. Ann. 47 (1895), p. 317—374; Ber. Deutsch. Math.-Ver. 4 (1897), p. 172—174; Proc. London math. Soc. 28 (1897), p. 395—429; 30 (1899), p. 161—163. S. hierzu weiter: *H. S. Carslaw,* Proc. London math. Soc. 30 (1899), p. 121—161; *H. Lamb,* ebenda (2) 4 (1906), p. 190—203; *C. W. Oseen,* Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 7 (1912), Nr. 25 (11 Seiten) und 40 (29 Seiten). *E. T. Whittaker,* Math. Ann. 57 (1903), p. 333—355 gibt als eine allgemeine Lösung der Gleichung $\Delta V + V = 0$ im Raume den Ausdruck

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{i(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u)} f(u, v)\, du\, dv$$

an; s. hierzu *H. S. Carslaw,* Proc. London math. Soc. (2) 13 (1914), p. 236—257; (2) 16 (1917), p. 84—93; Math. Ann. 75 (1914), p. 133—147; *C. E. Weatherburn,* Quart. J. 46 (1914/15), p. 66—82, 83—94, 198—215, 384; *C. Zedda,* Nuov. Cim. (6) 4 (1912), p. 144—154.

70) Vgl. Nr. 2f.

Sei T ein beschränktes Gebiet in $\mathfrak{E}$, und es sei

$$(1) \qquad U_1(x, y) + U_2(x, y) + U_3(x, y) + \cdots$$

eine Reihe, deren Glieder in T erklärte *positive*, reguläre Lösungen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ sind. Ist die Reihe (1) auch nur in einem Punkte im Innern von T konvergent, so konvergiert sie in jedem ganz in T gelegenen Bereiche gleichmäßig und stellt eine in T reguläre Lösung der Gleichung $\Lambda(u) = 0$ dar.[71])

Eine in einem Gebiete T reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ kann daselbst keine isolierte Nullstelle haben.[72]) Der bekannte *Paraf*sche Satz (Nr. 2f) läßt sich wie folgt verschärfen. Ist $F \leqq 0$, so kann eine Lösung der Gleichung $\Lambda(u) = 0$ in ihrem Regularitätsgebiete nur positive Minima und negative Maxima haben.[73])

Es sei jetzt $u(x, y)$ irgendeine reguläre Lösung der Gleichung $\Lambda(u) = 0$, und es mögen diesmal $A, B, \ldots, F$ analytische und reguläre Funktionen bezeichnen. Die Kurve $u(x, y) = 0$ hat im Innern des Regularitätsgebietes der Lösung als die einzige mögliche Singularität vielfache Punkte mit endlich vielen getrennten Tangenten.[74])

---

71) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 28) a). Ein analoger Satz gilt für Folgen negativer regulärer Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Ist

$$0 > u_1(x, y) > u_2(x, y) > \cdots$$

eine unendliche Folge in T regulärer Lösungen dieser Gleichung und konvergiert diese auch nur in einem Punkte in T, so konvergiert sie dort überall, und zwar gleichmäßig. Die Grenzfunktion ist eine in T reguläre Lösung der Gleichung $\Delta u = e^u$. Vgl. *L. Lichtenstein*, Prace Mat.-Fiz. 23 (1912), p. 13—16.

72) Vgl. l. c. 28) a), p. 211.

73) Vgl. *L. Lichtenstein*, l. c. 60), p. 205—206. Es möge im Gegensatz zu der Behauptung des Textes (x_0, y_0) ein Punkt in T sein, in dem eine in T reguläre Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$ ein positives Maximum hat. In einem hinreichend kleinen Kreisgebiete K um (x_0, y_0) ist also $0 < u(x, y) \leq u(x_0, y_0)$. Sei $\overline{\mathfrak{G}}(x, y; \xi, \eta)$ die zu K gehörige am Rande verschwindende *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, und es möge $v(x,y)$ diejenige Lösung dieser Gleichung bezeichnen, die auf dem Rande C von K gleich $u(x, y)$ ist. Es gilt offenbar

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_K \overline{\mathfrak{G}}(\xi, \eta; x, y)\, c(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v(x, y).$$

Da nun $v(x_0, y_0) \leq u(x, y)$ auf C ist, und in $K \ldots \overline{\mathfrak{G}}(\xi, \eta; x_0, y_0) > 0$, $c(\xi, \eta) \leq 0$, $u(\xi, \eta) > 0$ gilt, so ist $u(x_0, y_0) \leq \operatorname{Max} u(x, y)$ auf C. Wir kommen auf einen Widerspruch, außer wenn auf c durchweg $u(x, y) = u(x_0, y_0)$, mithin $c \equiv 0$ ist.

Daß $u(x, y)$ in einem Punkte (x_0, y_0), in dem $u(x_0, y_0) = 0$ ist, nicht ein Maximum oder Minimum (selbst im weiteren Sinne) haben kann, ist leicht zu zeigen (vgl. l. c. 28) a), p. 210—211).

74) Vgl. *L. Lichtenstein*, Monatsh. Math. Phys. 28 (1917), p. 5—51, insb.

Sei T ein Gebiet der Klasse B in $\mathfrak{E}$. Ist $G(x, y; \xi, \eta)$ die klassische *Green*sche Funktion, so ist für alle (x, y) in T und alle s auf $S \cdots \frac{\partial}{\partial n} G(x, y; s) > 0$ (II C 3, Nr. **20**, p. 247). Ein ganz analoger Satz gilt für die *Green*sche Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \quad c \leqq 0.^{75})$$

Sei $u(x, y)$ eine in T, außer in einem Punkte (x_0, y_0), reguläre Lösung einer Gleichung $L(u) = 0$, etwa mit analytischen Koeffizienten. Ist darüber hinaus bekannt, daß $u(x, y)$ bei der Annäherung an (x_0, y_0) längs eines jeden Strahles unendlich wird, so ist $u(x, y)$ eine Grundlösung von $L(u) = 0$, mithin von der Form

$$\log [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot U(x, y) + V(x, y),$$

unter $U(x, y)$ eine in (x_0, y_0) nicht verschwindende reguläre Lösung von $L(u) = 0$, unter $V(x, y)$ eine in (x_0, y_0) analytische und reguläre Funktion verstanden.[76])

5. Sich selbst adjungierte lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. a) *Existenz der Eigenwerte. Entwicklungssätze.*[77]) Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{A'\frac{\partial u}{\partial x'} + B'\frac{\partial u}{\partial y'}}{\sqrt{A'C' - B'^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{B'\frac{\partial u}{\partial x'} + C'\frac{\partial u}{\partial y'}}{\sqrt{A'C' - B'^2}}\right) = 0, \; A'C' - B'^2 > 0.$$

Sie läßt sich (Nr. 2e) durch eine Transformation der unabhängigen Veränderlichen auf die Gleichung $\Delta u = 0$ zurückführen. Wendet man dieselbe Transformation auf die Differentialgleichung

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial x'}\left(A'\frac{\partial u}{\partial x'} + B'\frac{\partial u}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(B'\frac{\partial u}{\partial x'} + C'\frac{\partial u}{\partial y'}\right) + \lambda k' u' = 0$$

an, so geht diese in

$$(3)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda k u = 0, \; p = \sqrt{A'C' - B'^2}$$

über. Es genügt demnach, wenn es sich um zweidimensionale über

p. 10—11. Dort wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + ku = 0$$

betrachtet, doch gilt der Beweis unverändert für die Gleichung $\Lambda(u) = 0$.

75) Vgl. l. c. 60), p. 206—208. Dort finden sich noch einige weitere Sätze ähnlicher Art.

76) Vgl. *M. Bôcher*, Amer. mat. Soc. (2) 9 (1903), p. 455—465. Man vgl. hierzu eine Anzahl Noten von *S. Bouligand, É. Picard* und *H. Lebesgue*, Paris C. R. 176 (1923), die sich mit der *Laplace*schen Gleichung $\Delta u = 0$ im Raume beschäftigen.

77) Vgl. II A 7c, *A. Sommerfeld*, Nr. **9, 10, 11**; II C 11, *E. Hilb* u. *O. Szász*, Nr. **7, 9**.

einer Ebene ausgebreitete Gebiete handelt, Differentialgleichungen von der Form (3) zu betrachten.[78])

Sei T irgendein beschränktes, einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_m$.[79]) Sei $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$ die zu T gehörige, auf S verschwindende *Green*sche Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{4}$$

deren Existenz nach Nr. 2c und 2d feststeht.[80]) Die in $T + S$ stetige, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung der Differentialgleichung (3) genügt der Gleichung

$$u(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_T \mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)k(\xi, \eta)u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.^{81)} \tag{5}$$

Aus den bekannten Sätzen der Theorie linearer Integralgleichungen ergibt sich die Existenz unendlichvieler Eigenwerte. Ist $k/p > 0$, so sind alle Eigenwerte positiv, wechselt k/p in T das Vorzeichen, so gibt es unendlichviele positive und negative Eigenwerte.[82]) In analoger Weise lassen sich die zweite und die dritte Randwertaufgabe sowie Randwertaufgaben, bei denen der Parameter in der Randbedingung oder in der Differentialgleichung und in der Randbedingung zugleich auftritt. In ähnlicher Weise kann man bei Gebieten, die sich über geschlossene singularitätenfreie Flächen erstrecken[83]), sowie bei Gebieten im Raume verfahren.

78) Es wird dabei vorausgesetzt, daß p in einem $T + S$ enthaltenden Gebiet stetig ist, nicht verschwindet und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, daß ferner k beschränkt ist und in T einer H-Bedingung genügt; k braucht übrigens nicht notwendig in T überall das gleiche Vorzeichen zu haben.

79) Der Rand S von T kann ganz beliebig sein; S braucht insbesondere nicht nach *Jordan* und *Peano* quadrierbar oder nach *Lebesgue* meßbar zu sein.

80) Was die vorhin geforderten Stetigkeitseigenschaften von p betrifft, so dürften sich diese durch andere, weniger einschränkende ersetzen lassen.

81) Das Integral rechterhand ist hierbei als das innere Integral erklärt zu denken. Vgl. *H. Weyl*, l. c. 22); *L. Lichtenstein*, l. c. 32).

82) Die Sätze von *D. Hilbert*, *E. Schmidt*, *J. Marty* und anderen lassen sich, wie man leicht sieht, im vorliegenden Falle einer „inneren Integration" ohne weiteres anwenden. Übrigens gestattet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + (q + \lambda k)u = 0, \; q \leq 0$$

eine ganz ähnliche Behandlung. Literatur: *D. Hilbert*, l. c. 8), p. 234—259; Gött. Nachr. 1906, p. 473—474; l. c. 41), p. 8—34; *H. Weyl*, l. c. 104); *É. Picard*, Ann. Éc. Norm. (3) 26 (1909), p. 9—17; *A. Kneser*, Palermo Rend. 27 (1909), p. 117—147; Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl., Braunschweig 1922; II C 11, *E. Hilb* u. *O. Szász*, Nr. 7, 9.

83) In diesem Falle tritt an Stelle des *Laplace*schen Symbols Δ der zweite *Beltrami*sche Differentialparameter der Fläche ein. Die Randbedingungen können

Eine analoge Möglichkeit bieten die im Anschluß an berühmte Arbeiten von *H. A. Schwarz* und *H. Poincaré*, von *W. Stekloff*, *S. Zaremba*, *A. Korn* und anderen ausgebildeten Methoden der sukzessiven Approximationen.[84]) In diesen Arbeiten, die sich zumeist mit dem besonderen Fall $\frac{k}{p} > 0$ beschäftigen, werden die Ergebnisse der Theorie linearer Integralgleichungen, insbesondere die *Fredholm*schen Sätze nicht benutzt. Einen etwas anderen Weg beschreitet *É. Picard.*[85]) Der unter dem Einfluß von *D. Hilbert* entstandenen Variationsmethoden bedienen sich *M. Mason*[86]), *W. Ritz*[87]), *R. Courant*[88]) und andere.

auch ganz fehlen, wenn es sich nämlich um Bestimmung von Lösungen handelt, die auf der ganzen Fläche erklärt sind.

Eine Zusammenstellung von Arbeiten, die sich mit analogen Randwertproblemen im Gebiete einer unabhängigen Variablen beschäftigen, findet sich bei *L. Lichtenstein,* Palermo Rend. 38 (1914), p. 113—166, insb. p. 113—120. Die Methoden und Ergebnisse dieser Arbeiten lassen sich ganz oder teilweise auf die Differentialgleichung (3) übertragen. Vgl. auch II C 11, *E. Hilb* u. *O. Szász,* Nr. 8.

84) Vgl. II A 7b, Nr. **27**, Fußnoten 175) bis 178), II A 7c, Nr. **9** und **10**, sowie II C 3, Nr. **17**b, **17**c und **29**. Weitere Literatur: *S. Zaremba,* Paris C. R. 128 (1899), p. 1088—1089; J. de math. (5) 6 (1900), p. 47—72; (5) 8 (1902), p. 59—117; Bull. Ac. sc. Cracovie 1905, p. 69—168; 1906, p. 803—864; Ann. Éc. Norm. (3) 20 (1903), p. 9—26; Ann. de Toulouse (2) 3 (1901), p. 5—21; *A. Hoborski,* Prace matematyczno-fizyczne 20 (1909), p. 1—141 (polnisch); Rozprawy Wydziału mat.-przyr. Akademii Umiejętności w Krakowie 1912, p. 1—73 (polnisch); *W. Stekloff,* Ann. Éc. Norm. (3) 19 (1902), p. 191—259, 455—490; sowie Ann. de Toulouse (2) 2 (1900), p. 207—272; (2) 2 (1900), p. 273—303; (2) 6 (1904), p. 351—475; *G. Lauricella,* Ann. di mat. 14 (1908), p. 143—169; *A. Korn,* Le problème mathématique des vibrations universelles, Kharkow 1903, p. 1—46. Hier handelt es sich u. a. um die Eigenwerte des folgenden Randwertproblems (im Raume). Sei T ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet etwa der Klasse C. Gesucht werden diejenigen nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetigen Funktionen $u(x, y, z)$, die sich im Unendlichen wie ein *Newton*sches Potential verhalten, in T der Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$, außerhalb von T der Gleichung $\Delta u = 0$ genügen. S. ferner *A. Korn,* Paris C. R. 136 (1903), p. 30—33; p. 148—151; Sitzgsber. Deutsch. Math.-Ver. 15 (1916), p. 115—119.

85) *É. Picard,* l. c. 8) c). Man vergleiche hierzu die älteren Ausführungen von *Picard,* Paris C. R. 137 (1903), p. 502—507; Paris C. R. 118 (1894), p. 379—383; Traité d'Analyse Bd. III, 2. Aufl. 1909, p. 114—128. Siehe ferner *S. Sanielevici,* Ann. Éc. Norm. (3) 26 (1909), p. 19—91. (*Sanielevici* nimmt k/p nicht notwendig als dauernd > 0 (< 0) an; seine Überlegungen sind stellenweise nicht ganz einwandfrei.) Das *Picard*sche Verfahren besteht in einer Verknüpfung der *Schwarz-Poincaré*schen und der *Fredholm*schen Methode.

86) Vgl. *M. Mason,* J. de math. (5) 10 (1904), p. 445—489. *Mason* nimmt $p = 1$, k beliebig an.

87) Vgl. *W. Ritz,* Gött. Nachr. 1908, p. 236—248 (Oeuvres, p. 251—264); J. f. Math. 135 (1909), p. 1—61 (Oeuvres, p. 192—250); Ann. Phys. (4) 28 (1909), p. 737—786 (Oeuvres, p. 265—316). Hierzu: *M. Plancherel,* Paris C. R. 169 (1919),

Mason bestimmt die Eigenwerte einen nach dem anderen als Lösungen einer gewissen Minimumaufgabe. *Courant* geht von einer besonderen Maximum-Minimumaufgabe aus, die ihm erlaubt, einen beliebigen, sagen wir, n^{ten} Eigenwert, direkt zu gewinnen (Nr. 5b).[88a])

Lichtenstein führt die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung (3) auf die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenformen einer vollstetigen quadratischen Form mit unendlich vielen Veränderlichen zurück und zwar ohne Vermittlung der Integralgleichung (5).[89]) Der Betrachtung liegt ein Gebiet der Klasse C in $\mathfrak{E}$ zugrunde (II C 11, *E. Hilb* u. *O. Szász*, p. 1253—1254).

Was die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung (3) betrifft, so liefert vor allem die Theorie linearer Integralgleichungen die allgemeinsten in Betracht kommenden Sätze. In dem speziellen, für die mathematische Physik besonders wichtigen Falle $k/p > 0$ führt diese im wesentlichen zu dem Ergebnis, daß jede in $T + S$ stetige Funktion, die beschränkte, in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und die Randbedingungen erfüllt (demnach gegebenenfalls auch stetige Normalableitung hat) sich in eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe nach Eigenfunktionen entwickeln läßt.[90]) Ist k/p beliebig, so

p. 1152—1155; Bull. des Sc. Math. 47 (1923), p. 376 ff.; *R. Courant*, l. c. 88) c), insb. p. 320—325.

88) Vgl. *R. Courant*, a) Gött. Nachr. 1919, p. 255—264; b) Math. Zeitschr. 7 (1920), p. 1—57; c) Math. Ann. 85 (1922), p. 280—325. Man vgl. auch d) Gött. Nachr. 1922, p. 144—150.

88a) Weitere Literatur betreffend Variationsmethoden: *A. Hoborski*, Bull. Acad. sc. Cracovie 1912, p. 304—338; *B. Levi*, l. c. 57a); *G. Fubini*, l. c. 57a). (Bei den beiden zuletzt genannten Autoren handelt es sich um die Auflösung der ersten Randwertaufgabe in der Ebene.)

89) Vgl. *L. Lichtenstein*, Math. Ztschr. 3 (1919), p. 127—160, insb. p. 127—151. Über das Vorzeichen von k brauchen dabei keinerlei Voraussetzungen gemacht zu werden. Während bei der Behandlung der Integralgleichung (5) nach *Hilbert* der polare Fall vorliegt, sobald k/p in T das Zeichen wechselt, wird man bei dem direkten Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen stets auf den orthogonalen Fall geführt.

In der betrachteten Arbeit wird u. a. das folgende Randwertproblem behandelt: $\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu + \lambda k u = 0$ in T, $p\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda h u = 0$ auf S $\left(p > 0,\ q < 0,\ \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}\right.$ in $T + S$, h, $\left.\frac{dh}{ds}\right.$ auf S stetig$\left.\right)$. Man vgl. auch *L. Lichtenstein*, Prace Mat.-Fizyczne 26 (1914), p. 219—262.

90) Vgl. *D. Hilbert*, l. c. 8); *E. Hilb*, Math. Ann. 63 (1907), p. 38—53; *A. Kneser*, l c. 82). Hier handelt es sich speziell um die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und das Kreisgebiet. Entwicklungssätze betreffen Funktionen, die Unstetigkeiten von ziemlich allgemeinem Charakter darbieten und den Randbedingungen nicht unterworfen sind.

kommt man zu polaren Integralgleichungen; von der zu entwickelnden Funktion muß alsdann erheblich mehr vorausgesetzt werden.[91])

Weiter führt eine direkte Anwendung der Methode unendlichvieler Variablen. Für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda k u = 0$$

(k/p beliebig, jedoch höchstens auf einer Punktmenge vom Maße Null verschwindend) und das erste Randwertproblem liefert diese nach *Lichtenstein* das folgende Resultat.[92]) Jede in der Form

$$(6) \qquad U(x, y) = \int_T G(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi\, d\eta$$

darstellbare Funktion, unter $g(x, y)$ eine $T + S$ stetige, auf S verschwindende Funktion verstanden, die beschränkte in T abteilungsweise stetige Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ hat, läßt sich in eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe nach Eigenfunktionen

$$(7) \qquad U(x, y) = \sum \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(x, y) \int_T k \varphi_\alpha U d\xi\, d\eta,$$

$$\int_T k \varphi_\alpha \varphi_\beta d\xi\, d\eta = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta), \\ \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

entwickeln. *Diese Reihe ist gliedweise differentiierbar.* Die unendlichen Reihen

$$(8) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \sum \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \int_T k \varphi_\alpha U d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sum \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \int_T k \varphi_\alpha U d\xi\, d\eta$$

konvergieren in $T + S$ unbedingt und gleichmäßig. Ist $\bar{U}(x, y)$ in $T + S$ stetig und auf S gleich Null, und hat $\bar{U}(x, y)$ beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so ist

$$(9) \qquad \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(\int_T k \bar{U} \varphi_\alpha dx\, dy \right)^2,$$

$$(10) \qquad \int_T k \bar{U}^2 dx\, dy = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \left(\int_T k \bar{U} \varphi_\alpha dx\, dy \right)^2 .$$ [93])

91) Die sich für die Entwickelbarkeit auf diesem Wege ergebenden hinreichenden Bedingungen finden sich l. c. 89), p. 146—147 zusammengestellt.

92) Vgl. *L. Lichtenstein,* l. c. 89), insb. p. 142—146.

93) Analoge Formeln ergeben sich bei Behandlung der in der Fußnote 89) genannten Randwertaufgabe, siehe l. c. 89), p. 157.

In dem besonderen Falle $k/p > 0$ führt eine konsequente Durchbildung der von *Poincaré* herrührenden Methoden ebenfalls zu den eingangs genannten Entwicklungssätzen. Dieser Weg ist von *S. Zaremba, W. Stekloff, A. Korn* und anderen Mathematikern in zahlreichen Arbeiten eingeschlagen worden. (Vgl. l. c. 84).) Eine weitere Möglichkeit bieten die *Cauchy*schen Residuensätze, die bei gewöhnlichen Differentialgleichungen oft zur Gewinnung von Entwicklungssätzen angewendet worden sind.[94])

Weiter ins einzelne gehende Entwicklungssätze würden eine genauere Kenntnis des asymptotischen Verhaltens der Eigenfunktionen $\varphi_n(x, y)$ für große n voraussetzen. Hierüber ist man nur in einzelnen speziellen Fällen näher unterrichtet.[94a])

b) *Eigenwerte in Abhängigkeit von dem Gebiete und der Randbedingung. Asymptotische Verteilung der Eigenwerte.* Betrachten wir wieder das erste Randwertproblem der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda k u = 0 \tag{1}$$

unter Zugrundelegung eines beliebigen beschränkten einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes in $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_m$, und es möge k/p in T Werte beiderlei Vorzeichens annehmen. Es gibt dann unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte. Der kleinste positive Eigenwert λ_1^+ und der größte negative Eigenwert λ_1^- sind einfache Eigenwerte, die zugehörigen Eigenfunktionen können in T nirgends verschwinden.[95])

Sei $\bar{T}$ irgendein einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet in T. Die beiden Gebiete können Teile des Randes gemeinsam

---

94) Vgl. *A. Sommerfeld,* l. c. 57c); *R. Bär,* l. c. 57c). An der zuletzt genannten Stelle wie übrigens auch bei *T. Carleman,* l. c. 57c) werden p. 26—37 unendliche Gebiete betrachtet und es werden Sätze über die *Integraldarstellung* willkürlicher Funktionen abgeleitet (p. 30—37).

94a) Vgl. die diesbezüglichen Bemerkungen von *A. Kneser,* l. c. 82).

95) Dieser Satz ist in dem besonderen Falle $p = 1$, $k > 0$ (unter Zugrundelegung eines Gebietes der Klasse D in $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_m$) von *H. A. Schwarz* bewiesen worden [Acta Societatis Scientiarum Fennicae 15 (1885), p. 315—362; Ges. Abh. 1, p. 223—269]. Den allgemeinen Fall, jedoch nur für Gebiete der Klasse C in $\mathfrak{E}$ behandelt *L. Lichtenstein,* l. c. 74), p. 12—14; l. c. 89), p. 148—149. Zum Beweise des Satzes in der Allgemeinheit des Textes wären Stetigkeitsbetrachtungen heranzuziehen. Übrigens genügt es augenscheinlich, den Satz für λ_1^+ zu beweisen. Die Betrachtung negativer Eigenwerte wird auf diejenige der positiven durch die Substitution $\lambda = -\lambda^*$, $k = -k^*$ zurückgeführt.

haben. Ist $\bar{\lambda}_1^+$ der zu $\bar{T}$ gehörige kleinste positive Eigenwert der Gleichung (1), so ist $\bar{\lambda}_1^+ > \lambda_1^+$.[96])

Einen allgemeinen Satz von ähnlichem Charakter beweist *Weyl* Sei $T_1, T_2, T_3, \ldots$ irgendeine endliche oder unendliche Folge von einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebieten in T, die keinen Punkt gemeinsam haben.[97]) Unterhalb einer beliebigen Schranke liegen mindestens ebensoviel Eigenwerte von T, als von $T_1, T_2, \ldots$ zusammengenommen (jeden Eigenwert nach seiner Vielfachheit gezählt).[98])

Sei jetzt allgemein λ_n^+ der n^{te} positive, λ_n^- der n^{te} negative Eigenwert der Differentialgleichung (1) und des Gebietes T, die zugehörigen Eigenwerte von $\bar{T}$ heißen $\bar{\lambda}_n^+$ und $\bar{\lambda}_n^-$. Läßt man $\bar{T}$ gegen T konvergieren, so konvergieren auch $\bar{\lambda}_n^+$ und $\bar{\lambda}_n^-$ gegen λ_n^+ und λ_n^-. Die Eigenwerte ändern sich stetig mit dem Gebiete.[99]) Es seien $\widetilde{\mu}_n$ (> 0) die zu dem zweiten Randwertproblem und einem beschränkten Gebiete der Klasse B in $\mathfrak{E}$ gehörigen Eigenwerte der Gleichung $\Delta u + \widetilde{\mu} u = 0$. Nach *Weyl* liegen unter einer beliebigen Schranke mindestens ebenso viele $\widetilde{\mu}_n$ wie $\widetilde{\lambda}_n$, unter $\widetilde{\lambda}_n$ die zu dem ersten Randwertproblem ge-

---

96) Vgl. *H. A. Schwarz*, l. c. 95); *L. Lichtenstein*, l. c. 74). Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß k/p nicht in $\bar{T}$ überall ≤ 0 ist.

97) Ihre Ränder können indessen gemeinsame Teile haben.

98) Vgl. *H. Weyl*, J. f. Math. 141 (1912), p. 1—11. Hier wird der Satz in allen Einzelheiten für beliebige beschränkte, einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiete in T und für $p = 1$, $k > 0$ abgeleitet. Einen anderen Beweis gab später *R. Courant*, a) Gött. Nachr. 1919, p. 255—264; b) Math. Ztschr. 7 (1920), p. 1—57, insb. p. 22.

99) Für den kleinsten positiven Eigenwert ist dieses Resultat von *H. A. Schwarz* $(p = 1,\ k > 0)$ und *L. Lichtenstein* (k/p beliebig) unter einschränkenden Voraussetzungen bezüglich T und $\bar{T}$ l. c. 95) bewiesen worden. Für alle Eigenwerte $(k/p > 0)$ ist der Satz von *R. Courant* unter Zugrundelegung eines beschränkten Gebietes, dessen Begrenzung aus einer endlichen Anzahl geschlossener rektifizierbarer Kurven besteht, durch Variationsbetrachtungen dargetan worden. (Vgl. *R. Courant*, l. c. 98) b), p. 28—32.) An der bezeichneten Stelle finden sich analoge Sätze für andere Randwertaufgaben sowie Sätze über die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Koeffizienten der Differentialgleichung und etwaigen in den Randbedingungen vorkommenden Parametern. Übrigens findet sich dieser Satz, soweit es sich um die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Koeffizienten handelt, in einer freilich recht speziellen Fassung schon bei *Hilbert*, l. c. 41), p. 30—34. Nimmt man einmal die Stetigkeit der *Green*schen Funktion $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$ (Nr. 5a) in Abhängigkeit von der Begrenzung als bewiesen an, so folgt die Stetigkeit der Eigenwerte in Abhängigkeit von der Begrenzung (bei beliebigem k) ohne Schwierigkeit aus den Hauptsätzen der *Fredholm*schen Theorie.

hörigen Eigenwerte der vorstehenden Differentialgleichung verstanden.[100]) Wie *Courant* zuerst bemerkte, gehören zu der Differentialgleichung (1) und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$, sofern $k/p > 0$ ist, höchstens endlich viele negative Eigenwerte.[101]) Von dem kleinsten positiven Eigenwert des Problems

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu + \lambda k u = 0, \quad p\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda h u = 0$$

$$(p > 0,\ q < 0,\ k \text{ in } T \text{ nicht überall } \leqq 0)$$

zeigt *Lichtenstein*, daß er einfach und gewiß kleiner als der kleinste positive Eigenwert des ersten Randwertproblems ist. Die zugehörige Eigenfunktion kann in T nicht verschwinden.[102])

Von besonderer Wichtigkeit für Fragestellungen der mathematischen Physik ist das asymptotische Verhalten der Eigenwerte.[103]) Hier hat zuerst *H. Weyl* allgemein gültige Ergebnisse gewonnen.[104]) In einer Reihe von Arbeiten werden, von gewissen allgemeinen Sätzen der Theorie linearer Integralgleichungen ausgehend, asymptotische Verteilungsgesetze für die zu dem ersten und dem zweiten Randwertproblem der Differentialgleichungen

$$(3) \qquad \Delta u + \lambda u = 0$$

bzw.

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu + \lambda k u = 0, \ (p > 0,\ q < 0,\ k > 0)$$

gehörigen Eigenwerte sowie analoge Resultate im Raume abgeleitet.

---

100) Vgl. *H. Weyl,* l. c. 98), p. 10—11. Siehe auch *R. Courant,* l. c. 98) b), p. 24. Dort werden auch die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ sowie gewisse gemischte Randbedingungen betrachtet. Für diese gelten analoge Sätze.

101) *R. Courant,* l. c. 98) b), p. 13—17.

102) *L. Lichtenstein,* l. c. 89), p. 158—159. Hier handelt es sich um Gebiete der Klasse C in $\mathfrak{E}$.

103) *H. A. Lorentz* und *A. Sommerfeld* haben auf Grund physikalischer Erwägungen das Postulat aufgestellt, daß die Eigenwerte der klassischen mit der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ verknüpften Schwingungsprobleme asymptotisch von der Gestalt des Gebietes unabhängig und nur von dessen Flächeninhalt bzw. Volumen bestimmt sind. Dieses Postulat ist für die Theorie der Hohlraumstrahlung und der spezifischen Wärme von erheblicher Bedeutung. Vgl. *H. A. Lorentz,* Vortrag auf dem internationalen Kongresse in Rom 1908, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1248 ff.; *A. Sommerfeld,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1057—1066.

104) Vgl. *H. Weyl,* a) Gött. Nachr 1911, p. 110—117; b) Math. Ann. 71 (1911), p. 441—479; c) J. f. Math. 141 (1912), p. 1—11; d) 141 (1912), p. 163—181; e) 143 (1913), p. 177—202; f) Palermo Rend. 39 (1915), p. 1—50. Man vgl. hierzu *P. Sergesco,* Paris C. R. 177 (1923), p. 519—521; 178 (1924), p. 175—178.

Weitere Sätze betreffen die Hohlraumstrahlung und dessen asymptotische Spektralgesetze sowie Schwingungsprobleme der Elastizitätstheorie. In dem einfachsten Falle der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und der Randbedingung $u = 0$ lautet das *Weyl*sche Ergebnis wie folgt:

Hat das einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiet T in $\mathfrak{E}$ einen bestimmten Flächeninhalt im Sinne von *Jordan*, so gilt für die Eigenwerte λ_n dieses Gebietes die Beziehung

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{\mathsf{T}},$$

unter T den Flächeninhalt von T verstanden.[105] Genau dasselbe asymptotische Gesetz gilt für die zu der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörigen Eigenwerte.[106] Handelt es sich um die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu + \lambda k u = 0 \;\; (p > 0,\; q < 0,\; k > 0),$$

so gilt

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{4\pi n}{\lambda_n} = \int_T \frac{k}{p}\, dx\, dy.$$ [106]

Analoge Sätze gelten im Raume. Darüber hinaus gibt *Weyl* eine Abschätzung des Fehlers.

Die Ergebnisse von *Weyl* sind auf einem anderen Wege von *R. Courant* wiedergewonnen und, was die Abschätzung des Fehlers betrifft, verschärft worden. Im Mittelpunkt der *Courant*schen Untersuchungen steht eine independente Definition des n^{ten} Eigenwertes. Sie lautet für das erste Randwertproblem so: Es seien ein Gebiet T der Klasse M in $\mathfrak{E}$ und die Differentialgleichung (4), $(p > 0, q < 0, k > 0)$ vorgelegt. Es mögen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ beliebige in T abteilungsweise stetige Funktionen bezeichnen, und es sei $d\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ die untere Grenze des *Dirichlet*schen Integrals

$$\int_T \left[p\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right\} - q\varphi^2\right] dx\, dy,$$

wenn für φ irgendwelche in $T + S$ stetige, auf S verschwindende Funktionen eingesetzt werden, die in $T + S$ abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung haben und den Bedingungen

$$(7) \qquad \int_T k\varphi v_j\, dx\, dy = 0, \quad \int_T k\varphi^2\, dx\, dy = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

105) Vgl. *H. Weyl*, l. c. 104) c), p. 8.

106) Das der Betrachtung zugrunde gelegte Gebiet wird hierbei gewissen weiteren Einschränkungen unterworfen.

genügen. Der n^{te} Eigenwert λ_n ist die obere Grenze der Werte $d\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ für alle zulässigen $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Dieses Maximum-Minimum wird erreicht für $v_1 = u_1, \ldots, v_{n-1} = u_{n-1}$. Im Gegensatz zu *Weyl* sieht *Courant* von der Eigenschaft der Eigenwerte, zugleich Eigenwerte einer linearen Integralgleichung zu sein, völlig ab; er kommt vielmehr in der einfachsten Weise unter durchgängiger Benutzung der folgenden fast selbstverständlichen Bemerkung zum Ziele: Werden die Bedingungen, denen φ unterworfen ist, verschärft, so wird bei festgehaltenen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ gewiß $d\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ nicht verkleinert. Das gleiche gilt also auch für λ_n. Die *Courant*sche Fehlerabschätzung bei der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ läßt sich so aussprechen: Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb λ gelegenen Eigenwerte ist für alle betrachteten Randwertaufgaben gleich

$$\frac{\mathsf{T}}{4\pi}\lambda + O(\sqrt{\lambda}\log\lambda). \tag{8}$$

Im Raume tritt dafür der Ausdruck

$$\frac{\mathsf{V}}{6\pi^2}\lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda\log\lambda) \quad (\mathsf{V} = \text{Volumen von } T) \tag{9}$$

ein.[107])

An dieser Stelle sei noch ein weiteres Resultat von *Courant* genannt. Unter allen beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebieten T der Klasse D, deren Rand eine vorgeschriebene Länge hat, zeichnet sich der Kreis K durch die folgende Eigenschaft aus. Sei λ_T der zu T und zu dem ersten Randwertproblem gehörige kleinste positive Eigenwert der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$; der dem Kreise K entsprechende Wert von λ_T heiße insbesondere λ_K. Es ist dann $\lambda_K = \text{Min}\,\lambda_T$, und zwar gilt $\lambda_T > \lambda_K$, außer für $T = K$.[107a]) (Vgl. den Nachtrag.)

Während durch die Arbeiten von *Weyl* und *Courant* die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Eigenwerte zu einem gewissen Abschluß gekommen ist, bildet das asymptotische Verhalten der Eigenfunktionen ein zur Zeit noch offenes Problem.[107b])

---

107) *Courant* betrachtet Gebiete der Klasse M in $\mathfrak{E}$ sowie Raumgebiete, die von einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Flächenstücke begrenzt sind, die einander nicht berühren, jedoch endlichviele Kanten und körperliche Ecken bilden können. Die *Courant*sche Methode gestattet in der einfachsten Weise die Bestimmung der asymptotischen Verteilung der Eigenschwingungen der Hohlraumstrahlung. Sie läßt sich auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen ausdehnen. Vgl. *R. Courant,* Math. Ztschr. 15 (1922), p. 195—200, wo die Gleichung $\Delta\Delta u + \lambda u = 0$ betrachtet wird.

107a) *R. Courant,* Math. Ztschr. 1 (1918), p. 321—328.

107b) Einige Resultate, die sich auf die Nullinien der Eigenfunktionen beziehen, sind neuerdings von *Courant,* Gött. Nachr. 1923, p. 81—84, angegeben worden.

III. Nichtlineare Differentialgleichungen.

6. Analytischer Charakter der Lösungen.[108]) Betrachten wir die Differentialgleichung $L(u) = f$ (Nr. 2b), und es mögen die Koeffizienten a, b, c, f analytisch und regulär sein. Schon frühzeitig hat *Picard* gezeigt, daß dann alle nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Lösungen dieser Gleichung analytisch und regulär sind.[109])

Sei $\Phi(x, y, z, p, q)$ eine in einem Gebiete $\mathfrak{D}$ analytische und reguläre Funktion ihrer fünf Argumente, die überdies der Bedingung $\Phi''_{pp}\Phi''_{qq} - (\Phi''_{pq})^2 > 0$ genügt. Im Anschluß an das *Picard*sche Resultat hat *Hilbert* in einem auf dem Pariser internationalen Kongresse der Mathematiker (1900) gehaltenen Vortrage die Vermutung ausgesprochen, daß alle Lösungen des Variationsproblems

$$\delta \int_T \Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = 0, \tag{1}$$

oder, anders ausgedrückt, alle nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Lösungen der zu (1) gehörigen *Lagrange*schen Differentialgleichung in $\mathfrak{D}$ analytisch und regulär sind.[110]) Mit dem Beweise dieser und einer anderen weitergehenden *Hilbert*schen Aussage beschäftigt sich eine Reihe von *Hilbert* inspirierter Untersuchungen. So zeigten zunächst *Lütkemeyer* und *Holmgren*, daß alle nebst ihren partiellen Ableitungen der drei ersten Ordnungen stetigen Lösungen der Gleichung

$$\Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{2}$$

unter F eine analytische Funktion ihrer fünf Argumente verstanden,

---

108) Vgl. II A 7 c, *A. Sommerfeld,* Nr. 8.

109) Vgl. *É. Picard,* Paris C. R. 131 (1900), p. 487—492; J. Éc. polyt. 60 (1890), p. 89—105; Acta math. 25 (1902), p. 121—137. Siehe ferner *É. Picard,* Paris C. R. 121 (1895), p. 12—14, wo sich ein ähnlicher Satz für rein elliptische Differentialgleichungen $2p^{\text{ter}}$ Ordnung findet. *Picard* bedient sich bei seinen Untersuchungen der Methode der sukzessiven Approximationen. Auf einem anderen Wege, unter Zuhilfenahme der Theorie linearer Integralgleichungen, ist dieses Resultat später von *E. E. Levi,* l. c. 11) b), p. 297—307 abgeleitet worden.

110) Vgl. *D. Hilbert,* Gött. Nachr. 1900, p. 253—297, insb. p. 288—289, sowie Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 44—63, 213—237. Der *Hilbert*sche Vortrag ist auch in einer französischen Übersetzung erschienen, Paris 1900, p. 1—56, insb. p. 43—45.

analytisch sind.[111]) Dieses Resultat ist bald darauf von *S. Bernstein* dahin erweitert worden, daß es bereits genügt, die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung vorauszusetzen.[112])

Einer Anregung von *Hilbert* folgend beweist ferner *S. Bernstein* das folgende wesentlich weiter reichende Resultat. Sei $\Psi(x, y, z, p, q, r, s, t)$ eine in einem Gebiete Θ ihrer acht Argumente analytische und reguläre Funktion. Jede nebst ihren partiellen Ableitungen der drei ersten Ordnungen stetige Lösung der Differentialgleichung

$$\Psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{4}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

die dem Gebiete Θ angehört und überdies der Bedingung

$$4\Psi_r'\Psi_t' - (\Psi_s')^2 > 0 \tag{5}$$

genügt, ist analytisch.[113])

S. Bernstein benutzt bei seinen Untersuchungen, wie früher *Picard* und später *Lütkemeyer* und *Holmgren*, die Methode der sukzessiven Näherungen und bedient sich dabei, was für die Konvergenz des Verfahrens wesentlich ist, gewisser unendlicher Reihen, die nach Potenzen von zwei verschiedenen linearen Funktionen einer jeden unabhängigen Variablen fortschreiten. Die Betrachtungen werden hierdurch sehr

111) Vgl. *Lütkemeyer*, Inaug.-Diss. Göttingen 1902, p. 1—49; *Holmgren*, Math. Ann. 57 (1903), p. 409—420; Svens. Vetensk. Ofv. 58, p. 59ff.

112) Vgl. *S. Bernstein*, a) Paris C. R. 137 (1903), p. 778—781; b) Math. Ann. 59 (1904), p. 20—76; c) 60 (1905), p. 434—436. Man kann sich übrigens von der Richtigkeit der *Bernstein*schen Bemerkung wie folgt leicht überzeugen. Sei etwa K eine Kreisfläche, so daß z in $K + C$ regulär ist. Aus (2) folgt sofort

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_K G(x, y; \xi, \eta) F\left(\xi, \eta, z(\xi, \eta), \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta + t(x, y), \tag{3}$$

$$\Delta t = 0, \; t = z \text{ auf } C.$$

Da nach Voraussetzung $\frac{dF}{d\xi}, \frac{dF}{d\eta}$ stetig sind, so genügen nach bekannten Sätzen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in K einer H-Bedingung (vgl. II C 3, Nr. 30). Das gleiche gilt also für $\frac{dF}{d\xi}$ und $\frac{dF}{d\eta}$, mithin hat z in K stetige Ableitungen dritter Ordnung, die übrigens ebenfalls einer H-Bedingung genügen.

113) Vgl. *S. Bernstein*, l. c. 112) b). Hier finden sich am Schluß auch Bemerkungen über den analytischen Charakter der Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen und parabolischen Typus. Man vergleiche hierzu l. c. 112) b), p. 70—76.

kompliziert und unübersichtlich. Es bedeutet darum einen Fortschritt, daß es später *M. Gevrey* (in der in der Fußnote 12) genannten Arbeit) gelungen ist, auf einem einfacheren Wege die Ergebnisse von *Bernstein* und selbst darüber hinausgehende Resultate zu gewinnen. Das wesentliche der neuen Methode besteht in der Abschätzung des absoluten Betrages der partiellen Ableitungen der Lösung im *reellen* Gebiete. Es erweist sich so als möglich, Sätze über ihren analytischen Charakter darzutun, *ohne von sukzessiven Approximationen und Reihenentwicklungen überhaupt Gebrauch zu machen. Gevrey* beschäftigt sich sowohl mit elliptischen, als auch mit hyperbolischen und parabolischen Differentialgleichungen. Was die elliptischen Differentialgleichungen betrifft, so werden von ihm Gleichungen der Form $L(u) = f$ (Nr. 2b), (2) und (4) untersucht. Wir beschränken uns auf die Wiedergabe des auf die zuletzt genannte Differentialgleichung bezüglichen Hauptresultats.

Gevrey nennt eine in einem Intervalle (a, b) erklärte, unbeschränkt differentiierbare reelle Funktion $\varphi(x)$ Funktion der Klasse α $(\alpha > 0)$, wenn für alle n

$$\left|\frac{d^n \varphi}{d x^n}\right| < M \frac{(n!)^\alpha}{R^n} \tag{6}$$

gilt. Offenbar gehört $\varphi(x)$ allen Klassen von der Ordnung $> \alpha$ an. Funktionen der Klasse 1 sind in (a, b) analytisch, der Klasse $\alpha < 1$ sind ganze transzendente Funktionen der Ordnung $\leqq \frac{1}{1-\alpha}$. Ist allgemeiner in jedem Punkte eines p-dimensionalen (reellen) Gebietes für alle $n_1, n_2, \ldots n_p$

$$\left|\frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_p}\psi}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\ldots\partial x_p^{n_p}}\right| < M\frac{(n_1!)^{\alpha_1}(n_2!)^{\alpha_2}\ldots(n_p!)^{\alpha_p}}{R_1^{n_1}R_2^{n_2}\ldots R_p^{n_p}}, \quad (\alpha_1 > 0, \ldots \alpha_p > 0), \tag{7}$$

so heißt ψ daselbst, als Funktion der Gesamtheit der Variablen $x_1, \ldots, x_p$ aufgefaßt, von der Klasse α_1 in bezug auf x_1, α_2 in bezug auf $x_2, \ldots, \alpha_p$ in bezug auf x_p. Ist α der größte aller Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, so heißt überdies ψ von der Klasse α in bezug auf $(x_1, \ldots, x_p)$.

Sei jetzt die Differentialgleichung

$$\Psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{8}$$

vorgelegt. Es wird angenommen, daß Ψ, als Funktion der Gesamtheit der Argumente $x, y, \ldots, t$ aufgefaßt, entweder von der Klasse $\alpha \geqq 1$ ist in bezug auf x und stetig in bezug auf y[114]), oder von der Klasse $\beta \geqq 1$ in bezug auf y und stetig in x, oder von der Klasse

114) In diesem Falle braucht Ψ nicht in bezug auf y *unbeschränkt* differentiierbar zu sein.

$\alpha \geqq 1$ in bezug auf x und von der Klasse $\beta \geqq 1$ in bezug auf y, in allen Fällen aber von der Klasse $\gamma \geqq 1$ in bezug auf (z, p, q, r, s, t). Darüber hinaus wird angenommen, daß, wenn man in Ψ für z die betrachtete Lösung einführt, Ψ_r', Ψ_s', Ψ_t', die nunmehr Funktionen von x und y allein werden, stetige Ableitungen erster Ordnung haben und der Ungleichheit

$$(9) \qquad 4\,\Psi_r'\,\Psi_t' - (\Psi_s')^2 > 0$$

genügen.[115]) Die Voraussetzung der Differentiierbarkeit ist gewiß erfüllt, wenn die partiellen Ableitungen der drei ersten Ordnungen von z vorhanden und stetig sind.

Nun gilt der Hauptsatz. *Jede reguläre Lösung der Differentialgleichung* (8) *ist von demselben Charakter in bezug auf x und y wie die Funktion* Ψ.[116])

In dem besonderen Falle einer „quasilinearen" Differentialgleichung, d. h. einer Differentialgleichung von der Form

$$(10) \quad \bar{A}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\bar{B}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \bar{C}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \bar{D}\frac{\partial z}{\partial x} + \bar{E}\frac{\partial z}{\partial y} + \bar{F} z = 0,$$

$$\bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2 > 0,$$

in der $\bar{A}, \ldots, \bar{F}$ Funktionen von $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ bezeichnen, läßt sich das Resultat von *S. Bernstein* und *M. Gevrey* einen Schritt weiter führen. Sind nämlich $\bar{A}, \ldots, \bar{F}$ analytische Funktionen ihrer fünf Argumente und ist z eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung von (10), so hat z, wie *Lichtenstein* zeigte, gewiß auch stetige Ableitungen dritter Ordnung und ist mithin analytisch. Die *Lagrange*sche Differentialgleichung eines jeden

---

115) In dem in der Fußnote 114) betrachteten besonderen Falle wird dabei die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ vorauszusetzen sein.

116) Vgl. *M. Gevrey*, l. c. 12), p. 129—163. In der betrachteten inhaltreichen Abhandlung finden sich u. a. Ausführungen über das *Cauchy*sche Randwertproblem in der Theorie der Gleichungen $L(u) = f$ und (2) und über die analytische Fortsetzung der Lösungen dieser Differentialgleichungen sowie der Gleichung (4). (Man vergleiche hierzu *S. Bernstein*, l. c. 123) b); e) p. 254; f) p. 133.) Auch macht der Verfasser Andeutungen über eine Ausdehnung seiner Resultate auf Differentialgleichungen höherer Ordnung, Gleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen sowie Gleichungssysteme. (Siehe *M. Gevrey*, Paris C. R. 158 (1914), p. 1652—1655.)

In einer späteren Note, Paris C. R. 174 (1922), p. 368—370, kommt *Gevrey* noch einmal auf seine obigen Untersuchungen zurück und beweist den analogen Satz für Differentialgleichungen, deren Koeffizienten die von *É. Borel* eingeführten „quasianalytischen" Funktionen sind.

„regulären" analytischen Variationsproblems (1) ist von der Form (10). Demnach sind alle mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Lösungen solcher Variationsprobleme analytische Funktionen von x und y.[117]) Ist in (1) der Ausdruck unter dem Integralzeichen eine ganze rationale Funktion zweiten Grades in bezug auf p und q, so genügt, wie es sich weiter zeigen läßt, bereits die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, um die Existenz und Stetigkeit derjenigen zweiter Ordnung sicherzustellen.[118])

Sei $\Psi_0(p, q, r, s, t) = 0$ eine elliptische Differentialgleichung (Ψ_0 analytisch und regulär). Nach *S. Bernstein* kann eine reguläre Lösung dieser Gleichung in ihrem Regularitätsgebiete weder ein Maximum noch ein Minimum haben.[119])

Es mögen A, B, C analytische und reguläre Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t bezeichnen, und es sei $AC - B^2 > 0$. Nach *S. Bernstein* ist jede beschränkte, im Endlichen überall reguläre Lösung der Gleichung

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

gleich einer Konstanten.[120])

7. Randwertaufgaben. a) *Lösungen in der Nachbarschaft einer gegebenen Lösung.*[121]) Sei

(1) $$\Psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

117) Vgl. *L. Lichtenstein,* Bull. Ac. sc. Cracovie 1913, p. 915—941.

118) Vgl. l. c. 117), p. 936—941; Weitere Literatur: *L. Lichtenstein,* Math. Ann. 69 (1910), p. 514—516; *A. Haar,* J. f. Math. 149 (1919), p. 1—18.

119) *S. Bernstein,* l. c. 112) b), p. 69. Insbesondere sind also isolierte Nullstellen ausgeschlossen.

120) *S. Bernstein,* Paris C. R. 51 (1910), p. 636—639; Comm. de la Société Mathématique de Charkow 2 (1915), p. 38—45. Ein weiteres wichtiges Resultat von *S. Bernstein* betrifft die Minimalflächen. Ist $z = f(x, y)$ die Gleichung einer Minimalfläche Σ und ist die Funktion $f(x, y)$ für alle reellen (x, y) im Endlichen nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, so ist Σ eine Ebene. Vgl. *S. Bernstein,* a. a. O.

121) Ältere Literatur über die sukzessiven Approximationen bei „hinreichend kleinen" Gebieten, das alternierende Verfahren, die Methode des balayage sowie der analytischen Fortsetzung, angewandt auf nichtlineare Differentialgleichungen, findet sich in dem Artikel von *A. Sommerfeld,* II A 7 c, Nr. 5, 6, sowie l. c. 4). Vgl. ferner *É. Picard,* J. f. Math. 130 (1905), p. 243—258, wo eine vervollkommnete Darstellung der früher zum Teil nur skizzierten Anwendung des alternierenden Ver-

eine in einem achtdimensionalen Gebiete $\mathfrak{T}$ erklärte analytische und reguläre Funktion ihrer acht Argumente, und es möge T ein beschränktes (einfach oder mehrfach zusammenhängendes) Gebiet der Klasse C in $\mathfrak{E}$ bezeichnen, das in der Projektion von $\mathfrak{T}$ auf die x-y-Ebene enthalten ist. Es sei weiter $z = z(x, y)$ eine in $T + S$ analytische und reguläre Funktion, die folgende Eigenschaften hat. Für alle x, y in $T + S$ liegt der Punkt $x, y, z, p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in $\mathfrak{T}$. Es gilt

(2) $$\Psi\left(x, y, z\, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

(3) $$4\Psi_r'\Psi_t' - \Psi_s'^2 > 0, \quad \Psi_r' = \frac{\partial}{\partial r}\Psi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \ldots$$

Die Randwerte von $z(x, y)$ bilden eine analytische und reguläre Wertfolge $\varphi(s)$. Sei $\psi(s)$ eine weitere beliebige analytische und reguläre Wertfolge, ε ein reeller Parameter. In vielen Fällen, insbesondere in der Variationsrechnung, ist die Beantwortung der folgenden Frage von Wichtigkeit: Gibt es für hinreichend kleine $|\varepsilon|$ in $T + S$ stetige, in T reguläre Lösungen der Gleichung (1), die auf S die Werte $\varphi(s) + \varepsilon\psi(s)$ annehmen?

Betrachten wir die „*Jacobi*sche Differentialgleichung“[122])

(4) $$\Psi_r'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Psi_s'\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \Psi_t'\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Psi_p'\frac{\partial u}{\partial x} + \Psi_q'\frac{\partial u}{\partial y} + \Psi_z' u = 0,$$

$$\Psi_r' = \frac{\partial}{\partial r}\Psi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \ldots$$

Hat diese lineare Differentialgleichung vom elliptischen Typus keine in $T + S$ stetige, in T reguläre, auf S verschwindende, in T nicht identisch verschwindende Lösung, so ist die Frage im bejahenden Sinne zu beantworten. Dieses Resultat läßt sich, soweit es sich um einfach zusammenhängende Gebiete und den besonderen Fall $\Psi_r'\Psi_z' \leqq 0$ handelt, aus den Arbeiten von *S. Bernstein* erschließen.[123]) Wegen

---

fahrens auf die Gleichung $\Delta u = ke^u$ $(k > 0)$ gegeben wird. Eine präzise Fassung der bei „hinreichend kleinen“ Gebieten in Betracht kommenden Methode der sukzessiven Näherungen bei *L. Lichtenstein*, l. c. 50), p. 291—301. A. a. O. finden sich auch Sätze über die Abhängigkeit der Lösung von einem in der Differentialgleichung vorkommenden Parameter sowie Eindeutigkeitssätze.

122) In der französischen Literatur ist die auf *Poincaré* zurückgehende Bezeichnung „équation aux variations“ üblich.

123) Vgl. *S. Bernstein,* a) Paris C. R. 139 (1904), p. 627—628; b) 140 (1905), p. 1440—1442; c) 144 (1907), p. 1025—1027; d) 150 (1910), p. 514—515; e) Math. Ann. 62 (1906), p. 253—271; f) Math. Ann. 69 (1910), p. 82—136; g) Communications de la Société Mathématique de Charkow (2) 11 (1908), p. 1—164; h) Ann.

$\Psi_r' \Psi_t' \leqq 0$ ist hierbei die soeben formulierte Voraussetzung gewiß erfüllt. Für die Differentialgleichung der Minimalflächen

$$(5) \qquad \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

und die Ausgangslösung $Z = z(x, y) \equiv 0$, d. h. die Ebene $z = 0$, ist der betrachtete Existenzsatz ferner unabhängig voneinander von *A. Korn*[124]) und *Ch. H. Müntz*[125]) abgeleitet worden. *Korn* und *Müntz* bedienen sich wie *Bernstein* der sukzessiven Approximationen. Sie gelangen zu dem Konvergenzbeweis im Gegensatz zu *Bernstein* unter wesentlicher Benutzung potentialtheoretischer Hilfsmittel. Wie *Lichtenstein* später zeigte, läßt sich ihr Verfahren, in geeigneter Weise modifiziert, zum Beweise des eingangs ausgesprochenen allgemeinen Satzes verwenden.[126]) Die potentialtheoretisch orientierte Methode führt zum Ziele, auch wenn die Funktionen Ψ, φ, ψ nicht analytisch und regulär sind, vielmehr nur gewissen weniger einschränkenden Voraussetzungen genügen.[127])

Ein analoger Satz gilt, wenn es sich um eine Differentialgleichung mit einem Parameter

$$(6) \qquad \Psi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \lambda\right) = 0$$

Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 233—256; i) (3) 29 (1912), p. 431—485. Die Beschränkung auf einfach zusammenhängende Gebiete ist dadurch bedingt, daß bei *Bernstein* es sich in der Regel um eine Kreisfläche handelt und bei den sukzessiven Approximationen der Lösung von trigonometrischen Reihen Gebrauch gemacht wird.

124) *A. Korn,* Abh. d Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1909, Anhang, p. 1—37.

125) *Ch. H. Müntz,* J. f. Math. 139 (1910), p. 5—32.

126) *L. Lichtenstein,* l. c. 74), insb. p. 18—35. Eine vereinfachte Darstellung Math. Ztschr. 5 (1919), p. 26—51, insb. p. 34—40. Weitere Literatur: *G. Giraud,* Paris C. R. 173 (1921), p. 543—546. (Nichtlineare Differentialgleichungen vom elliptischen Typus mit beliebig vielen unabhängigen Variablen.)

127) Das spezielle Resultat von *Korn* und *Müntz*, das für einfach zusammenhängende T in den Ergebnissen von *Bernstein* enthalten ist, besagt, daß durch endlich viele geschlossene, doppelpunktlose, analytische und reguläre Raumkurven, deren Projektion auf die Ebene $z = 0$ ein beschränktes Gebiet der Klasse C umschließt, sich stets ein singularitätenfreies Stück einer Minimalfläche legen läßt, sofern jene Raumkurven sich von ebenen Kurven nur wenig unterscheiden. (Diese Formulierung ist von derjenigen bei *Korn* und *Müntz* nur unwesentlich verschieden.) Übrigens ist *S. Bernstein* durch Ausgestaltung seiner Methoden (Nr. 7b) zu einem wesentlich weiter reichenden Satze gelangt. Nach *S. Bernstein* läßt sich durch eine jede geschlossene, doppelpunktfreie, analytische und reguläre Raumkurve, deren Projektion auf mindestens eine (und darum unendlich viele) Ebenen konvex ist, eine Minimalfläche legen. Vgl. *S. Bernstein,* l. c. 123) h), p. 233—236. Bedauerlicherweise sind die Betrachtungen von *Bernstein* vielfach recht unübersichtlich, so daß es stellenweise unmöglich ist, ein Urteil über die Lückenlosigkeit der Entwicklungen zu gewinnen. Vgl. den Nachtrag.

handelt, wobei diesmal Ψ eine analytische und reguläre Funktion ihrer neun Argumente sein soll. Gibt es für $\lambda = \lambda_0$ eine in $T + S$ analytische und reguläre Lösung, die der Ungleichheit (3) genügt, und ist die Voraussetzung betreffend die *Jacobi*sche Differentialgleichung erfüllt, so gibt es für alle Werte von λ in einer gewissen Umgebung von λ_0 eine zu den gleichen Randwerten gehörige in $T + S$ reguläre Lösung der Gleichung (6). Der Beweis kann in einer ganz ähnlichen Weise wie bei dem zuerst genannten Satze erbracht werden.[128])

Hat die „*Jacobi*sche Differentialgleichung" im Gegensatz zu unseren bisherigen Voraussetzungen nicht identisch verschwindende, in $T + S$ stetige, in T reguläre Lösungen, die auf S gleich Null sind, so versagt der Satz. *Lichtenstein* zeigt, daß in diesem Falle im allgemeinen *eine Verzweigung der Lösung* eintreten wird.[129]) Analoge Ergebnisse gelten bei Differentialgleichungen, die Parameter enthalten.

b) *Randwertaufgaben ohne einschränkende Voraussetzungen über die Größe des Gebietes oder den Wert etwaiger in der Differentialgleichung vorkommender Parameter.*[130]) In erster Linie sind hier die wichtigen Ergebnisse von *S. Bernstein* zu nennen, von denen bereits in der vorhergehenden Nummer die Rede war.[131]) Sie beziehen sich zunächst auf das erste Randwertproblem der Differentialgleichung

$$(1)\qquad A(x, y, p, q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x, y, p, q)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x, y, p, q)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \lambda D(x, y, z, p, q),$$

unter A, B, C, D analytische und reguläre Funktionen ihrer Argu-

128) Sätze diesen Charakters finden sich an vielen Stellen bei *S. Bernstein,* l. c. 123).

129) *L. Lichtenstein,* l. c. 74), insb. p. 35—51. Handelt es sich speziell um die Differentialgleichung $\Delta z = F(x, y, z)$, so ergeben sich die Verzweigungen der Lösungen aus der *E. Schmidt*schen Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. Vgl. *E. Schmidt,* Math. Ann. 65 (1908), p. 370—399. Man vergleiche hierzu *H. Falckenberg,* Inaug.-Diss., Erlangen 1913. Im allgemeinen Falle hat man mit einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung, auf die sich die gegebene Differentialgleichung zurückführen läßt, zu tun. Die Auflösung geschieht unter Zuhilfenahme potentialtheoretischer Hilfsmittel. Analoge Betrachtungen werden bei dem Existenzbeweis der von *Poincaré* postulierten Verzweigungsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten gebraucht. Auch hier handelt es sich um die Auflösung gewisser nichtlinearer Integro-Differentialgleichungen. Vgl. *L. Lichtenstein,* Math. Ztschr. 1 (1918), p. 229—284; 3 (1919), p. 172—174; 7 (1920), p. 126—231.

130) Ältere Literatur vgl. II A 7c, *A. Sommerfeld,* Nr. 6 und 12.

131) *S. Bernstein,* l. c. 123). Vgl. die Schlußbemerkung der Fußnote 127).

mente verstanden, $AC - B^2 > 0$; λ ist ein reeller Parameter. Das zugrunde liegende Gebiet ist die Fläche eines Kreises.[132])

Nach *S. Bernstein* gilt der folgende Satz:

Das erste Randwertproblem hat bei vorgegebenen analytischen und regulären Randwerten stets eine Lösung für $\lambda = \alpha_0$, wenn eine Zahl M existiert, so daß für alle λ in $0 < \lambda \leqq \alpha_0$ in T gewiß $|z|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < M$ ausfallen, sobald nur angenommen wird, daß die Lösung existiert. Mit anderen Worten, folgt aus der bloßen Annahme der Existenz der Lösung das Vorhandensein jener oberen Schranke, so ist die Lösung tatsächlich vorhanden.

Die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt, wenn D in bezug auf $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ höchstens vom zweiten Grade ist, während $A - \frac{B^2}{C}$, $C - \frac{B^2}{A}$ und D_z' eine positive untere Schranke haben.

Ein weiterer allgemeiner Satz von *Bernstein* lautet so: Sei

$$\Theta(x, y, z, p, q, r, s, t, \alpha) = 0, \quad \Theta_r' \Theta_z' \leqq 0 \tag{2}$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Es sei bekannt, daß die erste Randwertaufgabe bei gewissen vorgeschriebenen Randwerten für $\alpha = \alpha_0$ eine Lösung hat, und daß ferner aus der Annahme der Existenz der Lösung für $\alpha_0 < \alpha \leqq \alpha_1$ sich eine obere Schranke für $|z|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|$ erschließen läßt. Dann hat das erste Randwertproblem für $\alpha = \alpha_1$ tatsächlich eine zu jenen vorgeschriebenen Randwerten gehörige Lösung. *Bernstein* bedient sich bei seinen Untersuchungen eines in der Hauptsache auf *Ed. Le Roy* zurückgehenden Verfahrens der analytischen Fortsetzung, einer passend ausgestalteten Methode der sukzessiven Approximationen sowie gewisser weiterer ihm eigentümlicher Hilfsmittel. Als ein besonders wichtiges spezielles Ergebnis erscheint das bereits vorhin (Fußn. 127)) genannte Resultat über das Randwertproblem der Minimalflächen. Das Verfahren ist weiterer Anwendungen fähig.[133]) Es wäre sehr zu begrüßen, wenn diese wichtigen Untersuchungen vereinfacht und übersichtlicher dargestellt werden könnten.[134])

132) Durch eine konforme Abbildung kann man von hier aus natürlich zu einem beliebigen Gebiete der Klasse C gelangen. Dagegen versagt ein Teil der *Bernstein*schen Betrachtungen, wenn das Gebiet mehrfach zusammenhängend ist und müßte wohl durch Betrachtungen potentialtheoretischen Charakters ersetzt werden.

133) Man vergleiche hierzu *H. Weyl,* Naturf. Ges. Zürich 61 (1916), p. 40—72.

134) Eine Vereinfachung könnte sich möglicherweise durch Benutzung der Methoden von *M. Gevrey* (Nr. 6) ergeben.

Die spezielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x, y, z),\ F > 0,\ F_z' > 0 \tag{3}$$

hat vor langer Zeit schon *Picard* behandelt.[135]) *Picard* löst das erste Randwertproblem bei einem „hinreichend kleinen Gebiete" durch sukzessive Approximationen auf und geht dann zu beliebigen Gebieten durch alternierendes Verfahren über. Nach *Bieberbach* kann man auch bei Gebieten beliebiger Größe die Lösung unmittelbar durch sukzessive Approximationen gewinnen.[136])

Während die *Bernstein*schen Methoden im wesentlichen an die Annahme $\Theta_r' \Theta_z' \leqq 0$, die die Unität der Lösung gewährleistet, und an das erste Randwertproblem geknüpft sind, führt ein ganz anders beschaffenes Verfahren von *Lichtenstein* in manchen Fällen zum Ziele, wenn jene Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Freilich handelt es sich dabei um nichtlineare Differentialgleichungen von einem wesentlich spezielleren Charakter.[137])

Lichtenstein geht von einem Variationsproblem aus, approximiert die Lösung in Anlehnung an das Verfahren von *Ritz* (II C 3, p. 332—333) durch ein endliches Aggregat geeigneter Orthogonalfunktionen und geht zur Grenze über. Die Konvergenz des Verfahrens wird unter Zuhilfenahme des Diagonalverfahrens erbracht. Als ein Beispiel sei der folgende Existenzsatz genannt. Sei T ein beschränktes Gebiet der Klasse C in $\mathfrak{E}$, und es sei $P(x, y, u)$ eine in $T + S$ für alle reellen u erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, die überdies den Ungleichheiten genügt:

$$P(x, y, u) > 0,\quad \left|\frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u)\right| < A_1,\quad \left|\frac{\partial^2}{\partial u^2} P(x, y, u)\right| < A_1 \tag{4}$$

(A_1 konstant).

Es wird gezeigt, daß mindestens eine in $T + S$ stetige, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u) \tag{5}$$

---

135) Vgl. II A 7 c, *A. Sommerfeld*, Nr. 12.

136) Vgl. *L. Bieberbach*, Math. Ann. 77 (1916), p. 173—212. An der bezeichneten Stelle wird die Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ ausführlich behandelt (Nr. 7 c). Daß das Verfahren sich auf die allgemeinere Gleichung (3) anwenden läßt, wird p. 173—174 sowie p. 203 angedeutet.

137) Vgl. *L. Lichtenstein*, a) Paris C. R. 157 (1913), p. 629—632; b) J. f. Math. 145 (1915), p. 24—85, insb. Kap. II und III, p. 51—79. Das erste Kapitel beschäftigt sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, das vierte mit einer nichtlinearen Integralgleichung.

existiert. Übrigens sind $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auch noch auf S stetig. Das Verfahren läßt die Behandlung mancher anderer Randwertaufgaben zu, so z. B. die Bestimmung einer in $T+S$ regulären Lösung der Gleichung

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - qu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u), \qquad (q(x,y) \geqq 0)$$

die auf S der Bedingung

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = hu \qquad (h(s) > 0 \text{ stetig})$$

genügt.[138]) Auch lassen sich Lösungen gewisser zu (5) analoger Differentialgleichungen bestimmen, die auf geschlossenen singularitätenfreien Flächen regulär sind.[139])

Ist überdies $\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \geqq 0$, so hat das Problem nur eine Lösung. Die Voraussetzung, daß $\left|\frac{\partial P}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}\right|$ *für alle* u und alle (x, y) in $T+S$ beschränkt sind, kann man in manchen Fällen entbehren, so bei Behandlung des ersten Randwertproblems der Differentialgleichung

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k(x, y) e^u \qquad \begin{matrix}(k(x,y) > 0 \text{ in } T+S \text{ stetig,} \\ u(x,y) = 0 \text{ auf } S).\end{matrix}$$

Dies hängt damit zusammen, daß in $T+S$ gewiß $u(x, y) \leqq 0$, darum $\left|\frac{\partial P}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}\right| \leqq \text{Max}\,|k(x,y)|$ ist.[140])[141])

c) *Die Differentialgleichung* $\Delta u = ke^u$ $(k > 0)$.[142]) Durch gewisse Fragestellungen in der Theorie der Uniformisierung algebraischer Funktionen veranlaßt, haben sich *Picard* und *Poincaré* mit dieser

---

138) Vgl. l. c. 137) b), p. 66—77.

139) S. l. c. 137) b), p. 77—79.

140) Vgl. l. c. 137) b), p. 61—66. A. a. O. wird die betrachtete Randwertaufgabe als ein Problem der Variationsrechnung gedeutet. Das im Text besprochene Verfahren liefert eine Lösung des ersten Randwertproblems der Gleichung (8). Ein auf anderen Prinzipien beruhendes Verfahren verdankt man *Bieberbach* (vgl. die Andeutungen p. 1329 sowie die Ausführungen der Nr. 7c).

141) Es sei an dieser Stelle noch ein von *T. Carleman* erledigtes nichtlineares Randwertproblem genannt. Es handelt sich um die Bestimmung einer in einem Gebiete T der Klasse C im Raume, das den Koordinatenursprung enthält, überall, außer in jenem Punkte, regulären Potentialfunktion, die sich in der Umgebung des Anfangspunktes wie $\frac{1}{r}$ verhält und auf dem Rande der Bedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = F(u)$ genügt ((n) Innennormale). Dabei ist $F(0) \leqq 0$, $F'(u) > 0$, $\lim F(u) = +\infty$ für $u \to +\infty$. Es gibt eine und nur eine positive Lösung. (Vgl. *T. Carleman,* Math. Ztschr. 9 (1921), p. 35—43.)

142) Vgl. II A 7c, Nr. 12, sowie II B 4, *Fricke,* Nr. 38.

Differentialgleichung beschäftigt. *Picard* behandelte mehrmals die Aufgabe, eine auf einer vorgegebenen geschlossenen *Riemann*schen Fläche, bis auf eine endliche Anzahl von Punkten, reguläre Lösung der Gleichung $\Delta u = ke^u$ zu bestimmen, die in den ausgeschlossenen Punkten geeignete logarithmische Unstetigkeiten aufweist, und bediente sich dabei eines alternierenden Verfahrens.[143]) Ist eine Lösung dieser Art gefunden, so lassen sich nunmehr, worauf zuerst *H. A. Schwarz* aufmerksam gemacht hatte, die zu der fraglichen *Riemann*schen Fläche gehörigen algebraischen Funktionen durch automorphe Funktionen vom Grenzkreistypus uniformisieren. Die von *Picard* zugelassenen Unstetigkeiten unterliegen einer gewissen Einschränkung, die zur Folge hat, daß bei dem zugehörigen Problem der Uniformisierung die Fundamentalpolygone keinen Eckpunkt auf dem Grenzkreis selbst haben. Von dieser Einschränkung frei ist das von *Poincaré* in einer großen Arbeit eingeschlagene Verfahren.[144])

Eine andere Lösung von gleicher Allgemeinheit ist später von *Lichtenstein* vorgeschlagen worden.[145]) *Lichtenstein* führt das Problem, wie dies auch bei *Picard* und *Poincaré* geschieht, auf die Bestimmung einer in T beschränkten, außer höchstens in den ausgeschlossenen Punkten, regulären Lösung einer Differentialgleichung von der Form

$$(1) \qquad \Delta U + \beta = Ke^U \quad (K > 0)$$

zurück, geht sodann, wie bei der am Schluß der Nr. 7b besprochenen Untersuchung, zu einem äquivalenten Variationsproblem über und bedient sich zur Bestimmung der Lösung der Methode der unendlich vielen Veränderlichen. Wesentlich für das Gelingen des Verfahrens ist der Umstand, daß der Quotient $\frac{K}{\beta}$ in T zwischen zwei festen positiven Schranken, etwa m und M, liegt.[146])[147])

Handelt es sich jetzt um die Uniformisierung einer algebraischen

143) Vgl. *É. Picard,* J. de math. (4) 6 (1890), p. 145—210, insb. p. 185—197; 4 (9) (1893), p. 273—291; (5) 4 (1898), p. 313—316; J. f. Math. 130 (1905), p. 243—258.

144) *H. Poincaré,* a) J. de math. (5) 4 (1898), p. 137—230; b) Oeuvres 2, p. 512—591.

145) *L. Lichtenstein,* Paris C. R. 157 (1913), p. 1508—1511; Acta math. 140 (1915), p 1—34.

146) Diese Tatsache spielt auch bei *Picard* und *Poincaré* wie bei *Bieberbach* (s. w. u.) eine besondere Rolle. Übrigens finden sich auch schon bei *Poincaré* beiläufig Variationsansätze.

147) Tatsächlich ist l. c. 145) das Definitionsgebiet der Lösung eine geschlossene, singularitätsfreie Fläche, so daß für Δu der zweite *Beltrami*sche Differentialparameter der Fläche eintritt.

Funktion durch automorphe Funktionen mit Hauptkreis, so liegt das Randwertproblem anders. Das Definitionsgebiet der Lösung u ist von einer endlichen Anzahl geschlossener analytischer und regulärer Kurven begrenzt; bei der Annäherung an den Rand soll die Lösung wie $2 \log \frac{1}{\varrho}$ unendlich werden, unter ϱ den Abstand von dem Rande verstanden. Darüber hinaus hat u, wie vorhin, in einer endlichen Anzahl von Punkten in T vorgeschriebene Unstetigkeiten. Ein Verfahren, das auch in dem Hauptkreisfall zum Ziele führt, hat als erster *Bieberbach* angegeben.[148])

Bieberbach beginnt damit, daß er das Problem, auch in dem Hauptkreisfalle, auf die Bestimmung einer beschränkten, bis auf die ausgeschlossenen Punkte und die etwaigen Randkurven reguläre Lösung der Differentialgleichung (1) zurückführt. Alsdann wird zu der Auflösung des ersten Randwertproblems der Gleichung $\Delta u = e^u$ geschritten, wobei es sich zunächst um die Bestimmung in $T + S$ regulärer Lösungen handelt.[149]) Ist $\tilde{u}$ die in $T + S$ stetige, in T reguläre Potentialfunktion, die auf S die vorgeschriebenen Werte annimmt, so wird $u = \tilde{u} + v$ gesetzt. Es gilt dann

$$(2) \qquad \Delta v - e^{\tilde{u}} v = e^{\tilde{u}}(e^v - v), \quad v = 0 \text{ auf } S$$

und, wenn Γ die *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $\Delta v - e^{\tilde{u}} v = 0$ bezeichnet,

$$(3) \qquad v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_T \Gamma(x, y; \xi, \eta) e^{\tilde{u}(\xi, \eta)} (e^{v(\xi, \eta)} - v(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta.$$

Diese nichtlineare Integralgleichung läßt sich, wie *Bieberbach* zeigt, in der einfachsten Weise durch sukzessive Approximationen auflösen. Der Konvergenzbeweis beruht auf der Tatsache, daß, wenn Γ die zu der ersten Randwertaufgabe gehörige *Green*sche Funktion der Gleichung $\Delta u = pu$ $(p > 0)$ bezeichnet,

$$(4) \qquad \int_T \Gamma(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta < 2\pi$$

ist. Offenbar ist hiermit auch die erste Randwertaufgabe der Gleichung (1) gelöst. Handelt es sich jetzt um den Grenzkreisfall, so

---

148) Vgl. *L. Bieberbach*, a) Gött. Nachr. 1912, p. 599—602; b) Math. Ann. 77 (1916), p. 173—212. Hier findet sich (p. 173—187) der Zusammenhang zwischen dem Uniformisierungsproblem und der Randwertaufgabe ausführlich dargelegt. (Was den Grenzkreisfall betrifft, vgl. übrigens *Poincaré*, l. c. 144) b), p. 514—522.)

149) Das Gebiet T wird als zu der Klasse C gehörig vorausgesetzt. Es enthält keinen der im Hauptproblem auszuschließenden Punkte.

approximiert *Bieberbach* die geschlossene *Riemann*sche Fläche durch eine Folge ineinandergeschachtelter Gebiete T_k ($k = 1, 2, \ldots$), die die singulären Punkte nicht enthalten, löst für jedes Gebiet T_k die erste Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta U + \beta = Ke^U$ unter Zugrundelegung beliebiger zwischen den Schranken m und M gelegener stetiger Randwerte auf und gewinnt so eine Funktionenfolge $U_1, U_2, \ldots$ Diese Folge konvergiert in jedem die ausgeschlossenen (singulären) Punkte nicht enthaltenden Gebiete gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, die das Randwertproblem auflöst. Ein ganz analoges Verfahren führt auch in dem Hauptkreisfall zum Ziele, nur ist hier der Konvergenzbeweis der approximierenden Funktionenfolge etwas umständlicher.

Ein von dem vorstehenden verschiedenes Verfahren, das im Grenz- wie in dem Hauptkreisfall in gleicher Weise zu dem Existenz- und dem Unitätssatze führt und sich des Diagonalverfahrens bedient, hat später *Lichtenstein* angegeben.[150])

Nachtrag.

In einer demnächst erscheinenden Abhandlung, in die der Referent Einsicht nehmen konnte, unterzieht *Ch. H. Müntz* das Randwertproblem der Minimalflächen (vgl. die Schlußbemerkungen der Fußnote 127)) einer erneuten Behandlung. *Müntz* gelingt es, die Resultate von *S. Bernstein* zu präzisieren und sicher zu stellen, wobei sich auch Erweiterungen und Ausblicke auf weitere Resultate ergeben. Die Methode von *Müntz* lehnt sich an das Verfahren von *S. Bernstein* an, benutzt aber auch manche neue, fruchtbare Gedanken.

G. Faber beweist neuerdings den folgenden, zuerst von *Lord Rayleigh* ausgesprochenen Satz. Unter allen beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebieten T, deren Flächeninhalt einen vorgeschriebenen Wert hat, zeichnet sich der Kreis K durch die folgende Eigenschaft aus. Sei λ_T der zu T und zu dem ersten Randwertproblem gehörige kleinste positive Eigenwert der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$; der dem Kreise K entsprechende Wert von λ_T heiße insbesondere λ_K. Es ist dann $\lambda_K = \mathrm{Min}\, \lambda_T$, und zwar gilt $\lambda_T > \lambda_K$, außer für $T = K$. (Vgl. *G. Faber,* Münch. Ber. 1923, p. 169—172.)

H. Lebesgue hatte bereits im Jahre 1913 (S. M. F. C. R. p. 17) gezeigt, daß das erste Randwertproblem in einem beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebiete im Raume, dessen Begrenzung aus einer analytischen und, bis auf eine nach innen gerichtete Spitze, regulären Fläche besteht, für stetige Randwerte unter Umständen keine Lösung hat, sofern man einen überall stetigen Anschluß der Innenwerte an die Randwerte fordert. Es erweist sich darum als notwendig, das erste Randwertproblem allgemeiner zu formulieren und die Frage der Existenz der Lösung im Innern von derjenigen eines stetigen Anschlusses

150) Vgl. *L. Lichtenstein,* Gött. Nachr. 1917, p. 141—148, 426.

an den Rand zu trennen. Mit diesen Fragestellungen, die auch für die Theorie elliptischer Differentialgleichungen von Interesse sind, beschäftigt sich eine Reihe von Arbeiten von *G. Bouligand* sowie *H. Lebesgue* (Paris C. R. 1923 und 1924) und namentlich von *N. Wiener.* Vgl. *H. B. Phillips* und *N. Wiener,* J. of math. phys. 1923, p. 105—124; *N. Wiener,* ebenda 3 (1924), p. 24—51, p. 127—146; Paris C. R. 178 (1924), p. 1050—1053; Ann. of math. 1924, p. 307—314. Man vergleiche in diesem Zusammenhang eine Arbeit von *O. Perron,* Math. Ztschr. 18 (1923), p. 42—54; hierzu auch *R. Remak,* ebenda 20 (1924), p. 126—130, und *T. Radó,* Math. Ztschr. 1924. *Perron* geht bei Behandlung des ersten Randwertproblems der Potentialtheorie von Beziehungen aus, die als Erweiterungen der Beziehungen $\Delta u \geqq 0$ und $\Delta u \leqq 0$ aufgefaßt werden können, und gibt auch der Randbedingung eine gegen die übliche allgemeinere Fassung.

(Abgeschlossen im März 1924.)

II C 13. INTEGRALGLEICHUNGEN UND GLEICHUNGEN MIT UNENDLICHVIELEN UNBEKANNTEN.

Von

ERNST HELLINGER und **OTTO TOEPLITZ**
in Frankfurt a. M. — in Kiel.

Vorbemerkung. Der Artikel will im Prinzip die bis 1. Januar 1923 erschienene Literatur berücksichtigen; jedoch glauben wir alles wesentliche, was nachher an einschlägigen Arbeiten erschienen ist, noch erfaßt zu haben. Im Einklang mit den von der Redaktion getroffenen Dispositionen behandeln wir nur die *Theorie* selbst, während ihre *Anwendungen* an anderen Stellen der Encyklopädie zur Geltung gebracht sind.

Wenn dabei den *Tatsachen* der Theorie ihre *Methoden* gleichberechtigt zur Seite gestellt worden sind, wenn an verschiedenen Stellen dieses Encyklopädieartikels *Beweise* angegeben werden (allerdings nur solche, die, ihrem Wesen nach fundamental, in der Literatur bisher keine bequem zu handhabende Darstellung gefunden haben), so glauben wir, daß sich dies zum mindesten aus der augenblicklichen Situation der Integralgleichungstheorie rechtfertigt: der Tatsachenbestand hat sich im letzten Dezennium in seinen Grundlagen nicht mehr verändert, während die Methoden dort, wo sie über den engen Rahmen der klassischen Theorie hinausgeführt werden, noch zu weiteren Wirkungen berufen erscheinen. Der Artikel ist dementsprechend im Gegensatz zu der üblichen *materiellen* Zerteilung des Gegenstandes nach Integralgleichungen und unendlichvielen Veränderlichen vielmehr nach einem *methodischen* Gesichtspunkt gegliedert worden. Und zwar ist dasjenige Prinzip, das überhaupt die methodische Grundlage der ganzen Theorie darstellt, nämlich die Analogie mit der Algebra der linearen und quadratischen Gebilde, auch der Disposition des Gegenstandes zugrunde gelegt worden; ebenso, wie der in Betracht kommende Abschnitt der Algebra seinerseits sachlich in die Auflösung der linearen Gleichungen und in die Transformation der quadratischen und bilinearen Formen zerfällt, ist hier in *Auflösungstheorie* (Kap. II) und *Eigenwerttheorie* (Kap. III) geschieden.

Der Artikel beschränkt sich aber nicht auf die materielle Seite des Gegenstandes, d. h. auf seine *Tatsachen* und auf seine *Methoden*, sondern er will zugleich auch deren *Genesis* aufweisen; so wenig er eine Geschichte der Integralgleichungstheorie sein will, will er doch die *Entwicklung ihrer Probleme* in sich enthalten. Diese Absicht birgt zunächst die Gefahr in sich, daß derjenige Leser, der nur Tatsachen oder nur Methoden sucht, durch genetische Entwicklungen behindert wird, die ihrer Art nach subjektiver und oft verwickelter sind. Um

dies zu vermeiden, sind die genetischen Erörterungen in einem besonderen Kapitel in Form einer Entwicklungsgeschichte der Integralgleichungen und unendlichvielen Veränderlichen vereinigt und vorangestellt worden; die folgenden Kapitel bringen dann die bloßen Tatsachen und Methoden und sind so abgefaßt, daß sie die Kenntnis des ersten nirgends voraussetzen, sondern völlig unabhängig von ihm verständlich sind. Durch diese Trennung wird es möglich, im II. und III. Kapitel die Tatsachen und Methoden nach ihrem eigenen sachlichen Zusammenhang anzuordnen und darzustellen und unbehindert durch jede Rücksicht auf die historische Verknüpfung der Tatbestände die methodischen Elemente zu ihrem vollen Recht gelangen zu lassen. Auf der anderen Seite können wir um so freier im I. Kapitel von der geschichtlichen Entwicklung das Bild entwerfen, das sich uns in seiner naturgemäßen Bedingtheit durch den derzeitigen Stand der Theorie und durch die bewußte Betonung ihrer methodischen Bestandteile darbietet.

Inhaltsübersicht.

I. Ursprung der Theorie.

1. Der allgemeine algebraische Grundgedanke.
2. Der besondere Typus der Integralgleichung zweiter Art.
3. Die Entwicklung nach Iterierten (*Neumann*sche Methode).
4. Der lösende Kern (Resolvente).
5. Die *Fredholm*sche Entdeckung.
6. *Hilberts* Eigenwerttheorie.
7. Umgrenzung des Funktionenbereiches.
8. Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen.

II. Auflösungstheorie.

A. Die linearen Integralgleichungen zweiter Art.

9. Die *Fredholm*sche Theorie.
10. Andere Auflösungsmethoden.
11. Die iterierten und assoziierten Kerne.
12. Uneigentlich singuläre Integralgleichungen.
13. Allgemeinere Integrationsbereiche. Systeme von Integralgleichungen.
14. Besondere Kerne.

B. Die Methode der unendlichvielen Veränderlichen.

15. Zusammenhang zwischen Integralgleichungen und linearen Gleichungssystemen mit unendlichvielen Unbekannten.
16. *Hilberts* Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme.

C. Andere Untersuchungen über lineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten und lineare Integralgleichungen.

17. Die Methode der unendlichen Determinanten.
18. Theorie der beschränkten Gleichungssysteme.
19. Die allgemeinsten Gleichungssysteme für Unbekannte von konvergenter Quadratsumme.
20. Andere Konvergenzbedingungen für die Unbekannten.
21. Eigentlich singuläre Integralgleichungen zweiter Art.

22. Integralgleichungen erster Art. Momentenproblem.
23. Neuere Untersuchungen über lineare *Volterra*sche Integralgleichungen.
24. Lineare Funktionaloperationen:
   a) Die Algebra der Funktionaloperationen.
   b) Der Standpunkt der Mengenlehre.
   c) Der formal-abstrakte Standpunkt (general analysis).
   d) Besondere lineare Funktionalgleichungen.

D. Nichtlineare Probleme.

25. Nichtlineare Integralgleichungen und nichtlineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten.
26. Vertauschbare Kerne.
27. Integrodifferentialgleichungen.
28. Nichtlineare Funktionaloperationen.
29. Numerische Behandluug linearer und nichtlinearer Probleme.

III. Eigenwerttheorie.

A. Integralgleichungen mit reellem symmetrischen Kern.

30. Eigenwerte und Eigenfunktionen.
31. Die iterierten und assoziierten Kerne.
32. Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte.
33. Die Existenz der Eigenwerte.
34. Entwicklungssätze.
35. Abhängigkeit der Eigenwerte vom Integrationsbereich und ihr asymptotisches Verhalten.
36. Uneigentlich singuläre symmetrische Integralgleichungen. Allgemeinere Integrationsbereiche. Systeme von Integralgleichungen.
37. Besondere symmetrische Kerne.

B. Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern.

38. Besondere unsymmetrische Kerne, die sich wie symmetrische verhalten.
39. Elementarteilertheorie der allgemeinen unsymmetrischen Kerne (Entwicklung nach Hauptfunktionen).

C. Die vollstetigen quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

40. *Hilberts* Hauptachsentheorie der vollstetigen quadratischen Formen.
41. Besondere vollstetige Bilinearformen, die sich wie quadratische Formen verhalten.
42. Elementarteilertheorie der allgemeinen vollstetigen Bilinearformen.

D. Weitere Untersuchungen über quadratische und bilineare Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

43. Beschränkte quadratische Formen von unendlichvielen Veränderlichen.
44. Eigentlich singuläre Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern.
45. Der allgemeine Standpunkt der Funktionaloperationen:
   a) Die Algebra der Funktionaloperationen.
   b) Der formal-abstrakte Standpunkt (general analysis).
   c) Die methodische Auswirkung der Theorie.

Literatur.

A. Lehrbücher und Monographien.

1. *M. Bôcher,* An introduction to the study of integral equations. Cambridge Tracts Nr. 10, 1909, 72 S., 2. Aufl. 1914.
2. *H. Bateman,* Report on the history and present state of the theory of integral equations. Brit. Ass. Rep., Sheffield meeting, 1910, p. 345—424.
3. *A. Korn,* Über freie und erzwungene Schwingungen. Leipzig (Teubner) 1910, VI u. 136 S.
4. *A. Kneser,* Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Braunschweig (Vieweg) 1911, VIII u. 243 S.; 2. Aufl. 1922, VIII u. 292 S.
5. *H. B. Heywood-M. Fréchet,* L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. Avec une préface et une note de M. Jacques Hadamard. Paris (Hermann) 1912, VI u. 165 S.
6. *T. Lalesco,* Introduction à la théorie des équations intégrales. Avec une préface de M. Émile Picard. Paris (Hermann) 1912, VIII u. 152 S.
7. *D. Hilbert,* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig (Teubner, Fortschr. d. math. Wiss. 3) 1912 und 1924, XXVI u. 282 S., im folgenden kurz als „Grundzüge" bezeichnet. Gesamtabdruck der unter dem gleichen Titel in den Gött. Nachr., math.-phys. Kl., erschienenen Mitteilungen: 1. Mitt., 1904, p. 49—91; 2. Mitt., 1904, p. 213—259; 3. Mitt., 1905, p. 307—338; 4. Mitt., 1906, p. 157—227; 5. Mitt., 1906, p. 439—480; 6. Mitt., 1910, p. 355—417; Inhaltsangabe, 1910, p. 595—618.
8. *F. Riesz,* Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris (Gauthier-Villars, Coll. Borel) 1913, VI u. 182 S.
9. *V. Volterra,* Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, ed. M. Tomassetti et F. S. Zarlatti. Paris (Gauthier-Villars, Coll. Borel) 1913, VI u. 164 S.
10. *G. Vivanti,* Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari. Milano (Manuali Hoepli, Nr. 286—288) 1916, XVI u. 398 S.
11. *R. Courant* und *D. Hilbert,* Methoden der mathematischen Physik. Bd. I, Berlin (Springer, Grundl. d. math. Wiss. 12) 1924, XIV u. 450 S.
12. *W. V. Lovitt,* Linear integral equations. New York (Mc. Graw-Hill), 1924, XIV u. 254 S.

B. Lehrbücher und Monographien verwandter Gebiete.

1. *A. Schoenflies,* Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Leipzig (Teubner) 1908, Ber. d. Deutsch. Math.-Ver., Erg.-Bd. 2, X u. 331 S., insbes. Kap. VII, p. 264—301: Die Kurvenmengen und der Funktionalraum.
2. *R. d'Adhémar,* Exercices et leçons d'analyse. Paris (Gauthier-Villars) 1908, VIII u. 208 S., p. 121—136, 179—184.
3. *G. Kowalewski,* Einführung in die Determinantentheorie, einschließlich der unendlichen und Fredholmschen Determinanten. Leipzig (Veit) 1909, VI u. 550 S., Kap. 17—19, p. 369—540.
4. *J. Horn,* Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Leipzig (Göschen, Samml. Schubert Nr. 60) 1910, VIII u. 363 S., insbes. V. Abschnitt, p. 188—238.
5. *R. d'Adhémar,* Leçons sur les principes d'analyse I. Paris (Gauthier-Villars, Coll. Borel) 1912, VI u. 324 S., chap. IX, X.

6. *V. Volterra,* Leçons sur les fonctions de lignes. Paris (Gauthier-Villars, Coll. Borel) 1913, VI u. 230 S.
7. *C. Jordan,* Cours d'analyse Bd. III, 3. Aufl., Paris (Gauthier-Villars) 1915, Note III, p. 591—623.
8. *U. Dini,* Lezioni di analisi infinitesimale II. Pisa 1915, parte 2, cap. 32, p. 917—976
9. *E. T. Whittaker* and *G. N. Watson,* A course of modern analysis. 3. Aufl. Cambridge 1920, 608 S., Cap. XI, p. 211—231.
10. *E. Goursat,* Cours d'analyse Bd. III, 3. Aufl., Paris (Gauthier-Villars) 1923, 702 S., Cap. 30—32, p. 323—487.
11. *R. v. Mises,* Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I (7. Aufl. von Riemann-Webers part. Diffgl. d. math. Ph.), Braunschweig (Vieweg) 1925, XX u. 687 S, Kap. XI und XII, p. 381—439. (Kap. XI abgedruckt in Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 5 (1925), p. 150—172.)

C. Sonstige Darstellungen und Berichte.

1. *H. Bateman,* The theory of integral equations. London Math. Soc. Proc. (2) 4 (1906), p. 90—115.
2. *G. Lauricella,* Sulle equazioni integrali. Ann. di mat. (3) 15 (1908), p. 21—45.
3. *R. d'Adhémar,* L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et de Neumann Brux. soc. sc. 33 B (1909), p. 173—239 = Paris (Hermann) 1909.
4. *H. Poincaré,* Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Leipzig (Teubner, Math. Vorl. an der Univ. Göttingen IV) 1910, 60 S., 1. Vortrag.
5. *H. v. Koch,* Sur les systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. C. R. du Congr. de Stockholm 1910, p. 43—61.
6. *J. Fredholm,* Les équations intégrales linéaires. C. R. du Congr. de Stockholm 1910, p. 92—100.
7. *T. Lalesco,* Einführung in die Theorie der Integralgleichungen (rumänisch). Buk. Bulet. Soc. de Stünte 19 (1910), p. 627—640, 865—883, 1203—1222; 20 (1911), p 10—24, 468—481, 582—614.
8. *H. Hahn,* Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen I. Deutsche Math.-Ver 20 (1911), p. 69—117.
9. *H. Poincaré,* Rapport sur le prix Bolyai. Acta math. 35 (1911), p. 1—28 = Darb. Bull. (2) 35 (1911), p. 67—100 = Palermo Rend. 31 (1911), p. 109—132 = Budapest Math. és phys. lapok 20 (1911), p. 1—39.
10. *O. Toeplitz,* Integralgleichungen und deren Anwendungen. Taschenb. f. Math. u. Phys. Leipzig (Teubner), 2. Jahrg. (1911), p. 132—135; 3 Jahrg. (1913), p. 121—129.
11. *G. Lauricella,* L'opera dei matematici italiani nei recenti progressi della teoria delle funzioni di variabile reale e della equazioni integrali. Soc. Ital. Atti 6 (1912), p. 217—236.
12. *M. Plancherel,* La théorie des équations intégrales. Conférence. Ens. de math. 14 (1912), p. 89—107.
13. *U. Broggi,* Ecuaciones integrales lineales. La Plata Univ. Nacion. 1 (1914), p. 11—36.
14. *V. Volterra,* Les problèmes qui ressortent du concept de fonctions de lignes. Berl. math. Ges. Sitzungsber. 13 (1914), p. 130—150.
15. *V. Volterra,* Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik. Deutsch von E. Lamla. Arch. Math. Phys. (3) 22 (1914), p. 97—182 = Leipzig (Teubner) 1914, 84 S.

I. Ursprung der Theorie.

1. Der allgemeine algebraische Grundgedanke. Den Gegenstand der Integralgleichungstheorie bildet die sog. *Integralgleichung 2. Art*

$$(J) \qquad \varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \qquad (a \leqq s \leqq b),$$

also eine Funktionalgleichung für eine unbekannte Funktion $\varphi(s)$; das Intervall $(a \ldots b)$, auf das alle vorkommenden unabhängigen Veränderlichen beschränkt sind, sowie die Funktionen $f(s)$ und $K(s,t)$ sind als gegeben anzusehen. $K(s,t)$ nennt man den *Kern* (kernel, noyau, nucle) der Integralgleichung. Alle diese Funktionen mögen vorläufig als stetig vorausgesetzt werden.

a) Auflösungstheorie. Das Problem der Auflösung der Gleichung (J) stellt sich als analytisches Analogon zu dem algebraischen Problem der Auflösung eines Systems von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten dar. Man überblickt dies unmittelbar, wenn man sich der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe erinnert: man teile das Integrationsintervall durch die Teilpunkte $x_1, \ldots, x_{n-1}$ in n gleiche Teile, deren jeder also die Länge $\delta = \frac{b-a}{n}$ hat, man bezeichne abkürzend die Funktionswerte in diesen Teilpunkten, wie folgt:

$$f(x_s) = f_s, \quad \delta K(x_s, x_t) = K_{st} \qquad (s, t = 1, \ldots, n;\ x_n = b)$$

und betrachte das System von n Gleichungen ersten Grades für die n Unbekannten $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$(A) \qquad \begin{array}{l} (1+K_{11})\,\varphi_1 + K_{12}\,\varphi_2 + \cdots + K_{1n}\,\varphi_n = f_1 \\ K_{21}\,\varphi_1 + (1+K_{22})\,\varphi_2 + \cdots + K_{2n}\,\varphi_n = f_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{n1}\,\varphi_1 + K_{n2}\,\varphi_2 + \cdots + (1+K_{nn})\,\varphi_n = f_n \end{array}$$

oder, kürzer geschrieben,

$$(A) \qquad \varphi_s + \sum_{t=1}^{n} K_{st}\,\varphi_t = f_s \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Die Bedingungen, unter denen (A) lösbar ist, sind wohlbekannt. Vorausgesetzt, das System (A) sei für jedes n lösbar, so denke man für jedes einzelne n die Lösungswerte $\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}$ als Lote in den Teilpunkten $x_1, \ldots, x_{n-1}, b$ aufgetragen und die Endpunkte dieser Lote durch einen Polygonzug verbunden; wofern dann diese Polygonzüge mit wachsendem n gegen das Kurvenbild einer stetigen Funktion $\varphi(s)$

konvergieren, wird in Anbetracht der Definition des bestimmten Integrals das algebraische Gleichungssystem (A) in die Integralgleichung (J) übergehen und $\varphi(s)$ also eine Lösung von (J) sein. Wenn diese einfache Überlegung auch sofort die Schwierigkeiten der wirklichen Durchführung des angedeuteten Grenzüberganges durchblicken läßt, so demonstriert sie doch das Bestehen einer *formalen* Analogie zwischen (J) und (A). Man kann diese Analogie auf die einfache Formel bringen: *das Integralzeichen ist durch das Summenzeichen zu ersetzen, die Integrationsvariable durch einen Summationsindex, die Argumente der unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen sind in Indizes umzuwandeln.*

b) Eigenwerttheorie. Mit der Auflösung der Gleichung (J) ist die Lehre von den Integralgleichungen nicht erschöpft. Ist $k(s, t)$ eine reelle, *symmetrische* Funktion ihrer beiden Argumente, $k(s, t) = k(t, s)$, und λ ein Parameter, so knüpft sich an die *homogene* Gleichung[1])

$$(i_h) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b k(s, t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

ein weiterer Komplex von Begriffen und Tatsachen. *Eigenwert* des Kernes $k(s, t)$ heißt jeder Wert von λ, für den (i_h) eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, und diese Lösungen selbst heißen die *Eigenfunktionen* des Kernes. Unterwirft man die Integralgleichung (i_h) dem nämlichen Analogisierungsprozeß, der oben auf (J) angewandt wurde, so erscheint sie als das analytische Analogon zu dem System von n homogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten:

$$(a_h) \qquad \begin{array}{lllll} (1-\lambda k_{11})\varphi_1 & -\lambda k_{12}\,\varphi_2 & -\cdots & -\lambda k_{1n}\,\varphi_n & = 0 \\ -\lambda k_{21}\,\varphi_1 & +(1-\lambda k_{22})\varphi_2 & -\cdots & -\lambda k_{2n}\,\varphi_n & = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ -\lambda k_{n1}\,\varphi_1 & -\lambda k_{n2}\,\varphi_2 & -\cdots & +(1-\lambda k_{nn})\varphi_n & = 0 \end{array}$$

oder kurz

$$(a_h) \qquad \varphi_s - \lambda \sum_{t=1}^{n} k_{st}\varphi_t = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

dessen Koeffizientensystem diesmal der Symmetriebedingung $k_{st} = k_{ts}$

---

1) Eine Integralgleichung soll stets mit (i) bezeichnet werden, wenn sie aus (J) dadurch hervorgeht, daß unter Einführung eines Parameters λ der Kern $K(s, t) = -\lambda k(s, t)$ gesetzt wird. Die Marke h an der Gleichungsnummer soll stets den Übergang zur *homogenen* Gleichung (rechte Seite Null) andeuten. — Entsprechende Bezeichnungen werden bei den linearen Gleichungssystemen der Algebra (A) und bei Systemen mit unendlichvielen Unbekannten (U) angewendet werden.

genügt, und das lösbar ist, wenn seine Determinante verschwindet:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{1n} & \dots & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Rolle dieser Gleichung, der sog. *Säkulargleichung*, in der analytischen Geometrie und in der Mechanik ist bekannt. In der letzteren beherrscht sie die Lehre von den freien Schwingungen von n Massenpunkten. In der analytischen Geometrie des Raumes tritt sie (für $n = 3$, bei Deutung der φ_s als unhomogener Koordinaten) beim sog. *Hauptachsenproblem* auf, d. h. bei der Aufgabe, die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (mit dem Flächenmittelpunkt als Anfangspunkt) bezogene Gleichung eines Ellipsoids oder Hyperboloids $k_{11}x^2 + 2k_{12}xy + \cdots + k_{33}z^2 = 1$ durch eine Drehung des Koordinatensystems in die Normalform

$$\frac{\xi^2}{\alpha} + \frac{\eta^2}{\beta} + \frac{\zeta^2}{\gamma} = 1$$

überzuführen — α, β, γ sind nämlich die Wurzeln der Säkulargleichung. Dehnt man die Redeweise der analytischen Geometrie auch auf den Raum von n Dimensionen aus, so handelt es sich um den Satz, den man als das Hauptachsentheorem für den n-dimensionalen Raum bezeichnen kann, und dessen Zusammenhang mit dem System (a_h) und der zugehörigen Säkulargleichung (1) im Hinblick auf das folgende genau präzisiert sei: Man kann durch eine rechtwinklige Koordinatentransformation im Raum von n Dimensionen (orthogonale Transformation)

$$(2\text{a})\qquad x_s = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha s} y_\alpha \qquad (s = 1, \dots, n)$$

die Gleichung der Mittelpunktsflächen 2. Ordnung im Raum von n Dimensionen auf die Normalform

$$(2\text{b})\qquad \sum_{s,t=1}^{n} k_{st} x_s x_t = \frac{y_1^2}{\lambda_1} + \cdots + \frac{y_n^2}{\lambda_n} = 1$$

bringen, wo die neuen Koordinatenachsen die Hauptachsen sind und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Quadrate der halben Hauptachsenlängen; die n reellen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die Wurzeln der Gleichung (1) und die Koeffizienten $\varphi_{\alpha s}$ der Transformation (2a) (geometrisch gesprochen die Richtungscosinus der n Hauptachsen) sind die zu jenen n Werten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gehörigen n Lösungssysteme von (a_h).

Die analogen Tatsachen über die Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi(s)$ sind es, die den Inhalt der Eigenwerttheorie der Gleichung (i_h) bilden.

c) Der allgemeine Analogiegedanke. Die Theorie der linearen Gleichungen und die orthogonale Transformation der quadratischen Formen sind die beiden einzigen wesentlichen algebraischen Grundtatsachen, die in der elementaren analytischen Geometrie verkörpert sind. Die Integralgleichungstheorie, wie sie eben skizziert worden ist, erscheint also einfach als analytisches Analogon zu den Elementen der analytischen Geometrie des Raumes von zwei, drei und mehr Dimensionen. *In dieser Idee der Analogie mit der analytischen Geometrie und allgemeiner überhaupt in der Idee des Übergangs von algebraischen Tatsachen zu solchen der Analysis liegt der Sinn der Lehre von den Integralgleichungen.*

Es versteht sich von selbst, daß lange vor 1900 die mannigfachsten Versuche zur Verwirklichung dieser Idee gemacht worden sind. Seitdem *D. Bernoulli* die schwingende Saite als Grenzfall eines Systems von n einzelnen schwingenden Massenpunkten behandelt hatte[2]), ist dieser Grenzübergang im Einzelfall immer wieder versucht worden; und im Einzelfall hatte er gelegentlich Erfolg, namentlich dort, wo physikalische Vorstellungen das Resultat im voraus präsentierten.[2a]) Bei diesen Versuchen waren zunächst meist Differentialgleichungen, nicht Integralgleichungen, das Substrat der Betrachtung auf Seiten der Analysis, und man fand von ihnen den Weg zu algebraischen Bildungen, indem man die Differentialgleichungen in Differenzengleichungen auflöste.[2b]) Diese Art des Übergangs hatte das beginnende 19. Jahrhundert noch weit stärker im Bewußtsein als die folgende Periode der Mathematik; keiner vor allem hat früher so tief in solche

---

2) *D. Bernoulli,* Petropol. Comm. 6 (1732/33, ed. 1738), p. 108–122, insbes. Nr. 16: „Orsus itaque sum has meditationes a corporibus duobus filo flexili in data distantia cohaerentibus; postea tria consideravi moxque quatuor, et tandem numerum eorum distantiasque qualescunque; cumque numerum corporum infinitum facerem, vidi demum naturam oscillantis catenae sive aequalis sive inaequalis crassitiei sed ubique perfecte flexilis." — *Joh. Bernoulli,* ibidem 2 (1729), p. 200 = Opera 3, p. 124, hatte lediglich die Fälle $n = 2, 3, 4$ erörtert.

2a) Als markantestes Beispiel sei nur *Lord Rayleigh,* theory of sound, 1. Aufl. London 1877, 2. Aufl. 1894, chap. 4 und 5 angeführt.

2b) Es sei nur auf die Schlußbemerkung von *Ch. Sturm* am Ende seiner großen Arbeit J. de math. (1) 1 (1836), p. 106—186 verwiesen, in der er andeutet, wie er auf diesem Wege von seinem algebraischen Theorem betreffend die Sturmschen Ketten zu seinem Oszillationstheorem betreffend die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung gelangt ist.

Zusammenhänge hineingeschaut, wie *B. Riemann* es in seiner Bemerkung zur Integration hyperbolischer partieller Differentialgleichungen zu erkennen gibt.[3])

Neben diesen Versuchen eines direkten Grenzübergangs laufen die zahlreichen Bemühungen einher, lineare Funktionalgleichungen durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten, also durch Reihenansätze in Systeme von unendlichvielen linearen Gleichungen zu verwandeln; der umfassende Bericht *H. Burkhardt*s über die Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen[4]) gibt einen Begriff von der Mannigfaltigkeit und zugleich von der aphoristischen Natur dieser Untersuchungen, die alle in die Richtung des Analogiegedankens weisen.

Wenn trotzdem erst die Jahrhundertwende zur Geburtsstunde der Integralgleichungslehre wurde, so kann man schon daraus entnehmen, daß *diese Theorie noch durch andere Momente als durch jenen formalen Analogiegedanken bedingt sein muß.*[5]) Es ist das Ziel der folgenden Nummern dieser genetischen Vorbetrachtung, diese Momente auseinanderzulegen und sowohl die *Hindernisse* aufzuweisen, die den Zugang zur Integralgleichungstheorie solange verwehrten, als auch die *charakteristischen Gedanken*, die zu ihrer Entdeckung führten.

2. Der besondere Typus der Integralgleichung zweiter Art. Ein Blick auf (A) läßt bereits eines dieser entscheidenden Hindernisse erkennen. Die *Einer*, die *in der Diagonale* des Systems (A) in Evidenz treten, erscheinen, rein algebraisch betrachtet, lediglich als eine etwas auffallende Dekoration, im Grunde nur als eine Sache der Bezeichnung; schriebe man K_{ss} statt $1 + K_{ss}$, so wäre die Allgemeinheit des Systems nicht geändert. Aber jene Einer sind daraus hervorgegangen, daß in (J) die unbekannte Funktion auch außerhalb des Integralzeichens auftritt. Würde man davon absehen und an Stelle von (J) die Funktionalgleichung

$$(J_1) \qquad \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s)$$

setzen, die man übrigens oft betrachtet und als *Integralgleichung 1. Art*

---

3) *B. Riemann*, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Gött. Nachr. 1860 = Werke, 1. Aufl. p. 145—164, 2. Aufl. p. 150—175, insbes. p. 159 bzw. 170f.

4) *H. Burkhardt*, Jahresb Deutsch. Math.-Ver. 10_2 (1908), XV u. 1804 S.

5) Ein Beispiel der lediglich heuristischen Auswertung des Analogiegedankens zur Auffindung eines wesentlichen Resultats findet man bei *V. Volterra*, Sulla inversione degli integrali definiti, Torino Atti 31 (1896), p. 311—323, 400—408, 557—567, 693—708 (bzw p. 231—243, 286—294, 389—399, 429—444 der Sonderausgabe der Cl. fis., mat. e nat.), insbes. Nr. 3 der 1. Note, p. 315 (bzw. 295).

bezeichnet hat, so würde man eben nicht jenen Komplex von Sätzen aufstellen können, die *J. Fredholm* für die Gleichung (J) entdeckt hat und die in genauer Analogie zu den Sätzen der Lehre von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten stehen (ausführlich findet man sie in Nr. **9** und im Anfang von Nr. **10** aufgeführt). Dieser tiefgehende Unterschied zwischen Integralgleichungen 1. Art und Integralgleichungen 2. Art — übrigens eine Benennung, die diesem Unterschied nicht gerecht wird — ist also durch die Idee der formalen algebraischen Analogie allein nicht zu begründen; er ist also jedenfalls eine Angelegenheit der Analysis, und eine genetische Betrachtung des Gegenstandes wird die einzelnen Etappen aufweisen müssen, in denen jener Unterschied sich im Laufe der Zeit geltend gemacht hat.[6])

Historisch betrachtet hebt sich der spezifische Ansatz der Integralgleichung *zweiter* Art erst allmählich im Laufe des 19. Jahrhunderts hier und da von den vielfach verstreut auftretenden Integralgleichungen *erster* Art ab. Zuerst tritt er wohl 1837 bei *J. Liouville* auf[7]), in einem Zusammenhange, der in Nr. **3** zu erwähnen sein wird. Man findet ihn 1856 bei *A. Beer*[8]) wieder, bei der Lösung der potentialtheoretischen Randwertaufgaben. Der Gedanke, der für die Entwicklung der Integralgleichungstheorie später entscheidend geworden ist, ist der folgende. Die erste Randwertaufgabe verlangt eine Funktion $u(x, y)$ zu finden, die im Inneren eines gegebenen Bereichs der Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt und auf dem Rande C Werte hat, die als Funktion $f(s)$ der Bogenlänge s längs des Randes vorgegeben sind. Das logarithmische Potential einer einfachen Belegung $\varrho(s)$, die längs des Randes C ausgebreitet ist,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \varrho(s) \lg \frac{1}{r(s; x, y)}\, ds,$$

---

6) Die *theoretische* Begründung der hier vertretenen Ansicht über die der Lehre von den Integralgleichungen 1. Art gezogenen engen Grenzen liefert in voller Schärfe erst die Methode der unendlichvielen Veränderlichen; vgl. Nr. **20** e, Nr. **22**, Anfang, insbes. [240]), sowie das am Ende von Nr. **6** und in Nr. **7** über den Eigenwert ∞ Gesagte. — Diejenigen *Aussagen,* die an die Integralgleichung 1. Art angeknüpft worden sind, findet man in Nr. **22** zusammengestellt.

7) *J. Liouville*, Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable. II. J. de math. (1) 2 (1837), p. 16—35.

8) *A. Beer,* Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik, Braunschweig 1865, insbes. p. 62 ff.; vgl. auch Poggend. Ann. 98 (1856), p. 137 [die Hauptstelle abgedruckt bei *C. Neumann*[9]), p. 220 ff.].

wo $r(s; x, y)$ die Entfernung des inneren Punktes (x, y) vom Randpunkte s ist, genügt bekanntlich der Differentialgleichung und wird auch die verlangten Randwerte $f(\sigma)$ in den Punkten σ des Randes C dann annehmen, wenn

$$f(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \varrho(s) \lg \frac{1}{r(s; x, y)}\, ds,$$

ist; in heutiger Terminologie ist das eine Integralgleichung *erster* Art für $\varrho(s)$. Der Gedanke von *Beer* kommt nun darauf hinaus, statt des Potentials einer *einfachen* Belegung das einer *Doppel*belegung mit dem Moment $\varphi(s)$ zu verwenden, d. h. den Ausdruck

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \varphi(s) \frac{\partial}{\partial n} \lg \left(\frac{1}{r(s; x, y)}\right) ds,$$

wo $\frac{\partial}{\partial n}$ die partielle Ableitung in der zu C normalen Richtung bedeutet; in diesem Falle ist nämlich auf Grund der bekannten Sprungrelationen der Wert, den v bei der Annäherung an den Randpunkt σ von innen her annimmt,

$$v(\sigma) = \frac{1}{2}\varphi(\sigma) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \varphi(s) \frac{\partial}{\partial n} \lg \left(\frac{1}{r(s; x, y)}\right) ds;$$

soll also $v(\sigma)$ gleich dem vorgegebenen $f(\sigma)$ sein, so hat $\varphi(s)$ in heutiger Sprechweise einer Integralgleichung *zweiter* Art zu genügen. Für *diese* gelingt *Beer* im Anschluß an die *W. Thomson*sche Methode der elektrischen Bilder (1845; vgl. Encykl. II A 7 b, *Burkhardt-Meyer*, Nr. **16**, Fußn. [113])) ein formaler Ansatz (vgl. Nr. **3**), der auf die Integralgleichung *erster* Art nicht anwendbar wäre, und den *C. Neumann* dann zu seiner Theorie des arithmetischen Mittels[9]) ausgestaltet hat.

Immerhin waren dies stets nur Integralgleichungen mit *speziellen* Kernen. Es war daher ein Zeichen von seltenem Ahnungsvermögen, als 1887 *P. du Bois-Reymond*[10]) auf die *allgemeine* Funktionalgleichung vom Typus (J) hinwies, auf die ihn schon vor 35 Jahren der Physiologe *A. Fick* aufmerksam gemacht habe und die ihm in den Anwendungen immer wieder begegnet sei. „Weder die Frage," schließt er seine Bemerkung, „wie weit das Problem ein bestimmtes sei, noch seine Klassifikation, da es doch an das Problem der Differenzenglei-

---

9) *C. Neumann,* Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Leipzig (Teubner) 1877, XVI u. 368 S.; vgl. im übrigen Encykl. II A 7 b (*Burkhardt-Meyer*), Nr. **27**.

10) *P. du Bois-Reymond,* J. f. Math. 103 (1888), p. 204—229. Bei dieser Gelegenheit (p. 228 f.) hat *du Bois-Reymond* zuerst den Namen „Integralgleichungen" gebraucht, den *Hilbert* hernach von ihm übernommen hat.

chungen sich anzuschließen scheint, sind, soviel ich weiß, bis jetzt erörtert worden".

Für die weitere Entwicklung der Theorie war es von wesentlicher Bedeutung, daß sich in einem scheinbar ganz anderen Gebiet, dem der *unendlichen Determinanten*, seit 1886 ein entsprechender Gedanke durchsetzte.[11]) Bis dahin waren mancherlei Versuche unternommen worden, unendlichviele lineare Gleichungen nach dem Muster der Determinantentheorie zu behandeln; sie hatten aber zu keinen Ergebnissen von irgendwelcher Tragweite geführt oder waren im Formalen stecken geblieben.

Erst als *G. W. Hill*[12]), *H. Poincaré*[13]) und *Helge von Koch*[14]), aneinander anknüpfend, dazu übergingen, die Einer in der Diagonale in Evidenz zu setzen und unendliche Determinanten vom Typus

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot \\ a_{21} & 1+a_{22} & a_{23} & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & 1+a_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

zu betrachten, bei denen $\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{\infty} |a_{\alpha\beta}|$ konvergiert, gelang der Aufbau einer Theorie, deren Sätze denen der Auflösungstheorie von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten vollständig analog waren. Deutlicher noch als bei den Integralgleichungen tritt auf diesem Gebiet hervor, daß es eine Konvergenzbedingung, also eine Angelegenheit der Analysis ist, die den Einern in der Diagonale ihre Bedeutung verleiht.

3. Die Entwicklung nach Iterierten (Neumannsche Methode). Der Erfolg, den die in Nr. 2 genannten Autoren gerade mit der Integralgleichung *zweiter* Art hatten, beruhte auf einer Methode, deren algebraisches Analogon merkwürdigerweise in der Theorie der linearen Gleichungen nicht zu seinem Recht gekommen war, wohl infolge der

11) Über die Anfänge der Entwicklung der Lehre von den unendlichvielen linearen Gleichungen, deren Darstellung aus dem Rahmen der an dieser Stelle zu gebenden Genesis der Integralgleichungstheorie herausfallen würde, vergleiche man die Vorbemerkung zu II C und die daran anschließende Nr. **17**.

12) *G. W. Hill,* On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, Cambridge (Mass.) 1877, abgedruckt in Acta math. 8 (1886), p. 1—36.

13) *H. Poincaré*, S. M. F. Bull. 14 (1886), p. 77—90.

14) *H. v. Koch,* Öfvers. Vetensk. Ak. Förh. Stockholm 47 (1890), p. 109—129, 411—431; Acta math. 16 (1892), p. 217—295; für die weiteren Arbeiten über diesen Gegenstand sei hier nur auf das Referat von *H. v. Koch* (s. Literatur C 5) verwiesen; vgl. im übrigen Nr. **17**.

Abneigung vieler Algebraiker gegen die Anwendung unendlicher Prozesse im Bereiche der Arithmetik. Diese Methode war nichts anderes als eine Anwendung der allgemeinen Idee der *sukzessiven Approximation*, wie sie bei beliebigen, auch nichtlinearen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen geübt wird[15]), auf die Gleichung (J), bei der sie sich besonders übersichtlich gestaltet. Man findet in der Literatur zwei verschiedene Arten, sie darzustellen; bei der Wichtigkeit der Methode für die gesamte Theorie der Integralgleichungen wird es zweckmäßig sein, beide Darstellungsformen hier aufzuführen.

Die *eine* Darstellung bildet aus der gegebenen Funktion $f(s)$ *sukzessive* die Funktionen

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_0(s) = f(s), \quad \varphi_1(s) = f(s) - \int_a^b K(s,t)\,\varphi_0(t)\,dt, \ldots \\ \varphi_n(s) = f(s) - \int_a^b K(s,t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots); \end{cases}$$

aus ihr ist unmittelbar ersichtlich, daß, falls die Funktionen $\varphi_n(s)$ gleichmäßig gegen eine Funktion $\varphi(s)$ konvergieren, diese der Integralgleichung (J) genügt.

Die *andere* Darstellung bildet, indem sie ebenfalls von der gegebenen Funktion $f(s)$ ausgeht, durch „*Iteration*" einer Integraloperation die Funktionen:

$$(5\text{a})\quad \begin{cases} f_1(s) = -\int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt, \quad f_2(s) = -\int_a^b K(s,t)\,f_1(t)\,dt, \ldots \\ f_n(s) = -\int_a^b K(s,t)\,f_{n-1}(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

und aus diesen sodann die unendliche Reihe

$$(5\text{b})\qquad \varphi(s) = f(s) + f_1(s) + f_2(s) + \cdots$$

(*Entwicklung nach Iterierten*). Daß diese, wofern sie gleichmäßig konvergiert, die Integralgleichung (J) befriedigt, ergibt sich daraus, daß $\varphi_n(s)$ ihre n^{te} Partialsumme ist.[16])

Liouville war wohl der erste, der diese Methode — bei der in Nr. 2 erwähnten Gelegenheit[7]) — auf eine Integralgleichung 2. Art angewendet hat. Die spezielle Natur seines Kernes erlaubte es ihm,

15) *A. Cauchy*, Paris C. R. 11 (1840), p. 730 = Oeuvres (1) 5, p. 391ff.; vgl. im übrigen hierzu Encykl. II A 4a (*Painlevé*), Nr. 9 und die Ergänzungen in der französ. Ausg. II 15, Nr. 9 (*Painlevé*).

16) Die Rechnung, die dies verifiziert, ist die gleiche wie beim Beweise des Satzes von der *geometrischen Reihe*, nur daß statt Potenzen einer Zahl Iterationen einer Integraloperation auftreten. *Diese Analogie läßt den einfachen Sinn der Methode am besten hervortreten;* genaueres s. in Nr. 24a.

die gleichmäßige Konvergenz von (5b) durch explizite Rechnung zu erweisen.

Der in Nr. 2 erwähnte formale Ansatz von *A. Beer*[8]) ist ebenfalls nichts anderes als die Anwendung des Prozesses (4) auf die Funktionalgleichung, in die *Beer* sein potentialtheoretisches Problem umgeformt hatte. Es wird danach klar, daß *Beer*s Versuch erst dadurch die richtige Wendung erhielt, daß er es verstand, das Problem statt auf eine Integralgleichung *erster* Art, die für eine Anwendung der Entwicklung nach Iterierten keine Handhabe bieten würde, auf eine Integralgleichung *zweiter* Art zurückzuführen. Die *Konvergenz* dieses Verfahrens hat *Beer* allerdings völlig unerörtert gelassen. Es ist das Verdienst von *C. Neumann*[9]), diese Lücke ausgefüllt und auf der Grundlage des *Beer*schen Ansatzes, wenigstens für den Fall konvexer Bereiche, eine wirkliche Theorie errichtet zu haben. Die Schwierigkeit war dabei, daß das *Beer*sche Verfahren in Wahrheit nicht ohne weiteres konvergiert und daß *C. Neumann* erst eine Änderung des formalen Apparates entdecken mußte, die die Durchführung des Konvergenzbeweises ermöglicht. Die Untersuchungen von *H. Poincaré*[28]) (vgl. Nr. 5, p. 1354) haben hernach gezeigt, daß sich in der Notwendigkeit dieser Abänderung ein für die allgemeine Theorie der Integralgleichungen wichtiger Umstand dokumentiert hatte.

Eine andere, umfangreichere Klasse von Integralgleichungen 2. Art, bei denen (5b) stets gleichmäßig konvergiert, die sog.[17]) Volterraschen Integralgleichungen 2. Art, entdeckten erst *J. Le Roux*[18]) und *V. Volterra*[19]), der letztere unter ausdrücklicher Berufung auf die Analogie mit denjenigen linearen Gleichungssystemen, bei denen die s^{te} Gleichung nur die s ersten Unbekannten enthält:

$$K_{st} = 0, \text{ wenn } t > s,$$

bei denen also eine rekursive Auflösung stets möglich ist.[5]) Das Analogon dieser Gleichungssysteme sind diejenigen Integralgleichungen, bei denen

$$K(s, t) = 0, \text{ wenn } t > s,$$

d. h. deren Kern oberhalb der Diagonale des Definitionsquadrats verschwindet; man pflegt sie unter Fortlassung des Teiles des Integra-

---

17) Der Name geht auf *É. Picard* zurück; vgl. die thèse von *T. Lalesco,* Sur l'équation de Volterra, Paris 1908, 78 S., p. 2 = J. de math. (6) 4, p. 125—202.

18) *J. Le Roux,* Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, thèse, Paris 1894 = Ann. Éc. Norm. (3) 12 (1895), p. 227—316, insbes. p. 243 ff.

19) *V. Volterra,* Sulla inversione degli integrali definiti, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 5_1 (1896), p. 177—185, 289—300 und Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 139—178.

tionsintervalls, in dem K verschwindet, in der Form

$$(V) \qquad \varphi(s) + \int_a^s K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$

also mit *veränderlicher* oberer Grenze, zu schreiben. Bei diesen Integralgleichungen gelingt der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (5b) durch eine sehr einfache Abschätzung von $|f_n(s)|$ ohne irgendwelche weitere beschränkende Annahme (vgl. Nr. **23**a).

4. Der lösende Kern (Resolvente). An die *Fourier*sche Feststellung[20]), daß die beiden Formeln

$$(6) \quad \int_0^{+\infty} 2\cos 2\pi st\, \varphi(t)\, dt = f(s), \quad \int_0^{+\infty} 2\cos 2\pi st\, f(t)\, dt = \varphi(s) \quad (0 \leqq s < \infty)$$

einander gegenseitig bedingen, an die Bemerkung *Abels*[21]), daß

$$(7) \quad \int_0^s \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{s-t}} = f(s), \quad f(0) = 0, \quad \text{durch} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{s-t}} = \varphi(s)$$

gelöst wird, haben sich zahlreiche Umkehrungsformeln[22]) für bestimmte Integrale geknüpft. Es ist das Gemeinsame aller dieser Umkehrungsformeln, daß für eine Integralgleichung 1. Art eine Lösungsformel gegeben wird, die selbst wieder die Gestalt einer Integralgleichung 1. Art hat. *Volterra* führte diese Umkehrungsaufgaben, soweit in ihnen eine *veränderliche* obere Grenze auftritt (Volterrasche Integralgleichungen 1. Art) durch Differentiation nach der oberen Grenze auf Volterrasche Integralgleichungen 2. Art zurück und konnte alsdann für diese ganz allgemein statuieren, daß sie stets, und zwar durch eine Formel vom Typus der Volterraschen Integralgleichung 2. Art, gelöst werden können.[23])

---

20) *J. J. Fourier,* Preisschrift von 1811, Paris, Mém. de l'ac. R. des sc. de l'Institut de Fr. 4 (1819/20), p. 485 ff.; vgl. im übrigen Encykl. II A 12 (*H. Burkhardt*), Nr. **52** ff.

21) *N. H. Abel,* Solution de quelques problèmes à l'aide d'integrales définies, Werke (Christiania 1881) 1, p. 11—27 = Magazin for Naturv. 1 (1823); Résolution d'un problème de mécanique, Werke 1, p. 97—101 = J. f. Math. 1 (1826), p. 153—157. — *S. D. Poisson,* Second mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides, J. Éc. Polyt. 12 (1823), cah. 19, p. 249—403 hatte vordem schon (p. 299) eine *Abel*sche Integralgleichung aufgestellt, ohne ihre Lösung zu geben.

22) Wegen der Geschichte dieses Gegenstandes vgl. Encykl. II A 11 (*Pincherle*), Nr. **30**, sowie die eingehende Darstellung bei *Volterra*[19]).

23) *V. Volterra*[5]) [19]) (vgl. Nr. **23**a). Als erster hat wohl *J. Caqué,* J. de math. (2) 9 (1864), p. 185—222 den *Begriff* des lösenden Kernes bei denjenigen besonderen Volterraschen Integralgleichungen 2. Art herausgearbeitet, die aus den

Dieses Phänomen ergibt sich für *Volterra* unmittelbar aus der Methode der Entwicklung nach Iterierten. Er braucht bloß aus den rekursiven Formeln (5a) tatsächlich $f_n(s)$ durch $f(s)$ auszudrücken, die Ergebnisse in (5b) einzusetzen:

$$\varphi(s) = f(s) - \int_a^b K(s,t) f(t)\,dt + \int_a^b\int_a^b K(s,r) K(r,t) f(t)\,dr\,dt \mp \cdots$$

und

$$(8a) \quad \begin{cases} \mathsf{K}(s,t) = -K(s,t) + \int_a^b K(s,r) K(r,t)\,dr \\ \qquad - \int_a^b\int_a^b K(s,r_1) K(r_1,r_2) K(r_2,t)\,dr_1\,dr_2 \pm \cdots \end{cases}$$

zu setzen, um die Lösung (5b) in der Form

$$(8) \qquad \varphi(s) = f(s) + \int_a^b \mathsf{K}(s,t) f(t)\,dt,$$

also selbst wieder in der Form einer Integralgleichung 2. Art zu erhalten. — $\mathsf{K}(s,t)$ nennt man den *lösenden Kern* („Resolvente", „reziproke Funktion" u. dgl.)[24]).

5. Die Fredholmsche Entdeckung. Allmählich reifen, wie die vorangehenden Nummern bereits erkennen lassen, im Laufe des 19. Jahrhunderts die Methoden und die Formung des Problems der Integralgleichungslehre heran. Vor ihrer definitiven Konzeption aber erhielt die Theorie noch einen ganz anderen Impuls, und zwar durch *H. Poincaré.* Für ihn handelt es sich noch lediglich um die Randwertaufgaben der Potentialtheorie; ihre Formulierung als eine Gleichung vom Typus (J) und die in Nr. 3 gegebene Methodik übernimmt er von *C. Neumann.* Er bringt jedoch in ihre Behandlung noch wesentlich neue methodische Elemente hinein, die er kurz zuvor bei der Behandlung der schwingenden Membran erprobt hatte.

Auf diesen Ideenkreis der schwingenden Membran, der hernach für *Hilbert* entscheidend geworden ist, muß schon hier mit einigen Worten eingegangen werden, wenigstens soweit er für *Fredholm* maßgebend wurde. Die Gestalten einer in eine ebene Kontur C einge-

linearen homogenen Differentialgleichungen hervorgehen; Anlaß dazu gab hier die Aufgabe, die in Nr. 3 erwähnte *Liouville*sche Behandlung[7]) der linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung durch Entwicklung nach Iterierten auf beliebige Ordnung zu übertragen; vgl. auch *U. Dini,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 297—324; 3 (1899), p. 125—183; 11 (1905), p. 285—335. Auch *E. Beltrami,* Lomb. Ist. Rend. (2) 13 (1880), p. 327—337; Bologna Mem. (4) 8 (1887), p. 291—326 operiert in besonderen Fällen bereits mit dem lösenden Kern.

24) Eine Benennung tritt zuerst bei *Hilbert,* Grundzüge, p. 12 auf.

spannten Membran während einer Eigenschwingung oder, wie es im folgenden immer kurz heißen soll, die Eigenschwingungen der Membran, sind geometrisch gegeben durch diejenigen Funktionen, die für irgendwelchen Wert des konstanten Parameters λ der *homogenen* Differentialgleichung

$$(9) \qquad \Delta u + \lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u(x, y) = 0$$

genügen und längs C den Wert 0 haben, ohne identisch zu verschwinden. Nicht für jeden Wert von λ sind solche Lösungen vorhanden; vielmehr geben diejenigen diskreten Werte von λ, für die es der Fall ist, die Frequenzen von Grundton und Obertönen der Membran, sie sind, wie man kurz zu sagen pflegt, die „*Eigenwerte*" des Problems. *H. A. Schwarz*[25]) hatte die Existenz des Grundtons (d. h. des kleinsten Eigenwerts) bewiesen, durch eine Methode, die — ohne daß es ausgesprochen wird — nach dem in Nr. **1** skizzierten algebraischen Muster des Hauptachsentheorems arbeitet und später in dem Existenzbeweis von *E. Schmidt* für die Eigenwerte einer beliebigen Gleichung vom Typus (i_h) ihren allgemeinen Ausdruck gefunden hat (vgl. Nr. **33**a). An diese Arbeit von *Schwarz* knüpft *Poincaré* an, nachdem *É. Picard*[26]) den Existenzbeweis des ersten Obertones hinzugefügt hatte, und beweist die Existenz unendlich vieler Eigenwerte.[27]) Das wesentliche an *Poincaré*s Arbeit aber sind die Betrachtungen, in deren Rahmen er diesen Existenzbeweis führt. Er betrachtet die längs der Kontur C verschwindende Lösung der *unhomogenen* Differentialgleichung

$$(9\text{a}) \qquad \Delta u + \lambda u = f(x, y),$$

die physikalisch gesprochen die erzwungene Schwingung darstellt: und zwar betrachtet er diese Lösung bei gegebenem $f(x, y)$ in ihrer Abhängigkeit von λ, für das er nun auch komplexe Werte in Betracht zieht; es gelingt ihm, eine in bezug auf λ meromorphe Funktion $u(x, y; \lambda)$ anzugeben, die für alle Werte von λ, die nicht gerade Pole sind, eine Lösung ist, übrigens die einzige. Er betrachtet ihre Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung und erkennt in ihren Polen Eigenwerte, in den zugehörigen Residuen Eigenfunktionen des Problems;

25) *H. A. Schwarz*, Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, Acta soc. sc. fennicae 15 (1885), p. 315—362 = Festschr. zum 70. Geburtstag von Weierstraß = Ges. Abh. 1, p. 241 ff. — Vgl. hierzu und zum folgenden Encykl. II A 7c (*Sommerfeld*), Nr. **10** und II C **11** (*Hilb-Szász*), Nr. **12**.

26) *É. Picard*, Paris C. R. 117 (1895), p. 502—507.

27) *H. Poincaré*, Sur les équations de la physique mathématique, Palermo Rend. 8 (1894), p. 57—156.

und zwar beweist er, daß man, wenn auch nicht bei jedem willkürlich vorgegebenen $f(x, y)$, so doch bei passend gewähltem $f(x, y)$ dabei stets *sämtliche* Eigenwerte und Eigenfunktionen erhält. Für alle Werte λ, die nicht Eigenwerte sind, ist also das unhomogene Randwertproblem (9a) stets und nur auf *eine* Art lösbar, und zwar für *jedes* $f(x, y)$ rechterhand; andererseits ist für diejenigen Werte λ, die Eigenwerte sind, definitionsgemäß das homogene Randwertproblem (9) lösbar. Die Analogie mit dem in Nr. 1b angedeuteten Hauptachsentheorem der analytischen Geometrie wird nun leicht deutlich: Die Eigenwerte entsprechen den n Werten von λ, für die das homogene System (a_h) eine Lösung besitzt, also den n Wurzeln der Säkulargleichung (1) (Halbachsenquadrate); den Lösungen selbst entsprechen die Eigenfunktionen. Das unhomogene Randwertproblem (9a) entspricht dem unhomogenen Gleichungssystem

$$(a) \qquad \varphi_s - \lambda \sum_{t=1}^{n} k_{st}\varphi_t = f_s \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Nun lehrt die Determinantentheorie, daß das System (a) bei beliebigen rechten Seiten $f_1, \ldots, f_n$ stets eine und nur eine Lösung hat, falls λ keine jener n Wurzeln der Gleichung (1) ist; und zwar erscheint die Lösung dann als Quotient zweier Determinanten, die Polynome $(n-1)^{\text{ten}}$ bzw. n^{ten} Grades von λ sind, also als gebrochen rationale Funktion von λ, und zwar mit den ausgezeichneten λ-Werten als Polen und den Lösungen der homogenen Gleichungen als Residuen. Der Komplex der von Poincaré entdeckten Tatsachen erweist sich also als das unmittelbare Analogon der geläufigen Eigenschaften der beim Hauptachsenproblem auftretenden linearen Gleichungssysteme und ihrer Determinanten.

Von dieser Basis aus trat *Poincaré* an die „méthode de *Neumann*" heran. Er begann damit, auch hier den Parameter λ einzuführen, der sich in diesem Falle durch die physikalische Natur der Sache nicht dargeboten hatte. Er betrachtete also, wofern man den von *C. Neumann* benutzten Kern mit $B(s, t)$ bezeichnet, die Gleichung vom Typus (J):

$$(10) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b B(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$

die für $\lambda = -1$ in die *Neumann*sche Gleichung übergeht. Für $\lambda = +1$ ergab sie die ebenfalls von *Neumann* betrachtete Gleichung für die Randwertaufgabe des Außengebiets, und beide Aufgaben waren also vermöge des Parameters λ in der einen Formel (10) zusammengefaßt. Zugleich ergab sich die Entwicklung nach Iterierten (5) nach Ein-

führung des Parameters λ mit einer Natürlichkeit, der kein Kunstgriff mehr anhaftete. Setzt man nämlich die Lösung von (10), die naturgemäß von λ abhängen muß, als Potenzreihe nach Potenzen von λ an,

$$(11) \qquad \varphi(s) = f_0(s) + \lambda f_1(s) + \lambda^2 f_2(s) + \cdots,$$

so ergibt die Einführung dieses Ansatzes in (10) und die Vergleichung der einzelnen Potenzen von λ auf beiden Seiten

$$(11\text{a}) \quad f_0(s) = f(s),\ f_1(s) = \int_a^b B(s,t) f_0(t)\,dt,\ f_2(s) = \int_a^b B(s,t) f_1(t)\,dt, \ldots,$$

also genau die Entwicklung (5) von Nr. 3. Deren Konvergenz war hier für $|\lambda| < 1$ leicht zu gewinnen; aber auf $\lambda = \pm 1$ kam es gerade an.

Und nun übertrug *Poincaré*[28]) jene Untersuchungen über die schwingende Membran auf dieses Problem, dessen Kern $B(s, t)$ keine symmetrische Funktion mehr war. So wichtig war ihm die Erkenntnis des Sachverhalts, daß er sogar die *Existenz* der Lösung der Randwertaufgabe (auf Grund anderer Methoden, etwa des alternierenden Verfahrens von *Schwarz* oder seiner eigenen méthode de balayage) bereits als feststehend annahm, ja sogar schließlich zu heuristischen Methoden überging, um die Konvergenz der *Neumann*schen Methode des arithmetischen Mittels *ohne* Voraussetzung der Konvexität der Randkurve zu sichern und darüber hinaus den weiteren Tatbestand klarzulegen: den meromorphen Charakter der Lösung und das Analogon aller der weiteren bei der schwingenden Membran erörterten Dinge. Insbesondere stellte sich dabei heraus, daß die Lösung bei $+1$ ihren absolut kleinsten Pol hat; damit fand es seine Aufklärung, weshalb die ursprüngliche *Beer*sche Entwicklung (5) nicht stets konvergiert und erst der Modifikation von *C. Neumann* bedurfte, von der in Nr. 3, p. 1349, die Rede war.

Diese Untersuchungen *Poincarés* sind es, von denen *J. Fredholm*[29]) seinen Ausgang genommen hat. Das einzige Resultat, das *Fredholm* außerdem in diesem Bereich vorfand, war die Theorie der

28) *H. Poincaré,* Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, Paris C. R. 120 (1895), p. 347—352; Acta math. 20 (1896), p. 59—142; vgl. auch Théorie du potentiel Newtonien, Paris 1899, p. 260ff.

29) *J. Fredholm,* Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet, Öfvers. af Kongl. Vetensk. Ak. Förh. Stockholm 57, Nr. 1 (10. Jan. 1900), p. 39—46; Sur une classe de transformations fonctionelles, Paris C. R. 134 (27. Jan. 1902), p. 219—222, présentée par M. *H. Poincaré*; Sur une classe d'équations fonctionelles, ebenda (30. Juni 1902), p. 1561—1564; Sur une classe d'équations fonctionelles, Acta math. 27 (1903), p. 365—390.

*Volterra*schen Integralgleichung (vgl. Nr. 3). Fügt man auch in diese Theorie den Parameter λ ein, so besagt sie, daß hier die Lösung eine beständig konvergente Potenzreihe, also nicht nur eine meromorphe, sondern sogar eine ganze transzendente Funktion von λ ist. Paßte sie also auf der einen Seite aufs beste mit dem *Poincaré*schen Tatsachenkomplex zusammen, so hatte sie auf der anderen Seite vor ihm den Vorzug, nicht mehr an den Besonderheiten eines so speziellen Problems zu haften, wie es die potentialtheoretische Randwertaufgabe war; denn so bewußt *Poincaré* die Analogie mit den allgemeinen algebraischen Tatsachen gewesen war, so stark waren doch seine Erörterungen auf die spezielle Ausdrucksweise der Potentialtheorie eingestellt. Insbesondere ließ die Volterrasche Theorie ein Moment der Analogie mit der Auflösung der linearen Gleichungssysteme besser hervortreten. Das in Nr. 4 geschilderte Phänomen des lösenden Kernes, d. h. die Idee, eine lineare Integralgleichung durch eine Formel aufzulösen, die selbst wieder die Gestalt einer linearen Integralgleichung hat, hatte sich naturgemäß bei den Volterraschen Untersuchungen dargeboten, da hier explizite *Integral*gleichungen und nicht, wie bei Neumann und Poincaré, *Differential*gleichungen zu behandeln waren. In Wahrheit ist dieses Phänomen das Analogon einer für *jedes* System von n unhomogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten geltenden Tatsache, daß nämlich die bekannte Determinantenformel für die Auflösung eines solchen Systems die Unbekannten selbst wieder als lineare homogene Verbindungen der gegebenen rechten Seite $f_1, \ldots, f_n$ darstellt.

Aus diesem Komplex von Einzeltatsachen hat *Fredholm* die Konzeption der allgemeinen Gleichung (J) und die Idee ihrer Behandlung nach dem Muster der Determinantentheorie entnommen[30]; an diesem Komplex von Einzeltatsachen orientiert, gewinnt er die Lösung von (J) oder vielmehr von der Gleichung

$$(i) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b k(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$

die aus (J) durch Einfügung des Parameters λ hervorgeht, als Quotienten zweier ganzen transzendenten Funktionen von λ. Indem er nicht nur die Tatsachen, sondern auch die Methoden der Determinantentheorie formal nachbildet, gelangt er ganz im Rahmen dieser elementaren Operationsmittel und ohne Benutzung der bei *Poincaré* entscheidenden funktionentheoretischen Schlußweise zu einer *einfachen* Theorie von *allgemeinem* Charakter.

30) Man vergleiche *Fredholms* eigene Darstellung Literatur C 6, p. 95.

Als Muster steht ihm bei der Durchführung dieses Programms die *v. Kochsche Theorie der unendlichen Determinanten*[14]) vor Augen. *H. v. Koch* war in diesen Untersuchungen vielfach von der Formel ausgegangen:

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} 1+K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ K_{n1} & \cdots & 1+K_{nn} \end{vmatrix} = 1 + \sum_{s=1}^{n} K_{ss} + \frac{1}{2!}\sum_{s_1=1}^{n}\sum_{s_2=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{s_1 s_1} & K_{s_1 s_2} \\ K_{s_2 s_1} & K_{s_2 s_2} \end{vmatrix} + \cdots$$

Aus dieser kann man, indem man n wachsen läßt, die Konvergenzverhältnisse der unendlichen Determinante besonders gut erschließen. *Fredholm* hatte nun den Gedanken, dieselbe Formel (12) zum Ausgangspunkt eines ganz andersartigen Grenzüberganges zu machen, als *H. v. Koch.* Indem er sie nämlich auf das System (A) von Nr. **1** anwendete und den dort angedeuteten Grenzübergang vollzog, erhielt er die Bildung

$$(13)\qquad \Delta = 1 + \int_a^b K(s,s)\,ds + \frac{1}{2!}\int_a^b\!\!\int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) \end{vmatrix} ds_1\,ds_2 + \cdots$$

als das Analogon der Determinante aus der Algebra und entsprechende Analoga der ersten und höheren Unterdeterminanten.[29])

Für den Beweis der Konvergenz von (13) reichte der Apparat der Konvergenzbetrachtungen der *Poincaré-Koch*schen Determinantentheorie nicht aus. Es war daher wesentlich, daß *Fredholm* in dem sog. *Hadamardschen Determinantensatz* dasjenige Hilfsmittel vorbereitet fand, das hier angemessen war. Derselbe besagt, daß für das Quadrat des absoluten Betrages einer Determinanten A mit den Elementen a_{pq} die Ungleichung

$$(14)\qquad |A|^2 \leqq (|a_{11}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2) \ldots (|a_{n1}|^2 + \cdots + |a_{nn}|^2)$$

gilt, oder, geometrisch zu reden, daß unter allen (n-dimensionalen) Parallelepipeden von gegebenen Kantenlängen das rechtwinklige das größte Volumen hat.[31]) Die absolute Konvergenz von (13) und allen

31) *J. Hadamard,* Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant, Paris C. R. 116 (1893), p. 1500—1501; Résolution d'une question relative aux déterminants, Darb. Bull (2) 17 (1893), p. 240—246. Zur Geschichte des Hadamardschen Determinantensatzes sei das folgende zusammengestellt. Schon 1867 streift *J. J. Sylvester* die Angelegenheit, indem er Phil. Mag. (4) 34, p. 461—475 sich mit den „invers-orthogonalen" Matrizen beschäftigt, bei denen die Unterdeterminanten $A_{\alpha\beta}$ nicht, wie bei den orthogonalen, $= \varrho\, a_{\alpha\beta}$, sondern $= \frac{\varrho}{a_{\alpha\beta}}$ sind; er gelangt dabei zur Aufstellung solcher aus Einheitswurzeln gebildeten Matrizen, bei denen das Gleichheitszeichen des *Hadamard*schen Satzes erreicht ist, ohne daß er diesen kennt. Die Fragestellung *Hadamards* ist *Lord*

höheren Bildungen ergibt sich daraus unmittelbar durch Anwendung des *Cauchy*schen Konvergenzkriteriums. Der Ausbau der ganzen Theorie

Kelvin 1885 bekannt (nach Angabe von *Hadamard* in Literatur A 5, p. 50, Anm. 2; danach hat *Th. Muir* 1886 *Lord Kelvin* einen Beweis brieflich mitgeteilt); vgl. dazu auch *E. J. Nanson*, Mess. 31 (1901). Für *H. Minkowski* war der Satz im Zusammenhange seiner zahlentheoretischen Behandlung der definiten quadratischen Formen unmittelbar gegeben, und er hat ihn in seiner „Geometrie der Zahlen" (Leipzig 1896), p. 183, explizite als eine Folgerung aus der *Jacobi*schen Transformation der quadratischen Formen aufgeführt.

Eine Analyse des *Hadamard*schen Beweises nimmt *E. Fischer*, Archiv (3) 13 (1908), p. 32—40 vor, und schält als seinen Kern den einfach zu beweisenden Satz heraus, daß die adjungierte Form von einer definiten quadratischen Form selbst wieder definit ist. *W. Wirtinger*, Darb. Bull (2) 31 (1907). p. 175—179 = Monatsh. 18 (1907), p. 158—160, gibt einen Beweis mit Hilfe der Theorie der Maxima mit Nebenbedingungen, indem er das Maximum des Volumens bei festen Kantenlängen bestimmt; vgl. auch *Heywood-Fréchet*, Literatur A 5, p. 50 ff. Man kann denselben geometrischen Gedanken durch Schluß von $n-1$ auf n durchführen, ohne die Theorie der Maxima mit Nebenbedingungen heranzuziehen; dies tun *L. Tonelli*, Batt. G. 47 [(2) 16], p. 212—218; *G. Kowalewski*, Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen, Leipzig (Teubner) 1910, VIII u. 384 S., p. 378 f.; *W. Blaschke*, Arch. Math. Phys. (3) 20 (1913), p. 277—279 und *R. Courant*, Literatur A 11, p. 24. *O. Szász*, Math. és phys. lapok 19 (1910), p. 221—227 (ungar.) und Math.-naturw. Ber. aus Ung. 27 (1913), p. 172—180, und unabhängig davon *T. Boggio*, Darb. Bull. (2) 35 (1911), p. 113—116, halten nicht die Kanten fest, sondern wenden den Orthogonalisierungsprozeß so auf die n Kanten an, daß das Volumen bei den einzelnen Schritten des Prozesses stets das gleiche bleibt; geometrisch zu reden, ersetzen sie die Kanten der Reihe nach durch die zugehörigen Höhen, die kleiner sind; algebraisch zu reden, ist der Orthogonalisierungsprozeß übrigens nichts anderes als die *Jacobi*sche Transformation. Ähnlich verfährt *A. Kneser*, Literatur A 4, § 55 bzw. § 61 der 2. Auflage. *J. Schur*, Math. Ann. 66 (1909), p. 496 f. erhält den *Hadamard*schen Satz als Corollar zu seinen Sätzen über die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der Matrix (a_{pq}) und verallgemeinert ihn dahin, daß jede elementarsymmetrische Funktion der Größen $|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2 \leq$ der entsprechenden der n Klammergrößen ist, die in (14) rechterhand auftreten und die Quadrate der Kantenlängen bedeuten; der *Hadamard*sche Satz ergibt sich speziell für die letzte elementarsymmetrische Funktion, insofern $\lambda_1 \ldots \lambda_n = |A|$ ist, also $|A|^2 = |\lambda_1|^2 \ldots |\lambda_n|^2$; weiteres *J. Schur*[163]), p. 17 f. Eine andere, von *E. J. Nanson* [the educational times 55 (1902), p. 517, question 15244] behauptete Verallgemeinerung beweist *O. Szász*, Monatsh. Math. Phys. 28 (1917), p. 253—257. Vgl. außerdem *T. Hayashi*, Tokyo Math. Ges. (2) 5 (1909), p. 104—109 und Batt. G. 48 [(3) 1] (1910), p. 253—258; *L. Amoroso*, Batt. G. 48 [(3) 1] (1910), p. 305—315; *Th. Muir*, South Africa R. Soc. Trans. 1 (1910), p. 323—334; *T. Kubota*, Tôhoku J. 2 (1912), p. 37—38. — Eine Reihe von Arbeiten beschäftigt sich mit der Frage, für welche n es Determinanten aus *reellen* Elementen gibt, bei denen die *Hadamard*sche Ungleichung in der Formulierung von Nr. 9, p. 1371, zur Gleichung wird: *E. W. Davis*, J. Hopkins Circ. 1882, p. 22—23 = Amer. Math. Soc. Bull. (2) 14 (1907), p. 17—18; *U. Scarpis*, Lomb. Ist. Rend. 31 (1898), p. 1441—1446 für $n = 2^\lambda q(q-1)$, wo $q-1$ Primzahl; *E Pascal*, Die Determinanten, Leipzig 1900, § 53, p. 180—184; *F. R. Sharpe*, Amer. Math. Soc. Bull. (2) 14 (1907), p. 121—123 für $n = 12, 20$.

vollzog sich nun nach dem Muster der elementaren Determinantentheorie und lieferte in der Tat den dem Algebraischen entsprechenden Sätzekomplex in seinem vollen Umfang.

Führt man nachträglich den Parameter λ hier ein, indem man $-\lambda k(s,t)$ für $K(s,t)$ einsetzt, so wird (13) eine Potenzreihe, die nach Potenzen von λ fortschreitet und deren beständige Konvergenz unmittelbar gegeben ist, also eine ganze transzendente Funktion $\delta(\lambda)$. Damit waren insbesondere auch die *Poincaré*schen Tatsachen und Vermutungen allgemein dargetan.

6. Hilberts Eigenwerttheorie. Aus dem großen Bezirk der Analysis, in dem die linearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik in einer bunten Mannigfaltigkeit von Einzelproblemen mit einer Fülle individueller Kunstgriffe behandelt werden, hatte *Fredholm* also einen bestimmten Aufgabentypus — den der Randwertaufgaben im strengen Sinne des Wortes — herausgegriffen und von diesem ausgehend eine Theorie gebildet, die nicht nur äußerlich dem Vorbilde der Algebra nachgeformt war, sondern auch innerlich die Merkmale einer organischen Problemstellung und einer systematisch-methodischen Behandlung in sich trug. Damit war aber nur ein Bruchteil dieses vielgestaltigen Bezirks erfaßt. Der Encyklopädieartikel von *A. Sommerfeld* (Encykl. II A 7c) und *H. Burkhardts* umfangreicher Bericht über die oszillierenden Funktionen[4]) zeigen deutlich die Situation von 1900: über den Schwingungsproblemen lagert in unbestimmter Gestalt die Idee der formalen Analogie mit dem Hauptachsenproblem der Algebra, ohne sich konkret als allgemeingültiges und beweisendes Prinzip fassen zu lassen und ohne vorläufig irgendeinen Anklang an eine Integralgleichung zu enthalten, während zu der gleichen Zeit im Bereich der Randwertaufgaben *C. Neumann*, *Volterra* u. a. Integralgleichungen vom Typus (J) längst hingeschrieben und mit ihnen operiert hatten.

Der *Typus dieser Schwingungsprobleme* wird am besten an der Hand eines Beispiels deutlich, etwa desjenigen der schwingenden Membran, von dem in Nr. 5 in dem dort erforderlichen Umfang die Rede war. Hier, wo es erwünscht ist, an der Hand eines solchen Beispiels den *vollen* Sachverhalt kennenzulernen, wird es bequemer sein, anstatt von der zweidimensionalen schwingenden Membran von ihrem eindimensionalen Analogon, der schwingenden Saite, zu sprechen, bei der sich alles expliziter übersehen läßt. Die Form einer an beiden Enden eingespannten Saite während irgendeiner (erzwungenen) Schwingung wird bestimmt durch eine Funktion $u(s)$, die für $a \leqq s \leqq b$ der *unhomogenen* Differentialgleichung

(15) $$\frac{d^2u}{ds^2} + \lambda u(s) = f(s)$$

genügt, sowie den beiden Randbedingungen

(15a) $$u(a) = 0, \qquad u(b) = 0.$$

Insbesondere sind hier die (freien) Eigenschwingungen der Saite durch diejenigen Funktionen gegeben, die für irgendeinen Wert des konstanten Parameters λ der *homogenen* Differentialgleichung

(15b) $$\frac{d^2u}{ds^2} + \lambda u(s) = 0$$

und zugleich (15a) genügen, ohne jedoch identisch zu verschwinden. Solche Lösungen gibt es auch hier nicht für jeden Wert von λ, sondern nur für eine Folge diskreter, reeller, ins Unendliche wachsender Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, die „ausgezeichneten Parameterwerte" oder „Eigenwerte", die sich physikalisch durch die Frequenzen (Tonhöhen) der betreffenden Eigenschwingungen deuten; die zugehörigen Lösungen, die „Eigenfunktionen", mögen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ heißen.[32]) Der physikalischen Grundtatsache, daß man eine willkürliche Schwingung als Superposition von Eigenschwingungen auffassen kann, entspricht mathematisch die Aufgabe, eine beliebige, nur gewissen Rand- und Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion $f(s)$ in eine Reihe der Form

(16) $$f(s) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_\alpha \varphi_\alpha(s)$$

zu entwickeln (Fouriersche Reihe). Den Ausgangspunkt für die mathematische Behandlung dieser Aufgabe bildet die sog. „Orthogonalitätseigenschaft" der Eigenfunktionen

(17) $$\int_a^b \varphi_\alpha(s)\,\varphi_\beta(s)\,ds = e_{\alpha\beta}, \text{ d. h. } = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta; \end{cases}$$

aus ihr ergibt sich in der bekannten Weise, daß

(18) $$c_\alpha = \int_a^b f(s)\,\varphi_\alpha(s)\,ds$$

anzusetzen ist. Die Schwierigkeiten, die der vollen mathematischen Durchführung dieses Ansatzes im Sinne strenger Konvergenzbetrachtungen entgegenstehen, sind bekannt; sie sind das Kennzeichen dieses ganzen Gebietes.

Die *Analogie dieser Tatsachen mit dem Hauptachsenproblem der Algebra* ist jetzt leicht zu schildern. Es ist diejenige Analogie, von der

---

32) Eine elementare Ausrechnung ergibt für den vorliegenden Fall, wenn $a = 0$, $b = 1$ genommen wird, $\lambda_n = n^2\pi^2$, $\varphi_n(s) = \sqrt{2}\sin n\pi s$.

in Nr. 1c kurz erwähnt wurde, daß *D. Bernoulli* sie schon gekannt habe. Sie ist übrigens nicht zu verwechseln mit der in Nr. 1b geschilderten Analogie zwischen dem Hauptachsenproblem der Algebra und der Eigenwerttheorie der Integralgleichungen; von solchen ist in dem hier zu schildernden Zusammenhang noch nicht die Rede. *D. Bernoulli*[2]) gelangte vom Schwingungsproblem zu einem System vom Typus (a) dadurch, daß er die schwingende Saite in ein System von n schwingenden Massenpunkten auflöste. Hierbei entsprechen zunächst in derselben Weise wie bei der schwingenden Membran die Eigenwerte den Halbachsenquadraten, d. h. den n Werten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, für die die Determinante von (a) verschwindet, die Eigenfunktionen $\varphi_\alpha(s)$ den Richtungskosinus der n Hauptachsen $\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha n}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, die oben als Koeffizienten der Transformationsformel (2a) auftraten. Darüber hinaus steht die Orthogonalitätsrelation (17) der Tatsache gegenüber, daß die Hauptachsen zu je zweien aufeinander orthogonal sind:

$$(\overline{17}) \qquad \sum_{s=1}^{n} \varphi_{\alpha s}\varphi_{\beta s} = e_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

Um endlich auch das Analogon des Entwicklungssatzes zu erkennen, muß man sich des Satzes aus der Lehre von den rechtwinkligen Koordinatentransformationen erinnern, daß die Gleichungen $(\overline{17})$ stets auch das Bestehen der anderen

$$(\overline{17}\,\text{a}) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha s}\varphi_{\alpha t} = e_{st} \qquad (s, t = 1, \ldots, n)$$

zur Folge haben; man muß sodann[33]) die Gleichungen $(\overline{17}\,\text{a})$ für $t = 1, \ldots, n$ hingeschrieben denken, mit n willkürlichen Zahlen $f_1, \ldots, f_n$ multiplizieren und addieren:

$$\sum_{t=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha s}\varphi_{\alpha t}\Big) f_t = \sum_{t=1}^{n} e_{st} f_t = f_s$$

oder

$$(\overline{17}\,\text{b}) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha s}\Big(\sum_{t=1}^{n} \varphi_{\alpha t} f_t\Big) = f_s,$$

und man muß schließlich

$$(\overline{18}) \qquad c_\alpha = \sum_{t=1}^{n} \varphi_{\alpha t} f_t$$

---

33) Die Analogie wird an dieser Stelle ein wenig verdunkelt durch den Umstand, daß die Reihe $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_\alpha(s)\varphi_\alpha(t)$ nicht ohne weiteres konvergiert, so daß das unmittelbare analytische Analogon zu $(\overline{17}\,\text{a})$ fehlt. Die im Text vorgenommene Umformung umgeht die hierin liegende faktische Schwierigkeit, indem sie $(\overline{17}\,\text{a})$ durch die algebraisch damit äquivalente Tatsache $(\overline{17}\,\text{b})$ ersetzt, die ihrerseits eine Übertragung auf die Analysis unmittelbar gestattet.

setzen, um darin und in

$$(\overline{16}) \qquad f_s = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \varphi_{\alpha s}$$

das Analogon von (18) und (16) zu finden.

Noch um 1900 besteht also die Lehre von den Schwingungen aus einem Bündel solcher Theorien wie der eben skizzierten, die alle den Tatbestand des Hauptachsentheorems, wie man es kurz nennen kann, mehr oder weniger vollkommen aufweisen. Das umfassendste Beispiel war die *Poincaré*sche Theorie der schwingenden Membran.[27]) In Nr. 5 war von ihr nur das herausgegriffen, was für die *Fredholm*sche Entdeckung wesentlich geworden ist; in Wahrheit hat *Poincaré* den vollen für die schwingende Saite hier geschilderten Sachverhalt für die schwingende Membran, für die er unvergleichlich schwerer zu erschließen ist, zur Geltung gebracht, allerdings gerade den Entwicklungssatz zum Teil nur auf der Grundlage heuristischer Überlegungen.[34])

Immerhin bewegten sich alle diese Überlegungen *Poincarés* ebenso wie in seiner Arbeit über die *Neumann*sche Methode[28]) im Rahmen des vorliegenden Einzelfalles. Nachdem aber *Fredholm* mit seiner Auflösungstheorie das Muster *einer* allgemeinen, nach algebraischem Vorbild gearbeiteten Theorie aufgestellt hatte, schuf *D. Hilbert*[35]) *eine neue,*

34) Aus der umfangreichen Geschichte der Entwicklungssätze sind hier nur diejenigen Momente herausgehoben worden, die für die Entstehung der Integralgleichungstheorie und ihren algebraischen Grundgedanken sich als maßgebend erwiesen haben. Die Entstehung der Integralgleichungstheorie vollzieht sich sowohl bei *Fredholm* in der Auflösungstheorie wie auch hier bei *Hilbert* in der Eigenwerttheorie unter bewußter Abstreifung der funktionentheoretischen Methodik, die in *Poincarés* Untersuchungen eigentlich im Vordergrund steht. Die Linie dieser funktionentheoretischen Forschungsweise *Poincarés* wird unabhängig von der Entwicklung der Integralgleichungslehre und etwa gleichzeitig mit ihr von *S. Zaremba, W. Stekloff, A. Kneser* u. a. in zahlreichen Arbeiten über Differentialgleichungen der mathematischen Physik fortgeführt. Erst an einer späteren Stelle hat die Integralgleichungstheorie ihrerseits diese Methodik in ihren Bereich einbezogen (vgl. Nr. 33c, 39, 43a, 4). Deshalb begnügt sich die hier gegebene Darstellung, die nur die *Entstehungs*geschichte der Integralgleichungstheorie skizzieren will, mit einem solchen kurzen Hinweis auf die angeführten Untersuchungen, und sie konnte dies um so eher, als sich in Encykl. II C 11 (*Hilb-Szász*), Nr. 12 ein zusammenhängender historischer Überblick darüber findet.

35) *D. Hilbert,* 1. Mitteil., Gött. Nachr. 1904, p. 49—91 = Grundzüge, 1. Abschnitt; 2. Mitteil., Gött. Nachr. 1904, p. 213—259 = Grundzüge, 2. Abschnitt. Vorausgegangen waren Veröffentlichungen in den Göttinger Dissertationen von *O. D. Kellogg,* 1902, IV u. 43 S. [vgl. auch denselben[55])], *A. Andrae,* 1903, 111 S., *Ch. M. Mason,* 1903, IV u. 75 S., nachdem *Hilbert* seine Theorie in Vorlesungen und Seminaren seit dem Winter 1901/02 vorgetragen hatte.

entsprechend allgemeine analytische Theorie nach dem Vorbild der Hauptachsentheorie der Algebra, eben diejenige, die in Nr. **1** b geschildert und als „Eigenwerttheorie der Integralgleichung mit symmetrischem Kern" bezeichnet worden ist. Zugleich zeigt er, wie die Lehre von den Schwingungen in die Eigenwerttheorie einzuordnen ist: die *Green*sche Funktion, das bekannte Haupthilfsmittel der Potentialtheorie, dessen auch *H. A. Schwarz* und *Poincaré* sich dauernd bedient hatten, erwies sich von diesem Standpunkt eben als der Kern derjenigen besonderen Integralgleichung, in die sich die Theorie der schwingenden Membran umsetzen läßt.[36])

Für den *Beweis der Sätze seiner Eigenwerttheorie* stützte sich *Hilbert* — anders als *Fredholm* bei seiner Auflösungstheorie — auf den in Nr. **1** a geschilderten Grenzübergang. Wenn ihm der Beweis gelang, so liegt dies nicht zum wenigsten daran, daß er nicht direkt auf den Entwicklungssatz ausging, der im Spezialfall der Fourierschen Reihe durch die Formel (16) gegeben ist, sondern den Grenzübergang genau an diejenige Formulierung des Hauptachsentheorems anschloß, die sich aus der Gleichung (2b) von Nr. **1** ergibt. Das analytische Äquivalent davon im Sinne der am Ende von Nr. **1** a angegebenen allgemeinen Analogisierungsregel ist die Formel

$$\int_a^b\int_a^b k(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{y_\alpha^2}{\lambda_\alpha}, \tag{19}$$

wo

$$y_\alpha = \int_a^b \varphi_\alpha(t)\,x(t)\,dt \tag{19a}$$

ist, und $\varphi_\alpha(t)$ die zum Eigenwert λ_α gehörige Eigenfunktion. Diese Formel, die in den Überlegungen von *H. A. Schwarz* und *Poincaré* nicht hervortritt, enthält einerseits den Schlüssel zu der gesamten Theorie: man kann aus ihr sowohl die Existenz sämtlicher Eigenwerte unmittelbar ablesen, als auch über den Entwicklungssatz, wie er sich in den Formeln (16) und (18) ausdrückt, genauen Aufschluß erhalten. Andererseits aber — und das ist das wesentlichste — gilt die Entwicklung (19) ohne jede Einschränkung über die Natur des

36) Es war nicht unwesentlich, daß *H. Burkhardt*, S. M. F. Bull. 22 (1894), p. 71—75, auf eine Anregung von *F. Klein* hin und mit Benutzung der Betrachtungsweise von *É. Picard* das Analogon der *Green*schen Funktion für den Fall eindimensionaler Schwingungsvorgänge (sich selbst adjungierte homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung) untersucht hatte. *Hilbert* fand darin das Hilfsmittel vor, um auch diese Schwingungsprobleme unmittelbar in Integralgleichungen umzuformen.

symmetrischen Kernes $k(s,t)$ und die willkürliche Funktion $x(s)$, die beide lediglich als stetig vorausgesetzt zu werden brauchen — im Gegensatz zu demjenigen Entwicklungssatz, der durch die Formeln (16), (18) gegeben ist.

Es sind zwei Hindernisse, die der unbeschränkten Gültigkeit der Entwicklungsformel (16) entgegenstehen. Das eine ergibt sich daraus, daß man auf Grund bekannter Tatsachen aus der Theorie der Fourierschen Reihen leicht einen stetigen Kern $k(s,t)$ und dazu eine stetige Funktion $f(s)$ zu konstruieren vermag, für die die Entwicklung (16) divergiert (vgl. Nr. **34** a). Das andere rührt daher, daß das Auftreten des Eigenwerts ∞, das im Algebraischen, ohne daß es oben ausdrücklich hervorgehoben wurde, weiter keine Ausnahmen verursacht — die dreidimensionale Fläche artet in diesem Falle in einen Zylinder oder, wenn *zwei* Eigenwerte unendlich werden, in ein Paar paralleler Ebenen aus —, bei der Integralgleichung besondere Schwierigkeiten in sich birgt, von denen in Nr. 7 zu reden sein wird. Es war daher eine entscheidende Wendung, daß *Hilbert* statt der Entwicklung (16), in die auch die Eigenfunktionen des Eigenwerts ∞ eingehen müßten, die Formel (19) in den Mittelpunkt stellte, in der jene Eigenfunktionen von selbst herausfallen.

Umgekehrt ist dabei auf den Entwicklungssatz (16) neues Licht gefallen, und er hat bei *Hilbert* seine definitive Gestalt gewonnen. Dieselbe ergab sich ohne weiteres aus dem konsequent vorgehaltenen algebraischen Muster. Beim Zylinder ist, wenn man von den unendlich langen Zylinderachsen absieht und nur die Hauptachsen *endlicher* Länge in Betracht zieht, die Formel $(\overline{16})$ nicht für beliebige $f_1, \ldots, f_n$ durch passende Wahl der c_α erfüllbar, sondern, wie eine algebraische Betrachtung[37]) zeigt, dann und nur dann, wenn f_s in der Form

$$(\overline{20}) \qquad f_s = \sum_{t=1}^{n} k_{st} x_t$$

37) Ist nämlich ∞ nicht Eigenwert, d. h. ist das System

$$(\overline{21}) \qquad \sum_{t=1}^{n} k_{st}\varphi_t = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

nicht lösbar, so ist die Determinante $|k_{st}| \neq 0$, und die Theorie der linearen Gleichungen zeigt, daß $(\overline{20})$ für beliebige $f_1, \ldots, f_n$ lösbar ist; ist aber ∞ einfacher oder mehrfacher Eigenwert, so ist $|k_{st}| = 0$, und jene Theorie ergibt, daß $(\overline{20})$ dann und nur dann lösbar ist, wenn der Vektor $(f_1, \ldots, f_n)$ auf den sämtlichen Lösungen der transponierten homogenen Gleichungen, d. h. (in Anbetracht von $k_{st} = k_{ts}$) auf den zum Eigenwert ∞ gehörigen Achsen (Zylinderachsen) senkrecht steht. — Hierin ist insbesondere die Aussage enthalten, daß ∞ dann und nur dann Eigenwert ist, wenn $(\overline{20})$ *nicht* für *beliebige* $f_1, \ldots, f_n$ lösbar ist.

darstellbar ist. Beschränkt man sich entsprechend beim Entwicklungssatz (16) auf diejenigen $f(s)$, die in der Form

$$f(s) = \int_a^b k(s, t)\, x(t)\, dt \tag{20}$$

oder, wie *A. Kneser* es nennt (Literatur A 4), „quellenmäßig" darstellbar sind, so gelingt es *Hilbert* (zunächst unter einer gewissen Einschränkung; vgl. Nr. **34** c) zu zeigen, daß der Entwicklungssatz (16) im Sinne gleichmäßiger Konvergenz gültig wird. In der neuen Darstellung dieser ganzen Theorie, die *E. Schmidt* in seiner Dissertation[41]) gegeben hat (vgl. darüber das Ende von Nr. 7), ist diese Einschränkung in Wegfall gekommen.

Es sei noch bemerkt, daß ähnliche Schwierigkeiten, wie bei (16), auch bei der Entwicklung des Kernes selbst

$$k(s, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\varphi_\alpha(s)\, \varphi_\alpha(t)}{\lambda_\alpha}$$

vorliegen, aus der man ihrerseits, *falls* sie gleichmäßig konvergiert, sowohl (19) als auch (16) sofort herleiten kann.

7. Umgrenzung des Funktionenbereiches. Mit der am Ende von Nr. 6 vorgenommenen Ausscheidung des Eigenwerts ∞ und der zu ihm gehörigen Eigenfunktionen war die Entscheidung über die Durchführbarkeit der vollen Analogie mit der Algebra nur umgangen; um sie zu fällen, werden Überlegungen ganz anderer Art erforderlich.

Die hier gegebene Darstellung hat bisher die im Anfang von Nr. **1** gemachte Voraussetzung der Stetigkeit aller in Betracht gezogenen Funktionen stillschweigend festgehalten; dies konnte um so eher geschehen, als sowohl die Fredholmsche Resolvente als auch die zu endlichen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen offensichtlich von selbst stetig sind, wenn der Kern es ist. Aber die einfache Überlegung, die aus

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b k(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

abzulesen gestattet, daß mit $k(s, t)$ auch $\varphi(s)$ eine stetige Funktion ist, versagt bei der Gleichung

$$\int_a^b k(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0, \tag{21}$$

die die Eigenfunktionen des Eigenwerts ∞ definiert.

Beschränkt man sich trotzdem auch beim Eigenwert ∞ zunächst einmal auf *stetige* Eigenfunktionen, so ist man imstande, einen stetigen

Kern $k(s, t)$ zu konstruieren, bei dem keine stetige Eigenfunktion des Eigenwertes ∞ vorhanden ist, zu dem man aber trotzdem eine stetige Funktion $f(s)$ hinzubestimmen kann, die nicht vermöge eines stetigen $x(t)$ in der Gestalt (20) darstellbar ist.[38]) Mit dieser Tatsache ist die Analogie mit der Algebra durchbrochen, da im algebraischen Fall die Nichtlösbarkeit des Systems $(\overline{21})$ zur Folge hat, daß $(\overline{20})$ für beliebige $f_1, \ldots, f_n$ lösbar ist (vgl. die Schlußbemerkung von [37])). *Damit ist klargelegt, daß die Eigenwerttheorie nicht bis zur restlosen Analogie mit der Algebra durchgeführt werden kann, solange man sich auf stetige Funktionen beschränkt.*

Aber auch durch Zulassung von Unstetigkeiten einfacher Art ist es keineswegs möglich, an diesem Sachverhalt etwas zu ändern. Der Kern des oben erwähnten Gegenbeispiels ist nämlich so beschaffen, daß für ihn die Gleichung (21), die keine stetige Lösung besitzt, doch eine übrigens willkürlich vorgegebene *unstetige* Lösung hat, die lediglich selbst nebst ihrem Quadrat im Riemannschen oder auch nur im Lebesgueschen Sinne integrierbar sein muß. Solange also für die Eigenfunktionen nicht *alle* diese Funktionen zugelassen werden, ergibt dieses Gegenbeispiel genau das oben für den Bereich der stetigen Funktionen festgestellte negative Resultat. *Man muß also für die Eigenfunktionen die Gesamtheit aller im Lebesgueschen Sinne nebst ihrem Quadrat integrierbaren Funktionen zulassen, wenn man den Wunsch hat, eine der algebraischen in allen Teilen analoge Theorie zu schaffen.*

Es ist nun das wesentliche, *daß umgekehrt diese Erweiterung auch hinreicht, um die volle Analogie mit der Algebra herzustellen.* Die Wurzel dieses Resultats liegt in der Theorie der unendlichvielen Veränderlichen. *D. Hilbert*[39]) hatte den in Nr. **6** geschilderten Untersuchungen eine Theorie der sogenannten *vollstetigen quadratischen Formen* von unendlichvielen Veränderlichen folgen lassen und hatte darin ein andersartiges, aber lückenloses analytisches Äquivalent zu der Hauptachsentheorie der Algebra gefunden; zugleich hatte er ein Übertragungsprinzip ausgebildet, das einen Zusammenhang dieser neuen Theorie mit der Integralgleichungslehre vermittelt. Was er damit für Integralgleichungen erlangte, war zunächst nur ein neuer Beweis des in Nr. **6** angegebenen Tatbestandes im Bereich stetiger Funktionen (Genaueres s. in Nr. **8**). Aber ein Theorem von *E. Fischer*[119]) und *F. Riesz*[120]) (vgl. Nr. **15** d) gestattete diese Übertragung darüber hinaus auf den

38) Man findet die Überlegung, die notwendig ist, um dieses Beispiel aus einer Bemerkung von *E. Fischer* abzuleiten, in Nr. **34** c [434]) [440]).

39) *D. Hilbert,* 4. und 5. Mitteil., Gött. Nachr. 1906, p. 157—227 und p. 439—480 = Grundzüge, 4. und 5. Abschnitt, p. 109 ff.

Bereich der im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbaren Funktionen auszudehnen und gab damit auch für die Integralgleichungen die volle, dem Hilbertschen Hauptresultat über vollstetige quadratische Formen genau entsprechende Analogie zur Algebra.

Das Gesamtergebnis ist, daß die richtige Umgrenzung des Funktionenbereichs, mit dem gearbeitet wird, sich als das entscheidende Moment erwiesen hat. *Historisch* betrachtet, hatte sich diese Entwicklung von der stetigen bis zur quadratisch-integrierbaren Funktion lange vorbereitet und allmählich vollzogen. Sie beginnt im Grunde in dem Augenblick, als *H. A. Schwarz* die *Ungleichheit*, die heute allgemein nach ihm benannt wird,

$$\left\{\int_a^b f(s)\,g(s)\,ds\right\}^2 \leqq \int_a^b [f(s)]^2\,ds \int_a^b [g(s)]^2\,ds \tag{22}$$

als wichtiges Handwerkszeug erkannte und zu handhaben lehrte[40]); als solches hat es *Poincaré* im weitesten Umfang gedient. Diese Ungleichheit ist nämlich offensichtlich für beliebige, lediglich quadratisch-integrierbare Funktionen anwendbar, und je mehr sie und ähnliche Hilfsmittel die Untersuchung beherrschen, desto mehr nähert diese sich dem Zustand, daß sie ihrem ganzen Ausmaße nach für quadratisch-integrierbare Funktionen giltig ist. Wenn ferner *Fredholm* sich des *Hadamardschen Determinantensatzes* bedient, so steht hinter der von ihm zunächst benutzten Formulierung mit dem Maximalbetrag der Elemente (vgl. Nr. 9) dort schon die ursprüngliche *Hadamard*sche Formulierung (14), die bei Anbringung der nötigen Modifikationen gestattet, aus den *Fredholm*schen Formeln auch im Falle unstetiger, aber quadratisch-integrierbarer $K(s, t)$ und $f(s)$ die Auflösung zu gewinnen. Bewußt hat sich dann diese Entwicklung in den Arbeiten von *E. Schmidt*[41])[42]) vollendet. Hier ist die *Schwarz*sche und die ihr verwandte *Bessel*sche Ungleichung[385]) fast das einzige Werkzeug der Untersuchung geworden, und dementsprechend beziehen sich alle Ergebnisse auf den Bereich der quadratisch-integrierbaren Funktionen. Die Eigenwerttheorie insbesondere ist bei *E. Schmidt* in einer solchen

---

40) *H. A. Schwarz*[25]), Ges. Abh. 1, p. 251; aufgetreten war sie vorher schon hier und da, z. B. bei *Bouniakowsky*, Mém. Acad. Petersb. (VII) 1 (1859), Nr. 9, p. 4, ebenso wie ihr algebraisches Analogon seit *Lagrange* und *Cauchy*[114]) bekannt war.

41) *E. Schmidt*, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Diss. Göttingen 1905, 33 S. = Math. Ann. 63 (1907), p. 433—476.

42) *E Schmidt*, Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, Math. Ann. 64 (1907), p. 161—174.

Art entwickelt, daß nicht wie in *Hilberts* 1. Mitteilung das Hauptachsentheorem benutzt und als Ausgangspunkt eines Grenzprozesses verwendet wird, sondern daß offensichtlich alle Schlüsse ebenso gut wie für Integralgleichungen auch für den Beweis des algebraischen Hauptachsentheorems selbst gelten.

8. **Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen.** Die Theorie der linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten hatte schon einmal in die Entwicklung der Lehre von den Integralgleichungen eingegriffen, damals, als *Fredholm* seine Formeln nach dem Vorbilde der *von Koch*schen Determinanten aufstellte. Wenn *Hilbert* 1906 eine neue, umfassende Theorie der linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten und der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen veröffentlichte[39]), so war deren Beziehung zur Integralgleichungstheorie eine ganz andere, direktere. Denn *Hilbert* beschränkte sich nicht darauf, eine Theorie der unendlichvielen Veränderlichen aufzustellen, sondern zeigte zugleich auch, wie man die ganze Auflösungs- und Eigenwerttheorie der Integralgleichungen daraus unmittelbar ableiten kann.

Die *Methode*, durch die er diese Zurückführung vollzieht, ist im Grunde nichts anderes als die alte Methode der unbestimmten Koeffizienten, nur daß er, wie man es in der Theorie der Randwertaufgaben immer getan hatte, $\varphi(s)$ statt nach Potenzen von s nach trigonometrischen Reihen oder allgemeiner nach Reihen der Form

$$\varphi(s) = x_1 \omega_1(s) + x_2 \omega_2(s) + \cdots \tag{23}$$

entwickelte, wo die $\omega_\alpha(s)$ ein beliebiges *Orthogonalsystem* sind, d. h. ein System von unendlichvielen Funktionen, für die

$$\int_a^b \omega_\alpha(s)\, \omega_\beta(s)\, ds = e_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

ist. Die gegebenen Funktionen $K(s, t)$ und $f(s)$ setzt er ebenso als Reihen an:

$$f(s) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_\alpha \omega_\alpha(s), \quad K(s, t) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} K_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha(s)\, \omega_\beta(t). \tag{25}$$

Sieht man von allen Konvergenzfragen ab, so geht die Integralgleichung (J) dadurch rein formal über in

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} x_\alpha \omega_\alpha(s) + \int_a^b \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} K_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha(s)\, \omega_\beta(t) \cdot \sum_{\gamma=1}^{\infty} x_\gamma\, \omega_\gamma(t)\, dt = \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_\alpha \omega_\alpha(s),$$

und durch Koeffizientenvergleichung folgt

$$x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\infty} K_{\alpha\beta} x_\beta = f_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots); \tag{U}$$

das ist der *formale Prozeß*, der die Integralgleichung (J) in ein System von linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten (U) verwandelt.

Das Schwergewicht liegt natürlich darauf, diesen formalen Prozeß einer exakten Konvergenzbetrachtung zu erschließen. Man könnte dies sehr leicht, wenn man sich auf den Fall *gleichmäßiger Konvergenz* der sämtlichen eingehenden Reihen beschränkt. *A. C. Dixon*[43]) hat das 1901 in einer bemerkenswerten Arbeit, unmittelbar nach *Fredholms* erster Mitteilung von 1900 und offenbar ganz unabhängig von ihr, getan. Er hat dabei eine volle Theorie des Systems (U) aufgestellt, die im Grunde genommen auf genau derjenigen Methode beruht, die *E. Schmidt* 1907 in der auf seine Dissertation folgenden Arbeit für Integralgleichungen aufgestellt hat[42]), die aber auf ganz anderen Konvergenzbedingungen fußt, als sie *Schmidt* im Auge hatte (der genauere Unterschied beider Theorien wird in Nr. 20a, d ersichtlich werden). Die Sätze, die *Dixon* daraus für die Integralgleichung (J) ableitet, setzen mehr als die Stetigkeit von K und f voraus — es ist bekannt, daß nicht jede stetige Funktion in eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe entwickelbar ist, und es ist bisher auch kein anderes Orthogonalsystem *stetiger* Funktionen bekannt, bei dem die Entwicklung jeder stetigen Funktion gleichmäßig konvergiert —, und wenn sie auch für die Anwendung auf das alternierende Verfahren von *H. A. Schwarz* ausreichen, die *Dixons* Ziel ist, so genügen sie doch den Ansprüchen vieler Anwendungen nicht.

Der Weg, auf dem *Hilbert* den obigen formalen Prozeß legalisiert, ist ein ganz anderer. Man hatte in der Theorie der *Fourier*schen Reihen gelernt, sich von den *Dirichlet*schen Fragen der Konvergenz loszulösen und auch über solche Reihen, die nicht konvergieren, Aussagen zu machen. *Ch. J. de la Vallée-Poussin*[44]) hatte entdeckt, daß für jede stetige Funktion $\varphi(s)$ die Quadratsumme der Entwicklungskoeffizienten

$$x_\alpha = \int_a^b \varphi(s)\,\omega_\alpha(s)\,ds$$

stets konvergiert und daß

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots = \int_a^b [\varphi(s)]^2 ds \tag{26}$$

---

43) *A. C. Dixon,* On a class of matrices of infinite order, and on the existence of „matricial" functions on a Riemann surface, Cambr. Trans. 19 (1902), p. 190—233, der Red. vorgelegt 15. Mai 1901.

44) *Chr. J. de la Vallée-Poussin,* Ann. soc. sc. Brux. 17b (1893), p. 18—34; vgl. im übrigen Encykl. II C 10 (*Hilb-M. Riesz*), Nr. 9, Anm.[90]), p. 1210.

ist, wenn $\omega_\alpha(s)$ die gemäß (24) normierten trigonometrischen Funktionen sind. Die prinzipielle Bedeutung dieses Satzes war am deutlichsten hervorgetreten, als *A. Hurwitz*[45]) auf ihn einen Äquivalenzbegriff für *Fourier*sche Reihen gründete, der bewußt davon absah, ob die Reihe konvergiert und die Funktion „darstellt". Diese Äquivalenz betrachtet eine stetige Funktion und die Folge ihrer *Fourier*schen Koeffizienten auch dann als gleichwertig, wenn die aus ihnen gebildete *Fourier*sche Reihe gar nicht konvergiert, und lehrt mit den *Fourier*schen Koeffizienten statt mit den zugrunde liegenden Funktionen zu operieren. Mit Benutzung dieses Äquivalenzbegriffs gelingt es *Hilbert*, den obigen formalen Prozeß ohne jede Annahme über die Konvergenz der auftretenden Reihen in ein Beweisverfahren umzugestalten. Und zwar ergibt sich, daß man von einem stetigen Kern $K(s, t)$ und stetigen $f(s)$ aus stets zu einem solchen System (U) gelangt, bei dem $\sum\limits_{\alpha,\beta} K_{\alpha\beta}^2$ und $\sum\limits_{\alpha} f_\alpha{}^2$ konvergieren, und daß dann jede Lösung $x_1, x_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme $\sum x_\alpha^2$ eine stetige Löung $\varphi(s)$ von (J) liefert.

In gleicher Weise vollzieht *Hilbert* den Übergang von der Eigenwerttheorie der Integralgleichung mit stetigem symmetrischen Kern zu einer Theorie der quadratischen Form von unendlichvielen Veränderlichen

$$\mathfrak{K}(x, x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

bei der $\sum\limits_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}{}^2$ konvergiert.

Indem *Hilbert* nun die Theorie von (U) und $\mathfrak{K}(x, x)$ im angegebenen Sinne tatsächlich bewältigt, und zwar auch was $\mathfrak{K}(x, x)$ betrifft in restloser Analogie mit der Algebra, so daß nunmehr auch bezüglich des Eigenwerts ∞ nichts zu wünschen übrigbleibt, hat er damit auch die in Nr. 7 angekündigte These erhärtet.

Bei der Durchführung dieser Theorien benutzt *Hilbert* in Wahrheit nicht die Voraussetzung konvergenter Quadratsummen $\sum K_{\alpha\beta}^2$ und $\sum k_{\alpha\beta}^2$, sondern die weit geringere und in sich befriedigendere Voraussetzung über die $K_{\alpha\beta}$ und $k_{\alpha\beta}$, die er *Vollstetigkeit* nennt (vgl. Nr. **16** a, **40** a); und zwar ist dieser Begriff so konzipiert, daß er bezüglich $\mathfrak{K}(x, x)$ die weiteste Voraussetzung darstellt, unter der die volle Analogie mit dem algebraischen Hauptachsentheorem erhalten bleibt.

Endlich ist *Hilbert* — und das ist der wesentlichste Inhalt seiner 4. Mitteilung — über das Maß der eben genannten Voraussetzungen

45) *A. Hurwitz*, Math. Ann. 57 (1903), p. 425—446; 59 (1904), p. 553.

erneut und erheblich hinausgegangen und hat eine Theorie der sog. „*beschränkten quadratischen Formen*" entworfen, bei der die Tatsachen der Hauptachsentheorie neuen Vorkommnissen Platz machen müssen, und die ganz andersartige Anwendungsgebiete, wie z. B. die *Stieltjessche Kettenbruchtheorie,* in ihren Kreis einbezieht (vgl. Nr. 43c).

II. Auflösungstheorie.

A. Die linearen Integralgleichungen zweiter Art.

9. Die Fredholmsche Theorie.[46]) Sei $K(s,t)$ eine im Intervall $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ gegebene stetige Funktion der beiden Veränderlichen s, t, und sei zur Abkürzung

$$K\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \\ y_1 \cdots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) \ldots K(x_1, y_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ K(x_n, y_1) \ldots K(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

gesetzt, so heißt

$$\Delta = 1 + \int_a^b K(\sigma,\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}\sigma_1\,\sigma_2\\ \sigma_1\,\sigma_2\end{pmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix}\sigma_1 \cdots \sigma_n\\ \sigma_1 \cdots \sigma_n\end{pmatrix} d\sigma_1 \ldots d\sigma_n$$

die „*Fredholmsche Determinante*" des Kernes K; die *ersten* und die *höheren Minoren* werden von *Fredholm* durch die Ausdrücke definiert:

$$\Delta(s,t) = \Delta\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = K(s,t) + \int_a^b K\begin{pmatrix}s\ \sigma_1\\ t\ \sigma_1\end{pmatrix} d\sigma_1 + \frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}s,\sigma_1\sigma_2\\ t\ \sigma_1\sigma_2\end{pmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix}s\ \sigma_1 \cdots \sigma_n\\ t\ \sigma_1 \cdots \sigma_n\end{pmatrix} d\sigma_1 \ldots d\sigma_n,$$

46) Die hier gegebene Darstellung ist unabhängig von den Erörterungen von Kap. I über die Genesis dieser Theorie. — *J. Fredholm* hat nach drei Voranzeigen eine ausführliche Darstellung seiner Theorie, Acta math. 27 gegeben.[29]) Seither ist die Theorie wiederholt ausführlich entwickelt worden: *M. Bôcher* 1909 (Literatur A 1), p. 29—38; *G. Kowalewski* 1909 (Literatur B 3), p. 455—505, unter genauer Ausführung des Grenzüberganges aus dem Algebraischen; *A. Korn* 1910 (Literatur A 3), p. 50—127; *J. Plemelj,* Preisschr d. Jablon. Ges. 40 (1911), p. 29—39; *A. Kneser* 1911 bzw. 1922 (Literatur A 4), p. 223—239 bzw. 268—285; *H. Hahn* 1911 (Literatur C 8), p. 13—20, ohne Beweise; *Heywood-Fréchet* 1912 (Literatur A 5), p. 35—81; *T. Lalesco* 1912 (Literatur A 6), p. 19—62, unter Verwendung funktionentheoretischer Hilfsmittel; *V. Volterra* 1913 (Literatur A 9), p. 102—122; *G. Vivanti* 1916 (Literatur A 10), p. 121—166; *W. V. Lovitt* 1924 (Literatur A 12), p. 23—72.

$$\Delta\begin{pmatrix} s_1 \dots s_\nu \\ t_1 \dots t_\nu \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} s_1 \dots s_\nu \\ t_1 \dots t_\nu \end{pmatrix} + \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 \dots s_\nu \sigma_1 \\ t_1 \dots t_\nu \sigma_1 \end{pmatrix} d\sigma_1$$

$$+ \frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 \dots s_\nu \sigma_1 \sigma_2 \\ t_1 \dots t_\nu \sigma_1 \sigma_2 \end{pmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 \dots s_\nu\ \sigma_1 \dots \sigma_n \\ t_1 \dots t_\nu\ \sigma_1 \dots \sigma_n \end{pmatrix} d\sigma_1 \dots d\sigma_n.$$

Die absolute und gleichmäßige Konvergenz dieser Reihen ergibt sich leicht aus dem *Hadamardschen Determinantensatz,* welcher besagt, daß der absolute Wert einer n-reihigen Determinante unter $\varrho^n \sqrt{n^n}$ gelegen ist, wenn alle ihre Elemente dem Betrage nach unter ϱ liegen.[47])

Für die ersten Minoren gelten die beiden fundamentalen Relationen[48])

(1a) $$\Delta(s, t) + \int_a^b K(s, r)\,\Delta(r, t)\,dr = \Delta \cdot K(s, t),$$

(1b) $$\Delta(s, t) + \int_a^b K(r, t)\,\Delta(s, r)\,dr = \Delta \cdot K(s, t),$$

und entsprechend für die höheren Minoren

(2a) $$\left\{\begin{aligned} &\Delta\begin{pmatrix} s_1 \dots s_\nu \\ t_1 \dots t_\nu \end{pmatrix} + \int_a^b K(s_1, r)\,\Delta\begin{pmatrix} r\ s_2 \dots s_\nu \\ t_1\ t_2 \dots t_\nu \end{pmatrix} dr \\ &\qquad = \sum_{\mu=1}^{\nu} (-1)^{\mu-1} K(s_1, t_\mu)\,\Delta\begin{pmatrix} s_2 \dots s_\mu & s_{\mu+1} \dots s_\nu \\ t_1 \dots t_{\mu-1} & t_{\mu+1} \dots t_\nu \end{pmatrix}, \end{aligned}\right.$$

(2b) $$\left\{\begin{aligned} &\Delta\begin{pmatrix} s_1 \dots s_\nu \\ t_1 \dots t_\nu \end{pmatrix} + \int_a^b K(r, t_1)\,\Delta\begin{pmatrix} s_1\ s_2 \dots s_\nu \\ r\ \ t_2 \dots t_\nu \end{pmatrix} dr \\ &\qquad = \sum_{\mu=1}^{\nu} (-1)^{\mu-1} K(s_\mu, t_1)\,\Delta\begin{pmatrix} s_1 \dots s_{\mu-1} & s_{\mu+1} \dots s_\nu \\ t_2 \dots t_\mu & t_{\mu+1} \dots t_\nu \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Wie *Fredholm* diese Bildungen und Relationen nach dem Vorbilde der *H. v. Koch*schen Theorie der unendlichen Determinanten ge-

47) Diese Formulierung ist eine unmittelbare Folge des in Formel (14) von Nr. 5 gegebenen ursprünglichen *Hadamard*schen Satzes; wegen der Geschichte des Satzes vgl. [31]).

48) Eine Umgruppierung der beim Beweise vorkommenden Schlüsse bei *P. Saurel,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 15 (1909), p. 445—450.

wonnen hat, ist in Nr. 5 angedeutet worden.[49]) Er gewinnt aus ihnen die gesamte Theorie der linearen Integralgleichungen 2. Art in der gleichen Weise, wie man mit Hilfe der Unterdeterminanten und der zwischen ihnen geltenden Relationen die gesamte Theorie der linearen Gleichungssysteme abzuleiten pflegt:

1. Ist $\Delta \neq 0$ und wird

$$\mathsf{K}(s, t) = -\frac{\Delta(s, t)}{\Delta} \tag{3}$$

gesetzt, so gehen die Relationen (1) über in

$$K(s, t) + \mathsf{K}(s, t) + \int_a^b K(s, r)\,\mathsf{K}(r, t)\,dr = 0, \tag{3a}$$

$$K(s, t) + \mathsf{K}(s, t) + \int_a^b K(r, t)\,\mathsf{K}(s, r)\,dr = 0. \tag{3b}$$

Aus dem Bestehen der Formeln (3a) und (3b) folgt unmittelbar, daß

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b \mathsf{K}(s, t) f(t)\,dt \tag{$\mathfrak{J}$}$$

stets eine und die einzige Lösung von

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{J}$$

ist, und daß zugleich

$$\psi(s) = g(s) + \int_a^b \mathsf{K}(t, s)\,g(t)\,dt \tag{$\mathfrak{J}'$}$$

49) Die Analogie ist dort nur für die *Fredholm*sche Determinante selbst ausgeführt worden. Für die ersten — und a fortiori für die höheren — Minoren ist die Analogie dem unmittelbaren Anblick ein wenig durch den Umstand verdeckt, daß sowohl in der Determinante $A = |a_{st}| = |e_{st} + K_{st}|$ als auch im Schema ihrer Unterdeterminanten A_{st} die Einer in der Diagonale zur Geltung gebracht werden. Nicht A_{st}, der Unterdeterminante von a_{st}, ist *Fredholms* erster Minor $\Delta(s, t)$ analog, sondern man muß $A_{st} = A e_{st} - \Delta_{ts}$ setzen, um in Δ_{st} das algebraische Analogon von $\Delta(s, t)$ zu erlangen. In der Tat gehen bei Einführung dieser Bezeichnungen die bekannten Relationen der Determinantentheorie, die für die ersten Unterdeterminanten charakteristisch sind, $\sum_\alpha a_{s\alpha} A_{t\alpha} = A e_{st}$, in $\sum_\alpha (e_{s\alpha} + K_{s\alpha})(A e_{t\alpha} - \Delta_{\alpha t}) = A e_{st}$ oder, wenn man die Klammern ausmultipliziert und vereinfacht, in $A K_{st} = \Delta_{st} + \sum_\alpha K_{s\alpha} \Delta_{\alpha t}$ über; ebenso die anderen Relationen $\sum_\alpha a_{\alpha t} A_{\alpha s} = A e_{st}$ in $A K_{st} = \Delta_{st} + \sum_\alpha K_{\alpha t} \Delta_{s\alpha}$; da nun K_{st} das Analogon von $K(s, t)$, A das der *Fredholm*schen Determinante Δ ist, zeigen diese Relationen in ihrer Analogie zu (1), daß wirklich Δ_{st} die zu $\Delta(s, t)$ analoge Rolle spielt.

die Lösung von

$$(J') \qquad g(s) = \psi(s) + \int_a^b K(t, s)\,\psi(t)\,dt$$

ist. Man nennt deshalb eine Funktion $\mathsf{K}(s, t)$, die den beiden Formeln (3a) und (3b) genügt, den *lösenden Kern* oder die *Resolvente* (noyau résolvant).[24])

2. Ist $\Delta = 0$, so beweist *Fredholm*, daß es in der Folge der ersten, zweiten usw. Minoren einen ersten gibt, der nicht identisch verschwindet. Sei etwa

$$(4) \qquad \Delta = 0, \quad \Delta\binom{s}{t} \equiv 0, \;\ldots,\; \Delta\binom{s_1 \ldots s_{d-1}}{t_1 \ldots t_{d-1}} \equiv 0, \quad \Delta\binom{s_1 \ldots s_d}{t_1 \ldots t_d} \not\equiv 0,$$

und seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$; $\tau_1, \ldots, \tau_d$ solche Zahlenwerte der $2d$ Argumente, für die der d^{te} Minor tatsächlich nicht verschwindet, so sind

$$(5) \qquad \varphi_1(s) = \Delta\binom{s\;\sigma_2 \ldots \sigma_d}{\tau_1\,\tau_2 \ldots \tau_d}, \;\ldots,\; \varphi_d(s) = \Delta\binom{\sigma_1 \ldots \sigma_{d-1}\,s}{\tau_1 \ldots \tau_{d-1}\,\tau_d}$$

d linear unabhängige Lösungen der *homogenen* Integralgleichung

$$(J_h) \qquad 0 = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

und jede Lösung von (J_h) läßt sich aus ihnen in der Form

$$(6) \qquad \varphi(s) = c_1\varphi_1(s) + \cdots + c_d\varphi_d(s)$$

mit konstanten Koeffizienten komponieren. Im selben Sinne geben die Funktionen

$$(7) \qquad \psi_1(s) = \Delta\binom{\sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_d}{s\;\tau_2 \ldots \tau_d}, \;\ldots,\; \psi_d(s) = \Delta\binom{\sigma_1 \ldots \sigma_{d-1}\,\sigma_d}{\tau_1 \ldots \tau_{d-1}\,s}$$

die volle Lösung der transponierten homogenen Gleichung

$$(J_h') \qquad 0 = \psi(s) + \int_a^b K(t, s)\,\psi(t)\,dt;$$

d heißt der *Defekt* des Kernes $K(s, t)$.[50])

3. Die *unhomogene* Integralgleichung (J) ist im Falle $\Delta = 0$ dann und nur dann lösbar, wenn $\int_a^b f(s)\,\psi_i(s)\,ds = 0$ ist $(i = 1, \ldots, d)$; und

50) Dieses Wort hat sich in der Algebra nicht im selben Maße eingebürgert wie das Wort „Rang" für die Zahl $n - d = r$. Hier, bei Integralgleichungen, und übrigens ebenso bei unendlichvielen Variabeln, zeigt es sich, daß r neben n unendlich wird, während gerade d endlich bleibt. — *H. v. Koch* hat in seiner Theorie der unendlichen Determinanten (vgl. Nr. **17**) für die hier als Defekt bezeichnete Größe d das Wort „Rang" gebraucht.

zwar ist dann

$$(8)\qquad \varphi(s) = f(s) - \int_a^b \frac{\Delta\begin{pmatrix} s\ \sigma_1 \dots \sigma_d \\ t\ \tau_1 \dots \tau_d \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_d \\ \tau_1 \dots \tau_d \end{pmatrix}} f(t)\,dt$$

eine Lösung von (J), aus der sich alle weiteren durch Addition einer beliebigen Lösung von (J_h) ergeben. Der hier auftretende Kern wird gelegentlich als *Pseudoresolvente* bezeichnet[51]). —

Die Determinantentheorie der *Fredholm*schen Minoren ist über die Zwecke der Auflösungstheorie hinaus fortgebildet worden. *Fredholm* hat[52]) das *Multiplikationstheorem* bewiesen: Sind $K(s, t)$, $L(s, t)$ zwei Kerne, so ist die *Fredholm*sche Determinante des Kernes, der durch sukzessive Anwendung der Operationen

$$g(s) = f(s) + \int_a^b L(s, t) f(t)\,dt, \quad h(s) = g(s) + \int_a^b K(s, t)\, g(t)\,dt$$

entsteht, d. h. des Kernes

$$K(s, t) + L(s, t) + \int_a^b K(s, r)\, L(r, t)\,dr,$$

gleich dem Produkt der *Fredholm*schen Determinanten der Kerne K und L. Ferner gilt nach dem Muster eines bekannten Satzes über Minoren:

$$\begin{vmatrix} \Delta(s_1, t_1) \dots \Delta(s_1, t_\nu) \\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot \\ \Delta(s_\nu, t_1) \dots \Delta(s_\nu, t_\nu) \end{vmatrix} = \Delta^{\nu-1} \cdot \Delta\begin{pmatrix} s_1 \dots s_\nu \\ t_1 \dots t_\nu \end{pmatrix}.\ ^{53})$$

Endlich geben *Ch. Platrier*[53]) und im Anschluß an ihn *A. Hoborski*[53]) auch das Analogon des *Sylvesterschen Determinantensatzes*.

51) *W. A. Hurwitz*, Amer. Math. Soc. Trans. 13 (1912), p. 405—418, gibt eine Darstellung der *Fredholm*schen Theorie, die sie von den höheren Minoren entlastet, indem sie den Orthogonalisierungsprozeß von *E. Schmidt* (vgl. Nr. 15a) zu Hilfe nimmt und so die Pseudoresolvente auf andere Art herstellt (Voranzeige Amer. Math. Soc. Bull. 18, p. 53—54). — Weitere Auflösungsformeln bei *L. Tocchi*, Batt. Giorn. 54 (1916), p. 141—150; 57 (1919), p. 171—178; 58 (1920), p. 54—59.

52) *J. Fredholm*, Acta 27 [29]), § 4; *G. Kowalewski* (Literatur B 3, § 181) gewinnt es durch Grenzübergang aus dem Algebraischen.

53) Zuerst bei *J. Plemelj*, Monatsh. f. Math. 15 (1904), p. 93—124 [Voranzeige in den Wien. Ber. 112 (1903), p. 21—29], dann wiederentdeckt von *Ch. Platrier*, J. de math. (6) 9 (1913), p. 233—304, und durch Grenzübergang aus dem Algebraischen bewiesen. Weitere (direkte) Beweise geben *W. A. Hurwitz*, Amer. Math. Soc. Bull. (2) 20 (1914), p. 406—408 und *A. Hoborski*, Archiv (3) 23 (1914), p. 297—302.

Hilbert hat gelegentlich der Aufstellung seiner Eigenwerttheorie den Komplex der *Fredholm*schen Formeln durch Grenzübergang aus dem Algebraischen abgeleitet, in dem in Nr. **1** a geschilderten Sinne.[54]) Er hat ferner durch *O. D. Kellogg* die Übereinstimmung der *Fredholm*schen Lösung von (J) mit der Entwicklung nach Iterierten, soweit diese konvergiert (vgl. Nr. **3** oder **11** a, (2)), verifizieren lassen.[55]) Auch die formale Übereinstimmung mit den Auflösungsformeln für Kerne von der besonderen Form $u_1(s)v_1(t) + \cdots + u_n(s)v_n(t)$ (vgl. Nr. **10** a, 1) ist durchgerechnet worden[56]), und endlich hat man sich überzeugt, daß durch den *Hilbert*schen Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen (vgl. Nr. **8** oder Nr. **15**) die Fredholmsche Determinante in die v. Kochsche Determinante des entstehenden Systems von unendlichvielen linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten übergeht.[57])

Wendet man die *Fredholm*sche Theorie auf den Kern $K(s, t) = -\lambda k(s, t)$ an, d. h. auf die Integralgleichung

$$(i) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b k(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$

---

54) *D. Hilbert*, 1. Mitteilung, Gött. Nachr. 1904 = Grundzüge, Kap. II, p. 8 ff. Die Beschränkung auf *symmetrische* Kerne, die im dortigen Zusammenhang vorgenommen wird, ist unerheblich (vgl. 2. Mitteilung = Grundzüge, p. 68). *Hilbert* verfährt so, daß er zuerst annimmt, daß die *Fredholm*sche Determinante, die er für den Kern $K(s,t) = \lambda k(s,t)$ betrachtet, als Funktion von λ nur einfache Nullstellen besitzt, und nachträglich den Fall mehrfacher Nullstellen durch Stetigkeitsbetrachtungen beseitigt. Auf Veranlassung von *L. Maurer* hat *E. Garbe* (Diss. Tübingen, 43 S., Leipzig 1914) den Grenzübergang auch im Falle mehrfacher Nullstellen von $\delta(\lambda)$ direkt untersucht. — Bei *G. Kowalewski*[46]) findet man den Grenzübergang besonders eingehend durchgeführt.

55) *O. D. Kellogg*, Gött. Nachr. 1902, math.-phys. Kl., p. 165—175. Die Entwicklung nach Iterierten wird mit der *Fredholm*schen Determinante Δ ausmultipliziert und das Resultat durch elementare Ausrechnung in $-\Delta(s, t)$ übergeführt. Die gleiche Bemerkung bei *G. Vivanti*, Batt. Giorn. 53 (1915), p. 209—211.

56) Vgl. außer der in Nr. **10** zu diesem Gegenstande aufgeführten Literatur noch *W. Kapteyn*, Amst. Ak. Versl. 19 (1911), p. 932—939. — *H. Lebesgue*, Soc. Math. F. Bull. 36 (1908), p. 3—19, leitet im Anschluß an eine Andeutung in der Schlußbemerkung von *E. Goursat*[61]) die *Fredholm*schen Formeln her, indem er den Kern durch Kerne endlichen Ranges (vgl. Nr. **10** a, 1) gleichmäßig approximiert und in den *Fredholm*schen Formeln für diese approximierenden Kerne den Grenzübergang vornimmt.

57) *J. Marty*, Darb. Bull. (2) 33 (1909), p. 296—300; ebenso *J. Mollerup*, Darb. Bull. (2) 36 (1912), p. 130—136 = C. R. 2. Congr. Scand. 1911, p. 81—87. Beide operieren im Sinne des *Hilbert*schen Übergangs (vgl. Nr. **8** und **15**) mit *Hurwitz*schen Äquivalenzen; dagegen setzt *H. M. Plas*, Diss. Groningen 1911, 113 S., die anzusetzenden Entwicklungen nach Orthogonalfunktionen als gleichmäßig konvergent voraus.

so tritt statt Δ eine beständig konvergente Potenzreihe $\delta(\lambda)$ auf, und ebenso treten an die Stelle der *Fredholm*schen Minoren ganze transzendente Funktionen; die Resolvente (3) und die Pseudoresolvente werden somit Quotienten ganzer transzendenter Funktionen, also meromorphe Funktionen von λ, und mit ihnen auch die Lösungen ($\mathfrak{J}$) und (8). Die Nullstellen von $\delta(\lambda)$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Pole der Resolvente K erweisen sich also als genau diejenigen Werte von λ, für die die homogene Gleichung (i_h) lösbar ist. Vgl. hierzu im übrigen Nr. **11** c und **39** a.

10. Andere Auflösungsmethoden. Man hat eine Reihe von weit einfacheren Theorien aufgestellt, die die Auflösung der linearen Integralgleichungen 2. Art leisten, ohne den immerhin verwickelten Apparat der Fredholmschen Formeln zu benötigen. Es versteht sich, daß man auf solche Art nicht die in Nr. **9** formulierten Tatsachen erhält, mit deren Wortlaut der Begriff der Fredholmschen Minoren eng verflochten ist, sondern nur denjenigen Kern dieser Tatsachen, der sich ohne Benutzung dieser Bildungen herausschälen läßt, und deren Komplex im folgenden stets als die *determinantenfreien Sätze* bezeichnet werden soll.[58]) Wenn man die in Rede stehenden Integralgleichungen wieder folgendermaßen bezeichnet:

$$(J)\quad \varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s), \qquad (J_h)\quad \varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

$$(J')\quad \psi(s) + \int_a^b K(t,s)\,\psi(t)\,dt = g(s), \qquad (J_h')\quad \psi(s) + \int_a^b K(t,s)\,\psi(t)\,dt = 0,$$

so kann man sie so formulieren:

Die determinantenfreien Sätze:

Satz 1. Die Anzahl d der linear-unabhängigen Lösungen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_d(s)$ von (J_h) ist endlich und gleich der Anzahl der linear-unabhängigen Lösungen $\psi_1(s), \ldots, \psi_d(s)$ von (J_h'); d heiße der „Defekt" des Kernes $K(s,t)$.[50])

Satz 2. Ist $d = 0$, so ist (J) bei willkürlich gegebenem $f(s)$, (J') bei willkürlich gegebenem $g(s)$ lösbar, und zwar nur auf eine Weise. Es existiert überdies[59]) *ein „lösender Kern" $\mathsf{K}(s,t)$ derart, daß diese Lösungen von (J) und (J') gegeben sind durch*

$$(\mathfrak{J})\quad \varphi(s) = f(s) + \int_a^b \mathsf{K}(s,t)\,f(t)\,dt, \quad (\mathfrak{J}')\quad \psi(s) = g(s) + \int_a^b \mathsf{K}(t,s)\,g(t)\,dt.$$

58) In entsprechender Weise, wie hier für Integralgleichungen, kann man auch aus der algebraischen Theorie der linearen Gleichungssysteme die determinantenfreien Sätze heraussuchen und — entgegen der üblichen Praxis — *ohne* Heranziehung der Determinantentheorie auf die mannigfachste Art beweisen.

Satz 3. Ist $d > 0$, so existiert dann und nur dann eine Lösung von (J), wenn

$$\int_a^b \psi_i(s) f(s)\, ds = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, d$$

gilt, und ebenso dann und nur dann eine Lösung von (J'), wenn

$$\int_a^b \varphi_i(s) g(s)\, ds = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, d$$

gilt; jede Lösung von (J) ergibt sich aus dieser einen durch Addition einer Lösung von (J_h), jede Lösung von (J') aus dieser einen durch Addition einer Lösung von (J_h'). Auch hier kann man eine Funktion $\mathsf{K}(s, t)$ finden[59]*, durch die sich die Lösung, soweit sie vorhanden, in der Gestalt $(\mathfrak{J})$ und $(\mathfrak{J}')$ ausdrückt (Pseudoresolvente).*

a) Das Schmidtsche Abspaltungsverfahren. *E. Schmidt* hat seiner Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen eine Auflösung der linearen Integralgleichungen 2. Art als Vorbereitung vorangeschickt[60], die auf folgenden Gedanken beruht:

1. *Die determinantenfreien Sätze bestehen für jeden Kern „endlichen Ranges", d. h. für jeden Kern von der besonderen Form*[61]

$$G(s, t) = u_1(s) v_1(t) + \cdots + u_n(s) v_n(t).$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus den folgenden Schlüssen:

---

59) Diese zweite Hälfte des Wortlauts von Satz 2 kann man übrigens aus der ersten Hälfte folgern, wenn außerdem noch bekannt ist, daß für jedes $|f(s)| \leq \varepsilon$ die Lösung $\varphi(s)$ ebenfalls klein ausfällt; bildet man nämlich speziell für $f(s) = K(s, r)$ die Lösung von (J), die also außer von s noch von r abhängen muß, so ist diese, wie (3a) von Nr. **9** lehrt, nichts anderes als $\mathsf{K}(s, r)$; nachdem so die Existenz des lösenden Kerns dargetan ist, ist seine Stetigkeit mit Hilfe der angegebenen weiteren Voraussetzung leicht einzusehen. Analoges gilt für Satz 3

60) *E. Schmidt*[42]. Diese vollständige und ganz in sich abgeschlossene Auflösungstheorie steht in keinem Zusammenhang mit der in Nr. **10** b, 1 angeführten Bemerkung *Schmidts* aus seiner Dissertation[65a]. — Daß *A. C. Dixon*[43] den Abspaltungsgedanken bereits 1901 bei unendlichen linearen Gleichungssystemen methodisch genau so und vollständig durchgeführt hat, ist in Nr. 8 erörtert worden; vgl. deswegen und wegen seiner ganz andersartigen materiellen Voraussetzungen Nr. **20** a. Für Integralgleichungen hat *L. Orlando*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 15_2 (1906), p. 416—419, 767—771; Palermo Rend. 21 (1906), p. 316—318, 342—344 den ersten Schritt des Abspaltungsverfahrens (Abspaltung einer Konstanten) an der Hand einer speziellen Integralgleichung kurz vor dem Erscheinen von [42] vollzogen; vgl. darüber auch *L. Orlando*[339] sowie Battagl. Giorn. [(2), 15] 46 (1908), p. 173—196.

61) Die Theorie dieser Kerne hat zuerst *E. Goursat,* Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm, Soc. Math. F. Bull. 35 (1907), p. 163—173 entwickelt. — Die Bezeichnung als „Kern endlichen Ranges" ist gewählt zum Unterschied

α) Ist $\varphi(s)$ eine Lösung von (J), so ist wegen der besonderen Art des Kernes

$$(1) \qquad \varphi(s) = f(s) - \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha(s) \int_a^b v_\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

oder, wenn

$$(2) \qquad x_\alpha = \int_a^b v_\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

gesetzt wird,

$$(3) \qquad \varphi(s) = f(s) - x_1 u_1(s) - \cdots - x_n u_n(s);$$

hieraus folgt dann durch Multiplikation mit $v_\alpha(s)$ und Integration:

$$(A) \qquad x_\alpha = \int_a^b v_\alpha(s)\, f(s)\, ds - \sum_{\beta=1}^{n} x_\beta \int_a^b u_\beta(s)\, v_\alpha(s)\, ds \quad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

d. i. ein System von n linearen Gleichungen für $x_1, \ldots, x_n$.

β) Ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Lösung von (A) und konstruiert man aus diesen x_α vermöge (3) eine Funktion $\varphi(s)$, so besagt (A), wenn man die beiden Integrale in eines zusammenzieht, daß

$$x_\alpha = \int_a^b v_\alpha(s)\,[f(s) - x_1 u_1(s) - \cdots - x_n u_n(s)]\, ds \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

gilt, d. h. daß (2) besteht, woraus dann sofort (1) und somit (J) folgt. Die Integralgleichung (J) ist somit dem Gleichungssystem (A) äquivalent.

γ) Im selben Sinne ist die homogene Gleichung (J_h) äquivalent dem homogenen System (A_h), das aus (A) hervorgeht, wenn man die von den x_α freien Glieder durch Nullen ersetzt, und die transponierten Gleichungen (J') und (J_h') sind äquivalent den transponierten Systemen von (A) und (A_h), die mit (A') und (A_h') bezeichnet werden mögen.

δ) In der ein-eindeutigen Zuordnung zwischen den Lösungen von (J_h) und denen von (A_h), die damit hergestellt ist, entspricht jeder linearen Verbindung mehrerer Lösungen von (J_h), $c_1\varphi_1(s) + \cdots + c_\nu\varphi_\nu(s)$, die gleiche lineare Verbindung der entsprechenden Lösungen von (A_h).

von denjenigen Kernen, die eine Darstellung durch eine *abbrechende* Reihe $u_1(s)v_1(t) + \cdots + u_n(s)v_n(t)$ nicht gestatten (Kerne vom Range ∞). Man kann genauer n als den „Rang" des Kernes bezeichnen, wenn eine derartige Darstellung des Kerns mit weniger als n Summanden nicht möglich ist. Dieser Rangbegriff steht dann in genauer Analogie zu dem in der Determinantentheorie üblichen, wofern man das dem Kern $K(s, t)$ entsprechende Koeffizientensystem K_{st} ins Auge faßt, und nicht das System $e_{st} + K_{st}$, das oben[60]) für die Aufstellung des „Defekts des Kernes $K(s, t)$" maßgebend war. Der Name „Kern endlichen Ranges" ist deshalb dem Namen „ausgearteter Kern", den *R. Courant*[67]) gebraucht, vorgezogen worden.

ε) Ist $\varphi(s) \not\equiv 0$ eine Lösung von (J_h), so sind die durch (2) hinzubestimmten Werte x_α nicht sämtlich 0; denn nach α) besteht dann (3) und würde $\varphi(s) \equiv 0$ ergeben. Umgekehrt liefert jede *eigentliche* Lösung von (A_h) eine nicht identisch verschwindende Lösung von (J_h), da gemäß β) (2) besteht und also mit $\varphi(s)$ alle x_α verschwinden müßten.[62])

Da nun für (A) die den determinantenfreien Sätzen analogen Theoreme bekanntlich gelten, folgt für den Kern G die Gültigkeit der determinantenfreien Sätze.

2. *Ist* $|H(s,t)| \leqq \mu < \frac{1}{b-a}$, *so konvergiert für den Kern* $H(s,t)$ *die Entwicklung nach Iterierten* [vgl. (5) aus Nr. 3 und (8a) aus Nr. 4 oder (2) aus Nr. **11**]; $H(s,t)$ *besitzt daher einen lösenden Kern.* Dies ergibt sich aus den soeben genannten Formeln unmittelbar unter Anwendung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung.[63])

3. *Jeder stetige Kern* $K(s,t)$ *kann als Summe* $G(s,t) + H(s,t)$ *dargestellt werden, wo* $G(s,t)$ *von endlichem Rang ist,* $H(s,t)$ *den Bedingungen von* 2. *genügt.* Man braucht, um dies einzusehen, nur das Integrationsquadrat in n gleich breite vertikale Streifen zu teilen, die Werte von K längs der teilenden Linien als die n Funktionen $v_\alpha(t)$ zu nehmen und $u_\alpha(s)$ im α^{ten} Teilintervall den Wert 1, sonst den Wert 0 zu erteilen, um aus der Gleichmäßigkeit der Stetigkeit folgern zu können, daß bei hinreichend großem n der Betrag $|K(s,t) - u_1(s)v_1(t) - \cdots - u_n(s)v_n(t)| \leqq \varepsilon$ ist, insbesondere also auch $\leqq \mu$, wenn ε die in 2. vorkommende Zahl μ bezeichnet.[64])

4. *Ist* $K(s,t) = G(s,t) + H(s,t)$ *und besitzt* $H(s,t)$ *seinerseits einen lösenden Kern* $\mathsf{H}(s,t)$, *so gelten die determinantenfreien Sätze für* (J), *wenn sie für die Integralgleichung* $(\bar{J})$ *mit dem Kern*

$$\bar{K}(s,t) = G(s,t) + \int_a^b \mathsf{H}(s,r)\, G(r,t)\, dr \tag{4}$$

62) Es ist also *nicht* notwendig, wie mehrfach geschieht, hierzu die lineare Unabhängigkeit der $u_\alpha(s)$ oder der $v_\alpha(s)$ vorauszusetzen.

63) Es ist damit neben den Volterraschen Kernen (vgl. Nr. 3 oder 23) eine andere umfassende Klasse von Kernen aufgewiesen („kleine Kerne"), bei denen die Entwicklung nach Iterierten stets konvergiert. *E. Schmidt* setzt übrigens statt der Bedingung des Textes ursprünglich $\int_a^b\int_a^b [k(s,t)]^2\, ds\, dt < 1$ voraus und folgert mit Hilfe der *Schwarz*schen Ungleichung Nr. 7, (22) die Konvergenz der Entwicklung nach Iterierten.

64) Vgl. *E. Schmidt,* Math. Ann. 65 [337]), p. 372 f., Anm. ***). Auch andere Verfahren, z. B. Approximation von $K(s,t)$ durch Polynome, liefern das gleiche Resultat.

gelten.[65]) Ist nämlich $\varphi(s)$ eine Lösung von (J), so ist

$$\varphi(s) + \int_a^b H(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) - \int_a^b G(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

also, da $\mathsf{H}(s,t)$ der lösende Kern von $H(s,t)$ ist,

$$\varphi(s) = \left[f(s) - \int_a^b G(s,t)\,\varphi(t)\,dt\right] + \int_a^b \mathsf{H}(s,t)\left[f(t) - \int_a^b G(t,r)\,\varphi(r)\,dr\right]dt$$

oder

$$\varphi(s) + \int_a^b \bar{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) + \int_a^b \mathsf{H}(s,t)\,f(t)\,dt. \tag{5}$$

Man entnimmt aus dieser Rechnung, deren Umkehrbarkeit einleuchtet, unmittelbar, daß (J) und $(\bar{J})$ die gleichen Lösungen haben, ebenso die zugehörigen homogenen Gleichungen (J_h) und $(\bar{J}_h)$. Ist ferner $\bar{\psi}(s)$ eine Lösung der transponierten homogenen Gleichung $(\bar{J}_h')$, also

$$\bar{\psi}(s) + \int_a^b \bar{K}(t,s)\,\bar{\psi}(t)\,dt = 0, \tag{6}$$

und ist

$$\left\{\begin{aligned} \psi(s) &= \bar{\psi}(s) + \int_a^b \mathsf{H}(t,s)\,\bar{\psi}(t)\,dt, \quad \text{also} \\ \bar{\psi}(s) &= \psi(s) + \int_a^b H(t,s)\,\psi(t)\,dt, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

so ist die linke Seite von (6) wegen (4) und (7)

$$= \bar{\psi}(s) + \int_a^b G(t,s)\,\bar{\psi}(t)\,dt + \int_a^b\int_a^b \mathsf{H}(t,r)\,G(r,s)\,\bar{\psi}(t)\,dr\,dt$$

$$= \psi(s) + \int_a^b H(t,s)\,\psi(t)\,dt + \int_a^b G(t,s)\,\psi(t)\,dt = \psi(s) + \int_a^b K(t,s)\,\psi(t)\,dt,$$

d. h. $\psi(s)$ ist eine Lösung der transponierten homogenen Gleichung (J_h'). Mit denselben Mitteln folgt, daß sich die Gültigkeit von Satz 3 von $(\bar{J})$ auf (J) überträgt.

5. *Ist $G(s,t)$ ein Kern endlichen Ranges, so auch $\bar{K}(s,t)$.*

Für $(\bar{J})$ gelten daher wegen 1. alle determinantenfreien Sätze, und wegen 4. trifft das nämliche für (J) zu.

---

65) Wegen der allgemeinen Bedeutung dieses Abspaltungsverfahrens vgl. Nr. 24a [296]). Übrigens sei hervorgehoben, daß G und H hier *nicht* die in 2. und 3. angegebene Bedeutung zu haben brauchen. — Einige Rechnungen über die Resolventen von Kernen, die in ähnlicher Weise wie K und $\bar{K}$ zusammenhängen, findet man bei *H. Batemann*, Mess. (2) 37 (1908), p. 179—187 und bei *S. M. Sanielevici*, Buk. Bulet. 20 (1911), p. 453—467.

Im Gegensatz zu *E. Goursat* und *H. Lebesgue*[56]) wird also die Lösung für den Kern K aus derjenigen für den Kern G hier nicht dadurch gewonnen, daß man n unbegrenzt wachsen läßt und ihre Konvergenz untersucht, sondern sie bei einem passend gewählten festen n direkt konstruiert.

b) Weitere Methoden.

1. Im Anschluß an seine Eigenwerttheorie der Integralgleichung mit symmetrischem Kern (vgl. III A dieses Artikels) bemerkt *E. Schmidt*[65a]), daß einige Sätze der Auflösungstheorie beliebiger Kerne aus den entsprechenden Sätzen für symmetrische Kerne abgeleitet werden können, für die sie ihrerseits aus der Eigenwerttheorie unmittelbar abgelesen werden können. Und zwar führt er (J) durch die Substitution

$$\varphi(s) = \chi(s) + \int_a^b K(t, s)\, \chi(t)\, dt \tag{8}$$

in die Integralgleichung

$$f(s) = \chi(s) + \int_a^b Q(s, t)\, \chi(t)\, dt \tag{9}$$

mit dem symmetrischen Kern

$$Q(s, t) = K(s, t) + K(t, s) + \int_a^b K(s, r)\, K(t, r)\, dr \tag{10}$$

über. Ist die unhomogene Gleichung (9) lösbar, so liefert (8) offenbar eine Lösung von (J). Ist die zu (9) gehörige homogene Gleichung lösbar, so lehrt die leicht auszurechnende Identität

$$\left\{\begin{aligned} &\int_a^b \left\{\psi(s) + \int_a^b K(t, s)\, \psi(t)\, dt\right\}^2 ds \\ &\qquad = \int_a^b \psi(s) \left\{\psi(s) + \int_a^b Q(s, t)\, \psi(t)\, dt\right\} ds, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

daß (J_h') lösbar ist; das Umgekehrte folgt aus (J) in Verbindung mit (8) und (9) leicht. Man erhält also von dem Komplex der determinantenfreien Sätze die folgenden Bestandteile: daß von den beiden Problemen (J) und (J_h') stets eins und nur eins lösbar ist, sowie die genaueren Aussagen über das gegenseitige Verhältnis dieser beiden Probleme, die in Satz 3 implizite enthalten sind.[66])

65a) *E. Schmidt*, Math. Ann. 63[41]), § 13, p. 459—461; vgl. hierzu außerdem [60]).

66) Man vgl. zu dem Kunstgriff der Bildung von (10), der in verschiedenen Auflösungstheorien eine wesentliche Rolle spielt, Nr. 18 b, 3, insbesondere [184a]); dort finden übrigens die Grenzen seiner Leistungsfähigkeit eine Motivierung. — Neuerdings gibt *D. Enskog*, Math. Ztschr. 24 (1926), p. 670—683 und 25 (1926), p. 299—304, einen Weg an, um das hier Fehlende zu ergänzen.

2. *Hilbert* hat dem Gegenstande durch seinen Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen (Nr. **15**) indirekt alle diejenigen Methoden erschlossen, die zur Behandlung der linearen Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten dienen. Natürlich befinden sich darunter zunächst alle Methoden, die sich durch formale Übertragung der hier bei den Integralgleichungen aufgeführten Methoden ergeben (s. Nr. **16** d, 3 und **16** d, 4). Darüber hinaus aber gestattet die größere Beweglichkeit der unendlichvielen Veränderlichen einige weitere Auflösungstheorien (s. Nr. **16** c und **16** d, 2) aufzustellen, die sich bei Integralgleichungen nicht ohne weiteres handhaben lassen.

3. *R. Courant* hat neuerdings[67]) gezeigt, daß man diese letzteren Methoden (Nr. **16** c) trotz der entgegenstehenden Schwierigkeiten so modifizieren kann, daß sie doch direkt auf Integralgleichungen anwendbar werden. Man findet diese Untersuchungen, die in erster Reihe für die Eigenwerttheorie von Bedeutung sind, in Nr. **33** d ihrer Art nach dargestellt. Hier ist nur zu erwähnen, daß sich dabei auch eine Auflösungsmethode ergibt, die auf folgendes hinausläuft. Der Kern der zu lösenden Integralgleichung wird wie bei *E. Goursat* und *H. Lebesgue*[56]) durch einen Kern $K_n(s,t)$ von endlichem Rang approximiert, die Lösung von K wird jedoch aus derjenigen von K_n durch Konvergenzbetrachtungen *allgemeiner* Art (vgl. **33** d) gewonnen, ohne daß an die Fredholmschen Formeln oder irgendeinen expliziten Formelapparat angeknüpft wird.

4. Wegen der *funktionentheoretischen* Herleitung der Auflösungstatsachen vgl. Nr. **39** a, p. 1548 sowie [491]).

c) Varianten zu Einzelheiten.

1. Dafür, daß die Anzahl der linear-unabhängigen Lösungen der homogenen Integralgleichung *endlich* ist, gibt *E. Schmidt*[384]) einen sehr kurzen direkten Beweis mit Hilfe des Orthogonalisierungsprozesses (vgl. Nr. **30** b).[68]) *M. Bôcher*[69]) gibt eine andere Darstellung dieses Beweises, indem er statt des Orthogonalisierungsprozesses *Gram*sche Determinanten verwendet.

2. Man hat verschiedentlich versucht, den Gültigkeitsbereich der Entwicklung nach Iterierten [vgl. Nr. **3**, (5) oder Nr. **11**, (2) und [63])] weiter auszudehnen. Das Verfahren von *C. Neumann* selbst (Nr. **5**,

---

67) *R. Courant,* Math. Ann. 89 (1923), p. 161—178 sowie Literatur A 11, Kap. III, insbesondere § 3 und 8.

68) Die dort vorausgesetzte Symmetrie des Kernes ist für diesen Beweis unerheblich, wie *E. Schmidt*[41]), p. 460 hervorhebt.

69) *M. Bôcher,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 17 (1910), p. 283—284 = Ann. of Math. (2) 14 (1912), p. 84—85.

p. 1354) läuft, ohne daß es bei ihm so formuliert wird, etwa darauf hinaus, daß er für die Reihe (11) in Nr. 5, die für $\lambda = +1$ einen Pol hat, die ersten arithmetischen Mittel[70]) betrachtet und deren Konvergenz für $\lambda = -1$ erweist. Verwendet man statt der arithmetischen Mittel das *Borel*sche Summationsverfahren, so kann man die Gültigkeit der Reihe (2a) von Nr. **11** c über das ganze *Borel*sche Summabilitätspolygon ausdehnen.[71]) Ähnlich könnte man den *Mittag-Leffler*schen Stern verwenden u. dgl. m.

3. Über das Auflösungsverfahren, das *D. Enskog*[72]) für definite, symmetrische Kerne angegeben hat, vgl. Nr. **15** e.

11. Die iterierten und assoziierten Kerne. a) Unter den *Iterierten* eines Kernes $K(s,t)$ versteht man die sukzessive zu bildenden Funktionen

$$(1)\quad K^{(2)}(s,t) = \int_a^b K(s,r)K(r,t)dr,\quad K^{(3)}(s,t) = \int_a^b K^{(2)}(s,r)K(r,t)dr, \ldots;$$

es ist also

$$K^{(n)}(s,t) = \int_a^b K^{(n-1)}(s,r)K(r,t)\,dr$$

$$= \int_a^b \cdots \int_a^b K(s,r_1)\ldots K(r_{n-1},t)dr_1\ldots dr_{n-1} = \int_a^b K(s,r)\,K^{(n-1)}(r,t)\,dr$$

und allgemeiner

$$(1\,\mathrm{a})\qquad K^{(\mu+\nu)}(s,t) = \int_a^b K^{(\mu)}(s,r)\,K^{(\nu)}(r,t)\,dr.$$

Der lösende Kern $\mathsf{K}(s,t)$ (vgl. Nr. 9, p. 1372f.) kann mit Hilfe der iterierten Kerne durch die Reihe

$$(2)\qquad \mathsf{K}(s,t) = -K(s,t) + K^{(2)}(s,t) \mp \cdots$$

dargestellt werden, falls diese gleichmäßig konvergiert.[73]) In diesem Falle kann man nämlich unmittelbar verifizieren, daß sie den definierenden Formeln des lösenden Kernes (3a), (3b) von Nr. 9 genügt.

---

70) Wenn er seine Methode als die „des arithmetischen Mittels" bezeichnet, so bezieht sich diese Benennung auf ein anderes Moment.

71) *A. Vergerio*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 26_1 (1917), p. 426—433; *G. Sannia*, ebenda 28_2 (1919), p. 429—433.

72) *D. Enskog*, Kinetische Theorie der Vorgänge in mäßig verdünnten Gasen, Diss. Upsala 1917, 160 S.; Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 16 (1921), Nr. 16, 60 S.; vgl. auch die Darstellung bei *E. Hecke*, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 274—286, insbes. § 4.

73) Formel (2) ist mit Formel (8a) von Nr. 4 identisch, die durch die Einführung der iterierten Kerne diese übersichtlichere Gestalt gewinnt. — Die Reihe (2) ist nicht immer gleichmäßig konvergent (vgl. Nr. 5, p. 1354); sie ist es aber gewiß für alle Volterraschen Kerne (Nr. 3 oder **23** a) und für die „kleinen Kerne" [Nr. **10** a, 2 und [63])].

b) Kennt man die Resolvente K_n des Kernes $K^{(n)}$, so kann man daraus leicht die Resolvente K des Kernes K folgendermaßen ableiten[74]: sei

$$G_n(s,t) = -K(s,t) + K^{(2)}(s,t) \mp \cdots + (-1)^{n-1}K^{(n-1)}(s,t),$$

so ist

$$\mathsf{K}(s,t) = G_n(s,t) + \mathsf{K}_n(s,t) + \int_a^b G_n(s,r)\,\mathsf{K}_n(r,t)\,dr. \tag{3}$$

Umgekehrt folgt aus der Existenz von K noch nicht diejenige von K_n; existieren jedoch auch die Resolventen $\mathsf{K}_\varepsilon, \mathsf{K}_{\varepsilon^2}, \ldots, \mathsf{K}_{\varepsilon^{n-1}}$ der Kerne $\varepsilon K, \varepsilon^2 K, \ldots, \varepsilon^{n-1}K$, wo ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist, so existiert auch K_n und ist

$$\mathsf{K}_n = \frac{1}{n}\{\mathsf{K}(s,t) + \varepsilon\mathsf{K}_\varepsilon(s,t) + \cdots + \varepsilon^{n-1}\mathsf{K}_{\varepsilon^{n-1}}(s,t)\}.\text{[74]} \tag{4}$$

Eine Lösung $\varphi(s)$ der homogenen Gleichung (J_h) mit dem Kern K ist zugleich auch eine Lösung der homogenen Gleichung $(J_h^{(n)})$ mit dem Kern $K^{(n)}$. Umgekehrt hat, wenn $(J_h^{(n)})$ lösbar ist, mindestens eine homogene Gleichung mit *einem* der Kerne $K, \varepsilon K, \ldots, \varepsilon^{n-1}K$ eine Lösung, die jedoch nicht notwendig dieselbe zu sein braucht.[75]

c) Betrachtet man wie am Schluß von Nr. 9 statt $K(s,t)$ den Kern $-\lambda k(s,t)$ und setzt $\mathsf{K}(s,t) = \lambda\varkappa(\lambda; s,t)$, so geht (2) in die Potenzreihe in λ über:

$$\varkappa(\lambda; s,t) = k(s,t) + \lambda k^{(2)}(s,t) + \lambda^2 k^{(3)}(s,t) + \cdots \tag{2a}$$

Sie konvergiert, wie man etwa der Schlußbemerkung von Nr. 9 entnimmt, bis zu der dem Betrage nach kleinsten Nullstelle von $\delta(\lambda)$.[75a]

Auch die Determinantenformel von Nr. 9 kann man für kleines λ einfacher darstellen[76], wenn man sich der sog. *Spuren* des Kernes $k(s,t)$ bedient, d. h. der Größen

$$u_1 = \int_a^b k(s,s)\,ds,\quad u_2 = \int_a^b k^{(2)}(s,s)\,ds,\ \ldots,\ u_n = \int_a^b k^{(n)}(s,s)\,ds,\ \ldots \tag{5}$$

Und zwar ist alsdann für hinreichend kleines λ

$$-\frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} = u_1 + u_2\lambda + u_3\lambda^2 + \cdots = \int_a^b \varkappa(\lambda; s,s)\,ds, \tag{6}$$

---

74) Implizite bei *J. Fredholm*[82], für $n = 2$ bei *D. Hilbert*, Grundzüge, p. 70; ausgeführt bei *J. Plemelj*[53] und bei *E. Goursat*, Toulouse Ann. (2) 10 (1908), p. 5—98, insbes. p. 15.

75) *D. Hilbert*, 2. Mitteilung = Grundzüge, p. 69, Satz 23.

75a) *T. Carleman*, Paris C. R. 169 (1919), p. 773—776 folgert aus dieser Reihenentwicklung mit Hilfe der Hadamardschen Theorie den meromorphen Charakter von $\varkappa$.

76) *J. Fredholm*, Acta 27[29], § 5.

so daß

$$\delta(\lambda) = e^{-u_1\lambda - \frac{u_2}{2}\lambda^2 - \cdots}$$

ausfällt, oder

$$\delta(\lambda) = 1 + \frac{\delta_1}{1!}\lambda + \frac{\delta_2}{2!}\lambda^2 + \cdots, \tag{7}$$

wo

$$\delta_n = \begin{vmatrix} u_1 & n-1 & 0 & \cdot & 0 \\ u_2 & u_1 & n-2 & \cdot & 0 \\ u_3 & u_2 & u_1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{n-1} & u_{n-2} & \cdot & u_1 \end{vmatrix}. \tag{7a}$$

Eine ähnliche Darstellung kann man für die ersten Fredholmschen Minoren geben, wobei neben den Spuren noch die iterierten Kerne eingehen.[77])

d) Die Funktion von $2m$ Veränderlichen[78])

$$\frac{1}{m!} K\begin{pmatrix} s_1 \dots s_m \\ t_1 \dots t_m \end{pmatrix}$$

(in der Bezeichnungsweise von Nr. **9**) heißt *der* m^{te} *zu* K *assoziierte Kern*.[79]) Formal gilt von diesem: Der m^{te} assoziierte Kern von K ist dann und nur dann identisch 0, wenn K ein Kern vom Range m ist (vgl. Nr. **10** a, 1)[80]); bildet man aus dem m^{ten} assoziierten Kern die μ^{te} Iterierte, so erhält man den m^{ten} assoziierten Kern von $K^{(\mu)}$. Vgl. im übrigen wegen der wesentlichen Eigenschaften der assoziierten Kerne Nr. **31** b und **39** b.

12. Uneigentlich singuläre Integralgleichungen.[81]) Die bisher gemachte Voraussetzung der *Stetigkeit* des Kerns ist für die in Nr. **9** und **10** aufgeführten Auflösungstheorien mehr oder weniger entbehrlich. Daß für abteilungsweise stetige Funktionen u. dgl. die sämtlichen Schlüsse gültig bleiben, ist unmittelbar ersichtlich. Darüber hinaus aber hat

77) *T. Lalesco*, Paris C. R. 145 (1907), p. 1136—1137 und Literatur A 6, p. 25 f.; *H. Poincaré*, Paris C. R. 147 (1908), p. 1367—1371; Acta math. 33 (1909), p. 57—86 = Assoc. Franç. (Lille) 38 (1910), p. 1—28 sowie Literatur C 4.

78) Vgl. Nr. **13** a, wo allgemein Kerne von zwei Reihen von je m Veränderlichen betrachtet werden.

79) *J. Schur*, Math. Ann. 67 (1909), p. 306—339, insbes. p. 318. Der Begriff ist dem algebraischen Begriff der Matrix der m-reihigen Minoren einer gegebenen n-reihigen Matrix nachgebildet; im Gegensatz zu den Fredholmschen Minoren ist hier m endlich gehalten, während n unendlich wird.

80) *E. Goursat*[74]), p. 80.

81) *Eigentlich singuläre Integralgleichungen,* d. h. solche, bei denen die Tatsachen der *Fredholm*schen Theorie nicht mehr im vollen Umfange gelten, findet man in Nr. **21**.

man, insbesondere um den Erfordernissen der Anwendungen zu entsprechen, eine Reihe von Untersuchungen angestellt, die abgesehen von den unter a) zu schildernden lediglich den Geltungsbereich der verschiedenen Auflösungsformeln analysieren.

a) Übergang zu iterierten Kernen. Alsbald bei der Begründung seiner Theorie hat *J. Fredholm* gezeigt[82]), daß man solche unstetigen Kerne beherrschen kann, bei denen der n^{te} iterierte Kern stetig ist. In der Tat gestatten die Formeln von Nr. **11** b ohne weiteres auch dann, wenn K unstetig, jedoch $K^{(n)}$ stetig ist und wenn $K^{(n)}$ eine Resolvente besitzt, aus dieser eine Resolvente von K zu konstruieren.[83]) *Fredholm* zeigt nun darüber hinaus, indem er die Pseudoresolvente von $K^{(n)}$ in Betracht zieht, wie man weitere Tatsachen seiner Theorie auf diesen Fall übertragen kann; ausgeführt ist bei ihm der Beweis, daß, wenn die homogene Gleichung (J_h) mit dem Kern K keine Lösung hat, auch die transponierte (J_h') unlösbar ist, und daß dann eine Resolvente K existiert.[84]) Ihre Darstellung als Quotient zweier ganzen transzendenten Funktionen gibt *E. W. Hobson*[89]).

Insbesondere ist die *Fredholm*sche Voraussetzung erfüllt, wenn ein $\alpha < 1$ existiert, so daß $K(s,t)(s-t)^\alpha$ beschränkt ist; in diesem Falle muß $n > \frac{1}{1-\alpha}$ gewählt werden $\left(\text{also } \alpha < 1 - \frac{1}{n}\right)$.[84a])

b) Modifikation der Fredholmschen Formeln. *D. Hilbert* hat in den Fredholmschen Formeln die Größen $K(x_\alpha, x_\alpha)$, die in der Diagonale der einzelnen Determinanten auftreten, durch Nullen ersetzt und bemerkt, daß die so modifizierten Ausdrücke dann noch konvergieren, wenn K von niedrigerer als der $^1/_2{}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird ($\alpha < \frac{1}{2}$), und die Lösungen liefern.[85]) Die modifizierten Ausdrücke sind im Falle stetiger Kerne übrigens nicht gleich den ursprünglichen Fredholmschen, sondern unterscheiden sich von ihnen durch den gemeinsamen Exponentialfaktor $e^{-\lambda u_1}$[86]), der sich in den die Resolventen darstellenden Quotienten (Nr. **9**, Formel (3) und (8))

82) *J. Fredholm,* Paris C. R. 134[29]), p. 1561 und Acta math. 27[29]), § 6.

83) *D. Hilbert*[75]) und p. 71 f. für $n = 2$.

84) *J. Fredholm,* Acta 27[82]), p. 388—390.

84a) Eine Schranke für $K^{(n)}(s,t)$ bei *M. Picone,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 30_2 (1921), p. 90—92.

85) *D. Hilbert,* 1. Mitteil. = Grundzüge, Kap. VI, p. 30—35; die Tatsachen waren schon vorher in den Dissertationen von *O. D. Kellogg*[35]) und *A. Andrae*[35]) (1902 und 1903) benutzt; vgl. außerdem *O. D. Kellogg*[55]), § 5. — Weitergehende Anwendung dieser Methode bei *E. W. Hobson*[89]), Nr. 12.

86) Hier wird die Bezeichnung $K(s,t) = -\lambda k(s,t)$ von Nr. **11** c wieder aufgenommen.

heraushebt.[87]) *Hilbert* führt den Beweis, indem er K durch eine Folge stetiger Kerne approximiert.[88])

H. Poincaré[77]) unterdrückt allgemeiner in den Determinanten $K\binom{x_1 \dots x_n}{x_1 \dots x_n}$ (vgl. Nr. **9** Anfang) alle Terme, die einen Faktor der Form

$$K(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) K(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}) \dots K(x_{\alpha_\nu}, x_{\alpha_1})$$

enthalten, wo $\nu < n$ ist, und erhält damit die Lösungen für $\alpha < 1 - \frac{1}{n}$. Der Beweis geht bei *Poincaré* von den in Nr. **11** c erwähnten Tatsachen aus und von der Bemerkung, daß für $\alpha < 1 - \frac{1}{n}$ die n^{te} Iterierte und alle folgenden endlich und stetig sind, so daß also die Spuren von u_n ab existieren. Es behält daher zwar nicht $\delta(\lambda)$, aber derjenige Ausdruck, der bei stetigem $k(s, t)$[86]) in diesem Falle

$$= \delta(\lambda) e^{\frac{u_1}{1}\lambda + \frac{u_2}{2}\lambda^2 + \dots + \frac{u_{n-1}}{n-1}\lambda^{n-1}} = e^{-\frac{u_n}{n}\lambda^n - \frac{u_{n+1}}{n+1}\lambda^{n+1} - \dots}$$

ist, seinen Sinn, zunächst für kleine λ, und es gelingt durch funktionentheoretische Methoden, seinen Charakter als ganze transzendente Funktion nachzuweisen sowie seine Übereinstimmung mit dem modifizierten Ausdruck; Entsprechendes geschieht für die ersten Fredholmschen Minoren.

Für *Kerne, von denen keine Iterierte beschränkt ist*, deutet *Poincaré*[90]) an, wie man in dem Falle durchkommen kann, daß wenigstens die Spuren von einer gewissen an endlich sind. Andere Fälle spe-

---

87) Diese Tatsache ist zum ersten Male angegeben bei *Kellogg*[55]), p. 175. *E. Garbe*[54]), p. 13, hat das algebraische Analogon durchgerechnet und daraus durch Grenzübergang die *Hilbert*sche Aussage abgeleitet.

88) *T. Carleman*, Math. Ztschr. 9 (1921), p. 196—217, beweist mit derselben Methode und unter Verschärfung der *Hilbert*schen Abschätzung durch Resultate von *J. Schur*[485]) (vgl. Nr. **39** b), daß das gleiche gilt unter der alleinigen Voraussetzung, daß $\iint k^2\, ds\, dt$ im Lebesgueschen Sinne existiert. Für den Fall, daß das Doppelintegral im Riemannschen Sinne existiert und < 1 ist, hatte dies schon *H. v. Koch*, Palermo Rend. 28 (1909), p. 255—266 (vgl. dazu noch [96]), p. 13) gezeigt. Auf andere Weise hatte *H. Lebesgue*[56]) Bedingungen für die Gültigkeit der Fredholmschen Formeln erhalten, die auf die Darstellbarkeit von K durch sukzessive Limesbildungen von Polynomen und die gleichmäßige Endlichkeit gewisser Iterierten hinausläuft.

89) *E. W. Hobson*, London Math. Soc. Proc. (2) 13 (1914), p. 307—340. Hier werden Unstetigkeiten allgemeineren Charakters zugelassen, unter Verwendung Lebesguescher Integrale.

90) *H. Poincaré*. Acta math. 33[77]), § 4. Vgl. auch Nr. **15** c, p 1397, [118]).

zieller Art werden durchgeführt bei *L. Lichtenstein*[91]) und *E. W. Hobson.*[92])

c) Benutzung von *E. Schmidts* Abspaltungsverfahren. *E. Schmidt* selbst[93]) gibt an, daß seine Methode unter folgenden Bedingungen anwendbar bleibt: 1. die Unstetigkeitsstellen von $K(s, t)$ haben auf jeder Geraden $s =$ konst., $t =$ konst. den äußeren Inhalt 0, 2. die Integrale

$$\int_a^b [K(s, t)]^2 dt \quad \text{und} \quad \int_a^b [K(t, s)]^2 dt$$

existieren und sind stetige, nicht identisch verschwindende Funktionen von s. Weiteres bei *E. E. Levi*[94]) und *A. C. Dixon.*[95])

d) Integralgleichungen mit unendlichgroßem Integrationsintervall sind insofern hier zu erwähnen, als sie durch einfache Transformation in Integralgleichungen mit endlichem Integrationsintervall, aber unendlichem Kern übergehen.[96])

13. Allgemeinere Integrationsbereiche. Systeme von Integralgleichungen. Um an eine konkrete Vorstellung anzuknüpfen, ist in den vorangehenden Nummern stets der Fall eines eindimensionalen (reellen) endlichen Intervalls zugrunde gelegt worden. Eine entscheidende und insbesondere für die Anwendungen bedeutsame Eigenschaft der Theorie der Integralgleichungen ist die Schmiegsamkeit, mit der sie sich den verschiedenartigsten Verallgemeinerungen anzupassen vermag. Die Zusammenstellung der Einzeluntersuchungen dieser Art, die unten folgt, kann kein Bild von dem geben, worauf es hier ankommt. Das Wesentliche ist die *Durchsichtigkeit der Beweismethoden der Integralgleichungslehre,* die die Ausdehnbarkeit der zugrunde gelegten Vor-

91) *L. Lichtenstein,* J. f. Math. 140 (1911), p. 100—119: Kerne von der Form $P_1(s, t) + f(s) P_2(s, t)$, wo P_1, P_2 stetig, $f(s)$ summabel und von niederer als 1. Ordnung unendlich.

92) *E. W. Hobson*[89]): Kerne von der Form $\mu(s) \nu(t) P(s, t)$, wo P beschränkt und summabel, $\mu(s)$, $\nu(s)$ nicht beschränkt, aber $\mu(s) \cdot \nu(s)$ summabel; ein Spezialfall bei *C. E. Love,* Ann. of Math. (2) 21 (1919), p. 104—111. — *A. Ostrowski,* F. d. Math. 45 (1921), p. 521, weist auf eine Verallgemeinerung hin.

93) *E. Schmidt*[42]), p. 174; [41]), p. 467 und p. 457 ff.

94) *E. E. Levi,* Rom Acc. Linc. (5) 16_2 (1907), p. 604—612, setzt voraus, daß $\int |K(s, t)| dt$ gleichmäßig konvergiert im Sinne von *de la Vallée-Poussin,* d. h. $\int_{t-\delta}^{t} |K(s, t)| dt$ kann für alle s, t gleichmäßig beliebig klein gemacht werden.

95) *A. C. Dixon,* London Math. Soc. Proc. (2) 7 (1909), p. 314—337 wendet die Methode für beschränkte Kerne und den *Lebesgue*schen Integralbegriff an.

96) *H. v. Koch,* Arkiv f. Mat. 7 (1911), Nr. 4, 17 S. behandelt Kerne für das Intervall 0 bis ∞, unter der Annahme $\int_0^\infty |K(s,s)| ds$ konvergent, $\int_0^\infty\int_0^\infty K^2 ds\, dt < 1$ u. ä.

aussetzungen auf mehrere unabhängige Veränderliche, auf andere Integrationswege u. dgl. m. unmittelbar abzulesen gestattet. Von einem erweiterten Standpunkt wird eine solche Betrachtungsweise in Nr. **20**d und Nr. **45**c zur Geltung kommen.

a) Allgemeinere Integrationsbereiche. Daß die Auflösungstheorie für *mehrfache* Integrale, d. h. dann, wenn sowohl s als auch t Stellen eines Gebietes im n-dimensionalen Raum bedeuten, unmittelbar in Geltung bleibt[97]), ist bereits in allen grundlegenden Arbeiten der Theorie hervorgehoben worden.[19])[29])[54])[41])[42]) Ebenso können s und t über einen *komplexen* Integrationsweg erstreckt sein, längs dessen die eingehenden Funktionen als reelle oder auch komplexe Belegungen aufgepflanzt sind (vgl. Nr. **21**a, Schluß). Wegen solcher *Integrationsbereiche, die sich ins Unendliche erstrecken,* vgl. Nr. **12**d.

b) Als gemischte Integralgleichungen[98]) bezeichnet man Gleichungen vom Typus

$$(1)\qquad \varphi(s)+\sum_{\nu=1}^{n} K_\nu(s)\varphi(x_\nu)+\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt=f(s),$$

wo $f(s)$, $K(s,t)$, $K_1(s), \ldots, K_n(s)$ gegebene Funktionen und $x_1, \ldots, x_n$ gegebene Stellen im Intervall $a \leqq s \leqq b$ sind, und allgemeiner Gleichungen, in denen Integrale verschiedener Dimension nebeneinander auftreten, wie z. B.

$$(2)\qquad \varphi(s_1,s_2)+\int_{a_1}^{b_1} K_1(s_1,s_2;t)\,\varphi(t,s_2)\,dt+\int_{a_2}^{b_2} K_2(s_1,s_2;t)\,\varphi(s_1,t)\,dt$$
$$+\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} K_3(s_1,s_2;t_1,t_2)\,\varphi(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2=f(s_1,s_2).$$

97) In Ergänzung von Nr. **12** muß hier hervorgehoben werden, daß Bedingungen, unter denen die Iterierten von einer bestimmten an endlich sind (Schlußbemerkung von **12**a), nur unter sinngemäßer Modifikation für mehr Dimensionen aufgestellt werden können; z. B. ist für 2 Dimensionen die Endlichkeit von $\varrho^\alpha K(s_1, s_2; t_1, t_2)$, wo $\varrho^2=(s_1-t_1)^2+(s_2-t_2)^2$, für $\alpha<2$ eine hinreichende Bedingung (*J. Fredholm,* Acta 27[29]), p. 387).

98) *W. A. Hurwitz,* Note on mixed linear integral equations, Amer. Math. Soc. Bull. 18 (1912), p. 291—294 und Amer. Math. Soc. Trans. 16 (1915), p. 121—133; *A. Kneser,* Palermo Rend. 37 (1914), p. 169—197, der den Namen *belastete Integralgleichungen* gebraucht. Übrigens hatte schon *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 5_1 (1896), p. 289—300, Gleichungen vom Typus (2) behandelt. — Nach Lösungen der gewöhnlichen Integralgleichung 2. Art, die an einer gegebenen Stelle oder deren Ableitung an einer gegebenen Stelle verschwindet oder die sonstigen linearen Bedingungen genügt, hatten *H. Bateman,* Darb. Bull. (2) 30 (1906), p. 264—270, Cambr. Trans. 20 (1907), p. 281—290 und *A. Myller,* Darb. Bull. (2) 31 (1907), p. 74—76, gefragt.

Die Lösung solcher gemischter Integralgleichungen ergibt sich ebenfalls im Sinne der vorangeschickten allgemeinen Bemerkung, wenn man den aus Summation und Integration bzw. aus Integralen verschiedener Vielfachheit oder Erstreckung gemischten Operator an Stelle der gemeinen Integration in der gewöhnlichen Integralgleichung treten läßt.[99]) Ein anderer, der Natur und der rechnerischen Behandlung der gemischten Integralgleichungen gut angepaßter Weg benutzt den in Nr. **10**a, 4 formulierten Abspaltungsgedanken und wendet diesen, anders als bei dem *E. Schmidt*schen Verfahren, auf die durch die verschiedendimensionalen Bestandteile sich hier naturgemäß ergebende Zerspaltung an[100])[101]).

c) Systeme von Integralgleichungen. Man führt das System

$$\varphi_\alpha(s) + \sum_{\beta=1}^{n} \int_a^b K_{\alpha\beta}(s,t)\, \varphi_\beta(t)\, dt = f_\alpha(s) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

für die n unbekannten Funktionen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ auf eine einzige gewöhnliche Integralgleichung für das n-mal so große Intervall $a \leqq s \leqq a + n(b-a)$ zurück[102]), indem man die n unbekannten Funktionen nicht in einem und demselben Intervall, sondern in n gleich großen aneinanderstoßenden Intervallen getrennt ausbreitet und zu einer einzigen Funktion $\varphi(s)$ zusammenfaßt, und mit den bekannten Funktionen in entsprechender Weise verfährt; man setzt also für

$$a + (\alpha - 1)(b - a) \leqq s < a + \alpha(b - a),$$
$$a + (\beta - 1)(b - a) \leqq t < a + \beta(b - a)$$

99) *A. Kneser*[98]), § VI hat, gestützt auf Mitteilungen von *E. Schmidt*, genaue Axiome formuliert, die ein solcher Operator erfüllen muß, damit die Eigenwerttheorie von *E. Schmidt* gültig ist; es ist leicht, dies auf das *Schmidt*sche Abspaltungsverfahren oder andere Auflösungstheorien zu übertragen; vgl. auch Nr. **24** c, [309]).

100) *V. Volterra*[98]); *L. Sinigallia,* Lomb. Ist. Rend. (2) 44 (1911), p. 292—313; *J. Pérès,* Palermo Rend. 35 (1913), p. 253—264; *A. Kneser*[98]), § V.

101) In anderer Weise, nämlich durch Approximation mit gewöhnlichen Integralgleichungen, behandelt *G. Andreoli,* Rom Acc. Linc. Rend. 23_2 (1914), p. 159—162, den Gegenstand.

102) *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 5_1 (1896), p. 177—185; *O. D. Kellogg,* Diss.[35]), p. 12; *J. Fredholm,* Acta 27[29]), p. 378f. — *G. Greggi,* Ven. Ist. Atti 71 [(8) 14] (1912), p. 541—551 rechnet die sich daraus ergebende Gestalt der Lösungsformeln explizite aus; *M. Botasso,* Torino Att. 48 (1913), p. 19—42 und *L. J. Rouse,* Diss. Michigan, 1918, 33 S.; Amer. Math. Soc. Bull. 24 (1918), p. 426; Tôhoku Math. J. 15 (1919), p. 184—216, besprechen Systeme von weniger Gleichungen als unbekannten Funktionen. — Die in der mathematischen Physik auftretenden Systeme (3) werden oft vektoriell zusammengefaßt [*C. E. Weatherburn,* Quart. J. 46 (1915), p. 334—356, führt es in einer besonderen Arbeit aus].

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi(s) = \varphi_\alpha(s - (\alpha - 1)(b - a)), \ f(s) = f_\alpha(s - (\alpha - 1)(b - a)), \\ K(s, t) = K_{\alpha\beta}(s - (\alpha - 1)(b - a), t - (\beta - 1)(b - a)) \\ \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Das allgemeinere System

$$(5)\qquad \sum_{\beta=1}^{n} k_{\alpha\beta}(s)\,\varphi_\beta(s) + \sum_{\beta=1}^{n}\int_a^b K_{\alpha\beta}(s, t)\,\varphi_\beta(t)\,dt = f_\alpha(s) \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

führt man durch Kombination der Gleichungen auf (3) zurück, falls die Determinante $|k_{\alpha\beta}(s)|$ nirgends verschwindet.[103])

d) Abhängigkeit der Lösung vom Integrationsbereich. Dieser Gegenstand, der in der Eigenwerttheorie eine erhebliche Bedeutung hat (s. Nr. 35), ist hier nur vereinzelt behandelt worden.[104])

14. Besondere Kerne. In der Literatur findet man, abgesehen von den vielen in den Anwendungen auftretenden einzelnen Kernen, die nach der allgemeinen Theorie behandelt werden, eine Reihe Bemerkungen über besondere Kerne. Diese Kerne sind fast durchgehend vom Typus $K(s, t) = f(t - s)$, wo $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode $b - a$ ist.[105]) Die besondere Eigenschaft dieser Kerne ist die, daß der lösende Kern wieder den gleichen Typus hat; man kann dies der *Fredholm*schen Theorie entnehmen, aber auch direkt aus der Eigenart des Kernes unmittelbar folgern, wenn man von der allgemeinen Theorie nur weiß, daß die Lösung der Integralgleichung (J)

103) *Ch. Platrier*[53]), Chap. III. Ist die Determinante an einzelnen Stellen 0, aber von niederer als der 1. Ordnung, so erhält er (Chap. V) uneigentlich singuläre Systeme von Integralgleichungen.

104) *Ch. Platrier,* Nouv. Ann. (4) 13 (1913), p. 183—186, differenziert die Lösung nach der oberen Grenze; *J. Puzyna,* Krak. Anz. (A), 1913, I, p. 1—45.

105) *E. v. Egerváry,* Math. és phys. lapok 23 (1914), p. 303—355; *G. C. Evans,* Amer. Math. Soc. Bull. 22 (1916), p. 493—503, hier auch allgemeine Kerne vom Typus $f(s - t) + g(s + t)$. Wie beide hervorheben, sind das algebraische Analogon dieser Kerne diejenigen Determinanten, die man *Zyklanten* oder *Zirkulanten* (Encykl. I A 2, Nr. 27) nennt; vgl. auch die entsprechenden Bildungen bei unendlichvielen Variabeln Nr. 43d. *C. Cailler,* Ens. 15 (1913), p. 33—47, betrachtet Systeme von Integralgleichungen, deren n^2 Kerne einzeln *Volterra*sche Kerne vom Typus $f(s - t)$ sind, also nicht genau vom obigen Typus, aber doch auch, wie *O. Toeplitz* in F. d. M. 44 (1918), p. 406 hervorhebt, alle untereinander vertauschbar. Auf dieser Tatsache allein beruht es, wenn *Cailler* mit Erfolg Determinanten betrachtet, deren Elemente nicht Zahlen, sondern Kerne der geschilderten Art sind, und mit deren Hilfe das System auf eine einzige, gewöhnliche Integralgleichung zurückführt. — Vgl. noch *D. Pompeju,* Palermo Rend. 35 (1913), p. 277—281 und Math. Ann. 74 (1913), p. 275—277. — Gewisse Grenzfälle solcher Kerne bei *A. C. Dixon,* London Math. Soc. Proc. (2) 17 (1918), p. 20—22. — Funktionentheoretische Behandlung der Integralgleichung der Potentialtheorie (Nr. 5) bei *J. Fredholm,* Acta math. 45 (1924), p. 11—28.

eindeutig ist. Eine entsprechende Bemerkung ist für Kerne in drei Dimensionen gemacht worden, die orthogonalinvariant sind.[106]) Alle diese Bemerkungen subsumieren sich in Wahrheit einem allgemeinen Prinzip (vgl. Nr. **18** b, 3, Ende); vgl. auch die Untersuchungen über vertauschbare Kerne, insbes. Nr. **26** a, 3.

Weitere besondere Integralgleichungen findet man in Nr. **21** c **22** c, **23** d, **37**, **44** b.

B. Die Methode der unendlichvielen Veränderlichen.

D. Hilbert[39]) hat parallel zur Theorie der Integralgleichungen eine Theorie der Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten entwickelt, die zugleich eine neue Methode zur Behandlung sowohl der Auflösungstheorie als auch der Eigenwerttheorie der Integralgleichungen liefert (vgl. Nr. 8); hier ist zunächst der Teil darzustellen, der für die *Auflösungstheorie* der Integralgleichung 2. Art (Kap. II, A) in Betracht kommt.

15. Zusammenhang zwischen Integralgleichungen und linearen Gleichungssystemen mit unendlichvielen Unbekannten.[107])

a) Das Bindeglied zwischen Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten ist ein *orthogonales vollständiges Funktionensystem*[108]) für das Intervall (a, b), d. i. ein System von unendlichvielen in $a \leqq s \leqq b$ stetigen Funktionen $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots$, die den folgenden beiden Bedingungen genügen:

1. sie sind für das Intervall (a, b) *orthogonal und normiert:*

$$(1) \qquad \int_a^b \omega_p(s)\, \omega_q(s)\, ds = e_{pq} = \begin{cases} 0 & (p \neq q), \\ 1 & (p = q); \end{cases}$$

2. sie genügen der *Vollständigkeitsrelation*[109]), d. h. für jede stetige Funktion $u(s)$ besteht die Identität

$$(2\,\mathrm{a}) \qquad \int_a^b u(s)^2 ds = \left\{\int_a^b u(s)\, \omega_1(s)\, ds\right\}^2 + \left\{\int_a^b u(s)\, \omega_2(s)\, ds\right\}^2 + \cdots,$$

106) Im Anschluß an *D. Hilberts* Untersuchungen über kinetische Gastheorie *E. Hecke,* Math. Ann. 78 (1917), p. 398—404.

107) Die historische Darstellung des Gegenstandes in Nr. 8 wird hier *nicht* vorausgesetzt.

108) *D. Hilbert,* 5. Mitteil., Gött. Nachr. 1906 = Grundzüge, Kap. XIII, p. 177 ff.

109) Über die Aufstellung dieser Relation für trigonometrische Funktionen und die Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten vgl. Nr. 8 [44]). — Daß die rechte Seite von (2 a) nicht größer ist als die linke (sog. „*Bessel*sche Ungleichung", Nr. **30** b [385])), ist bekanntlich eine *Folge* von (1); vgl. Encykl. II C 11, *Hilb-Szász,* Nr. 2.

oder — was nur scheinbar allgemeiner ist — für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s)$, $v(s)$ besteht die Identität

$$(2b)\qquad \int_a^b u(s)v(s)\,ds = \int_a^b u(s)\,\omega_1(s)\,ds \int_a^b v(s)\,\omega_1(s)\,ds + \int_a^b u(s)\,\omega_2(s)\,ds \int_a^b v(s)\,\omega_2(s)\,ds + \cdots$$

Das hier auftretende Integral vom Typus

$$(2c)\qquad x_p = \int_a^b u(s)\,\omega_p(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

nennt man den p^{ten} *Entwicklungskoeffizienten* (*Fourierkoeffizienten*) der Funktion $u(s)$ in bezug auf das Orthogonalsystem $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$, ...

In der Sprache der analytischen Geometrie läßt sich der Gebrauch eines solchen Funktionensystems $\omega_p(s)$ als Einführung eines *rechtwinkligen Koordinatensystems im Raume Ω aller stetigen Funktionen* deuten. Sieht man die Werte $u(s)$ als Bestimmungsstücke eines die Funktion $u(s)$ repräsentierenden Punktes in Ω bzw. des „Vektors" vom Koordinatenanfangspunkt ($u(s) \equiv 0$) nach diesem Punkt und $\int_a^b u(s)^2 ds$ als Quadrat der Länge dieses Vektors an, so bestimmen die Funktionen $\omega_p(s)$ gemäß (1) unendlichviele paarweis aufeinander senkrechte Vektoren von der Länge 1. Der Entwicklungskoeffizient (2c) aber ist als Länge der Projektion des Vektors $u(s)$ in die Richtung von $\omega_p(s)$ anzusprechen, und (2a) besagt, daß das Quadrat der Länge jedes Vektors $u(s)$ gleich der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf die Richtungen $\omega_p(s)$ ist (pythagoreischer Satz). Betrachtet man also die Vektoren $\omega_p(s)$ als „Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems" in Ω, die Größen (2c) als die „rechtwinkligen Koordinaten" von $u(s)$, so deutet sich (2a) dahin, daß die Menge der verwendeten Achsen ausreicht, um sämtliche stetigen Funktionen nach dem Muster der kartesischen Koordinatengeometrie darzustellen.

Ein Beispiel eines solchen vollständigen normierten Orthogonalsystems bieten die durch eine passende lineare Substitution der unabhängigen Veränderlichen vom Intervall $(0, 2\pi)$ auf das Intervall $a \leqq s \leqq b$ übertragenen trigonometrischen Funktionen[44])

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}},\quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2\pi(s-a)}{b-a},\quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2\pi(s-a)}{b-a},$$
$$\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{4\pi(s-a)}{b-a},\quad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{4\pi(s-a)}{b-a},\quad \ldots$$

Weitere vollständige Orthogonalsysteme erhält man in folgender Weise[110]): Es sei $P_1(s), P_2(s), \ldots$ eine Folge stetiger Funktionen im Intervall $a \leqq s \leqq b$ der Eigenschaft: jede stetige Funktion $u(s)$ läßt sich in $a \leqq s \leqq b$ durch lineare homogene Aggregate endlichvieler $P_1(s), \ldots, P_n(s)$ „im Mittel" beliebig genau approximieren, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ lassen sich die Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ derart bestimmen, daß

$$\int_a^b \left\{u(s) - c_1 P_1(s) - \cdots - c_n P_n(s)\right\}^2 ds < \varepsilon. \tag{3}$$

Der bekannte Orthogonalisierungsprozeß von *E. Schmidt*[111]) liefert nämlich, falls keine der Funktionen $P_n(s)$ von den früheren der Folge linear abhängig ist, rekursiv eine Folge linearer homogener Kombinationen $\omega_n(s)$ von $P_1(s), \ldots, P_n(s)$, die orthogonal und normiert sind:

$$(4) \quad \begin{cases} \omega_1(s) = \dfrac{P_1(s)}{\sqrt{\int_a^b P_1(s)^2 ds}} \\ \omega_n(s) = \qquad\qquad\qquad\qquad (n = 2, 3, \ldots) \\ \dfrac{P_n(s) - \omega_1(s)\int_a^b P_n(s)\omega_1(s)ds - \cdots - \omega_{n-1}(s)\int_a^b P_n(s)\omega_{n-1}(s)ds}{\left\{\int_a^b \left[P_n(s) - \omega_1(s)\int_a^b P_n(s)\omega_1(s)ds - \cdots - \omega_{n-1}(s)\int_a^b P_n(s)\,\omega_{n-1}(s)\,ds\right]^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

derart, daß auch umgekehrt $P_n(s)$ eine lineare Kombination von $\omega_1(s), \ldots, \omega_n(s)$ wird; derselbe Prozeß liefert auch — durch das identische Verschwinden der im Zähler stehenden Kombinationen — die sämtlichen zwischen endlichvielen $P_n(s)$ etwa bestehenden linearen Relationen. Für diese Funktionen $\omega_n(s)$ ist nun[111a]) die Vollständigkeitsrelation (2a) eine unmittelbare Folge von (3). Ein Beispiel einer solchen Folge $P_1(s), P_2(s), \ldots$ bildet die Folge der Potenzen $s^0, s^1, s^2, \ldots$, aus der nach der beschriebenen Konstruktion die *Legendreschen Polynome* als Beispiel eines vollständigen Orthogonalsystemes entstehen.[112])

---

110) Die folgende Konstruktion nach *D. Hilbert*[108]), p. 178ff. Die Bedeutung dieses Verfahrens zur Herstellung vollständiger Orthogonalsysteme beruht darauf, daß es sich auch auf andere Integrationsbereiche als einfache Strecken (mehrdimensionale, gemischte u. dgl.) ohne prinzipielle Schwierigkeiten übertragen läßt und damit die Theorie der Integralgleichungen in solchen Bereichen (vgl. Nr. **13** a, b) der Methode der unendlichvielen Veränderlichen erschließt.

111) *E. Schmidt*[41]), § 3. Vgl. Encykl. II C 11, *Hilb-Szász,* Nr. 1.

111a) Dieser Schluß ist für trigonometrische Funktionen schon von *W. A. Stekloff* verwendet worden [vgl. Encykl. II C 10, *Hilb-Riesz,* Nr. 9[90])].

112) Für weitere Angaben über vollständige Orthogonalsysteme vgl. Encykl. II C 11, *Hilb-Szász,* Nr. 1.

b) Die Umwandlung einer gegebenen Integralgleichung 2. Art mit stetigem $K(s, t)$ und $f(s)$

$$(J) \qquad \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

in ein System linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten geschieht nun folgendermaßen[113]): Führt man die Entwicklungskoeffizienten von $\varphi(s)$ in bezug auf die $\omega_p(s)$ ein:

$$(5) \qquad x_p = \int_a^b \varphi(s)\,\omega_p(s)\,ds,$$

die die Unbekannten des Problems darstellen, und verwendet ferner die bekannten Entwicklungskoeffizienten von $K(s, t)$ und $f(s)$:

$$(6) \qquad \begin{cases} \int_a^b K(s, t)\,\omega_q(t)\,dt = K_q(s), \\ \int_a^b\int_a^b K(s, t)\,\omega_p(s)\,\omega_q(t)\,ds\,dt = \int_a^b K_q(s)\,\omega_p(s)\,ds = K_{pq}, \\ \int_a^b f(s)\,\omega_p(s)\,ds = f_p, \end{cases}$$

so folgt durch wiederholte Anwendung von (2a) Konvergenz und Abschätzung der Quadratsummen

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)^2 = \int_a^b K(s, t)^2 dt, \quad \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{\infty} K_{pq}^2 \leqq \int_a^b\int_a^b K(s, t)^2 ds\,dt, \\ \sum_{p,q=1}^{\infty} K_{pq}^2 \leqq \int_a^b\int_a^b K(s, t)^2\,ds\,dt, \quad \sum_{p=1}^{\infty} f_p^2 = \int_a^b f(s)^2 ds. \end{cases}$$

Mit Hilfe von (2b) läßt sich nun (J) in der Gestalt schreiben:

$$(8) \qquad \varphi(s) + \sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)\,x_q = f(s);$$

ferner konvergiert für eine stetige Lösung $\varphi(s)$ von (J) die Quadratsumme

$$(7\text{a}) \qquad \sum_{q=1}^{\infty} x_q^2 = \int_a^b \varphi(s)^2\,ds,$$

und auf Grund der *Lagrange-Cauchyschen Ungleichung*[114])

$$(9) \qquad \Big(\sum_{p=1}^{n} u_p v_p\Big)^2 \leqq \sum_{p=1}^{n} u_p^2 \sum_{p=1}^{n} v_p^2$$

---

113) *D. Hilbert*[108]), p. 180 ff.

114) *A. Cauchy*, Cours d'Analyse de l'Éc. polyt., Analyse algébrique, 1821, note II, théor. XVI = Œuvres (2) t. III, p. 373 ff. Für den Fall $n = 3$ findet sich

folgt wegen (7) aus der Beschränktheit von $\int\limits_a^b K(s,t)^2\,dt$ die gleichmäßige Konvergenz der in (8) eingehenden Reihe für $a \leqq s \leqq b$. Daher ergibt Multiplikation von (8) mit $\omega_p(s)$ und Integration die unendlichvielen linearen Gleichungen[115])

$$(U) \qquad x_p + \sum_{p=1}^{\infty} K_{pq} x_q = f_p;$$

die Entwicklungskoeffizienten x_p jeder Löung von (J) bilden also ein Lösungssystem von (U) mit konvergenter Quadratsumme. Ist speziell $f(s) \equiv 0$ (homogene Integralgleichung (J_h)), so ist $f_p = 0$, und die x_p genügen dem (U) entsprechenden homogenen Gleichungssystem (U_h).[116])

c) Ist umgekehrt $x_1, x_2, \ldots$ ein Lösungssystem der Gleichungen (U) mit konvergenter Quadratsumme[117]), so folgt wiederum die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{q=1}^{\infty} K_q(s) x_q$, und daher ist die gemäß (8) gebildete Funktion

$$(10) \qquad \varphi(s) = f(s) - \sum_{q=1}^{\infty} K_q(s) x_q$$

stetig. Durch Integration ergibt sich auf Grund von (U) als ihr Entwicklungskoeffizient

$$\int\limits_a^b \varphi(s)\,\omega_p(s)\,ds = x_p,$$

---

die diese Ungleichung liefernde Identität bereits bei *J. L. Lagrange,* Nouv. Mém. Acad. Berlin 1773 = Oeuvres 3, p. 662 f. Aus ihr folgt unmittelbar die entsprechende Ungleichung für unendliche Summen

$$(9\text{a}) \qquad \left(\sum_{p=1}^{\infty} u_p v_p\right)^2 \leqq \sum_{p=1}^{\infty} u_p^2 \sum_{p=1}^{\infty} v_p^2,$$

in dem Sinne, daß die Konvergenz der rechts stehenden Reihen die absolute Konvergenz der links stehenden nach sich zieht. Sie entspricht formal und sachlich genau der *Schwarz*schen Integralungleichung (22) von Nr. 7 und mag daher kurz als *Schwarzsche Summenungleichung* bezeichnet werden (vgl. *D. Hilbert,* Grundzüge, p. 126; *Hellinger-Toeplitz* [164]), p. 293 f.).

115) Sie sind identisch mit denjenigen Gleichungen, die aus (J) durch formales Einzetzen der Entwicklungen von $\varphi(s)$, $f(s)$, $K(s,t)$ nach den Orthogonalfunktionen $\omega_p(s)$ hervorgehen [vgl. Nr. 8, (23) ff.].

116) Die in Nr. 1a dargestellte Ersetzung der Integralgleichung durch n lineare Gleichungen mit n Unbekannten auf Grund der Einteilung von $a \leqq s \leqq b$ in n Teilintervalle für unbegrenzt wachsendes n läßt sich dem oben geschilderten Verfahren als Spezialfall einordnen, wenn man als vollständiges Orthogonalsystem die von *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Diss. Göttingen 1909 = Math. Ann. 69 (1910), p. 331—371, Kap. III) konstruierten Orthogonalsysteme verwendet, deren Funktionen jeweils nur in einem mit wachsendem Index unbegrenzt abnehmenden Teilintervalle von 0 verschieden sind.

117) *D. Hilbert* [108]), p. 182 f.

und daher nach (2b)

$$\sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)\, x_q = \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt;$$

(10) zeigt danach direkt, daß $\varphi(s)$ eine Lösung von (J) ist. Da ferner nach (2a) die Entwicklungskoeffizienten einer stetigen Funktion nur dann sämtlich verschwinden, wenn die Funktion identisch verschwindet, entstehen auf diese Weise aus einem Lösungssystem des homogenen Gleichungssystemes (U_h) nur Lösungen der Integralgleichung (J_h), und eine Anzahl von Lösungssystemen von (U_h) ist dann und nur dann linear unabhängig, wenn die entsprechenden Lösungen von (J_h) es sind. Endlich entspricht der transponierten Integralgleichung (J') mit dem Kern $K(t,s)$ (s. p. 1376) das durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen im Koeffizientenschema von (U) entstehende transponierte Gleichungssystem

$$(U') \qquad x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{qp} x_q = g_p.$$

Die Auflösungstheorie der Integralgleichung (J) *und die des Gleichungssystems* (U) *sind also im angegebenen Sinne völlig äquivalent.* —

Die Gültigkeit der Vollständigkeitsrelationen (2a), (2b) läßt sich unmittelbar auf Funktionen ausdehnen, die nicht stetig, sondern nur samt ihrem Quadrat integrierbar sind. Man kann daher das gleiche Übergangsverfahren auch auf Integralgleichungen mit unstetigem Kern anwenden, wofern nur $K(s,t)$ an endlichvielen analytischen Kurven $s = F(t)$ des Quadrats $a \leqq s, t \leqq b$ von niederer als $1/2^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich wird (vgl. Nr. **13** a, b)[118]); dabei entsprechen Lösungen von (J) mit integrierbarem Quadrat Lösungssystemen von (U) mit konvergenter Quadratsumme.

d) Eine andere Methode zum Nachweis der Äquivalenz der Integralgleichung (J) und des Gleichungssystems (U) wird durch das *Theorem von E. Fischer*[119]) *und F. Riesz*[120]) gegeben: Bildet man die Entwicklungskoeffizienten in bezug auf ein orthogonales Funktionensystem durch *Lebesguesche Integration*, so gehört nicht nur zu jeder samt ihrem Quadrat im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion $\varphi(s)$ ein System von Entwicklungskoeffizienten x_p mit konver-

118) *D. Hilbert*[108]), p. 204; er hat ferner darauf hingewiesen, daß diese Methode auch darüber hinaus zur Behandlung solcher Kerne geeignet ist, die bei $s = t$ unendlich werden, aber absolut integrierbar bleiben. Vgl. dazu *J. Radon*[303]), p. 137 ff.

119) *E. Fischer,* Paris C. R. 144 (1907), p. 1022—1024.

120) *F. Riesz,* Paris C. R. 144 (1907), p. 615—619; Gött. Nachr. 1907, p. 116—122; Math. phys. és lap. 19 (1910), p. 165—182, 228—243.

genter Quadratsumme, sondern auch jedes System von Zahlen x_p mit konvergenter Quadratsumme stellt die Entwicklungskoeffizienten einer samt ihrem Quadrat integrierbaren Funktion $\varphi(s)$ dar; ist das Orthogonalsystem vollständig, so ist $\varphi(s)$ bis auf eine additive Funktion vom unbestimmten Integral 0 bestimmt.[121]) Danach ist die Äquivalenz von (J) und (U) sofort ersichtlich. Denn (U) bedeutet gerade die Übereinstimmung der Entwicklungskoeffizienten beider Seiten von (J); ist also $\varphi(s)$ die Funktion, die ein Lösungssystem von (U) mit konvergenter Quadratsumme zu Fourierkoeffizienten hat, so ist (J) mit Ausnahme einer Nullmenge erfüllt. Bei stetigem $K(s, t)$ aber wird $\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$ unabhängig von jener Willkürlichkeit von $\varphi(t)$ eine stetige Funktion von s und daher ist

$$\varphi(s) = f(s) - \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

eine stetige Lösung von (J). Ähnliches gilt bei Unstetigkeiten hinreichend niedriger Ordnung von $K(s, t)$.[122])

e) Durch spezielle geeignete Wahl des vollständigen Orthogonalsystems $\omega_p(s)$ kann man für einzelne Kerne $K(s, t)$ oder für gewisse Klassen von Kernen unter Umständen erreichen, daß das Gleichungssystem (U) eine besonders einfache für die vollständige, auch numerische Durchführung des Problems geeignete Gestalt annimmt. In diesen Zusammenhang ordnet sich ein einmal das Verfahren von *W. Ritz*[123]) zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben, andererseits die Methode von *L. Lichtenstein*[124]) zur vollständigen Behandlung der Randwertaufgaben durch direkte Zurückführung auf Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten.[125])

---

121) Vgl. auch Encykl. II C 11 (*Hilb-Szász*), Nr. 2.

122) *F. Riesz,* Paris C. R. 144 (1907), p. 734—736 und Gött. Nachr.[120]), p. 122.

123) *W. Ritz,* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der math. Phys., J. f. Math. 135 (1909), p. 1—61; Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, Ann. d. Phys (4) 28 (1909), p. 737—786. — S. auch Ges. Werke, Paris 1911, p. 192—250, 265—316.

124) *L. Lichtenstein,* Paris C. R. 156 (1913), p. 993—996, sowie eine größere Zahl anschließender Arbeiten, aus denen für die Darstellung der Methode hier nur „Zur Analysis der unendlichvielen Variablen I", Palermo Rend. 38 (1914), p. 113—166, genannt sei. Ein Versuch in ähnlicher Richtung bei *J. Bertrand,* Bruxelles Soc. sc. (B) 38 (1913—1914), p. 318—322. Vgl. dazu Nr. 45c.

125) Hierhin gehört auch der Versuch von *Ch. Müntz*[258]), p. 145, Integralgleichungen durch Verwendung spezieller, dem Kern angepaßter Orthogonalsysteme zu behandeln.

Unter Umständen ist es auch zweckmäßig, die Bedingung der Orthogonalität (1) zu modifizieren; so verwendet *D. Hilbert*[126]) zur Behandlung „polarer Integralgleichungen" (s. Nr. 38b, 1) ein System von Funktionen, die — unter $k(s)$ eine gegebene Funktion wechselnder Vorzeichen verstanden — den Bedingungen genügen

$$\int_a^b k(s)\,\omega_p(s)\,\omega_q(s)\,ds = \begin{cases} 0 & (p \neq q), \\ (-1)^p & (p = q), \end{cases}$$

wobei dann auch die Vollständigkeitsbedingung entsprechend abzuändern ist. Ferner ist hier die Methode von *D. Enskog*[72]) zur numerischen Lösung von Integralgleichungen mit symmetrischem Kern zu nennen; sie bezieht sich auf Kerne von der Art, daß für jede nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi(s)$

$$\int_a^b \varphi(s)^2\,ds + \int_a^b\!\!\int_a^b K(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt > 0$$

ist, und beruht auf der Verwendung eines gemäß den Bedingungen

$$\int_a^b \omega_p(s)\,\omega_q(s)\,ds + \int_a^b\!\!\int_a^b K(s,t)\,\omega_p(s)\,\omega_q(t)\,ds\,dt = \begin{cases} 0 & (p \neq q), \\ 1 & (p = q) \end{cases}$$

bestimmten Funktionensystems.[126a])

16. Hilberts Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme. Die Auflösungstheorie der Gleichungen (U) von Nr. **15** hat *D. Hilbert*[127]) nicht nur unter der Annahme eines Koeffizientensystems von konvergenter Quadratsumme $\sum_{p,q=1}^{\infty} K_{pq}^2$ entwickelt, wie es sich aus einer Integralgleichung mit stetigem Kern ergibt, sondern er hat eine wesentlich umfassendere Klasse von Koeffizientensystemen (K_{pq}) entdeckt, für die jenes unendliche Gleichungssystem den sämtlichen determinantenfreien Auflösungssätzen von Nr. **10** — in sinngemäßer Übertragung auf die Verhältnisse bei unendlichvielen Veränderlichen — genügt, sofern man an der *Bedingung konvergenter Quadratsumme* für rechte Seiten und Unbekannte festhält; es bleiben dann also auch für die gemäß Nr. **15** äquivalente Integralgleichung die Auflösungssätze von Nr. **10** bestehen. Die Koeffizientensysteme, um die es sich hier handelt, entstehen aus der Betrachtung einer gewissen Klasse bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen:

126a) Vgl. dazu auch *F. L. Hitchcock* u. *N. Wiener*, Mass. J. of Math. 1 (1921), p. 1—20.

126) *D. Hilbert*, Grundzüge, Kap. XV, p. 195ff.

127) *D. Hilbert*, 4. Mitteil., Gött. Nachr. 1906 = Grundzüge, Kap. XII, p. 164—174.

a) Vollstetige Bilinearformen unendlichvieler Veränderlicher. Es seien $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ Wertsysteme von abzählbar unendlichvielen reellen Veränderlichen, die stets eine konvergente, nicht über 1 gelegene Quadratsumme besitzen:

$$(1)\qquad \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \leqq 1, \quad \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 \leqq 1.$$

Bilinearform der beiden Reihen von Veränderlichen heißt die durch die unendliche Doppelfolge der Koeffizienten K_{pq} $(p, q = 1, 2, \ldots)$ zunächst rein formal bestimmte Doppelreihe

$$(2)\qquad \sum_{p,q=1}^{\infty} K_{pq} x_p y_q = K_{11}x_1y_1 + K_{12}x_1y_2 + \cdots \\ + K_{21}x_2y_1 + K_{22}x_2y_2 + \cdots \\ + \cdots,$$

n^{ter} *Abschnitt* die durch Nullsetzen der Veränderlichen $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots;$ $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ entstehende endliche Bilinearform von zwei Reihen von n Veränderlichen

$$(2\text{a})\qquad \mathfrak{K}_n(x, y) = \sum_{p,q=1}^{n} K_{pq} x_p y_q.$$

Die Bilinearform (2) heißt *vollstetig*[128]), wenn die Differenz $\mathfrak{K}_n(x, y) - \mathfrak{K}_m(x, y)$ mit wachsendem n und m gleichmäßig für alle (1) genügenden Wertsysteme gegen Null konvergiert:

$$(3)\qquad |\mathfrak{K}_n(x, y) - \mathfrak{K}_m(x, y)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n, m > N(\varepsilon).$$

Dann konvergiert

$$(2\text{b})\qquad \lim_{n=\infty} \mathfrak{K}_n(x, y) = \mathfrak{K}(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} K_{pq} x_p y_q$$

gleichmäßig für alle (1) genügenden Wertsysteme und definiert den *Wert* $\mathfrak{K}(x, y)$ *der Bilinearform* (2).

Dieser Wert hängt, wie unmittelbar aus der gleichmäßigen Konvergenz von (2b) folgt, von den unendlichvielen Veränderlichen x_p, y_p im Bereich (1) in dem Sinne stetig ab („vollstetig“), daß sich $\mathfrak{K}(x, y)$ von $\mathfrak{K}(x', y')$ beliebig wenig unterscheidet, wenn sich hinreichend viele (aber endlichviele) der Veränderlichen x_p und y_p von den entsprechenden x_p' und y_p' hinreichend wenig unterscheiden —

128) *D. Hilbert,* 4. Mitteil., Gött. Nachr. 1906 = Grundzüge, Kap. XI, p. 147 f. Vorübergehend hat Hilbert [im Original der 5. Mitteil., Gött. Nachr. 1906, p. 439 und in [370]), p. 61] das Wort „stetig“ an Stelle von „vollstetig“ benutzt. Über die *Formulierung* der Definition vgl. [129]).

gleichgültig welche Werte die übrigen unendlichvielen Veränderlichen haben:

$$(4)\quad \begin{cases} |\mathfrak{K}(x, y) - \mathfrak{K}(x', y')| < \varepsilon, \quad \text{wenn} \\ |x_p - x_p'| < \delta(\varepsilon), \quad |y_p - y_p'| < \delta(\varepsilon) \quad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon); \end{cases}$$

die Ungleichung ist gleichmäßig für alle (1) genügenden Wertsysteme x, y, x', y' erfüllt.

Repräsentiert man übrigens jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ durch einen Punkt x des unendlichdimensionalen Raumes R_∞, so hat man hierin eine genaue Übertragung der üblichen Stetigkeitsdefinition auf den R_∞. Bedeutet nämlich $x_p^{(\nu)}, y_p^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge von (1) genügenden Wertsystemen, die mit $\nu \to \infty$ für jeden Index p gegen ein ebenfalls (1) genügendes Wertsystem konvergieren,

$$(5\text{a})\qquad \lim_{\nu=\infty} x_p^{(\nu)} = x_p, \quad \lim_{\nu=\infty} y_p^{(\nu)} = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

so ergibt sich aus (4)

$$(5\text{b})\qquad \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{K}(x^{(\nu)}, y^{(\nu)}) = \mathfrak{K}(x, y).$$ [129]

Die Definition einer *vollstetigen Linearform*

$$(6)\qquad \mathfrak{L}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} l_p x_p = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots$$

vollzieht sich genau nach dem Muster der vorigen Betrachtungen; entsprechend (3) heißt $L(x)$ vollstetig, wenn für alle (1) genügenden x_p

$$|L_n(x) - L_m(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n, m > N(\varepsilon).$$

Da nach der Ungleichung (9) von Nr. **15** unter der Bedingung (1)

$$|\mathfrak{L}_n(x) - \mathfrak{L}_m(x)| = \Big|\sum_{p=m+1}^{n} l_p x_p\Big| \leqq \sqrt{\sum_{p=m+1}^{n} l_p^2}$$

ist, und da andererseits die hiermit gegebene Schranke für

$$x_p = l_p \Big(\sum_{p=m+1}^{n} l_p^2\Big)^{-\frac{1}{2}} \qquad (p = m+1, \ldots, n)$$

erreicht wird, ist $\mathfrak{L}(x)$ *dann und nur dann vollstetig, wenn die Quadratsumme der Koeffizienten* $\sum_{p=1}^{\infty} l_p^2$ *konvergiert*; alsdann konvergiert die Reihe (6) stets *absolut*.[130]

---

129) *D. Hilbert*[128]) und Grundzüge, Kap. XIII, p. 175f. verwendet *diese* Eigenschaft als Definition der Vollstetigkeit und zeigt mit seinem Auswahlverfahren (Nr. **16** b), daß aus ihr (3) folgt. Im folgenden wird die Definition (3) zugrunde gelegt.

130) *D. Hilbert*[370]), p. 61; vgl. auch Grundzüge, p. 126 u. p. 176.

Setzt man in $\mathfrak{K}(x, y)$ alle Veränderlichen der einen Reihe bis auf eine gleich 0, so wird es eine vollstetige Linearform der andern Variablenreihe; *notwendige Bedingung* für die Vollstetigkeit einer Bilinearform ist also *die Konvergenz der Quadratsumme der Koeffizienten jeder einzelnen Zeile und Kolonne:*

$$(7) \qquad \sum_{q=1}^{\infty} K_{1q}^2, \quad \sum_{q=1}^{\infty} K_{2q}^2, \quad \ldots; \quad \sum_{p=1}^{\infty} K_{p1}^2, \quad \sum_{p=1}^{\infty} K_{p2}^2, \quad \ldots \quad \textit{konvergent.}$$

Wendet man andererseits (5) auf eine Folge von Wertsystemen an, bei denen jeweils nur *eine* Zahl $x_{p_\nu}^{(\nu)}$ und $y_{q_\nu}^{(\nu)}$ gleich 1, alle andern Null sind und p_ν und q_ν mit ν gegen ∞ konvergieren, so ist für jedes p $\lim\limits_{\nu=\infty} x_p^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty} y_p^{(\nu)} = 0$ und daher $\lim\limits_{\nu=\infty} \mathfrak{K}(x^{(\nu)}, y^{(\nu)}) = \lim\limits_{\nu=\infty} K_{p_\nu q_\nu} = 0$; also ist eine weitere *notwendige Bedingung* für Vollstetigkeit das *Verschwinden des Doppellimes*

$$(8) \qquad \lim_{p,q=\infty} K_{pq} = 0.$$

Da (7) und (8) nicht gleichzeitig erfüllt zu sein brauchen (Beispiele: $K_{pp} = 1$, $K_{pq} = 0\ (p \neq q)$ bzw. $K_{pq} = \frac{1}{\sqrt{p+q}}$), ist keine der beiden Bedingungen hinreichend für Vollstetigkeit.[131])

Eine *hinreichende Bedingung* ist die *Konvergenz der Quadratsumme aller Koeffizienten* K_{pq}[132]):

$$(9) \qquad \sum_{p,q=1}^{\infty} K_{pq}^2 \quad \textit{konvergent;}$$

denn durch wiederholte Anwendung der *Cauchy*schen Ungleichung Nr. **15**, (9) folgt unter Berücksichtigung von (1) für $n > m$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{K}_n(x, y) - \mathfrak{K}_m(x, y))^2 &= \Big(x_1 \sum_{q=m+1}^{n} K_{1q} y_q + \cdots + x_m \sum_{q=m+1}^{n} K_{mq} y_q \\ &\qquad + x_{m+1} \sum_{q=1}^{n} K_{m+1,q} y_q + \cdots + x_n \sum_{q=1}^{n} K_{nq} y_q\Big)^2 \\ &\leqq \Big(\sum_{q=m+1}^{n} K_{1q} y_q\Big)^2 + \cdots + \Big(\sum_{q=m+1}^{n} K_{mq} y_q\Big)^2 + \Big(\sum_{q=1}^{n} K_{m+1,q} y_q\Big)^2 + \cdots + \Big(\sum_{q=1}^{n} K_{nq} y_q\Big)^2 \\ &\leqq \sum_{q=m+1}^{n} K_{1q}^2 + \cdots + \sum_{q=m+1}^{n} K_{mq}^2 + \sum_{q=1}^{n} K_{m+1,q}^2 + \cdots + \sum_{q=1}^{n} K_{nq}^2,\end{aligned}$$

---

131) Weitere leicht anzugebende Beispiele, etwa $K_{pq} = (p+q)^{-s}$, $\frac{1}{2} < s < 1$, zeigen, daß auch (7) und (8) zugleich für nichtvollstetige Formen erfüllt sein können; vgl. *Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 306.

132) *D. Hilbert,* Grundzüge, Kap. XI, p. 151 für symmetrische Formen ($K_{pq} = K_{qp}$) und Kap. XII, p. 165.

und das wird als Rest der Reihe (9) mit wachsendem m, n beliebig klein. Diese Bedingung ist *nicht notwendig* (Beispiel: $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} x_p y_p$ ist vollstetig, da $|\mathfrak{K}_n - \mathfrak{K}_m| \leqq \frac{1}{\sqrt{m}}$ für $n > m$).

Aus (3), (2b) ergibt sich unmittelbar die Existenz einer Schranke M, unterhalb deren die Absolutwerte sämtlicher Abschnitte sowie die Werte der vollstetigen Bilinearform unter der Nebenbedingung (1) für die Veränderlichen bleiben:

$$(10) \qquad |\mathfrak{K}_m(x, y)| \leqq M, \quad |\mathfrak{K}(x, y| \leqq M.$$

Also sind vollstetige Bilinearformen *beschränkt* im *Hilbert*schen Sinne (vgl. Nr. 18a, Nr. 19[195]); sie besitzen ferner die folgenden Eigenschaften[133]:

133) *Hilbert* leitet diese Eigenschaften aus den von ihm vorher aufgestellten Sätzen über beschränkte Formen her (Grundzüge, p. 150—152, 164f.; vgl. Nr. 18a). Man kann sie aber auch direkt aus den obigen Definitionen herleiten und damit die Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme in sich geschlossen begründen:

1. Setzt man in (4) für $n > N(\varepsilon)$ $x_1' = x_1, \ldots, x_n' = x_n$, $x_{n+1}' = x_{n+2}' = \cdots = 0$, $y_q' = y_q$, so kann $\mathfrak{K}(x', y')$ als Summe der n (als vollstetige Linearformen von $y_1', y_2', \ldots$) absolut konvergenten Reihen $x_p' \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} y_q'$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ angesehen werden, und diese sind gleich den ersten n Zeilen von $\mathfrak{K}(x, y)$; damit folgt (11a) unmittelbar aus (4).

2. $\mathfrak{K}(x, y)$ ist nach (11a) eine vollstetige Linearform der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ mit der oberen Schranke M; also folgt wie oben Konvergenz der Quadratsumme der Koeffizienten

$$\text{(a)} \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} y_q\Big)^2 \leqq M^2 \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 \leqq 1;$$

ferner ergibt sich aus (4), wenn man beide Werte $\mathfrak{K}$ aus (11a) entnimmt und $x_p' = x_p$, $y_1' = y_1, \ldots, y_n' = y_n$, $y_{n+1}' = \cdots = 0$, $n \geqq N(\varepsilon)$ setzt: $\left|\sum_{p=1}^{\infty} x_p \sum_{q=n+1}^{\infty} K_{pq} y_q\right| \leqq \varepsilon$, und daraus wie soeben

$$\text{(b)} \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{q=n+1}^{\infty} K_{pq} y_q\Big)^2 \leqq \varepsilon^2 \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 \leqq 1.$$

3. Eine vollstetige Form $\mathfrak{H}(x, z)$ konvergiert wegen (a) für $z_p = \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} y_q$; z_p und $z_p' = \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q$ unterscheiden sich nach (b) für jedes p um weniger als ε, und daher wird nach (4) $|\mathfrak{H}(x, z) - \mathfrak{H}(x, z')|$ gleichmäßig für alle x und y mit wachsendem n beliebig klein. Nun ist für $x_{n+1} = \cdots = 0$

$$\mathfrak{H}(x, z') = \sum_{p=1}^{n} x_p \sum_{r=1}^{\infty} H_{pr} \sum_{q=1}^{n} K_{rq} y_q = \sum_{p,q=1}^{n} x_p y_q \sum_{r=1}^{\infty} H_{pr} K_{rq}$$

α) Der Wert $\mathfrak{K}(x, y)$ ist als Summe der unendlichvielen für sich konvergenten Zeilen oder Kolonnen von (2) darstellbar[134]):

---

der n^{te} Abschnitt der Faltung $\mathfrak{H}\mathfrak{K}(x,y)$; die soeben gegebene Abschätzung zeigt direkt seine gleichmäßige Konvergenz, und zwar gegen $\mathfrak{H}(x,z)=\sum_{p=1}^{\infty}x_p\sum_{r=1}^{\infty}H_{pr}\sum_{q=1}^{\infty}K_{rq}y_q$, d. h. die Vollstetigkeit der Faltung $\mathfrak{H}\mathfrak{K}(x,y)$. — Ist $|\mathfrak{H}(x,y)|\leq N$ für (1), so folgt aus (a) $\left|\mathfrak{H}\left(x,\frac{z}{M}\right)\right|\leq N$, $|\mathfrak{H}\mathfrak{K}(x,y)|=|\mathfrak{H}(x,z)|\leq MN$.

4. Ist $\mathfrak{K}'\mathfrak{K}=\sum_{p,q=1}^{\infty}x_p y_q\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty}K_{\alpha p}K_{\alpha q}\right)$ vollstetig, so ergibt die Anwendung der Stetigkeitseigenschaft (4) für $x_p'=y_p'=0$, während alle Veränderlichen $x_p=y_p$ bis auf die vom Index $n+1, n+2, \ldots, n+m$ verschwinden:

$$\left|\sum_{p,q=n+1}^{n+m}y_p y_q\sum_{\alpha=1}^{\infty}K_{\alpha p}K_{\alpha q}\right|\leq\varepsilon^2;$$

da aber $\sum_{\alpha=1}^{\infty}K_{\alpha p}K_{\alpha q}$ absolut konvergiert, kann das in

$$\text{(c)}\qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty}\Big(\sum_{q=n+1}^{n+m}K_{\alpha q}y_q\Big)^2\leq\varepsilon^2$$

umgeformt und daraus in bekannter Weise für jedes ν

$$\text{(d)}\qquad \left|\sum_{\alpha=1}^{\nu}x_\alpha\sum_{q=n+1}^{n+m}K_{\alpha q}y_q\right|\leq\varepsilon \quad\text{für}\quad \sum_{\alpha=1}^{\infty}x_\alpha^2\leq 1$$

geschlossen werden. Um von hier zu $\mathfrak{K}_m$ überzugehen, bemerke man, daß aus (c) die Konvergenz der Reihen $\sum_{\alpha=1}^{\infty}K_{\alpha q}^2$ und daher die Vollstetigkeit der Linearformen $\sum_{\alpha=1}^{\infty}x_\alpha K_{\alpha q}$ für jedes q folgt; man kann daher durch Wahl von $n'>n$ die endliche Summe

$$\text{(e)}\qquad \left|\sum_{q=1}^{n}y_q\sum_{\alpha=n'}^{\infty}x_\alpha K_{\alpha q}\right|\leq\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{\alpha=n'}^{\infty}x_\alpha K_{\alpha q}\right|$$

gleichmäßig im Bereich (1) beliebig klein machen, und hat dann für $n+m>n'>n$

$$|\mathfrak{K}_{m+n}(x,y)-\mathfrak{K}_{n'}(x,y)|=\left|\sum_{\alpha=1}^{m+n}x_\alpha\sum_{q=n'+1}^{m+n}K_{\alpha q}y_q+\sum_{q=1}^{n'}y_q\sum_{\alpha=n'+1}^{m+n}K_{\alpha q}x_\alpha\right|$$

$$=\left|\sum_{\alpha=1}^{m+n}x_\alpha\sum_{q=n+1}^{m+n}K_{\alpha q}y_q-\sum_{\alpha=1}^{n'}x_\alpha\sum_{q=n+1}^{n'}K_{\alpha q}y_q+\sum_{q=1}^{n}y_q\sum_{\alpha=n'+1}^{m+n}K_{\alpha q}x_\alpha\right|,$$

und da sich jede der 3 Teilsummen nach (d), (e) abschätzen läßt, folgt die Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}$.

134) Die Doppelreihe braucht nicht notwendig absolut zu konvergieren; Beispiel bei *O. Toeplitz*, Gött. Nachr. 1913, p. 417—432, Nr. 8 (die dort als μ_α bezeichneten Faktoren sind so zu wählen, daß $\lim\mu_\alpha=0$ wird, die Zahlen $\mu_\alpha\cdot 2^\alpha$ aber nicht beschränkt sind; $\sum\mu_\alpha\cdot 2^\alpha$ konvergent reicht nicht aus, wie dort irrtümlich steht).

(11a) $$\mathfrak{K}(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_p y_q\Big),$$

(11b) $$\mathfrak{K}(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} K_{pq} x_p y_q\Big),$$

und jede dieser einfach unendlichen Reihen konvergiert absolut und gleichmäßig im Bereich (1).

β) Die durch *Faltung* aus zwei vollstetigen Bilinearformen $\mathfrak{K}(x, y)$ und $\mathfrak{H}(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} H_{pq} x_p y_q$ entstehende Bilinearform

(12) $$\mathfrak{H}\mathfrak{K}(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty} H_{p\alpha} K_{\alpha q}\Big) x_p y_q = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} H_{p\alpha} x_p\Big)\Big(\sum_{q=1}^{\infty} K_{\alpha q} y_q\Big)$$

ist wiederum vollstetig und ihre Werte im Bereich (1) bleiben unterhalb des Produktes der entsprechenden Schranken von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$.

γ) Ist die Faltung von $\mathfrak{K}$ mit der durch Vertauschung der beiden Variablenreihen (d. h. durch Vertauschung der Zeilen und Kolonnen im Koeffizientenschema) entstehenden *transponierten Form* $\mathfrak{K}'(x, y) = \mathfrak{K}(y, x)$ vollstetig, so ist auch $\mathfrak{K}(x, y)$ vollstetig.[135]

Wendet man auf $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$ und die daraus durch fortgesetzte Faltung entstehenden Formen das Kriterium (9) an, so findet man eine Reihe weiterer immer umfassenderer *hinreichender Bedingungen* der Vollstetigkeit.[136]

Der Begriff der Vollstetigkeit in der Formulierung (3) oder (5) läßt sich nach *D. Hilbert*[128] unmittelbar auf *beliebige Funktionen* $\mathfrak{F}(x_1, x_2, \ldots)$ abzählbar unendlichvieler Veränderlicher ausdehnen, die im Bereiche $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \leqq 1$ definiert sind; n^{ter} Abschnitt ist dabei der für $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0$ entstehende Wert.

b) Das Auswahlverfahren. Als wesentliches Hilfsmittel für die Theorie der vollstetigen Bilinearformen und der aus ihnen gebildeten

135) Die Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}(x, y)$ genügt hingegen nicht, um die von $\mathfrak{K}(x\ y)$ zu gewährleisten, wie das Beispiel $\mathfrak{K}(x, y) = x_2 y_1 + x_4 y_3 + x_6 y_5 + \cdots$, $\mathfrak{K}\mathfrak{K}(x, y) \equiv 0$ zeigt. — *F. Riesz* benutzt in der Darstellung in seinen „Équations linéaires" (Literatur A 8), p. 96 ff., als Definition der Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}$ die auf die Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}'\mathfrak{K}(x, y)$ hinauslaufende (und nach β), γ) mit der Definition des Textes äquivalente) Aussage, daß $\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q^{(\nu)} - \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q\Big)^2$ gegen 0 konvergiert, wenn jedes einzelne $x_q^{(\nu)}$ gegen x_q konvergiert.

136) *D. Hilbert*, Grundzüge, p. 150 ff., Satz 36; es ist nicht wesentlich, daß diese Bedingungen dort nur für symmetrische Formen ($K_{pq} = K_{qp}$) ausgesprochen sind. — Eine weitere hinreichende Bedingung für Vollstetigkeit findet man in [175].

Gleichungen benutzt *Hilbert* ein durch ein charakteristisches Auswahlverfahren gewährleistetes Konvergenzprinzip[137]): Aus jeder Menge von unendlichvielen Wertsystemen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ mit konvergenter beschränkter Quadratsumme $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \leqq M^2$, d. h. von unendlichvielen Punkten x innerhalb oder auf einer Kugel des unendlichdimensionalen Raumes, läßt sich eine unendliche Teilfolge $\bar{x}^{(n)} = (\bar{x}_1^{(n)}, \bar{x}_2^{(n)}, \ldots)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ derart herausgreifen, daß der Limes jeder einzelnen Koordinatenfolge konvergiert:

$$(13) \qquad \lim_{n=\infty} \bar{x}_1^{(n)} = a_1, \quad \lim_{n=\infty} \bar{x}_2^{(n)} = a_2, \quad \ldots, \quad \sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 \leqq M^2,$$

d. h. daß die Punktfolge $\bar{x}^{(n)}$ in dem hierdurch ausgedrückten Sinne gegen einen Punkt a derselben Kugel konvergiert. Zum Beweise bemerke man, daß die sämtlichen ersten Koordinaten x_1 wegen $|x_1| \leqq M$ mindestens eine Häufungsstelle a_1 besitzen; man kann demgemäß aus der Menge eine Teilfolge auswählen,

$$(\alpha_1) \qquad x' = (x_1', x_2', \ldots), \quad x'' = (x_1'', x_2'', \ldots), \quad \ldots, \qquad \text{so daß}$$

$$(\beta_1) \qquad \lim_{n=\infty} x_1^{(n)} = a_1 .$$

Aus *dieser* Folge (α_1) kann man ebenso wegen $|x_2^{(n)}| \leqq M$ eine weitere Teilfolge auswählen,

$$(\alpha_2) \qquad x^{(n_1)} = (x_1^{(n_1)}, x_2^{(n_1)}, \ldots), \quad x^{(n_2)} = (x_1^{(n_2)}, x_2^{(n_2)}, \ldots), \quad \ldots, \qquad \text{so daß}$$

$$(\beta_2) \qquad \lim_{\nu=\infty} x_2^{(n_\nu)} = a_2 ,$$

aus dieser eine dritte,

$$(\alpha_3) \qquad x^{(n_1')} = (x_1^{(n_1')}, x_2^{(n_1')}, \ldots), \quad x^{(n_2')} = (x_1^{(n_2')}, x_2^{(n_2')}, \ldots), \quad \ldots, \qquad \text{so daß}$$

$$(\beta_3) \qquad \lim_{\nu=\infty} x_3^{(n_\nu')} = a_3 ,$$

und so fort. Die aus dem ersten Wertsystem von (α_1), dem zweiten von (α_2), dem dritten von (α_3) usf. bestehende „Diagonalfolge“

$$\bar{x}^{(1)} = x' = (x_1', x_2', \ldots), \quad \bar{x}^{(2)} = x^{(n_2)} = (x_1^{(n_2)}, x_2^{(n_2)}, \ldots),$$
$$\bar{x}^{(3)} = x^{(n_3')} = (x_1^{(n_3')}, x_2^{(n_3')}, \ldots), \quad \ldots$$

erfüllt die Behauptung. Denn da sie eine Teilfolge von (α_1) ist, konvergieren die $\bar{x}_1^{(n)}$ wegen (β_1) gegen a_1; da sie ferner abgesehen von ihrem ersten Gliede eine Teilfolge von (α_2) ist, konvergieren die $\bar{x}_2^{(n)}$ wegen (β_2) gegen a_2; und so fort.

137) *D. Hilbert,* Grundzüge, Kap. XI, p. 116 f.; das gleiche Auswahlverfahren hatte er bereits in seinen Untersuchungen „Über das Dirichletsche Prinzip“ auf Folgen von Funktionen angewandt [Festschr. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1901, 27 S. = Math. Ann. 59 (1904), p. 161—186, § 5].

c) Lösungsmethode auf Grund des Auswahlverfahrens. Die so entwickelten Hilfsmittel liefern die vollständige Auflösungstheorie des Gleichungssystems[127])

$$(U)\ x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q = x_p + K_{p1} x_1 + K_{p2} x_2 + \cdots = y_p \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

wo die mit den Koeffizienten K_{pq} gebildete Bilinearform $\mathfrak{K}$ vollstetig ist, wo ferner die y_p gegebene Größen von konvergenter Quadratsumme sind und wo endlich die Unbekannten x_p gleichfalls der Bedingung der Konvergenz der Quadratsumme $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2$ unterworfen sind.

Der Grundgedanke der Methode ist die Approximation der Gleichungen (U) durch das algebraische System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, das zu dem n^{ten} Abschnitt $\mathfrak{K}_n$ gehört:

$$(A) \qquad x_p^{(n)} + \sum_{q=1}^{n} K_{pq} x_q^{(n)} = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots n)$$

unter Benutzung einer geeignet ausgewählten Folge von Indizes n. In bezug auf das Verhalten dieser Gleichungen werden zwei Fälle unterschieden[138]): es sei m_n das Minimum des Quotienten aus der nicht negativen quadratischen Form von n Veränderlichen

$$(14)\quad \sum_{p=1}^{n}\Big(x_p + \sum_{q=1}^{n} K_{pq} x_q\Big)^2 = \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + 2\sum_{p,q=1}^{n} K_{pq} x_p x_q + \sum_{p,q,r=1}^{n} K_{pq} K_{pr} x_q x_r$$

$$= \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + 2\mathfrak{K}_n(x, x) + \mathfrak{K}_n' \mathfrak{K}_n(x, x)$$

und der Quadratsumme $x_1^2 + \cdots + x_n^2$:

$$\sum_{p=1}^{n}\Big(x_p + \sum_{q=1}^{n} K_{pq} x_q\Big)^2 \geqq m_n \sum_{p=1}^{n} x_p^2;$$

dann ist entweder

A. für unendlichviele n $m_n \geqq m > 0$

oder

B. die m_n konvergieren gegen 0: $\lim_{n=\infty} m_n = 0$.

Im Falle A ist für alle diese n die Determinante des Systems (A) ungleich 0, da sonst das zu (A) gehörige homogene System (A_h) eine Lösung hätte, für die dann (14) verschwinden würde; also

138) Die gleiche Methode hat *R. Courant*[67]) direkt auf Integralgleichungen angewandt (s. Nr. **10** b, 3); nur beruht seine Fallunterscheidung nicht wie bei *Hilbert* auf einer nur von den Koeffizienten der linken Seiten abhängigen Größe, sondern setzt bestimmt gegebene rechte Seiten voraus.

besitzt (A) eine Lösung $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, und es ist

$$\sum_{p=1}^{n} y_p^2 = \sum_{p=1}^{n}\Big(x_p^{(n)} + \sum_{q=1}^{n} K_{pq} x_q^{(n)}\Big)^2 \geqq m_n \sum_{p=1}^{n} x_p^{(n)2}$$

und wegen $m_n \geqq m > 0$, wenn die y_p die gegebenen rechten Seiten von (U) sind,

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^{(n)2} \leqq \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 .$$

Nach dem Auswahlverfahren b) kann daher eine Zahlenfolge $n_1, n_2, \ldots$ bestimmt werden, so daß die Grenzwerte

$$\text{(15)} \qquad \lim_{\nu=\infty} x_1^{(n_\nu)} = x_1, \quad \lim_{\nu=\infty} x_2^{(n_\nu)} = x_2, \quad \ldots$$

existieren und ihre Quadratsumme konvergiert:

$$\text{(15')} \qquad \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \leqq \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 .$$

Wegen der Vollstetigkeit der Linearformen $\sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q$ (vgl. Nr. **16** a, p. 1401) ist

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q = \lim_{\nu=\infty}\Big(x_p^{(n_\nu)} + \sum_{q=1}^{n_\nu} K_{pq} x_q^{(n_\nu)}\Big) = y_p ,$$

d. h. (15) *gibt eine Lösung des Systems* (U) *mit konvergenter Quadratsumme.*

Im Falle B seien $\mathfrak{x}_1^{(n)}, \ldots, \mathfrak{x}_n^{(n)}$ die Werte der Veränderlichen, für die das Minimum eintritt:

$$\text{(16)} \quad \begin{cases} \sum_{p=1}^{n}\Big(\mathfrak{x}_p^{(n)} + \sum_{q=1}^{n} K_{pq}\mathfrak{x}_q^{(n)}\Big)^2 = 1 + 2\mathfrak{K}_n\big(\mathfrak{x}^{(n)}, \mathfrak{x}^{(n)}\big) + \sum_{p,q=1}^{n} K_{pq}\mathfrak{x}_q^{(n)}\Big(\sum_{r=1}^{n} K_{pr}\mathfrak{x}_r^{(n)}\Big) \\ \qquad = m_n, \qquad\qquad \sum_{p=1}^{n}\big(\mathfrak{x}_p^{(n)}\big)^2 = 1 . \end{cases}$$

Wiederum kann nach dem Auswahlverfahren eine Folge $n_1, n_2, \ldots$ bestimmt werden, so daß die Grenzwerte

$$\text{(17)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{x}_1^{(n_\nu)} = \mathfrak{x}_1, \quad \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{x}_2^{(n_\nu)} = \mathfrak{x}_2, \quad \ldots$$

existieren und ihre Quadratsumme konvergiert:

$$\text{(17')} \qquad \sum_{p=1}^{n} \mathfrak{x}_p^2 \leqq 1 .$$

Aus (16) folgt nun

$$\Big|\mathfrak{x}_p^{(n)} + \sum_{q=1}^{n} K_{pq}\mathfrak{x}_q^{(n)}\Big| \leqq \sqrt{m_n}$$

und daher wegen der Vollstetigkeit der Linearformen und wegen $m_n \to 0$

$$(U_h) \qquad \xi_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq}\xi_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Um weiter zu zeigen, daß nicht alle ξ_p verschwinden, entnimmt man aus (16) für $n = n_\nu$ und $\nu \to \infty$ wegen der Vollstetigkeit der Bilinearform $\mathfrak{K}(x, y)$

$$1 + 2\mathfrak{K}(\xi, \xi) + \mathfrak{K}'\mathfrak{K}(\xi, \xi) = 0,$$

da $\lim_{\nu=\infty} \sum_{r=1}^{n_\nu} K_{pr}\xi_r^{(n_\nu)} = \sum_{r=1}^{\infty} K_{pr}\xi_r$ ist; andererseits folgt aus (U_h)

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\xi_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq}\xi_q\Big)^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2 + 2\mathfrak{K}(\xi, \xi) + \mathfrak{K}'\mathfrak{K}(\xi, \xi) = 0,$$

also

$$(17'') \qquad \sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2 = 1,$$

d. h. (17) *liefert eine nicht identisch verschwindende Lösung der homogenen Gleichungen* (U_h) *von konvergenter Quadratsumme.*

In diesem Falle B besitzen die zu (U) gehörigen transponierten unhomogenen Gleichungen

$$(U') \qquad x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{qp}x_q = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

für die besonderen rechten Seiten $y_p = \xi_p$ gewiß keine Lösung von konvergenter Quadratsumme, da sonst wegen (11) und (U_h)

$$\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\xi_p\Big(x_p + \sum_{q=1}^{\infty}K_{qp}x_q\Big)^2 = \sum_{p=1}^{\infty}x_p\Big(\xi_p + \sum_{q=1}^{\infty}K_{pq}\xi_q\Big) = 0$$

wäre. Da sie genau die Form des oben behandelten Systems (U) haben, muß für sie gleichfalls der Fall B eintreten, d. h. die transponierten homogenen Gleichungen

$$(U_h') \qquad \eta_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{qp}\eta_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

müssen eine nicht identisch verschwindende Lösung von konvergenter Quadratsumme haben. Daraus folgt aber wie soeben, daß die unhomogenen Gleichungen (U) nicht für beliebige rechte Seiten eine Lösung von konvergenter Quadratsumme besitzen können. Also gilt der

Alternativsatz[139]: *Entweder hat das unhomogene System* (U) — *und gleichzeitig das transponierte System* (U') — *für beliebige rechte*

139) Der entsprechende Alternativsatz für Integralgleichungen ist in Nr. 10 (Anfang) nicht in dieser Form ausgesprochen; er ergibt sich unmittelbar durch Kombination von Satz 1 und 2: $d = 0$ oder $d > 0$.

Seiten von konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung von konvergenter Quadratsumme, oder das homogene System (U_h) — *und gleichzeitig das transponierte* (U_h') — *besitzt mindestens eine nicht identisch verschwindende Lösung von konvergenter Quadratsumme.*

Im *ersten Falle* kann man hinzufügen, daß die Lösung von (U) sich durch die $y_1, y_2, \ldots$ in der zu (U) analogen Form

$$(18) \qquad x_p = y_p + \sum_{q=1}^{\infty} R_{pq} y_q \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

darstellen läßt, wo die nur von den K_{pq} abhängigen Größen R_{pq} *die Koeffizienten einer vollstetigen Bilinearform* $\mathfrak{R}(x, y)$ sind, die man als *Resolvente* von $\mathfrak{K}(x, y)$ bezeichnen kann.[140] Denn aus (15), (15') ergibt sich, daß jedes einzelne x_p ebenso wie jedes $x_p^{(n_\nu)}$ eine vollstetige Linearform der $y_1, y_2, \ldots$ ist; alsdann aber folgt aus (18) und (U)

$$\mathfrak{R}'\mathfrak{R}(y, y) = \sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{q=1}^{\infty} R_{pq} y_q\Big)^2 = \sum_{p=1}^{\infty}(y_p - x_p)^2 = \mathfrak{K}'\mathfrak{K}(x, x),$$

und da $\mathfrak{K}'\mathfrak{K}$ eine vollstetige Funktion von $x_1, x_2, \ldots$ ist, ist $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}(y, y)$ vollstetig in $y_1, y_2, \ldots$, also nach Nr. **16** a, γ) auch $\mathfrak{R}(x, y)$ vollstetig.

Man kann übrigens zeigen, daß die Resolventen der Abschnitte $\mathfrak{K}_n$, d. h. die Lösungen von (A_n), in Wahrheit sämtlich, ohne Vornahme einer Auswahl, gegen $\mathfrak{R}$ konvergieren; vgl. [190a]).

Für den *zweiten Fall* des Alternativsatzes kann man feststellen[141]):

1. *Das homogene System* (U_h) *besitzt endlichviele linear unabhängige Lösungen von konvergenter Quadratsumme.* Denn ersetzt man die Lösungen nach dem Orthogonalisierungsverfahren (vgl. Nr. **19** a, 3) durch ein System orthogonaler und normierter Lösungen $\xi_1^{(\alpha)}, \xi_2^{(\alpha)}, \ldots$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$, so folgt aus den homogenen Gleichungen (U_h)

$$(19) \qquad \mathfrak{K}(\xi^{(\alpha)}, \xi^{(\alpha)}) = \sum_{p,q=1}^{\infty} K_{pq} \xi_p^{(\alpha)} \xi_q^{(\alpha)} = -\sum_{p=1}^{\infty} (\xi_p^{(\alpha)})^2 = -1;$$

nach der *Bessel*schen Ungleichung (6b) von Nr. **19** ist aber $\sum_{\alpha} (\xi_p^{(\alpha)})^2 \leqq 1$, also, falls unendlichviele Lösungen existieren, $\lim_{\alpha=\infty} \xi_p^{(\alpha)} = 0$ und daher wegen der Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}$ $\lim_{\alpha=\infty} \mathfrak{K}(\xi^{(\alpha)}, \xi^{(\alpha)}) = 0$, im Widerspruch zu (19).

140) Entsprechend der Bezeichnung Resolvente des Kernes in der Theorie der Integralgleichungen [Nr. 4 [24]), 9 (p. 1373), **10**, Satz 2]. — Für die Vollstetigkeit der Resolvente vgl. [59]) und Nr. **18** b, 3 [187]).

141) Der Beweis von 1. ist die Übertragung des von *E. Schmidt* [384]) [68]) für Integralgleichungen gegebenen Verfahrens (s. Nr. **10** c, 1) auf die hier vorliegenden allgemeineren Verhältnisse. In *Hilberts* Darstellung [127]) wird statt dessen die orthogonale Transformation der quadratischen Form $\mathfrak{K}'\mathfrak{K}(x, x) + 2\mathfrak{K}(x, x)$ auf eine Quadratsumme angewandt.

2. *Die Zahl d' der linear unabhängigen Lösungen von (U_h') mit konvergenter Quadratsumme ist gleich der Zahl d derjenigen von (U_h).* Sind nämlich $\eta_1^{(\alpha)}, \eta_2^{(\alpha)}, \ldots$ $(\alpha = 1, \ldots, d')$ die Lösungen von (U_h'), so bestehen zwischen den linken Seiten von (U_h) identisch in $x_1, x_2, \ldots$ die d' Relationen

$$(20) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \eta_p^{(\alpha)} \Big(x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q\Big) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, d').$$

Ist nun $d < d'$, so kann man daher aus dem System (U_h) d Gleichungen so auswählen — durch passende Numerierung der Veränderlichen kann man erreichen, daß es gerade die ersten d sind —, daß ihr Bestehen eine Folge des Erfülltseins der übrigen Gleichungen

$$(21) \qquad x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q = 0 \quad (p = d+1, d+2, \ldots)$$

ist, während zwischen den linken Seiten dieser Gleichungen noch mindestens eine Identität der Form (20)

$$(20\text{a}) \qquad \sum_{p=d+1}^{\infty} \eta_p \Big(x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q\Big) = 0 \quad \text{ident. in } x_1, x_2, \ldots$$

besteht. Also hat (21) genau d linear unabhängige Lösungen (dieselben wie (U_h)); man kann daher d Unbekannte $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ so auswählen, daß jede Lösung von (21), für die $x_{i_1} = \cdots = x_{i_d} = 0$ ist, identisch verschwindet, d. h. daß das durch Unterdrückung dieser d Unbekannten entstehende System

$$(21\text{a}) \qquad \Big\{x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q\Big\}_{x_{i_1} = \cdots = x_{i_d} = 0} = 0 \quad (p = d+1, d+2, \ldots)$$

keine nicht identisch verschwindende Lösung mehr besitzt, während das zugehörige transponierte System wegen (20a) eine solche Lösung besitzt. Nun kann man aber (21a) auf die Form des ursprünglichen Systemes (U_h) bringen, indem man in höchstens d Gleichungen (so oft nämlich der Gleichungsindex $p \geqq d + 1$ einer der Zahlen $i_1, \ldots i_d$ gleich ist) je einen passenden Koeffizienten K_{pq} durch $K_{pq} - 1$ ersetzt; da hierbei nur endlichviele Koeffizienten modifiziert werden, bleibt die Vollstetigkeitsbedingung bestehen und die zu (21a) festgestellte Tatsache widerspricht dem Alternativsatz. — Vertauscht man in dieser Überlegung die Rolle von (U_h) und (U_h'), so folgt ebenso die *Unmöglichkeit von $d' < d$.*

3. Die Durchführung der gleichen Betrachtungen für die unhomogenen Gleichungen zeigt, daß die aus den Identitäten (20) folgenden

d Bedingungen für die rechten Seiten von (U)

$$(22) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \eta_p^{(\alpha)} y_p = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, d)$$

nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Lösbarkeit von (U) sind. Damit sind die sämtlichen determinantenfreien Sätze von Nr. **10** übertragen.

d) Andere Lösungsmethoden.

1. Weitere Methoden zur Behandlung des Gleichungssystems (U) beruhen auf einem Reduktionstheorem, das zuerst *A. C. Dixon*[43]) — allerdings für andersartige Konvergenzbedingungen (vgl. Nr. **20** a) — angewendet hat und das man für den vorliegenden Fall folgendermaßen formulieren kann:

Es sei

$$(23) \qquad \mathfrak{K}(x, y) = \mathfrak{S}(x, y) + \mathfrak{H}(x, y)$$

gleich der Summe einer vollstetigen Bilinearform $\mathfrak{S}(x, y)$ *von endlichem Rang*[142]) — d. i. eine Summe von endlichvielen Produkten aus vollstetigen Linearformen von $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$

$$\mathfrak{S}(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathfrak{L}_\alpha(x) \mathfrak{M}_\alpha(y) = \sum_{p, q=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} l_{\alpha p} m_{\alpha q}\right) x_p y_q \quad —$$

und einer vollstetigen Bilinearform $\mathfrak{H}(x, y)$, *die ihrerseits eine vollstetige Resolvente* $\mathfrak{R}(x, y)$ (im Sinne von (18)) *besitzt; dann gelten für die zu* $\mathfrak{K}$ *gehörigen Gleichungssysteme* (U), (U_h), (U'), (U_h') *die sämtlichen in* c) *bewiesenen Auflösungssätze* (d. h. die determinantenfreien Sätze von Nr. **10**).

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in genauer Analogie zu den Schlüssen von Nr. **10** a, 1, 4, 5.

2. Solche Zerspaltungen einer vollstetigen Bilinearform sind in verschiedener Weise möglich; eine erste hat *D. Hilbert* in seiner *zweiten Methode* zur Behandlung vollstetiger Gleichungssysteme[143]) angegeben. Er gewinnt sie, indem er zuvor $\mathfrak{K}(x, y)$ in die symmetrische Form $\frac{1}{2}(\mathfrak{K}(x, y) + \mathfrak{K}(y, x))$ und die schiefsymmetrische Form $\frac{1}{2}(\mathfrak{K}(x, y)) - \mathfrak{K}(y, x))$ zerlegt und auf die erste Form seine Theorie der orthogonalen Transformation quadratischer Formen in eine Quadratsumme (Nr. **40**) anwendet; die Resolvente des Restbestandteils $\mathfrak{H}$ der hier nicht im einzelnen zu schildernden Zerspaltung wird alsdann aus eben dieser Theorie gewonnen.

---

142) Die Bezeichnung analog wie bei Integralgleichungen; vgl. Anm.[61]).

143) *D. Hilbert*, 4. Mitteil. 1906 = Grundzüge, Kap. XII, p. 170—174.

3. Eine zweite Zerspaltung[144]) ergibt sich durch Übertragung des von *E. Schmidt*[42]) bei Integralgleichungen durchgeführten Gedankens, einen Bestandteil so abzuspalten, daß er die Anwendung der *Entwicklung nach Iterierten* gestattet (vgl. Nr. **10**a, inbes. 2.). Ist nämlich $\mathfrak{H}(x, y)$ die aus $\mathfrak{K}$ für $x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_n = 0$ entstehende Form, so kann wegen der Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}(x, y)$ das Maximum von $|\mathfrak{H}(x, y)|$ unter der Nebenbedingung $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 = 1$ durch Wahl von n beliebig klein, gewiß also auch < 1 gemacht werden. Dann konvergiert die Reihe der durch wiederholte Faltung von $\mathfrak{H}$ mit sich selbst entstehenden iterierten Formen[145])

$$-\mathfrak{H} + \mathfrak{H}\mathfrak{H}(x, y) - \mathfrak{H}\mathfrak{H}\mathfrak{H}(x, y) \pm \cdots$$

gleichmäßig gegen die vollstetige Resolvente von $\mathfrak{H}$, wie leicht aus der Abschätzung Nr. **16**a, β) zu entnehmen ist (vgl. Nr. **18**b, 3, p. 1431). Andererseits ist aber $\mathfrak{K} - \mathfrak{H} = \sum_{p,q=1}^{\infty} K_{pq} x_p y_q - \sum_{p,q=n+1}^{\infty} K_{pq} x_p y_q$ offenbar ein Kern von endlichem Range ($\leq 2n$).

4. Endlich ist auf die in Nr. **17** behandelte Methode der unendlichen Determinanten zu verweisen, die einen Teil der vollstetigen Gleichungssysteme zu erledigen gestattet.

e) Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der Sätze und Methoden. Das *Abspaltungsverfahren* läßt sich auf Klassen von Gleichungssystemen ausdehnen, die nicht vollstetig sind.[146]) Die vollstetigen Gleichungssysteme sind also durchaus nicht die einzigen, für die der Komplex der determinantenfreien Sätze gilt. Die bisher in dieser Richtung angestellten Erörterungen bewegen sich im Rahmen der *beschränkten* Gleichungssysteme und können daher erst in Nr. **18** b, 4 auseinandergesetzt werden.

C. Andere Untersuchungen über lineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten und lineare Integralgleichungen.

Von allen Untersuchungen über lineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten ist unter B. diejenige vorweggenommen worden, die der Lehre von den Integralgleichungen und der Anwen-

144) Durchgeführt bei *E. Goldschmidt*[189]) und *F. Riesz,* Équations linéaires (Literatur A 8), chap. IV, p. 97 ff.

145) Diese Entwicklung entspricht formal der Entwicklung nach iterierten Kernen (Neumannsche Reihe) bei Integralgleichungen (vgl. Nr. 4, (8a), Nr. **11**, (2)). Auf beschränkte symmetrische Formen (s. Nr. **18**a) wurde sie von *D. Hilbert,* 4. Mitteil. 1906 = Grundzüge, p. 133 ff. zuerst angewendet.

146) *W. L. Hart,* Amer. Math. Soc. Bull. 23 (1917), p. 445; 24 (1918), p. 334—335.

dung auf sie ihre Entstehung verdankt, nämlich die Theorie der *vollstetigen* Gleichungssysteme für *Unbekannte von konvergenter Quadratsumme.* Aber auch unabhängig von ihrer Beziehung auf die Integralgleichungslehre bedeutet die Aufstellung dieser Theorie, als Glied in der gesamten Entwicklung der Lehre von den unendlichvielen linearen Gleichungen betrachtet, einen Wendepunkt prinzipieller Art.

Man kann in dieser gesamten Entwicklung drei Perioden unterscheiden. Die erste, *naive* Periode tritt an einzelne Gleichungssysteme von der Form

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

in der Regel so heran, daß sie erst die Auflösung von

$$\sum_{q=1}^{n} a_{pq} x_q = y_p, \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

des sogenannten „n^{ten} Abschnitts", explizite in der Gestalt

$$x_1^{(n)} = \frac{\sum A_{1q} y_q}{A}, \quad \ldots, \quad x_n^{(n)} = \frac{\sum A_{nq} y_q}{A} \tag{2a}$$

vollzieht und in der Lösungsformel den Übergang zu unendlichgroßem n vornimmt[147]):

$$\lim_{n=\infty} x_1^{(n)} = x_1, \quad \lim_{n=\infty} x_2^{(n)} = x_2, \quad \ldots \tag{2b}$$

Erst mit *G. W. Hill*[12]) beginnt die zweite Periode, die man — in einem noch näher zu charakterisierenden Sinne — als eine *formale* bezeichnen kann und deren Kennzeichen die *unendliche Determinante* ist. Hier werden Systeme

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{U}$$

147) *J. J. Fourier,* Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, art. 166ff. (insbes. noch art. 171 und 207) = Oeuvres 1, Paris 1888, p. 149ff.; *E. Fürstenau,* Marburg 1860 bei N. G. Elwert, 35 S. und 1867 ebenda, 32 S.; *Th. Kötteritzsch,* Ztschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 1—15, 229—268; *P. Appell,* Soc. Math. Fr. Bull. 13 (1885), p. 13—18 und in unmittelbarem Anschluß daran *H. Poincaré,* ebenda p. 19—27; man vergleiche hierzu insbesondere die ausführliche historische Darstellung bei *F. Riesz,* Literatur A 8, chap. I, p. 1—20. — Es ist zweckmäßig zu betonen, daß die „Abschnittsmethode", die den Kern aller dieser Arbeiten bildet, von der Methode der unendlichen Determinanten prinzipiell abgehoben werden muß; denn sie handelt nicht von Limites von Determinanten, sondern von Limites von Determinanten-*Quotienten* vom Typus (2a), und gerade in den Beispielen, die den Gegenstand der aufgeführten Literatur bilden, pflegt weder die Zählerdeterminante noch die Nennerdeterminante für sich genommen zu konvergieren, sondern nur der Quotient.

bzw. homogene Systeme

$$(U_h) \qquad x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

unter gewissen Voraussetzungen über die Kleinheit der K_{pq} betrachtet, und der formale Apparat der Determinantentheorie wird in vollkommener Treue auf sie übertragen. Daß die Konvergenzbetrachtungen dieser Periode im scharfen Gegensatz zur ersten nirgends etwas zu wünschen übriglassen, ändert nichts an ihrem formalen Gesicht: die Auflösungs*formel* steht im Vordergrund des Interesses; die Bedingung, die an die Unbekannten x_p und ebenso an die rechten Seiten y_p gestellt wird, nämlich *beschränkt* zu sein,

$$(3) \qquad |x_p| \leqq M, \quad |y_p| \leqq N,$$

bildet zwar die Grundlage der ganzen Untersuchung, aber ihre Aufstellung ist doch wesentlich durch die Rücksicht bestimmt, daß die Konvergenz der Auflösungsformel sich ihr bequem anpaßt. Daß die so gefundenen Lösungen stets sogar eine absolut konvergente Summe haben, wenn die rechten Seiten sie haben, insbesondere also ohne weiteres bei allen homogenen Systemen, wird zunächst[148]) gar nicht berührt. Die Lehre von den Gleichungen ist hier im Grunde nur Anwendung; die unendliche Determinante ist weitgehend Selbstzweck der Theorie.

Die dritte Periode, die in *A. C. Dixon*[43]) einen Vorläufer hat und die in *Hilbert*s Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme (Nr. **16**) bisher ihren reinsten Ausdruck gefunden hat, sieht ihr Ziel nicht in expliziten Lösungs*formeln*, sondern in Lösungs*tatsachen*, in den am Eingang von Nr. **10** für Integralgleichungen formulierten determinantenfreien Sätzen. Und zugleich ist für sie die bewußte Voranstellung der Erkenntnis charakteristisch, daß die Lösungstatsachen von der hinzugefügten Konvergenzforderung abhängen, daß dasselbe Gleichungssystem etwa bei der Forderung (3) lösbar sein kann, während es nicht durch Unbekannte von konvergenter Quadratsumme befriedigt wird. Die Voraus-

148) Erst 1912 bemerkt es *H. v. Koch* in Ark. för Mat. 8, Nr. 9, 30 S., p. 8 bei der Einarbeitung der Fredholm-Hilbertschen Gedankengänge in seine Theorie. — *T. Cazzaniga*, Torino Atti 34 (1899), cl. fis. mat. e. nat., p. 351—370 (= 495 —514 der Gesamtausgabe), auf den übrigens v. Koch hier nicht Bezug nimmt, hatte lediglich bewiesen, daß die Reziproke einer Normaldeterminante wieder eine Normaldeterminante ist, ohne daraus die erwähnte Konsequenz für die Auflösung der linearen Gleichungen zu ziehen. Das gleiche übrigens bei *P. Sannia*, Torino Atti 46 (1911), p. 31—48, der die hier erwähnte und allein in Betracht kommende Arbeit von Cazzaniga nicht nennt.

setzungen, die über die Koeffizientenmatrix und über die rechten Seiten gemacht werden, sowie die Forderungen, die an die Unbekannten gestellt werden, sind bei Dixon ganz und gar andere, als bei Hilbert. Das Gemeinsame ist der Verzicht auf die Determinantenformel, die Statuierung der determinantenfreien Sätze.

Nach dem Erscheinen von Hilberts Theorie der vollstetigen Systeme ist dann in einer Reihe von Arbeiten eine Erweiterung der Theorie angestrebt worden. Man versuchte zuerst unter Festhaltung der Forderung konvergenter Quadratsumme für die rechten Seiten und die Unbekannten die Voraussetzungen über die Koeffizientenmatrix sukzessive abzuschwächen. Die naturgemäße erste Etappe auf diesem Wege war es, statt der Vollstetigkeit lediglich die *Beschränktheit* des Koeffizientensystems vorauszusetzen (Nr. **18** a), ein Begriff, der sich zunächst in Hilberts Eigenwerttheorie der quadratischen Formen (vgl. Nr. **43**) dargeboten hatte und den auf das Auflösungsproblem zu verpflanzen nahegelegen hatte (Nr. **18** b). Man schritt dann weiter bis zur äußersten Grenze der in diesem Rahmen erreichbaren Allgemeinheit vor und setzte lediglich voraus, daß die Quadratsumme der Koeffizienten jeder einzelnen Gleichung konvergiere — so daß man eben noch der Konvergenz der linken Seiten für irgendwelche Unbekannte von konvergenter Quadratsumme auf Grund der Schwarzschen Ungleichung sicher war (Nr. **19**). Daneben treten vereinzelte Untersuchungen, die auf andere Konvergenzbedingungen für rechte Seiten und Unbekannte basiert sind (Nr. **20**), sowie die entsprechenden Untersuchungen über eigentlich-singuläre Integralgleichungen und sonstige lineare Funktionalgleichungen (Nr. **21**—**24**). Die meisten dieser Untersuchungen sind durch die Tatsachen gezwungen, sich ihr Ziel niedriger zu stecken, als es in der dritten Periode geschehen konnte. Denn bei so erweiterten Voraussetzungen kann der Komplex der determinantenfreien Sätze nicht in vollem Umfange bestehen bleiben, und zu jeder Art der Konvergenzvoraussetzung über die Unbekannten die weiteste Voraussetzung über die Koeffizienten zu finden, unter der die determinantenfreien Sätze eben noch gelten, ist ein Problem, das in seiner vollen Allgemeinheit kaum ernstlich angegriffen, ja in dieser Form kaum ein ausreichend bestimmtes ist (in Nr. **20** d, Schlußbemerkung von **20** e, **24** c und **45** b werden diese prinzipiellen Fragen erneut aufgenommen). Die Mehrzahl der vorhandenen Arbeiten, von denen zu berichten sein wird, ist hier zu der Zielsetzung expliziter Lösungsformeln zurückgekehrt.

17. Die Methode der unendlichen Determinanten.[149]) *G. W. Hill*[12]) ist wohl der erste, der sich wirklicher unendlicher Determinanten bedient hat. Die numerische Integration einer Differentialgleichung von der Form $y'' + p(x)y = 0$ durch eine Reihe von der Form $x^\varrho \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n x^n$ führt ihn auf ein System von unendlichvielen linearen Gleichungen für die zu bestimmenden Koeffizienten c_n. Er definiert dessen Determinante als Grenzwert des n^{ten} Abschnitts,

$$A = \lim_{n=\infty} A_n, \tag{4}$$

und ist sich über die Konvergenz der Determinante, auf deren numerische Auswertung es ihm eigentlich ankommt, in einer über die numerischen Besonderheiten seines Spezialfalles hinausgehenden Art im klaren. *H. Poincaré*[13]) füllt die vom Standpunkt des Mathematikers bestehenden Lücken sofort aus, indem er die Konvergenz und die elementaren Eigenschaften der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & 1 & a_{23} & . \\ a_{31} & a_{32} & 1 & . \\ . & . & & . \end{vmatrix} \tag{5}$$

und ihrer Unterdeterminanten unter der Voraussetzung der Konvergenz der Doppelreihe $\sum_{p,q=1}^{\infty} |a_{pq}|$ beweist. *G. Mittag-Leffler*, der durch den Wiederabdruck der Hillschen Arbeit in den Acta mathematica das Interesse der Mathematiker auf sie gelenkt hatte, regte seinen Schüler H. v. Koch zu dem Ausbau der Theorie und ihrer Anwendung auf beliebige lineare Differentialgleichungen und die Fuchssche Theorie der determinierenden Gleichung an.

H. v. Koch[150]) behandelte zuerst die *„Normaldeterminanten“*, d. h. die Determinanten

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . \\ a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + K_{11} & K_{12} & . \\ K_{21} & 1 + K_{22} & . \\ . & . & . \end{vmatrix}, \tag{6}$$

---

149) Darstellungen dieser Theorie bei *A. Pringsheim,* Encykl. I A 3, Nr. 58—59, p. 141—146; *H. v. Koch,* C. R. Stockholm Kongr. 1909, p. 43—61; *E. Pascal,* Die Determinanten, Leipzig 1900, § 51, p. 175—178; *G. Kowalewski,* Literatur B 3, p. 369—407; *F. Riesz,* Literatur A 8, chap. II, p. 21—41.

150) *H. v. Koch,* Stockh. Öfvers. 47 (1890), p. 109—129, 411—431, Voranzeige zu der großen Arbeit[14]), sowie außerdem § 1 der Arbeit Acta math. 18 (1894), p. 337—419.

bei denen $\sum_{p,q=1}^{\infty}|K_{pq}|$ konvergiert, und die gegenüber den Poincaréschen Determinanten (5) lediglich insofern verallgemeinert sind, als die in der Diagonale auftretenden Größen $K_{11}, K_{22}, \ldots$ nicht zu verschwinden brauchen. Er ergänzt die Poincaréschen Untersuchungen durch die Betrachtung der höheren Minoren, d. h. derjenigen, die aus A durch Wegstreichung einer endlichen Anzahl von Zeilen und der gleichen Anzahl von Kolonnen hervorgehen, und die selbst wieder Normaldeterminanten sind, und fügt den Poincaréschen Sätzen vor allem den abschließenden hinzu, daß es im Falle $A = 0$ stets einen Minor *endlicher* Ordnung gibt, der nicht verschwindet. Auf Grund dessen kann dann die Theorie des *homogenen* Systems (U_h) gegeben werden, das (6) zur Determinante hat: ist $A \neq 0$, so ist (U_h) durch keine beschränkte Größenreihe $|x_p| \leqq M$ lösbar; ist $A = 0$, so gibt es eine endliche Anzahl linear-unabhängiger beschränkter Lösungen, aus denen sich alle beschränkten Lösungen linear zusammensetzen. Die Möglichkeit der Behandlung des *unhomogenen* Systems (U) bei $|y_p| \leqq N$ wird angedeutet.[151])

Etwas allgemeiner betrachtet *H. v. Koch* zugleich die *„normaloiden"* Determinanten[152]), d. h. diejenigen, bei denen man solche nichtverschwindende Faktoren $\mu_1, \mu_2, \ldots$ bestimmen kann, daß die mit den Größen $K_{pq}\frac{\mu_p}{\mu_q}$ gebildete Determinante normal ist; die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems (U) ist dann im Sinne

$$(7) \qquad |x_p| \leqq M \cdot \mu_p, \quad |y_p| \leqq N \cdot \mu_p$$

zu verstehen.

Zu ernsteren Verallgemeinerungen sieht sich *H. v. Koch* durch die Anwendung auf lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, durch den Übergang zu Systemen linearer Differentialgleichungen, endlich durch den Aufstieg zu partiellen linearen Differentialgleichungen von wachsender Ordnung und Variabelnzahl sukzessive veranlaßt. Er stellt eine Kette von Bedingungen auf, unter denen die ganze Theorie in der gleichen Weise durchführbar ist; er sagt, die Determinante ist vom „genre p", wenn

---

151) Ausgeführt ist dies zuerst bei *T. Cazzaniga*, Ann. di mat. (2) 26 (1898), p. 143—218, wo die ganze Theorie nochmals ausführlich dargestellt ist.

152) *H. v. Koch*, Acta[14]), p. 235—238; der Name von *G. Vivanti*, Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 25—32, insbes. p. 27. Vgl. noch *T. Cazzaniga*[151]), § 12 und *M. Fujiwara*, Toh. Rep. 3 (1914), Nr. 4, p. 199—216, der normaloide Determinanten auf einen Satz über konvexe Körper anwendet.

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{\infty} |K_{\alpha\alpha}|, & \\ \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}' |K_{\beta\alpha_1} K_{\alpha_1\alpha_2} \ldots K_{\alpha_r\beta}| & (r = 1, 2, \ldots, 2p-2), \\ \sum_{\beta,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}' |K_{\beta\alpha_1} K_{\alpha_1\alpha_2} \ldots K_{\alpha_r\gamma}| & (r = p-1, p, \ldots, 2p-2) \end{cases}$$

absolut konvergieren (die akzentuierten Summen sind über alle diejenigen Kombinationen ihrer Summationsindizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ zu erstrecken, bei denen keine zwei Indizes einander gleich sind). An der Spitze dieser Kette steht als 0[tes] Glied die Klasse der Normaldeterminanten, und jedes weitere Glied der Kette ist im nächsten als Teil enthalten.[153])

Alle diese Fälle, auch die, die sich hieraus ebenso ableiten, wie die normaloiden aus den normalen, sowie einige später aufgestellte sind in einem allgemeineren und viel natürlicheren Begriff *H. v. Koch*s enthalten, dem der *absolut konvergenten* Determinante.[154]) Die Determinante wird dabei definiert als

$$\sum \pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots,$$

erstreckt über alle Permutationen der Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, bei denen nur endlichviele Indizes ihren Platz in der natürlichen Reihenfolge verlassen haben[155]); das Vorzeichen wird wie bei gewöhnlichen Determinanten je nach der Natur der Permutation bestimmt; wenn nun diese unendliche Reihe absolut konvergiert, nennt *v. Koch* die Determinante absolut konvergent. Der Beweis des Satzes von der Endlich-

---

153) *H. v. Koch,* Paris C. R. 116 (1893), p. 179—181 (für $p = 1$); Stockh. Acc. Bihang 22 (1896), Afd. I, Nr. 4, 31 S., insbes. §§ 3, 4; Acta math. 24 (1900), p. 89—122, insbes. § 3; *R. Palmqvist,* Ark. för Mat. 8 (1913), Nr. 32, 4 S.; 10 (1914), Nr. 23, 15 S. und Diss. Upsala 1915, 52 S.

154) *H. v. Koch* in den [153]) zitierten Arbeiten, sowie Paris C. R. 120 (1895), p. 144—147. — Daß der Begriff der absolut konvergenten Determinante weiter ist als der aller Determinanten von endlichem genre zusammen, belegt H. v. Koch (in Stockh. Bih. 22 [153]), p. 26) durch das Beispiel: alle $K_{pq} = 0$ außer denen der ersten Zeile und der ersten Spalte. In diesem Beispiel besteht Δ offenbar nur aus den Termen $K_{11} - K_{12}K_{21} - K_{13}K_{31} - \cdots$ und ist also, nebst allen seinen Minoren, absolut-konvergent, wenn diese Reihe absolut konvergiert, also z. B. für $K_{1n} = K_{n1} = \frac{1}{n}$, und er zeigt, daß diese spezielle Determinante von keinem endlichen genre ist.

155) Diese Reihe enthält abzählbar viele Summanden; daß man ohne die Beschränkung auf Permutationen von je nur endlichvielen Indizes ein Kontinuum von Termen erhalten würde, behandelt *N. J. Lennes,* Amer. Math. Soc. Bull. 18 (1911), p. 22—24.

keit des Defekts wird für diese Determinanten außerordentlich durchsichtig; desgleichen das Analogon der elementaren Sätze über Unterdeterminanten (Laplacesche Entwicklung), falls die Minoren ihrerseits wieder absolut konvergente Determinanten sind. Daß dies nicht automatisch der Fall ist, ist der erste Schönheitsfehler dieser Begriffsbildung.[156]) Ein entscheidendes Hindernis stellt sich dann der Durchführung dieser Theorie darin entgegen, daß das Multiplikationstheorem, das in den vorangehenden Fällen stets gültig war, für absolut konvergente Determinanten nicht allgemein durchführbar ist; *H. v. Koch* zeigt es an der Hand der Determinanten vom Typus

$$(9\text{a})\quad \begin{vmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdot \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad (9\text{b})\quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdot \\ b_1 & 1 & a_2 & \cdot \\ 0 & b_2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

die nebst allen ihren Minoren absolut konvergent sind, und zwar (9a), ohne daß die u_{pq} irgendwie beschränkt zu werden brauchen, (9b) dann und nur dann, wenn $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots$ absolut konvergiert.[157])

Angesichts dieser Schwierigkeiten kehrt *v. Koch* zu der Aufsuchung immer anderer Spezialfälle von absolut konvergenten Determinanten zurück, für die er die volle Theorie durchführen kann. Es sei noch einer von diesen angeführt[158]):

$$(10\text{a})\quad \sum_{p=1}^{\infty} |K_{pp}| \text{ konv.,} \qquad (10\text{b})\quad |K_{pq}| \leqq \varkappa_p, \text{ wo } \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots \text{ konv.}$$

Nach dem Erscheinen der *Fredholm*schen und *Hilbert*schen Arbeiten erkennt *v. Koch* diejenigen Determinanten als absolut konvergent, die den Bedingungen

$$(11\text{a})\quad \sum_{p=1}^{\infty} |K_{pp}| \text{ konv.,} \qquad (11\text{b})\quad \sum_{p,q=1}^{\infty} |K_{pq}|^2 \text{ konv.}$$

---

156) Das Beispiel: alle $K_{pq} = 0$ außer $K_{23}, K_{24}, \ldots; K_{21}, K_{31}, \ldots$ zeigt eine Determinante, die absolut konvergent ist, welche Werte auch die noch freien Parameter darin haben, in der aber der Minor von a_{12} von dem in [154]) beschriebenen Typus ist, also nur dann absolut konvergent ist, wenn die Reihe $K_{21} - K_{31} K_{23} - K_{41} K_{24} - \cdots$ es ist, was bei passender Wahl der noch freien Größen K_{2n}, K_{n1} nicht der Fall sein wird. Das Beispiel, das *H. v. Koch* in Stockh. Bihang 22 [153]), p. 8 angibt, enthält ein Versehen.

157) *H. v. Koch,* Paris C. R. 120 [154]) und Acta math. 24 [153]), § 2. Für $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{n}$ ist (9b) absolut konvergent, aber die Determinante des Systems, das aus ihr durch Komposition von Reihen in irgendeiner der vier möglichen Kombinationen gebildet wird, ist nicht absolut konvergent, da bereits die Summe der Diagonalglieder divergiert (Acta 24, p. 99).

158) *H. v. Koch,* Acta 24 [153]) (1900), § 3.

genügen, und entwickelt deren Theorie und die der zugehörigen linearen Gleichungen.[159]) Er kann daraus die Auflösungssätze für den Fall ableiten, daß nur die Bedingung (11b) allein erfüllt ist; denn die Größen $1 + K_{pp}$ sind auf Grund von (11b) von einer gewissen an von 0 verschieden; dividiert man also von dieser ab jede Gleichung des Systems (U) mit ihrem Diagonalkoeffizienten, so wird auch die Bedingung (11a) erfüllt und an der Konvergenz der Quadratsumme der rechten Seiten y_p ist dadurch nichts geändert worden.

Das ist allerdings weniger als *Hilbert*s Theorie der vollstetigen Systeme [vgl. Nr. **16**, (9) und den folgenden Text]. Aber auf der anderen Seite kann man unter der Voraussetzung (11b) mit Hilfe der Kochschen Untersuchung das Resultat ableiten, daß die Auflösung (2a) des n^{ten} Abschnitts mit wachsendem n gegen die Lösung konvergiert, ohne daß vorher irgendeine Auswahl (vgl. Nr. **16**c) in der Folge der Abschnitte vorzunehmen wäre — ein Resultat, das sich aus keiner der neueren Theorien unmittelbar ablesen läßt.[160])

In analoger Weise hätte v. Koch die Bedingung (10b) leicht von der Bedingung (10a) loslösen und damit zwar nicht die Methode, aber doch das Resultat von *A. C. Dixon*[43]) (vgl. Nr. **20**a) gewinnen können, einschließlich der oben angefügten Bemerkung über die Konvergenz der abschnittsweisen Auflösung.

Betrachtet man diese ganze Theorie der unendlichen Determinanten im Rahmen der modernen Auflösungstheorie der unendlichen linearen Gleichungssysteme, so kann man feststellen, daß sie in mannig-

159) *H. v. Koch.*[88]) Etwa gleichzeitig hat *R. d'Adhémar,* Brux. Soc. sc. 34 A, 28. Okt. 1909, p. 65—72 die Normalität in Richtung der Bedingungen (11) erweitert, ohne jedoch deren volle Allgemeinheit zu erreichen, und *O. Szász*, Diss. Budapest 1911, 74 S. = Math. és Phys. Lap. 21, p. 224—295 (vorgelegt Dez. 1909) das Kochsche Resultat mit Hilfe des Hadamardschen Determinantensatzes und Hilbertscher Begriffsbildungen bewiesen, während v. Koch den Hadamardschen Satz nur in geringerem Maße heranzieht und sich im übrigen der ihm geläufigen Methoden bedient. *H. v. Koch*[96]) reiht sodann der Bedingung (11) sukzessive eine ähnliche Kette weiterer Bedingungen an, wie er früher den Normaldeterminanten die Determinanten von wachsendem genre hatte folgen lassen. In [148]) und in Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1913), p. 285—291 führt er die Entwicklung nach Iterierten und das Abspaltungsverfahren in die Theorie der unendlichen Determinanten ein. *St. Bóbr,* Diss. Zürich 1918 und Math. Ztschr. 10 (1921), p. 1—11 [s. Nr. **20**c [221])] verwendet die unendlichen Determinanten in entsprechender Weise bei Gleichungen für Unbekannte, bei denen $\sum |x_\alpha|^p$ konvergiert, um diejenigen Veränderungen abzuleiten, die F. Riesz (Literatur A 8) an den Hilbertschen Sätzen angebracht hat. — Wegen der entsprechenden Verwendung der unendlichen Determinanten für die Eigenwerttheorie vgl. Nr. **40**d [513]).

160) Durch die in [190a]) angegebene Schlußweise kann es allerdings für beliebige vollstetige Systeme hergeleitet werden.

facher Weise geeignet ist, darin verwendet zu werden, daß aber trotzdem einem Aufbau der Auflösungstheorie auf der Grundlage der unendlichen Determinanten von Natur enge und unübersteigliche Grenzen gezogen sind. *Einerseits* nämlich kann ein homogenes Gleichungssystem, dessen Determinante absolut konvergent und zugleich von 0 verschieden ist, eine eigentliche Lösung haben, die nicht nur beschränkt ist, sondern sogar eine absolut konvergente Summe hat, während gleichzeitig das transponierte homogene System (U_h') keine oder doch keine beschränkte Lösung hat.[161]) Ob man sich also auf den Standpunkt stellt, den *v. Koch* vor 1909 im wesentlichen festgehalten hat, beschränkte Lösungen zu betrachten, oder ob man sich auf den Standpunkt absolut konvergenter Summe oder aber auf den Standpunkt absolut konvergenter Quadratsumme der Unbekannten stellt, in keinem Falle wird eine vollständige Auflösungstheorie nach dem Muster der Algebra möglich sein, die für beliebige Systeme mit absolut konvergenter Determinante gilt. *Auf der anderen Seite* gibt es — wenn man etwa den Standpunkt der konvergenten Quadratsumme festhält — Fälle wiederum vom Typus (9b), wo alle Auflösungssätze gelten, wo aber die Determinante nicht absolut konvergiert; denn jene Sätze gelten gewiß, wenn das System der K_{pq} vollstetig ist, und das ist beim Typus (9b) dann und nur dann der Fall, wenn $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, $\lim_{n=\infty} b_n = 0$ ist[162]); es ist aber leicht, die a_n, b_n so zu wählen, daß zugleich mit

161) Man erkennt dies sehr einfach, wenn man sich der von v. Koch zu anderem Zwecke verwendeten Typen (9) bedient. Setzt man in (9a) $u_{12} = u_{23} = \cdots = -1$, alle anderen $u_{pq} = 0$, so hat das zugehörige homogene System

$$(U_h) \qquad x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0, \quad \ldots$$

die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 1$, die beschränkt ist, während die Determinante absolut konvergent ist und den Wert 1 hat und das transponierte System

$$(U_h') \qquad x_1 = 0, \quad x_2 - x_1 = 0, \quad x_3 - x_2 = 0, \quad \ldots$$

unlösbar ist. Indem man die Werte $u_{n,n+1}$ dahin abändert, daß man $u_{12} = -1$, $u_{23} = -2$, $u_{34} = -3$ usf. setzt, erhält man das gleiche mit dem Unterschied, daß die Lösung des homogenen Systems eine absolut konvergente Summe hat. Es ist nicht schwer, analoge Beispiele vom Typus (9b) zu konstruieren, bei denen die $b_n \neq 0$ sind, etwa indem man $a_n = -n$, $b_n = \frac{1}{n^3}$ setzt. — Auch Erweiterungen wie die von *W. L. Hart*, Amer. Math. Soc. Bull. 28 (1922), p. 171—178 betrachteten „summierbaren" Determinanten, bei denen die arithmetischen Mittel aus den Abschnittsdeterminanten D_1, D_2, ... konvergieren, u. dgl. können an dem Tatbestande dieser Beispiele nichts ändern.

162) Daß die Bedingung notwendig ist, findet man in Nr. 16, (8), daß sie hinreichend ist, folgt leicht aus der Definition der Vollstetigkeit mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung.

diesen beiden Bedingungen auch noch die andere erfüllt ist, daß $|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \cdots$ divergiert.

Der Determinantenbegriff dieser zweiten formalen Periode ist also kein geeignetes Instrument einer allgemeinen Auflösungstheorie von unendlichvielen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten.[163])

18. Theorie der beschränkten Gleichungssysteme.

a) Beschränkte Bilinearformen unendlichvieler Veränderlicher.[164])

1. Eine wie in Nr. **16** zunächst formal definierte Bilinearform

---

163) Es konnte sich im Text nur darum handeln, aus der Theorie der unendlichen Determinanten dasjenige herauszugreifen, was für die Auflösung der Gleichungen in Betracht kommt. Die Theorie der unendlichen Determinanten als solche ist am Ende des Artikels von Pringsheim [149]) behandelt, der im September 1898 abgeschlossen ist. Es mögen aber hier in Kürze diejenigen Arbeiten zusammengestellt werden, die oben noch nicht aufgeführt und erst nach Abschluß des Pringsheimschen Artikels erschienen sind.

Im Anschluß an *S. Pincherle,* Ann. di mat. 12 (1884), p. 11—40 behandelt *T. Cazzaniga* in [151]) und Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 83—94 Determinanten, bei denen
$$|a_{pq}| \leq M r^{-p} s^{-q}, \quad |rs| > 1$$
ist; derselbe bemerkt in Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 229—238, daß man normaloide Determinanten nicht multiplizieren kann, und gibt Math. Ann. 53 (1900), p. 272—288 eine Theorie der kubischen unendlichen Determinanten. Mehrdimensionale unendliche Determinanten behandelt auch *A. Calegari,* Periodico di Mat. (3) 2 (1904), p. 107—118.

G. Sannia überträgt Torino Atti 46 (1911) p. 67—77 den Sylvesterschen und Hadamardschen Determinantensatz in der durch Formel (14) von Nr. **5** gegebenen Formulierung auf unendliche normale Determinanten und behandelt Batt. Giorn. 49 (1911), p. 131—140 orthogonale Normaldeterminanten. *J. Schur,* Berl. Math. Ges. 22 (1923), p. 9—20, insbes. p. 19 f., gibt für Determinanten, die den Bedingungen (11) genügen, Verschärfungen des Hadamardschen Determinantensatzes.

Mit unendlichen Determinanten beschäftigen sich ferner noch die folgenden Arbeiten von *H. v. Koch:* Acta math. 15 (1891), p. 53—63; Paris C. R. 116 (1893), p. 91—93, 365—368; Paris C. R. 121 (1895), p. 517—519; Stockh. Öfvers. 52 (1895), Nr. 9, p. 721—728, die lediglich Anwendungen auf Differentialgleichungen enthalten, ferner Stockh. Acc. Bihang 25 (1895), Nr. 5, 24 S. mit einer Anwendung auf die Theorie der Funktionalgleichungen. Anwendungen auf die Kettenbruchtheorie endlich bringen die beiden Arbeiten: *H. v. Koch,* Paris C. R. 120 [154]) und Stockh. Öfvers. 52 (1895), p. 101—112 sowie *O. Szász,* Münchn. Ber. 1912, p. 323—361.

164) Die hier darzustellenden Begriffe sind von *D. Hilbert* in der 4. Mitteilung (Gött. Nachr. 1906) entwickelt worden, zitiert nach Grundzüge, Kap. XI, insbes. p. 110, 125—131. Eine zusammenhängende Darstellung der Sätze und Beweise ist gegeben bei *E. Hellinger* u. *O. Toeplitz,* Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, Math. Ann. 69 (1910), p. 289—330, insbes. § 1—6. Vgl. *F. Riesz,* Literatur A 8, Chap. IV. — Über die Frage, in welchem Sinne die Begriffsbildung der beschränkten Matrizen eine abschließende ist, vgl. Nr. **19** a, 4.

der unendlichvielen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$

$$\mathfrak{A}(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \tag{1}$$

heißt *beschränkt,* wenn ihr n^{ter} Abschnitt für alle Wertsysteme, deren Quadratsumme 1 nicht überschreitet, absolut unterhalb einer von n unabhängigen Schranke M bleibt,

$$|\mathfrak{A}_n(x, y)| = \left|\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p y_q\right| \leqq M \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{n} x_p^2 \leqq 1, \ \sum_{p=1}^{n} y_p^2 \leqq 1, \tag{1a}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn für *beliebige* $x_1, x_2, \ldots,$ $y_1, y_2, \ldots$

$$|\mathfrak{A}_n(x, y)| = \left|\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p y_q\right| \leqq M \sqrt{\sum_{p=1}^{n} x_p^2 \sum_{p=1}^{n} y_p^2}. \tag{1b}$$

M heißt dann eine „Schranke der Bilinearform". Das System der Koeffizienten

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = (a_{pq})$$

wird in diesem Falle eine *beschränkte unendliche Matrix* genannt.

Transponierte Form: Die durch Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen im Koeffizientensystem entstehende Form

$$\mathfrak{A}'(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{qp} x_p y_q = \mathfrak{A}(y, x) \tag{2}$$

heißt die „transponierte Form zu $\mathfrak{A}$"; sie ist gleichzeitig mit $\mathfrak{A}$ beschränkt.

Konvergenz[165]): Für je zwei Wertsysteme der Veränderlichen x, y von konvergenter Quadratsumme konvergiert die unendliche Reihe (1) im Sinne der Konvergenz der Doppelreihen sowohl bei zeilenweiser, als auch bei kolonnenweiser, als auch bei abschnittsweiser Summation gegen ein und denselben Wert $\mathfrak{A}(x, y)$, den *Wert der beschränkten Bilinearform,* d. h.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(x, y) &= \sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q\Big) = \sum_{q=1}^{\infty}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q\Big) \\ &= \lim_{n=\infty} \mathfrak{A}_n(x, y) = \lim_{m,n=\infty} \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{pq} x_p y_q, \end{aligned} \tag{3}$$

und es ist

$$|\mathfrak{A}(x, y)| \leqq M \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} x^2 \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2}. \tag{3a}$$

---

165) *D. Hilbert*[164]), p. 127 ff.; *Hellinger-Toeplitz*[164]), § 2, Satz 2—4, p. 297—299.

Die Doppelreihe konvergiert jedoch *nicht notwendig absolut* [Beispiel[166]): $a_{pq} = \frac{1}{p-q} (p \neq q)$, $a_{pp} = 0$].

Stetigkeit: Aus (3a) folgt für den Unterschied der Werte von $\mathfrak{A}$ an zwei Stellen:

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{A}(x,y) - \mathfrak{A}(x',y')| \\ \text{(4a)} \quad &\leqq M\left\{\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \sum_{p=1}^{\infty}(y_p - y_p')^2} + \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} y_p'^2 \sum_{p=1}^{\infty}(x_p - x_p')^2}\right\}. \end{aligned}$$

Daher besitzt die durch (3) für alle Wertsysteme x, y von konvergenter Quadratsumme definierte Funktion $\mathfrak{A}(x, y)$ die von Hilbert als *Stetigkeit* bezeichnete Eigenschaft[167]): konvergiert die Folge von Wertsystemen $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots; y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)}, \ldots$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ von konvergenter Quadratsumme derart gegen ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme, daß[168])

$$\text{(4b)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \sum_{p=1}^{\infty}(x_p - x_p^{(\nu)})^2 = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \sum_{p=1}^{\infty}(y_p - y_p^{(\nu)})^2 = 0,$$

so ist stets

$$\text{(4c)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{A}(x^{(\nu)}, y^{(\nu)}) = \mathfrak{A}(x, y).$$

Hingegen ist nicht jede beschränkte Bilinearform vollstetig im Sinne von Nr. **16**, (5).[169])

2. Eine *Linearform* $\mathfrak{L}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} l_p x_p$ der unendlichvielen Veränder-

166) Daß die Bilinearform mit diesen Koeffizienten nicht notwendig absolut konvergiert, ist leicht zu zeigen; das wesentliche ist der Nachweis ihrer Beschränktheit, den zuerst *D. Hilbert* in einem Vortrag in der Göttinger math. Ges. [s. Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 16 (1907), p. 249] erbrachte; sein Beweis ist veröffentlicht bei *H. Weyl*[566]), p. 83 und *D. Hilbert*[164]), p. 125, Fußn. Andere Beweisgänge sind angedeutet bei *O. Toeplitz,* Gött. Nachr. 1910[555]), p. 503 (vgl. dazu auch *O. Toeplitz,* Gött. Nachr. 1907[562]), p. 113). Beispiele beschränkter *symmetrischer* Formen, bei denen (3) nicht absolut konvergiert, bei *O. Toeplitz,* Gött. Nachr. 1910[555]), p. 503; *J. Schur*[172]), § 6; *O. Toeplitz*[134]).

167) *D. Hilbert*[164]), p. 127; vorübergehend (Gött. Nachr. 1906, p. 439; Palermo Rend. 27[370]), p. 62) sagt er dafür *beschränkt stetig,* während er statt „vollstetig" das Wort „stetig" braucht; vgl. [128]).

168) Hier wird von der Folge der Wertsysteme $x_p^{(\nu)}$ wesentlich mehr verlangt, als in (5a) von Nr. **16** (Vollstetigkeitsdefinition); z. B. die Folge $x_p^{(\nu)} = 0$ für $p \neq \nu$, $x_\nu^{(\nu)} = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, bei der für jedes p $\lim_{\nu=\infty} x_p^{(\nu)} = 0$, also (5a) von Nr. **16** erfüllt ist, konvergiert im obigen Sinne nicht.

169) Beispiel: $\mathfrak{A}(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p y_p$ mit der Folge von [168]). Vgl. auch *Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 308.

lichen heißt entsprechend der obigen Definition *beschränkt*[170]), wenn eine Schranke $M > 0$ existiert, so daß für jedes ganzzahlige n und für beliebige Werte der Variablen $x_1, \ldots, x_n$

$$(5) \qquad \left|\sum_{p=1}^{n} l_p x_p\right| \leqq M \sqrt{\sum_{p=1}^{n} x_p^2};$$

$\mathfrak{L}(x)$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Quadratsumme der Koeffizienten $\sum_{p=1}^{\infty} l_p^2$ konvergiert[170]). Für Linearformen sind daher [vgl. Nr. **16**, (6)] die Begriffsumfänge „vollstetig" und „beschränkt" identisch.

3. Für die Beschränktheit einer Bilinearform ist *notwendige Bedingung* die Konvergenz und Beschränktheit der Quadratsummen der Koeffizienten jeder einzelnen Zeile und Kolonne:

$$(6) \quad \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}^2 \leqq M^2 \quad (p = 1, 2, \ldots), \qquad \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}^2 \leqq M^2 \quad (q = 1, 2, \ldots);$$

diese Bedingung ist nicht hinreichend.[171]) *Hinreichende Bedingung* für Beschränktheit ist jede der in Nr. **16** aufgeführten Bedingungen für Vollstetigkeit, da jede vollstetige Bilinearform beschränkt ist [(10) von Nr. **16** und Nr. **19**[195])]. Eine Reihe darüber hinausgreifender hinreichender Kriterien hat *J. Schur*[172]) angegeben. Von besonderen Beispielen beschränkter Formen sind außer den trivialen Fällen vom Typus der „Diagonalform" $\sum_{p=1}^{\infty} a_p x_p y_p$ mit $|a_p| \leqq M$ zu erwähnen: die *Hilbert*schen Formen $\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q}$ und $\sum_{p,q=1}^{\infty}{}' \frac{x_p y_q}{p-q}$ [173]) sowie die von *O. Toeplitz* untersuchten *regulären L-Formen*[174]).

4. Sind $\mathfrak{A}(x, y)$, $\mathfrak{B}(x, y)$ zwei beschränkte Bilinearformen, so sind die aus den Zeilen der Koeffizientenmatrix von $\mathfrak{A}$ und den Kolonnen

---

170) *D. Hilbert*[164]), p. 126; *Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 294 f.

171) Ein Beispiel einer nichtbeschränkten Bilinearform, bei der alle Quadratsummen (6) konvergieren, ist $a_{pq} = (p + q)^{-s} (\frac{1}{2} < s < 1)$ [*Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 306].

172) *J. Schur*, Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlichvielen Veränderlichen, J. f. Math. 140 (1911), p. 1—28, insbes. § 2, 3.

173) S. die in [166]) zitierten Stellen bei *Hilbert, Weyl, Toeplitz* (Gött. Nachr. 1910). Weitere Beweise der Beschränktheit dieser Formen bei *F. Wiener,* Math. Ann. 68 (1910), p. 361—366; *J. Schur*[172]), § 5; *G. H. Hardy,* Mess. of Math. 48 (1918), p. 107—112 und Math. Ztschr. 6 (1920), p. 314—317; *L. Fejér* u. *F. Riesz,* Math. Ztschr. 11 (1921), p. 308.

174) Vgl. darüber Nr. **43** d, 1. und [562]).

der von $\mathfrak{B}$ gebildeten Reihen

(7a) $$c_{pq} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} b_{\alpha q} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

wegen (6) absolut konvergent, und sie stellen, wie *D. Hilbert*[175]) gezeigt hat, die Koeffizienten einer neuen beschränkten Bilinearform

(7b) $$\mathfrak{C}(x, y) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} b_{\alpha q}\Big) x_p y_q$$

dar, die als *Faltung* von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet wird; diese Form läßt sich auch durch die einfache absolut konvergente Reihe

(7c) $$\mathfrak{C}(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p\Big) \Big(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q} y_q\Big) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\partial \mathfrak{A}(x, y)}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \mathfrak{B}(x, y)}{\partial x_\alpha}$$

darstellen, und ihre Werte haben das Produkt der Schranken von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zur Schranke:

(7d) $$\begin{cases} |\mathfrak{A}\mathfrak{B}(x, y)| \leqq MN \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2}, \quad \text{wo} \\ |\mathfrak{A}(x, y)| \leqq M \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2}, \quad |\mathfrak{B}(x, y)| \leqq N \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2} \end{cases}$$

(Erster Hilbertscher Faltungssatz)[175]). — Die Faltungen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ sind im allgemeinen voneinander verschieden.

Speziell sind die Faltungen von $\mathfrak{A}$ mit der transponierten Form beschränkte Formen mit symmetrischem Koeffizientensystem und der Schranke M^2:

(8) $$\begin{cases} \mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} a_{q\alpha}\Big) x_p y_q = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p\Big) \Big(\sum_{q=1}^{\infty} a_{q\alpha} y_q\Big), \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, y)| \leqq M^2 \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2}. \end{cases}$$

Umgekehrt folgt aus der Beschränktheit von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, y)$ die von $\mathfrak{A}$ (und $\mathfrak{A}'$), und es gilt sogar für jedes Wertsystem der Variablen[176])

(8a) $$|\mathfrak{A}(x, y)|^2 \leqq \mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, x) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2.$$

Ist $\mathfrak{C}$ eine dritte beschränkte Bilinearform, so ist die Faltung von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C}$ identisch mit der Faltung von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ *(Zweiter*

---

175) *D. Hilbert*[164]), p. 128f.; *Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 299ff. Hilbert bezeichnet die Faltung mit $\mathfrak{A}(x, \cdot)\,\mathfrak{B}(\cdot, y)$. — Ist $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ vollstetig, so ist auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ vollstetig [*Hilbert*[164]), p. 152].

176) *Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 304 Fußn.

Hilbertscher Faltungssatz)[177]):

$$(9)\qquad \sum_{p,q=1}^{\infty}\Big\{\sum_{\beta=1}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty}a_{p\alpha}b_{\alpha\beta}\Big)c_{\beta q}\Big\}x_p y_q=\sum_{p,q=1}^{\infty}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{\infty}a_{p\alpha}\Big(\sum_{\beta=1}^{\infty}b_{\alpha\beta}c_{\beta q}\Big)\Big\}x_p y_q .$$

5. Man kann diese Eigenschaften der beschränkten Formen dahin zusammenfassen, daß sich auf die Gesamtheit der beschränkten Matrizen *der für endliche Matrizen übliche Kalkül* (s. Encykl. I A 4, Nr. **10**; *E. Study*) anwenden läßt und daß dabei die rationalen ganzen Operationen unbeschränkt ausführbar sind.[178]) *Summe* und *Differenz* $\mathfrak{A}\pm\mathfrak{B}$ der beschränkten Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind erklärt als die Matrizen mit den Elementen $a_{pq}\pm b_{pq}$, das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ als die zur gefalteten Form gehörige Matrix

$$(10)\qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B}=\Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty}a_{p\alpha}b_{\alpha q}\Big);$$

es gilt dann, genau wie bei endlichen Matrizen, das kommutative und assoziative Gesetz der Addition, das assoziative Gesetz der Multiplikation und das distributive Gesetz — nicht aber das kommutative Gesetz der Multiplikation. Die Rolle der Null spielt die durchweg mit Nullen besetzte Matrix ($a_{pq}=0$), die des Einheitselementes der Multiplikation die *Einheitsmatrix:*

$$(11)\qquad \mathfrak{E}=(e_{pq}),\ \text{wo}\ e_{pp}=1,\ e_{pq}=0\ \text{für}\ p\neq q;\ \ \mathfrak{E}(x,y)=\sum_{p=1}^{\infty}x_p y_p;$$

es gilt für jede beschränkte Matrix $\mathfrak{A}$:

$$(11\text{a})\qquad \mathfrak{A}\mathfrak{E}=\mathfrak{A},\quad \mathfrak{E}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}.$$

6. Die dargelegten Begriffe sind auf *komplexe* Koeffizienten und Veränderliche unmittelbar ausdehnbar, wenn man die Veränderlichen entsprechend durch Bedingungen für die Quadratsumme ihrer absoluten Beträge einschränkt.[179])

b) Auflösung der linearen Gleichungen; die reziproke Matrix.

1. Eine beschränkte Matrix $\mathfrak{B}$ heißt (*hintere*) *Reziproke*[180]) zu

177) *Hilbert*[164]), p. 129 (Hilfss. 4); *Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 302.

178) *E. Hellinger* u. *O. Toeplitz,* Gött. Nachr. 1906, p. 351—355 und [164]), § 6. — Bereits 1901 hatte *A. C. Dixon* in seiner schon mehrfach hervorgehobenen Arbeit[43]) allerdings in einem durch andere Konvergenzbedingungen umschriebenen Bereich (s. Nr. **20** a) diesen Kalkül mit unendlichen Matrizen aufgestellt und verwendet.

179) *Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 304 f. — Vgl. auch *J. Schur*[172]) und *E. Schmidt*[192]).

180) Diese auch bei endlichen Matrizen übliche Bezeichnung bei *Hellinger-Toeplitz*[164]), p. 311. Der Begriff tritt für beschränkte Matrizen — explizite allerdings nur für symmetrische Matrizen — zuerst auf bei *Hilbert*[164]), p. 124, wo die Reziproke von $\mathfrak{E}-\lambda\mathfrak{K}$ Resolvente von $\mathfrak{K}$ genannt wird; der davon abwei-

$\mathfrak{A}$, wenn

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}. \tag{12}$$

Existiert sie, so hat wegen (7c) das zur Matrix $\mathfrak{A}$ gehörige *beschränkte Gleichungssystem*

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

für beliebige rechte Seiten y_p mit konvergenter Quadratsumme die Lösungen

$$x_q = \sum_{r=1}^{\infty} b_{qr} y_r \qquad (q = 1, 2, \ldots), \tag{13a}$$

die wegen (8) gleichfalls konvergente Quadratsumme besitzen.

Speziell sind die in Nr. **16** c behandelten vollstetigen Gleichungssysteme (U) unter dem Typus (13) enthalten; und zwar ist bei ihnen $\mathfrak{A} = \mathfrak{E} + \mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$ eine *vollstetige* Bilinearform ist. Die Lösungsformel (18) von Nr. **16** besagt, daß in diesem Falle eine hintere Reziproke $\mathfrak{B} = \mathfrak{E} + \mathfrak{R}$ existiert, wo $\mathfrak{R}$ gleichfalls vollstetig ist [*Resolvente*[180]) von $\mathfrak{K}$]. Während in diesem speziellen Falle gemäß dem Alternativsatz von p. 1409 genau wie im Falle endlicher Matrizen die Reziproke eindeutig bestimmt ist, wenn sie überhaupt existiert, können im allgemeinen zu einem beschränkten $\mathfrak{A}$ *unendlichviele beschränkte hintere Reziproke* vorhanden sein (Beispiel[181]): $\mathfrak{A} = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots$, $\mathfrak{B} = x_1(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots) + x_2 y_1 + x_3 y_2 + \cdots$ mit willkürlichen $b_1, b_2, \ldots$).

2. Um diese Verhältnisse zu übersehen, betrachtet man neben der hinteren die *vordere Reziproke*[180]), d. i. eine beschränkte Matrix $\mathfrak{C}$, für die

$$\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{E} \tag{14}$$

(im soeben genannten Beispiel ist keine vorhanden). Nach *O. Toeplitz*[182]) bestehen dann die folgenden *Formalsätze*, die allein aus den formalen Rechnungsregeln des Matrizenkalkuls geschlossen werden können:

α) Besitzt $\mathfrak{A}$ sowohl eine vordere als auch eine hintere beschränkte Reziproke, so sind beide identisch und sind eindeutig bestimmt, und

chende Gebrauch des Wortes Resolvente im Text entspricht dem in der Theorie der Integralgleichungen für den gleichen Begriff üblichen [lösender Kern; vgl. Nr. **4**, **9**, **10** sowie **16**[140])].

181) *Hellinger-Toeplitz*, Gött. Nachr.[178]), p. 355 und [164]), p. 311. — Übrigens kann man das gleiche Phänomen in der Algebra feststellen, wenn man statt quadratischer Matrizen von gleicher Zeilen- und Kolonnenanzahl Rechtecke von weniger Zeilen als Kolonnen verwendet, also Systeme mit weniger Gleichungen als Unbekannten.

182) *O. Toeplitz*[184]), § 4. — Vgl. auch *Hellinger-Toeplitz*[164]), § 7.

(13) besitzt für jedes Wertsystem y_p von konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung von konvergenter Quadratsumme.

β) Besitzt $\mathfrak{A}$ eine und nur eine hintere beschränkte Reziproke, so ist diese auch vordere und ist eindeutig bestimmt.[183])

Speziell gilt für eine *symmetrische* Matrix ($\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$): sie besitzt entweder keine vordere und keine hintere Reziproke oder nur eine einzige zugleich vordere und hintere; diese ist alsdann ebenfalls symmetrisch.

Bei einer unsymmetrischen Matrix soll von einer Reziproken $\mathfrak{A}^{-1}$ schlechtweg nur dann gesprochen werden, wenn diese zugleich vordere und hintere und also einzige ist.

3. *O. Toeplitz*[184]) hat weiterhin folgendes Theorem aufgestellt: *Eine beschränkte Matrix* $\mathfrak{A}$ *besitzt dann und nur dann eine beschränkte hintere Reziproke, wenn die Werte der quadratischen Form* $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, x)$ [die aus der symmetrischen Bilinearform $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, y)$ durch Gleichsetzen der beiden Variablenreihen entsteht] *für alle Wertsysteme von der Quadratsumme* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} x_p^2 = 1$ *oberhalb einer Zahl* $m > 0$ *liegen, d. h. wenn*

$$(15) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p\Big)^2 \geqq m \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2, \quad m > 0.$$

Für die Existenz einer vorderen Reziproken ist die gleiche Eigenschaft von $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}(x, x)$, *für die einer eindeutigen Reziproken sind diese beiden Eigenschaften charakteristisch.*

Die *Notwendigkeit* der Bedingung (15) ergibt sich unmittelbar durch Anwendung der Schwarzschen Summenungleichung[114]) auf die aus $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ folgende Identität

$$\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p\Big)\Big(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q} x_q\Big),$$

die, wenn N eine obere Schranke von $\mathfrak{B}$ bedeutet,

$$\Big(\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2\Big)^2 \leqq \mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, x) \cdot \mathfrak{B}'\mathfrak{B}(x, x) \leqq \mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, x) \cdot N^2 \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2$$

liefert. Um andererseits zu zeigen, daß (15) *hinreichend* für die Existenz einer hinteren Reziproken von $\mathfrak{A}$ ist, genügt es zu beweisen,

183) *E. Hilb,* Math. Ann. 82 (1920), p. 1—39 [vgl. Nr. 24d, 3, [323])] hat diese Sätze angewandt, um in Fällen, wo sich die vordere Reziproke leicht aufstellen läßt (z. B. wenn in der p^{ten} Kolonne von $\mathfrak{A}$ $a_{pp} \neq 0$, $a_{p+1,p} = a_{p+2,p} = \cdots = 0$ ist), von ihr aus auf die hintere Reziproke zu schließen.

184) *O. Toeplitz,* Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Gött. Nachr. 1907, p. 101—109. — Ein entsprechendes Kriterium für die Existenz einer beschränkten Quotientenmatrix $\mathfrak{C}$ zweier beschränkten Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$) gibt *J. Hyslop*[523]).

daß aus (15) die Existenz der Reziproken $\mathfrak{S}^{-1}$ von $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ folgt; denn aus $\mathfrak{S}^{-1}$ gewinnt man in $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\mathfrak{S}^{-1}$ sofort eine hintere Reziproke von $\mathfrak{A}$.[184a]) Es kommt also alles darauf an, die Existenz von $\mathfrak{S}^{-1}$ zu beweisen.

O. Toeplitz beweist sie, indem er erstens die Formeln der *Jacobischen Transformation* einer quadratischen Form endlichvieler Veränderlicher auf Grund ihrer rekursiven Natur von den einzelnen Abschnitten $\mathfrak{S}_n$ simultan auf $\mathfrak{S}$ überträgt, und zweitens die Konvergenz der so zunächst formal entstehenden Darstellung von $\mathfrak{S}^{-1}$ und deren Beschränktheit erweist.[185])

E. Hilb[186]) beweist die Existenz von $\mathfrak{S}^{-1}$, indem er mit Hilfe der Entwicklung nach Iterierten eine wesentlich andere formale Konstruktion vornimmt, die ihrer Einfachheit wegen vielfach angewendet worden ist. Er konstruiert mit Hilfe einer passend bestimmten[186a]) positiven Zahl σ eine symmetrische Bilinearform $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{E} - \sigma\mathfrak{S}$, deren obere Schranke für Variablenwerte der Quadratsumme 1 unterhalb $1 - \sigma m < 1$ liegt. Dann konvergiert die Entwicklung von $(\mathfrak{E} - \mathfrak{S}^*)^{-1}$ nach iterierten Formen[145]) $\mathfrak{E} + \mathfrak{S}^* + \mathfrak{S}^*\mathfrak{S}^* + \cdots = \sum_{\alpha=0}^{\infty}(\mathfrak{E} - \sigma\mathfrak{S})^\alpha$, die wegen (7 d) durch die Reihe $\sum_{\alpha=0}^{\infty}(1 - m\sigma)^\alpha = \frac{1}{\sigma m}$ majorisiert wird, absolut und gleichmäßig; es ist daher

$$(16)\qquad \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}'\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{A}'\sigma(\mathfrak{E} - \mathfrak{S}^*)^{-1} = \sigma\mathfrak{A}'\sum_{\alpha=0}^{\infty}(\mathfrak{E} - \sigma\mathfrak{A}\mathfrak{A}')^\alpha.$$

An diese Aussagen schließt sich folgende gelegentlich nützliche Bemerkung: Hat man ein System beschränkter Matrizen, innerhalb dessen die Operationen der Addition, Multiplikation und der Summation gleichmäßig konvergenter Reihen nach Art von (16) ausführbar sind, und dem mit jeder Matrix zugleich die transponierte angehört, so

184 a) Der gleiche Kunstgriff für Integralgleichungen 2. Art s. Nr. **10** b, 1. Hier wird klar, weshalb er auch dort den vollen Komplex der determinantenfreien Sätze allein nicht liefern kann; denn er kann, wie das Beispiel von Nr. **18** b, 1 (Ende) zeigt, eine hintere Reziproke auch in einem solchen Falle liefern, wo eine vordere nicht existiert.

185) Die eine der von *E. Schmidt*[192]) für die Auflösung nichtbeschränkter Gleichungssysteme angegebenen Methoden (Nr. **19** b, 3) ist, wie eine nähere Analyse der Formeln ergibt, in ihrer Anwendung auf beschränkte Gleichungssysteme sachlich mit dieser Toeplitzschen Methode identisch.

186) *E. Hilb*, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Sitzungsb. Phys.-med. Soz. Erlangen 40 (1908), p. 84—89.

186 a) Er wählt σ so, daß die obere Grenze von $\sigma\mathfrak{S}(x, y)$ unterhalb 1 liegt. Dann ist für $\sum x_p^2 = 1$ $\mathfrak{S}^*(x, x) = 1 - \sigma\mathfrak{S}(x, x) \geq 0$ und $< 1 - \sigma m$ und also auch (vgl. Nr. **43** a, 1) $|\mathfrak{S}^*(x, y)| \leq 1 - \sigma m$.

gehört ihm auch die Reziproke jeder Matrix des Systems an, sofern sie überhaupt existiert.[187])

4. Neben den in 3. geschilderten allgemeinen Methoden kann man auf gewisse beschränkte Gleichungssysteme auch das *Abspaltungsverfahren* (vgl. Nr. **10** a für Integralgleichungen und Nr. **16** d, 1 für vollstetige Gleichungssysteme) anwenden, um weitergehende Resultate zu erzielen. Ist nämlich $\mathfrak{A}(x, y) = \mathfrak{S}(x, y) + \mathfrak{B}(x, y)$ die Summe einer beschränkten Bilinearform $\mathfrak{S}$ von endlichem Rang[188]) und einer beschränkten Bilinearform $\mathfrak{B}$, die eine eindeutige beschränkte Reziproke besitzt, so gelten für die zu $\mathfrak{A}$ gehörigen inhomogenen und homogenen Gleichungssysteme die sämtlichen determinantenfreien Auflösungssätze von Nr. **10** (Beweis genau wie bei der spezielleren Aussage von Nr. **16** d, 1, wobei nur $\mathfrak{B}$ an Stelle der Summe der Einheitsform und der vollstetigen Form $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}^{-1}$ an Stelle der Summe von $\mathfrak{E}$ und der Resolvente $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{H}$ tritt). Hieraus kann man weiterhin ableiten, daß die genannten Auflösungssätze auch gelten, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{K}$ die Summe einer beschränkten Form $\mathfrak{B}$ mit eindeutiger beschränkter Reziproker $\mathfrak{B}^{-1}$ und einer vollstetigen Bilinearform $\mathfrak{K}$ ist.[189]) Damit ist die in Nr. **16** e aufgestellte These dargetan.

5. Auch die *Abschnittsmethode* [p. 1414[147])] kann für die Auflösung spezieller beschränkter Gleichungssysteme herangezogen werden[190]); man kann sie übrigens in den Fällen, wo sie nicht konvert

187) Auf das System der Matrizen $\mathfrak{E} + \mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$ vollstetig, angewendet, bedeutet diese Bemerkung die Vollstetigkeit der Resolvente von $\mathfrak{K}$ (vgl. Nr. **16** c, p. 1410). In die Sprache der Integralgleichungen übertragen bedeutet sie z. B. die Stetigkeit der Resolvente eines stetigen Kernes (Nr. **4**, **9**, **10**); darüber hinaus ergibt sie das in Nr. **14** angekündigte allgemeine Prinzip.

188) Bedeutung wie in Nr. **16** d, 1; der Begriff fällt offenbar mit dem der vollstetigen Bilinearform endlichen Ranges zusammen.

189) *E. Goldschmidt*, Preisarbeit Würzburg 1912, 98 S., p. 24f. Der Beweis beruht auf der Zerlegung von $\mathfrak{K}$ in die Summe eines endlichen Abschnittes $\mathfrak{K}_n$ und des Restes $\mathfrak{K}^*$, für den eine beliebig kleine Schranke vorgeschrieben werden kann. Dann besitzt auf Grund des Toeplitzschen Satzes (Nr. **18** b, 3) $\mathfrak{B} + \mathfrak{K}^*$ gleichzeitig mit $\mathfrak{B}$ eine eindeutige beschränkte Reziproke, und man kann das Abspaltungsverfahren auf die Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_n + (\mathfrak{B} + \mathfrak{K}^*)$ anwenden. Ist übrigens die Reziproke $\mathfrak{B}^{-1}$ von $\mathfrak{B}$ bekannt, so kann man die Reziproke von $\mathfrak{B} + \mathfrak{K}^* = \mathfrak{B}(\mathfrak{E} + \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{K}^*)$ auch statt nach den Methoden von Nr. **18** b, 3 unmittelbar durch die Entwicklung nach Iterierten (Neumannsche Reihe, s. Nr. **16** d, 3) angeben, da die Schranke von $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{K}^*$ mit der von $\mathfrak{K}^*$ beliebig klein gemacht werden kann. — Einen besonderen Fall dieses Satzes ($\mathfrak{K}$ von endlichem Rang) hat *W. L. Hart*[146]) behandelt.

190) So z. B. für besondere aus einer physikalischen Aufgabe entstehende Systeme bei *R. Schachenmeier*, zur mathematischen Theorie der Beugung an Schirmen von beliebiger Form, Karlsruhe 1914, 91 S.

giert, durch den von D. Hilbert im vollstetigen Falle angewendeten Gedanken der Auswahl ergänzen.[190a])

6. Alle Betrachtungen dieser Nummer lassen sich auch auf Matrizen mit komplexen Elementen ausdehnen; an Stelle von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ tritt dabei die Hermitesche Form $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}'$ (vgl. Nr. **41** a).[191])

19. Die allgemeinsten Gleichungssysteme für Unbekannte von konvergenter Quadratsumme. *E. Schmidt* hat sich in einer eingehenden Untersuchung[192]) mit dem Gleichungssystem (13) von Nr. **18** unter der gegenüber der Beschränktheit wesentlich allgemeineren Voraussetzung beschäftigt, daß lediglich die Quadratsummen $\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}^2$ der Koeffizienten der einzelnen Gleichungen für sich konvergieren. Für die Unbekannten hält er die Forderung konvergenter Quadratsumme fest. Seine Voraussetzung garantiert dann die Konvergenz der linken Seiten für alle zugelassenen Wertsysteme, und man kann leicht zeigen, daß sie hierfür notwendig ist.[193])

190a) Für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ von der in Nr. **16**c betrachteten Art ist, also von der Form $\mathfrak{E} + \mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$ *vollstetig*, kann man mit Hilfe des in Nr. **18** b, 3 gegebenen Kriteriums zeigen, daß, wenn $\mathfrak{A}^{-1}$ überhaupt existiert, die Reziproken $\mathfrak{A}_n^{-1}$ der Abschnitte $\mathfrak{A}_n$ von einem bestimmten n an existieren und *ohne Auswahl gleichmäßig gegen* $\mathfrak{A}^{-1}$ *konvergieren.* Aus der Existenz von $\mathfrak{A}^{-1}$ folgt nämlich vermöge jenes Kriteriums, daß unter der Bedingung $\mathfrak{E}(x, x) = 1$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, x) = \mathfrak{E}(x, x) + \mathfrak{K}(x, x) + \mathfrak{K}'(x, x) + \mathfrak{K}\mathfrak{K}'(x, x) \geq m > 0$$

gilt. Unter der Bedingung $\mathfrak{E}_n(x, x) = 1$, $x_{n+1} = \cdots = 0$ kann man aber aus der Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}$ schließen, daß

$$\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_n'(x, x) = \mathfrak{E}_n(x, x) + \mathfrak{K}_n(x, x) + \mathfrak{K}_n'(x, x) + \mathfrak{K}_n\mathfrak{K}_n'(x, x)$$

von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(x, x)$ gleichmäßig beliebig wenig abweicht und also $> \frac{m}{2}$ ist. Also existiert nach dem gleichen Kriterium auch $\mathfrak{A}_n^{-1}$ von einem bestimmten n ab und sein Maximum liegt unter einer von n unabhängigen Schranke. Aus der *Beschränktheit* kann man dann mit Hilfe der Entwicklung nach Iterierten in der Art von Nr. **18** b, 4 leicht die *Konvergenz* gegen $\mathfrak{A}^{-1}$ ableiten.

191) Vgl. etwa die Darstellung von *F. Riesz,* Literatur A 8, p. 89 ff.

192) *E. Schmidt*, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Palermo Rend. 25 (1908), p. 53—77.

193) Es gilt nämlich der Satz: Die Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} a_q x_q$ konvergiert dann und nur dann für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme, wenn $\sum_{q=1}^{\infty} a_q^2$ konvergiert, d. h. wenn die Linearform $\sum_{q=1}^{\infty} a_q x_q$ beschränkt ist [*Hellinger-Toeplitz* [178]), p. 353 und [164]), p. 318; der erste Beweis wurde von *E. Steinitz* gegeben. Eine Verallgemeinerung gibt *E. Landau* [220])]. Vgl. den analogen Satz über Bilinearformen Nr. **19** a, 4.

Die Grundlage seiner Untersuchungen bilden gewisse allgemeine Begriffe der Geometrie des unendlichdimensionalen Raumes[194]), die auch sonst von Bedeutung sind und hier zunächst im Zusammenhang dargestellt werden sollen.

a) Analytisch-geometrische Grundlagen.

1. Betrachtet wird die Gesamtheit der Wertsysteme abzählbar unendlichvieler reeller Veränderlicher $x_1, x_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme, deren jedes einen *Punkt* (x_p) *oder* x *des Hilbertschen unendlichdimensionalen Raumes* R_∞ darstellt. Die Schwarzsche Summenungleichung [Nr. **15**, (9a)] besagt für die Koordinaten je zweier solcher Punkte die absolute Konvergenz von

$$(1) \qquad \left|\sum_{p=1}^{\infty} x_p y_p\right| \leqq \left|\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2}\right|$$

und daher auch von

$$(2) \qquad \sum_{p=1}^{\infty}(x_p - y_p)^2 = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 + \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 - 2\sum_{p=1}^{\infty} x_p y_p .$$

Die positive Quadratwurzel aus (2) wird als *Entfernung* der beiden Punkte x, y betrachtet; für drei Punkte gilt

$$(1\text{a}) \qquad \left|\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}(x_p - y_p)^2}\right| \leqq \left|\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}(x_p - z_p)^2}\right| + \left|\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}(y_p - z_p)^2}\right| .$$

Danach können die üblichen Grundbegriffe der Punktmengenlehre auf den R_∞ übertragen werden: *Umgebung* (ε) eines Punktes x ist die Gesamtheit der Punkte y, für die das Entfernungsquadrat (2) unterhalb ε^2 liegt; eine Menge von Punkten hat x als *Häufungspunkt,* wenn in jeder Umgebung von x Punkte der Menge liegen, und sie bildet eine gegen x (*stark*) *konvergente Folge* $x^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, wenn x der einzige

194) Diese sind zuerst von *D. Hilbert* (4. Mitteil., Gött. Nachr. 1906 = Grundzüge, Kap. XI) aufgestellt worden, soweit er sie für seine Untersuchungen brauchte (vgl. Nr. **16**, **40**, **43**). *E. Schmidt* hat sie für seine Zwecke weiter ausgebildet, in der Darstellung aber die geometrische Form vermieden; er spricht von „Funktionen eines ganzzahligen Index" statt von Punkten und Vektoren des unendlichdimensionalen Raumes. In geometrischer Sprache hat *P. Nabholz* [Dissert. Zürich 1910, 118 S. und Vierteljahrsschr. Zür. Naturf. Ges. 56 (1911), p. 149—155] die Schmidtschen Untersuchungen dargestellt. Andererseits hat *M. Fréchet,* Nouv. Ann. (4) 8 (1908), p. 97—116, 289—317, im Anschluß an die Anwendungen, die *E. Fischer* und *F. Riesz* von den Hilbertschen Begriffen gemacht hatten [siehe Nr. **15** d [119]) [120])] einen selbständigen Aufbau der Geometrie des Hilbertschen unendlichdimensionalen Raumes gegeben [vgl. dazu auch Nr. **24**b, insbes. [302])]. Eine Ausdehnung auf einen elliptischen unendlichdimensionalen Raum bei *K. Ogura,* Tôhoku Math. J. 18 (1920), p. 1—22.

Häufungspunkt ist, d. h. wenn[195])

(3) $$\lim_{n=\infty}\sum_{p=1}^{\infty}(x_p^{(n)} - x_p)^2 = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die starke Konvergenz einer Folge ist nun, wie *E. Schmidt*[196]) bewiesen hat, die Existenz eines $N(\varepsilon)$ zu jedem $\varepsilon > 0$, daß

(3a) $$\sum_{p=1}^{\infty}(x_p^{(n)} - x_p^{(m)})^2 \leqq \varepsilon \qquad \text{für } n, m > N(\varepsilon).$$

2. Jedes System nicht durchweg verschwindender Größen a_p von konvergenter Quadratsumme kann in unmittelbarer Übertragung des Sprachgebrauches der n-dimensionalen Geometrie[197]) als Repräsentant eines *Vektors* A im R_∞ [vom Anfangspunkt nach dem Punkt (a_p) oder von einem beliebigen Punkt (x_p) nach $(x_p + a_p)$] angesehen werden; a_p heißen seine (*Achsen-*)*Komponenten*, $\left|\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2\right|^{\frac{1}{2}}$ seine *Länge*. Ein Vektor O von der Länge 1 heißt *normiert* und bestimmt eine *Richtung* im R_∞; die Richtung des Vektors A ist durch den Vektor $a_p : \left|\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2\right|^{\frac{1}{2}}$ gegeben. $\sum_{p=1}^{\infty} a_p o_p$ heißt *Komponente von A in der Richtung O*.

Zwei Vektoren A, B heißen zueinander *orthogonal*, wenn

(4) $$\sum_{p=1}^{\infty} a_p b_p = 0$$

Der Vektor mit den Komponenten $a_p - o_p \sum_{q=1}^{\infty} a_q o_q$ ist orthogonal zu O (*Lot von A auf O*), $o_p \sum_{q=1}^{\infty} a_q o_q$ bestimmt also die *orthogonale Projektion* von A in die Richtung O.

195) Dieser Begriff ist implizite bereits in Nr. **18** a, 1 als Hilfsmittel verwendet worden, um die Beschränktheit einer Bilinearform zu definieren. Ein *anderer* Konvergenzbegriff, die sog. *schwache Konvergenz*, ist implizite in Nr. **16** a verwendet worden, um die Vollstetigkeit einer Bilinearform zu erklären: eine Folge $x^{(n)}$ heißt schwach konvergent, wenn $\lim_{n=\infty}(x_p^{(n)} - x_p) = 0$ für jedes einzelne $p = 1, 2, \ldots$. Jede stark konvergente Folge ist offenbar schwach konvergent, aber nicht jede schwach konvergente auch stark [vgl. das Beispiel Nr. **18** a[168])]; diese Tatsache besagt übrigens für die Theorie der Bilinearformen, daß jede vollstetige Bilinearform beschränkt ist, aber nicht umgekehrt [vgl. Nr. **16**, (10); Nr. **18** a, 1.[169])].

196) *E. Schmidt*[192]), § 3.

197) Vgl. die in [194]) zitierte Literatur, zur Nomenklatur insbes. *Nabholz*.

Liegen n normierte und zueinander orthogonale Vektoren $O^{(1)}, \ldots, O^{(n)}$ vor:

$$(5) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} o_p^{(\alpha)} o_p^{(\beta)} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta) \end{cases} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n),$$

so gilt für die Komponenten $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ eines Vektors A nach deren Richtungen die „Besselsche Identität"[198])

$$(6) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \Big(a_p - \sum_{\alpha=1}^{n} o_p^{(\alpha)} a^{(\alpha)}\Big)^2 = \sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 - \sum_{\alpha=1}^{n} (a^{(\alpha)})^2, \text{ wo } a^{(\alpha)} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p o_p^{(\alpha)}$$

(Pythagoräischer Satz für das aus den Projektionen von A auf die $O^{(\alpha)}$ gebildete Parallelepiped), und daher die *Besselsche Ungleichung*[198]):

$$(6\text{a}) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} (a^{(\alpha)})^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_p o_p^{(\alpha)}\Big)^2 \leqq \sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 .$$

Die ebenso für unendlichviele orthogonale und normierte Vektoren gebildete unendliche Reihe konvergiert und genügt derselben Ungleichung[198]):

$$(6\text{b}) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty} (a^{(\alpha)})^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_p o_p^{(\alpha)}\Big)^2 \leqq \sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 .$$

3. Man nennt n Vektoren $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ *linear abhängig*, wenn für n nicht sämtlich verschwindende Größen c_α die Gleichungen

$$(7\text{a}) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha a_p^{(\alpha)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

bestehen; notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist das Verschwinden der Determinante n^{ter} Ordnung[199]):

$$(7\text{b}) \qquad \Big| \sum_{p=1}^{\infty} a_p^{(\alpha)} a_p^{(\beta)} \Big| = 0.$$

n orthogonale Vektoren sind stets linear unabhängig. Ist eine Folge von endlich oder unendlichvielen Vektoren $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ so beschaffen, daß $A^{(1)}, \ldots, A^{(\alpha)}$ für jedes α linear unabhängig sind, so bilden die der

---

198) Diese Formeln entsprechen formal und sachlich genau den gleichbenannten Formeln über orthogonale Systeme stetiger Funktionen (s. Nr. **15 a**, **30**,[385]) und Encykl. II C 11, Nr. **1**, **2**, *E. Hilb*); für unendlichviele Veränderliche treten sie dann in etwas anderer Darstellungsform bei *D. Hilbert* (4. Mitteil. 1906 = Grundzüge, p. 141—143) auf und sind von *E. Schmidt*[192]), § **1**, **5** als wesentliches Hilfsmittel seiner Untersuchung entwickelt und benutzt worden. Vgl. dazu auch Nr. **40** b.

199) *E. Schmidt*[192]), § 6 nach Analogie des Kriteriums für lineare Unabhängigkeit von n Funktionen von *J. P. Gram,* J. f. Math. 94 (1883), p. 41—73.

Reihe nach konstruierten Vektoren mit den Komponenten

$$(8)\quad \begin{cases} o_p^{(1)} = \dfrac{a_p^{(1)}}{\sqrt{\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p^2}}, \ldots, \\ o_p^{(\alpha)} = \dfrac{a_p^{(\alpha)} - \left\{ o_p^{(1)} \sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p^{(\alpha)} o_p^{(1)} + \cdots + o_p^{(\alpha-1)} \sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p^{(\alpha)} o_p^{(\alpha-1)} \right\}}{\sqrt{\sum\limits_{p=1}^{\infty} (a_p^{(\alpha)})^2 - \left\{ \left(\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p^{(\alpha)} o_p^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p^{(\alpha)} o_p^{(\alpha-1)}\right)^2 \right\}}} \quad \begin{matrix} (p = 1, 2, \ldots) \\ (\alpha = 1, 2, \ldots) \end{matrix} \end{cases}$$

ein System orthogonaler und normierter Vektoren [*E. Schmidt*scher *Orthogonalisierungsprozeß*[198])], das überdies dem System der $A^{(\alpha)}$ *linear äquivalent* ist, d. h. jeder Vektor des einen Systems ist von endlich vielen Vektoren des anderen linear abhängig. Läßt man die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit für die Folge der $A^{(\alpha)}$ fallen und tritt in der α^{ten} der sukzessive gebildeten Formeln (8) zum erstenmal ein identisch in p verschwindender Zähler auf, so gibt dieser die lineare Abhängigkeit des $A^{(\alpha)}$ von den linear unabhängigen $A^{(1)}, \ldots, A^{(\alpha-1)}$; setzt man die Folge der Formeln (8) unter Fortlassung dieser α^{ten} und ebenso aller folgenden mit identisch in p verschwindendem Zähler fort, so liefern die verbleibenden Formeln wiederum ein den $A^{(\alpha)}$ linear äquivalentes System orthogonaler normierter Vektoren, und man erhält gleichzeitig alle zwischen endlichvielen $A^{(\alpha)}$ bestehenden linearen Abhängigkeiten.

Die Grenzbegriffe von 1. übertragen sich sofort auf Vektoren und liefern die Begriffe des *Häufungsvektors* sowie der *starken Konvergenz* einer *Folge* oder *Reihe* von Vektoren gegen einen *Grenzvektor.*

Lineares Vektorgebilde $\{A^{(\alpha)}\}$ *mit der Basis* $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$[200]) heißt die Gesamtheit der Vektoren, die aus endlichvielen $A^{(\alpha)}$ linear zusammengesetzt sind, und ihrer Häufungsvektoren. Ersetzt man die $A^{(\alpha)}$ durch ein linear äquivalentes System orthogonaler normierter Vektoren $O^{(\alpha)}$, so besteht $\{A^{(\alpha)}\}$ aus allen Vektoren mit den Komponenten $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} c_\alpha o_p^{(\alpha)}$, wo c_α beliebige Größen von konvergenter Quadratsumme sind. Ist B ein beliebiger Vektor, so ist der Vektor L mit den Komponenten

$$(9)\qquad l_p = b_p - \sum_{\alpha=1}^{\infty} o_p^{(\alpha)} \left(\sum_{q=1}^{\infty} b_q o_q^{(\alpha)}\right)$$

orthogonal zu allen Vektoren von $A^{(\alpha)}$ (*Lot* oder *Perpendikelvektor* von B auf $\{A^{(\alpha)}\}$)[200]); B gehört dann und nur dann dem Gebilde $\{A^{(\alpha)}\}$ an,

---

200) *E. Schmidt*[192]), § 4, 8, 9; *P. Nabholz*[194]).

wenn $l_p = 0$ oder

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} b_p o_p^{(\alpha)}\right)^2 = \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2. \tag{9a}$$

E. Schmidt[192]) hat alle diese Betrachtungen sogleich für Systeme komplexer Größen a_p ausgesprochen, wobei nur $\sum_{p=1}^{\infty}|a_p|^2$ an Stelle von $\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2$ zu treten hat und die Orthogonalitätsbedingung $\sum_{p=1}^{\infty} a_p \bar{b}_p = 0$ lautet[201]), wo $\bar{b}_p$ konjugiert imaginär zu b_p ist.

4. Zu jeder *beschränkten* Matrix $\mathfrak{A}$ (Nr. **18** a) gehört eine *affine Transformation* der Punkte (und ebenso der Vektoren) des R_∞:

$$x_p' = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

von folgenden Eigenschaften[202]): α) Jedem Punkte x des R_∞ entspricht *eindeutig* ein Punkt x' desselben. β) Der Punkt mit den Koordinaten $cx_p' + dy_p'$ entspricht dem Punkte $cx_p + dy_p$, wenn (x_p') dem (x_p) und (y_p') dem (y_p) entspricht (*Linearität*). γ) Einer stark konvergenten Folge von Punkten (x_p) entspricht eine stark konvergente von Punkten (x_p') (*Stetigkeit*). — Die Aufeinanderfolge zweier zu den Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gehöriger affiner Transformationen gehört zu dem Matrizenprodukt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$; die affinen Transformationen bilden eine Gruppe.

Es gilt folgende Umkehrung obiger Aussagen[202]): Besitzt eine Transformation der Punkte des R_∞ die Eigenschaften α), β), γ), so ist sie mit Hilfe einer beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ in der Form (10) darstellbar. Das ist eine leichte Folge des Konvergenzsatzes von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*[203]), daß eine Bilinearform $\mathfrak{A}(x, y)$ beschränkt ist, wenn die Doppelreihe $\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$ etwa bei zeilenweiser Summation für jedes Punktepaar x, y des R_∞ konvergiert.

Man kann den hierin liegenden Sachverhalt auch nur für Systeme unendlicher Matrizen aussprechen, ohne den Begriff der Transformationen heranzuziehen[204]): Es ist nicht möglich, das System der beschränkten Matrizen derart zu erweitern, daß in dem erweiterten System

---

201) Man nennt diese modifizierte Bedingung nach *L. Autonne* [Palermo Rend. **16** (1902), p. 104] und *J. Schur*[485]), p. 489 auch *unitäre Orthogonalität.*

202) Vgl. *F. Riesz*, Literatur A 8, Chap. IV, wo die Stetigkeitsdefinitionen etwas abweichend formuliert sind. — Über orthogonale Transformationen vgl. Nr. **40** b.

203) *Hellinger-Toeplitz*[178]) und [164]), § 10 — an der ersten Stelle nur für Formen mit positiven Koeffizienten. Den analogen Satz über Linearformen s. [193]).

204) *Hellinger-Toeplitz*[164]), § 11.

die Operationen der Matrizenaddition und -multiplikation stets ausführbar bleiben (*Vollständigkeitseigenschaft*). Andererseits gibt es Systeme von Matrizen, in denen diese Rechenoperationen ausführbar sind und die in sich dieselbe Vollständigkeitseigenschaft besitzen, ohne mit dem System der beschränkten Matrizen identisch zu sein; sie entsprechen den affinen Transformationen in unendlichdimensionalen Räumen, die durch andere Konvergenzbedingungen als die Konvergenz der Quadratsumme definiert sind (vgl Nr. **20** b)[205]).

Kollineare Transformationen im R_∞ hat *J. Hjelmslev*[206]) untersucht.

b) Die Schmidtschen Auflösungsformeln. Mit Hilfe der in a) dargelegten Begriffsbildungen stellt *E. Schmidt*[192]) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichungen

$$(U) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} a_{\alpha p} x_p = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

durch Größen von konvergenter Quadratsumme $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2$ auf, unter der Voraussetzung, daß für jede Zeile die Koeffizientenquadratsumme $\sum_{p=1}^{\infty} a_{\alpha p}^2$ konvergiert, während die c_α beliebig gegeben sind; er gibt ferner Formeln für sämtliche derartigen Lösungen:

1. Zur Lösung der *homogenen Gleichungen*[207])

$$(U_h) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} a_{\alpha p} x_p = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

wird das lineare Vektorgebilde $\{A^{(\alpha)}\}$ betrachtet, dessen Basis die Vektoren $A^{(\alpha)}$ mit den Komponenten $a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \ldots$ sind und zu jedem Einheitsvektor $E^{(q)}$ (mit den Komponenten $e_p^{(q)} = 0$ für $p \neq q$, $e_q^{(q)} = 1$) der Perpendikelvektor $L^{(q)}$ auf $\{A^{(\alpha)}\}$ konstruiert (s. Nr. **19** a, 3). Dann stellen die Komponenten der sämtlichen dem linearen Vektorgebilde mit der Basis $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots$ angehörigen Vektoren die sämtlichen Lösungen von (U_h) dar; (U_h) hat dann und nur dann keine nichttriviale Lösung, wenn alle $L^{(q)}$ durchweg verschwindende Komponenten besitzen. — Besteht speziell zwischen keiner endlichen Anzahl der $A^{(\alpha)}$ eine lineare Abhängigkeit, und setzt man

$$(11\text{a}) \qquad s_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{\alpha p} a_{\beta p} = s_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots),$$

so lassen sich die Komponenten von $L^{(q)}$ durch den folgenden stark

205) Vgl. *Hellinger-Toeplitz*[178]) und [164]), § 12 sowie *F. Riesz*[202]).

206) *J. Hjelmslev*, Festskr. til H. G. Zeuthen, Kopenhagen 1909, p. 66—77.

207) *E. Schmidt*[192]), § 10—11.

konvergenten Grenzwert darstellen:

$$(11\text{b})\quad l_p^{(q)} = \lim_{\alpha=\infty}\left\{ \begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1\alpha} & a_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1} & \cdots & s_{\alpha\alpha} & a_{\alpha p} \\ a_{1q} & \cdots & a_{\alpha q} & e_p^{(q)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1} & \cdots & s_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \right\} \quad (p, q = 1, 2, \ldots),$$

und es ist ferner

$$(11\text{c})\quad \sum_{p=1}^{\infty} (l_p^{(q)})^2 = \lim_{\alpha=\infty}\left\{ \begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1\alpha} & a_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1} & \cdots & s_{\alpha\alpha} & a_{\alpha q} \\ a_{1q} & \cdots & a_{\alpha q} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1} & \cdots & s_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \right\} \quad (q = 1, 2, \ldots).$$

Das Verschwinden der Ausdrücke (11c) ist die Bedingung dafür, daß (U_h) keine nichttrivialen Lösungen hat.[208])

2. Eine *erste Methode*[209]) Schmidts zur Lösung von (U) besteht darin, daß die künstlich homogen gemachten Gleichungen (U)

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{\alpha p} x_p - c_\alpha x_0 = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

nach 1. daraufhin untersucht werden, ob sie eine Lösung mit $x_0 \neq 0$ haben. Besteht speziell wiederum keine lineare Abhängigkeit zwischen endlichvielen $A^{(\alpha)}$, so ergibt sich: (U) hat dann und nur dann eine Lösung von konvergenter Quadratsumme, wenn

$$(12\text{a})\quad X = \lim_{\alpha=\infty}\left\{ \begin{vmatrix} s_{11}+c_1^2 & \cdots & s_{1\alpha}+c_1 c_\alpha & -c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1}+c_\alpha c_1 & \cdots & s_{\alpha\alpha}+c_\alpha^2 & -c_\alpha \\ -c_1 & \cdots & -c_\alpha & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} s_{11}+c_1^2 & \cdots & s_{1\alpha}+c_1 c_\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1}+c_\alpha c_1 & \cdots & s_{\alpha\alpha}+c_\alpha^2 \end{vmatrix} \right\} \neq 0;$$

sie ist gegeben durch den stark konvergenten Grenzwert

$$(12\text{b})\quad x_p = \frac{1}{X} \lim_{\alpha=\infty}\left\{ \begin{vmatrix} s_{11}+c_1^2 & \cdots & s_{1\alpha}+c_1 c_\alpha & a_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1}+c_\alpha c_1 & \cdots & s_{\alpha\alpha}+c_\alpha^2 & a_{\alpha p} \\ -c_1 & \cdots & -c_\alpha & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} s_{11}+c_1^2 & \cdots & s_{1\alpha}+c_1 c_\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1}+c_\alpha c_1 & \cdots & s_{\alpha\alpha}+c_\alpha^2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$(p = 1, 2, \ldots),$$

und ihre Quadratsumme $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2$ ist kleiner als die Quadratsumme jedes anderen Lösungssystems von (U).

---

208) Sind die $A^{(\alpha)}$ speziell orthogonale und normierte Vektoren, so lauten diese Bedingungen $\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha q}^2 = 1$ und sind mit den schon von *D. Hilbert*[198]) aufgestellten Bedingungen für die Vollständigkeit eines Systems orthogonaler Linearformen identisch; vgl. auch Nr. **40** b, [509]).

209) *E. Schmidt*[192]), § 12.

3. Eine *weitere Lösungsmethode*[210]) ersetzt, wiederum unter der Voraussetzung linearer Unabhängigkeit je endlichvieler $A^{(\alpha)}$, diese nach (8) durch ein System orthogonaler und normierter Vektoren mit den Komponenten

$$o_p^{(\beta)} = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \gamma_{\beta\alpha} a_{\alpha p}.$$

(U) ist dann und nur dann lösbar, wenn die Quadratsumme

$$\text{(13a)} \qquad \sum_{\beta=1}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha=1}^{\beta} \gamma_{\beta\alpha} c_\alpha\Big)^2$$

konvergiert; das Lösungssystem von kleinster Quadratsumme, deren Wert übrigens (13a) ist, ist gegeben durch die stark konvergente Reihe:

$$\text{(13b)} \qquad x_p = \sum_{\beta=1}^{\infty} o_p^{(\beta)} \Big(\sum_{\alpha=1}^{\beta} \gamma_{\beta\alpha} c_\alpha\Big) \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

4. Bezeichnet $L^{(\alpha)}$ das Perpendikel von $A^{(\alpha)}$ auf das lineare Gebilde, dessen Basis $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ unter Fortlassung von $A^{(\alpha)}$ bilden, so sind *hinreichende Bedingungen*[211]) für die Lösbarkeit von (U), daß $\sum_{p=1}^{\infty} (l_p^{(\alpha)})^2 \neq 0$ für jedes α und daß ferner $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \left| c_\alpha : \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} (l_p^{(\alpha)})^2} \right|$ konvergiert; die Lösung kleinster Quadratsumme ist alsdann gegeben durch die stark konvergenten Reihen:

$$\text{(14)} \qquad x_p = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{c_\alpha l_p^{(\alpha)}}{\sum_{q=1}^{\infty} (l_q^{(\alpha)})^2} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Für jedes verschwindende $\sum_{p=1}^{\infty} (l_p^{(\alpha)})^2$ ergibt sich ferner als *notwendig* für die Lösbarkeit von (U) eine lineare homogene Relation zwischen den $c_1, c_2, \ldots$[211]).

5. Endlich hat *E. Schmidt* das Lösbarkeitskriterium von *O. Toeplitz* (Nr. **18** b, 3.) in folgender Weise auf nichtbeschränkte Systeme (U) ausgedehnt[212]): Es sei $\mu_n \geqq 0$ das Minimum der definiten quadratischen

---

210) *E. Schmidt*[192]), § 14. Über die Beziehung zu der *O. Toeplitz*schen Methode der Jacobischen Transformation (Nr. **18** b, 3) vgl. [185]).

211) *E. Schmidt*[192]), § 13.

212) Schon die *Hilbert*schen Untersuchungen über quadratische Formen [Gött. Nachr. 1906 = Grundzüge, Kap. XI, p. 113—125, insbes. Satz 31; vgl. hierzu *M. Plancherel,* Math. Ann. 67 (1909), p. 511—514] und die Methode von *O. Toeplitz* [184]) gestatten unter Umständen für *symmetrische* nichtbeschränkte Koeffizientensysteme die Konstruktion einer beschränkten Reziproken, ohne daß aber bei ihnen Resultate im obigen Umfang angegeben sind. — Die Sätze des Textes sind bei *E. Schmidt*[192]), § 15 zum Teil nur ohne Beweis ausgesprochen,

Form von $y_1, \ldots, y_n$

$$(15) \quad \mathfrak{S}_n(y) = \sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha p} y_\alpha\Big)^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} s_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta, \quad \text{während} \quad \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^2 = 1;$$

dann ist das Nichtverschwinden des Limes der nicht zunehmenden Folge der μ_n

$$m = \lim_{n=\infty} \mu_n > 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß (U) für *alle* rechten Seiten von konvergenter Quadratsumme $\sum_{\alpha=1}^{\infty} c_\alpha^2$ eine Lösung von konvergenter Quadratsumme besitzt, sowie dafür, daß eine *beschränkte Reziproke* im Sinne von Nr. **18** b existiert, d. h. daß den Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{\alpha p} b_{p\beta} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta) \end{cases} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$$

durch die Koeffizienten einer beschränkten Bilinearform genügt werden kann. Bedingungen für die Existenz einer nichtbeschränkten Reziproken ergeben sich aus Nr. **19** b, 4.[213])

6. Einen anderen Weg zur Behandlung des Schmidtschen Problemes hat *E. Hilb*[214]) eingeschlagen. Er fügt den wie in 2. homogen gemachten Gleichungen (U) solche Faktoren hinzu, daß das Koeffizientensystem vollstetig wird, bildet die Quadratsumme der linken Seiten und wendet die Hilbertsche orthogonale Transformation der vollstetigen Form auf eine Quadratsumme (Nr. **40** d) an, um so schließlich zu Auflösungsformeln zu gelangen.

20. Andere Konvergenzbedingungen für die Unbekannten. Die Gesamtheit derjenigen Arbeiten über unendlichviele lineare Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, die *nicht* die Bedingung konvergenter Quadratsumme für die Unbekannten an die Spitze setzen, stellt nach Anlaß, Art und Grad der erstrebten Allgemeinheit ein buntes Gemisch dar. Sieht man von einer Reihe verstreuter Untersuchungen ab,

---

die Beweise sind nach seinen Methoden ausgeführt bei *G. Kowalewski,* Literatur B 3, p. 444 ff. und *M. Egli,* Dissert. Zürich 1910, 60 S., der auch den Fall nichtbeschränkter Reziproken näher untersucht.

213) Teilweise modifizierte Darstellungen dieser Schmidtschen Untersuchungen finden sich bei *G. Kowalewski,* Literatur B 3, § 164—179; *P. Nabholz,* Dissert.[194]); *M. Bôcher* und *L. Brand,* Ann. of math. (2) 13 (1912), p. 167—186; vgl. auch die Untersuchungen von *F. Riesz,* Nr. **20** c. — Über einen Versuch von *A. J. Pell,* Ann. of math. (2) 16 (1914), p. 32—37, die Voraussetzungen der Schmidtschen Resultate auszudehnen vgl. die Bemerkung von *G Szegö* in Fortschr. d. Math. 45 (1922), p. 519.

214) *E. Hilb,* Math. Ann. 70 (1910), p. 79—86.

die überhaupt keine bestimmte Konvergenzbedingung formulieren[215]) — in methodischer Beziehung operieren alle diese Untersuchungen mit dem in der Vorbemerkung zu C. geschilderten Verfahren der abschnittsweisen Auflösung — so sind es im ganzen *fünf Typen von Konvergenzbedingungen*, die mehr oder weniger systematisch in Betracht gezogen worden sind.

a) Beschränkte Veränderliche $|x_n| \leqq M$ legt *H. v. Koch* mit Ausnahme von einigen seiner späteren Arbeiten stets zugrunde, wenn er seine unendlichen Determinanten zur Auflösung linearer Gleichungssysteme benutzt; darüber ist bereits in Nr. **17** eingehend berichtet worden. Daß automatisch die Summe der Beträge des Lösungssystems $|x_1| + |x_2| + \cdots$ konvergiert, wenn die der rechten Seiten in (U) (s. p. 1414), $|y_1| + |y_2| + \cdots$, es tut, und daß dies insbesondere auch von den transponierten Gleichungen (U') und (U_h') gilt, hat *H. v. Koch* zunächst nicht hervorgehoben.[148])

Es ist der große prinzipielle Fortschritt, den *A. C. Dixon* in seiner mehrfach erwähnten Arbeit[43]) [vgl. Nr. **8**, **10**[60]), **16** d, 1, Vorbem. zu C., **18**[178])] demgegenüber vollzogen hat, daß er die Systeme $(U), (U')$ einander gegenüberstellt und den ganzen Komplex der determinantenfreien Sätze (vgl. Nr. **10**, in sinngemäßer Übertragung auf unendlichviele Veränderliche wie in Nr. **16** c) aufstellt, indem er ausdrücklich die Unbekannten beim System (U) an die Bedingung der Beschränktheit, bei (U') an die der absolut konvergenten Summe bindet. Die Voraussetzung dagegen, die er über die Koeffizientenmatrix (K_{pq}) macht, ist zwar erheblich weiter als die v. Kochsche der Normalität, aber identisch mit einer gelegentlich (1900) von *v. Koch*[158]) angegebenen; sie lautet: sei σ_q die obere Schranke der Beträge der Elemente der q^{ten} Kolonne, also $|a_{pq}| \leqq \sigma_q$ $(p = 1, 2, \ldots)$, so soll die Kolonnenschrankensumme $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots$ konvergieren.

Liegt also *inhaltlich* der Fortschritt Dixons nicht in der Natur seiner Voraussetzung über die K_{pq}, sondern in den Anforderungen an die Unbekannten und der Art der aufgestellten Sätze, so liegt er *methodisch* in der Loslösung vom Determinantenapparat, in der erstmaligen Aufstellung eines Kalküls mit unendlichen Matrizen, der die Methode der Entwicklung nach Iterierten in diesem Bereich anzuwenden gestattet. Dixons Verfahren ist dieses: er bestimmt n so groß, daß $\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \cdots < 1$ ausfällt, schreibt das System (U),

215) Vgl. [147]), sowie *E. Borel*, Ann. Éc. Norm. (3) 12 (1895), p. 9—55 und *K. Ogura*, Tôhoku J. 16 (1919), p. 99—102. Neuerdings hat *R. D. Carmichael*, Amer. J. 36 (1914), p. 13—20 sich damit befaßt, das Verfahren von *Kötteritzsch*[147]) zu legalisieren.

indem er seine n ersten Gleichungen zunächst wegläßt, in der Form

$$x_p + \sum_{q=n+1}^{\infty} K_{pq} x_q = y_p - \sum_{q=1}^{n} K_{pq} x_q \qquad (p = n+1, \ldots),$$

in der es, wenn man $x_1, \ldots, x_n$ zunächst irgendwelche Werte erteilt, ein System für die Unbekannten $x_{n+1}, \ldots$ darstellt, dessen Kolonnenschrankensumme unter 1 gelegen ist; für ein solches System zeigt er, daß die Entwicklung nach Iterierten stets konvergiert und eine beschränkte Lösung liefert, und zwar die einzige. Damit sind $x_{n+1}, \ldots$ durch die noch freien Größen $x_1, \ldots, x_n$ ausgedrückt, ersichtlich als Linearformen derselben; geht man mit den so gefundenen linearen Ausdrücken in die bisher weggelassenen ersten n Gleichungen ein, so erhält man n lineare Gleichungen für $x_1, \ldots, x_n$; und indem Dixon die Gültigkeit der determinantenfreien Sätze für diese als bekannt voraussetzt, leitet er sie daraus für sein System ab.[216])

---

216) Die Übereinstimmung dieses Verfahrens mit dem von *E. Schmidt*[42]) bei Integralgleichungen verwendeten (Nr. **10** a) tritt am deutlichsten hervor, wenn man die in Nr. **16** d, 1 angegebene Übertragung des Schmidtschen Verfahrens auf vollstetige Systeme für unendlichviele Veränderliche mit konvergenter Quadratsumme mit dem hier über Dixon Berichteten vergleicht; diese Übereinstimmung wird in d) dieser Nummer am sinnfälligsten werden, wo sowohl Dixons Theorie als auch die von Nr. **16** d, 1 als Spezialfälle einer und derselben allgemeinen Theorie erscheinen.

In der Richtung der Dixonschen Methode liegt eine Bemerkung von *J. L. Walsh,* Amer. J. 42 (1920), p. 91—96, der die Entwicklung nach Iterierten verwendet, um die Auflösungstheorie für Gleichungssysteme mit normaler Determinante ohne den Apparat der unendlichen Determinanten abzuleiten.

Ferner ist im Anschluß an die Bedingung a) zu erwähnen, daß man auf der Grundlage derselben eine Konvergenzbedingung für die Koeffizienten des Systems $\sum a_{pq} x_q = y_p$ aufstellen kann, die die gleiche Rolle spielt, wie die Beschränktheit auf der Grundlage der Bedingung konvergenter Quadratsumme: sei jede Zeilensumme der a_{pq} absolut konvergent, und seien die Zeilenbetragsummen $\sum_q |a_{pq}| = \mathfrak{z}_p(A)$ ihrerseits beschränkt, $\mathfrak{z}(A)$ ihre obere Schranke, so hat man damit eine Klasse von Matrizen, in der der Matrizenkalkül durchgeführt werden kann und die ebensowenig erweiterungsfähig ist wie die Klasse der beschränkten Matrizen. Dabei übernimmt $\mathfrak{z}(A)$ die Rolle, die die obere Grenze von $A(x, y)$ in der *Hilbert*schen Theorie (Nr. **18** a) spielt; die Durchführung ist hier wesentlich elementarer. — In der Richtung dieser Bedingung liegt übrigens eine Bemerkung von *A. Pellet,* S. M. F. Bull. 42 (1914), p. 48—53, die das System (U) unter der Bedingung $\sum_q |K_{pq}| < 1$ behandelt, sowie ein Satz von *H. v. Koch,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1913)[159]), der die Konvergenz der Entwicklung nach Iterierten und das Abspaltungsverfahren feststellt für ein normales Gleichungssystem (U), bei dem $\sum_{p \neq q} |K_{pq}| < \varrho\,|K_{pp}|$, $\varrho < 1$, $|y_p| < M\,|K_{pp}|$, $|x_p|$ beschränkt ist. Wesentlich mehr besagt der Satz von *A. Wintner*, Math. Ztschr.

b) Die Bedingung $|x_n| \leqq M\varrho^n$ tritt überall dort auf, wo eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ vom Konvergenzradius ϱ irgendwelche funktionentheoretischen Forderungen erfüllen soll, die rechnerisch auf unendlichviele lineare Gleichungen für die Koeffizienten x_n hinauslaufen. Über diese Bedingung liegen nur Einzelresultate vor, die aus den funktionentheoretischen Mitteln der jeweiligen Aufgabe gewonnen werden.[217]) Sie ist in Wahrheit nur eine Variante der Bedingung a), aus der sie sich durch die Transformation $\xi_n = \varrho^n x_n$ ergibt.

In derselben Weise kann man, unter λ_n irgendwelche Zahlen verstanden, durch die Transformation $\xi_n = \lambda_n x_n$ und die entsprechende Transformation der y_n aus jeder einzelnen Auflösungstheorie Varianten ableiten.[218])

c) Konvergenz von $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$. *O. Hölder* hat folgende Verallgemeinerung der Lagrange-Cauchyschen Ungleichung Nr. **15**, (9) aufgestellt[219]):

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha v_\alpha\right| \leqq \left(\sum_{\alpha=1}^{n} |u_\alpha|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} |v_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p > 1).$$

Gestützt auf eine vorbereitende Bemerkung von *E. Landau*[220]) hat

24 (1925), p. 259—265, p. 266, der, gestützt auf ein Verfahren von *E. Lindelöf*, Darb. Bull. (2) 23 (1899), p. 68—75 für n Unbekannte, unter der Voraussetzung $|y_p| + \sum |K_{pq}| \leqq 1$ die Existenz einer Lösung $|x_p| \leqq 1$ beweist.

217) Die Konstruktion einer Potenzreihe vom Konvergenzradius ϱ, die eine periodische Funktion mit der Periode $p\,(|p| < \varrho)$ darstellt, behandelt *P. Stäckel*, Weber-Festschrift, Teubner 1912, p. 396—409 und Acta math. 37 (1914), p. 59—73, woran *O. Perron*, ebenda, p. 301—304 anknüpft, und unabhängig davon *H. v. Koch*, Proc. 5. int. congr. Cambr. I (1912), p. 352—365; andere derartige funktionentheoretische Aufgaben *H. v. Koch*, Ark. for Math., Astr. och Fys. 15 (1921), Nr. 26, 16 S.; *O. Perron*, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 159—170 und Math. Ann. 84 (1921), p. 1—15 und [325]) sowie *E. Hilb*[183]) und [324]) (1920/21).

218) Vgl. dazu *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*[205]). Vgl. auch *H. v. Kochs* „normaloide" Determinanten, Nr. 17[152]).

219) *O. Hölder*, Über einen Mittelwertsatz, Gött. Nachr. 1889, p. 38—47, insbes. Nr. 7 [im Anschluß an *J. Rogers*, Mess. of Math. 17 (1888), Nr. 10] und ebenso *J. L. W. V. Jensen*, Acta math. 30 (1906), p. 175—193, insbes. p. 181, folgert es aus der Tatsache, daß der Schwerpunkt von n Punkten einer konvexen Kurve auf ihrer Innenseite gelegen ist, indem er die durch $y = x^p$ gegebene Kurve betrachtet.

220) *E. Landau*, Gött. Nachr. 1907, p. 25—27; er beweist in Verallgemeinerung des von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*[193]) für den Fall $p = 2$ bewiesenen Satzes: ist $\sum a_n x_n$ für alle Wertsysteme positiver x_n, die der Bedingung $\sum x_n^p = 1$ genügen, konvergent ($a_n \geqq 0$, $p > 1$), so konvergiert $\sum_n a_n^{\frac{p}{p-1}}$ und ist die obere Schranke der Linearform.

dann *F. Riesz*[221]) die in Nr. 19 referierte Theorie von *E. Schmidt* auf die hier in Rede stehende Konvergenzbedingung übertragen, indem er statt der konvergenten Quadratsumme die Konvergenz von

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} |x_\alpha|^p \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} |a_\alpha|^{\frac{p}{p-1}}$$

zugrunde legte, die eine für die Unbekannten, die andere für die Koeffizienten jeder einzelnen der gegebenen Gleichungen; sein Resultat lautet: für irgendwie gegebene Größen $c_1, c_2, \ldots$, die an keinerlei Konvergenzbedingung gebunden sind, sind die Gleichungen $\sum a_{\alpha\beta} x_\beta = c_\alpha$ dann und nur dann durch Größen x_β lösbar, die der angegebenen Konvergenzbedingung genügen, wenn es eine Zahl $m > 0$ gibt, so daß für jedes ganzzahlige n und beliebige Werte $u_1, \ldots, u_n$ stets

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha c_\alpha\right|^{\frac{p}{p-1}} \leqq m \sum_{\beta=1}^{\infty} \left|\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha a_{\alpha\beta}\right|^{\frac{p}{p-1}}$$

gilt.

d) In Verallgemeinerung der Bedingung c) betrachtet *E. Helly*[222]) im Raume von n Dimensionen einen beliebigen konvexen Aichkörper $\mathfrak{D}_n$, der den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat, und definiert eine Funktion $D(x_1, \ldots, x_n)$, indem er ihr für einen Punkt $x_1, \ldots, x_n$ der Begrenzung von $\mathfrak{D}_n$ den Wert 1 erteilt, für den λ-mal so weit von 0 abstehenden Punkt $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$ $(\lambda > 0)$ aber den Wert λ, so daß diese Funktion D die drei Eigenschaften hat:

(1) $\quad D(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = |\lambda| D(x_1, \ldots, x_n)$,

(2) $\quad D(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \leqq D(x_1, \ldots, x_n) + D(y_1, \ldots, y_n)$,

(3) $\quad$ aus $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ folgt $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$,

die umgekehrt für sie charakteristisch sind. Ist dann $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ das Maximum des Ausdrucks $|u_1 x_1 + \cdots u_n x_n|$ unter der Nebenbedingung $D(x_1, \ldots, x_n) = 1$ („Stützebenenfunktion"), so gilt die Ungleichung

$$|u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n| \leqq D(x_1, \ldots, x_n)\, \Delta(u_1, \ldots, u_n),$$

---

221) *F. Riesz,* Literatur A 8, chap. III; das der Form nach entsprechende Kriterium bei *E. Schmidt* weicht von dem Rieszschen insofern ab, als es — im Gegensatz zu den anderen Kriterien dieser Schmidtschen Arbeit — die Frage der Lösbarkeit nur bei *willkürlichen* rechten Seiten *von konvergenter Quadratsumme* behandelt. — *St. Bóbr*[159]) leitet unter der Konvergenzbedingung c) die Lösung von (U) mittels unendlicher Determinanten her, indem er neben $\sum |K_{\alpha\alpha}|$ noch

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{\beta=1}^{\infty} |K_{\alpha\beta}|^p \Big\}^{\frac{1}{p-1}}$$

als konvergent voraussetzt.

222) *E. Helly,* Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 60—91.

die für die Einheitskugel als speziellen Aichkörper in die Cauchy-Lagrangesche Ungleichung und für

$$D = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{wo} \quad \Delta = (|u_1|^{\frac{p}{p-1}} + \cdots + |u_n|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}}$$

wird, in die Höldersche Ungleichheit übergeht.

Diese dem Gedankenkreis von *H. Minkowski* entstammenden Begriffe zieht nun *Helly* für die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen heran. Er setzt voraus, daß für einen Teilraum des unendlichdimensionalen Raumes eine Funktion $D(x_1, x_2, \ldots)$ definiert ist, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzt. Indem er dann genau wie oben eine Funktion $\Delta(u_1, u_2, \ldots)$ hinzukonstruiert und über den u-Raum die weitere Annahme hinzufügt, es sei darin eine abzählbare Punktmenge vorhanden, die ihn im Sinne der durch Δ gegebenen Maßbestimmung überall dicht überdeckt, gelingt es ihm, die Betrachtungen von *F. Riesz* auf diesen allgemeinen Fall zu übertragen. Allerdings gewinnt er nicht Lösungen $x_1, x_2, \ldots$, für die die linken Seiten der gegebenen Gleichungen konvergieren und gleich den rechten Seiten werden, sondern er konstruiert Folgen von Wertsystemen, für die die Gleichungen approximativ erfüllt sind.

Auf diese Arbeit von Helly ist auch deshalb hier so genau eingegangen worden, weil man von ihren Begriffen aus über die so disparaten Einzelarbeiten dieser Nummer einen einheitlichen Überblick erhält. Die sämtlichen bisher erwähnten Konvergenzbedingungen können nämlich derjenigen von Helly untergeordnet werden. Die Bedingung c) zunächst hat für Helly selbst den Ausgangspunkt gebildet. Die Bedingung a) erhält man, wenn man den n-dimensionalen Würfel mit den Eckpunkten $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ als Aichkörper $\mathfrak{D}_n$ nimmt, also $D(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|)$; der duale Körper der Stützebenen im u-Raume ist dann das Oktaeder mit den Achseneinheitspunkten als Ecken, $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = |u_1| + \cdots + |u_n|$; die Konvergenzbedingung der absolut konvergenten Summe erweist sich also als die zur Beschränktheit der Veränderlichen duale. Die Bedingung b) ist durch $D(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Max}(|x_1 \varrho|, \ldots, |x_n \varrho^n|)$ und $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = |u_1|\varrho + \cdots + |u_n|\varrho^n$ als Variante von a) gegeben (rechtwinkliges Parallelepiped statt Würfel).[223]) — In allen diesen Fällen hat die Funktion $D(x_1, \ldots, x_n)$ übrigens auch die sogleich anzugebende Eigenschaft (4).

Der Nutzen dieser Bemerkung geht weit über diejenige Anwendung hinaus, die Helly davon gemacht hat. Denn diejenige Auflösungsmethode, die *A. C. Dixon* für die Bedingung a), *E. Schmidt* für

223) Eine größere Reihe weiterer Bedingungen bei *H. Hahn*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 3—88.

die Hilbertsche Bedingung angegeben hat, gilt wörtlich ganz allgemein, wenn $D(x_1, x_2, \ldots)$ außer den Bedingungen (1), (2), (3) noch der Bedingung

(4) $$D(x_1, x_2, \ldots,) = D(|x_1|, |x_2|, \ldots)$$

genügt und wenn außerdem die Koeffizienten K_{pq} des Systems (U) die Bedingung erfüllen, daß man zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ bestimmen kann, so daß

$$\left|\sum_{p,q=1}^{n} K_{pq} u_p x_q - \sum_{p,q=1}^{m} K_{pq} u_p x_q\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n \geqq N(\varepsilon),$$

falls $D(x_1, x_2, \ldots) \leqq 1$, $\Delta(u_1, u_2, \ldots) \leqq 1$, also diejenige Bedingung, die im Falle der Hilbertschen Konvergenzbedingung als *Vollstetigkeit* bezeichnet wird (Nr. **16** a, (3)). *Ist* $\mathfrak{D}$ *ein den Bedingungen* (1), (2) (3), (4) *genügender konvexer Körper im Bereich der unendlichvielen Veränderlichen, so gilt für jedes „in bezug auf den Aichkörper* $\mathfrak{D}$ *vollstetige Gleichungssystem" der Komplex der determinantenfreien Sätze.*[224]) Alle in dieser Nummer bisher verzeichneten Auflösungstatsachen, die nicht in bloßen Auflösungs*formeln* bestehen, ordnen sich dieser allgemeinen Tatsache als ganz spezielle Fälle unter.

e) Zeilenfinite Systeme. Zusammenfassende Schlußbemerkung. Die einzige, bisher bearbeitete Bedingung, die sich der allgemeinen Bedingung d) nicht subsumiert, ist diejenige von *O. Toeplitz*[225]), die den Unbekannten des Gleichungssystems überhaupt keine Beschränkungen auferlegt, während sie dual dazu annimmt, daß in jeder einzelnen Gleichung nur endlichviele Koeffizienten von 0 verschieden sind. Von einem solchen „zeilenfiniten" Gleichungssystem, d. h. von einem System der Form

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + \cdots + a_{1 n_1} x_{n_1} \\ y_2 &= a_{21} x_1 + \cdots\cdots + a_{2 n_2} x_{n_2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

beweist Toeplitz zuerst den Satz, das es stets eine Lösung hat, wenn keine linearen Abhängigkeiten zwischen endlichvielen der Gleichungen bestehen, d. h. wenn das transponierte homogene System unlösbar ist. Darüber hinaus aber gibt er eine volle determinantenfreie Theorie dieser Systeme.[225a])

224) Die Darstellung von Nr. **16** ist so angelegt, daß sowohl das Auswahlverfahren als auch das Abspaltungsverfahren unter den hier vorliegenden allgemeineren Voraussetzungen anwendbar sind und den Beweis des obigen Theorems liefern

225) *O. Toeplitz,* Palermo Rend. 28 (1909), p. 88—96.

225a) Eine Anwendung hiervon auf zeilenfinite Systeme von linearen Kongruenzen nach dem Modul 1 macht *H. Bohr,* Danske Wid. Selsk. math. fys. Medd. 7 (1925), Nr. 1. 42 S.

Hier, wie auch bei jeder auf die Hilbertsche oder irgendeine andere Konvergenzbedingung sich stützenden Theorie darf man von einer solchen determinantenfreien Behandlung nicht den genauen Komplex der in Nr. **10** in der Redeweise der Integralgleichungen formulierten Sätze erwarten. Denn diese Sätze stellen das Analogon der algebraischen Auflösungssätze von n Gleichungen mit n Unbekannten, also ebensoviel Gleichungen als Unbekannten dar; ein System von unendlichvielen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten aber, das nach Wegstreichung einer oder mehrerer seiner Gleichungen immer noch ein System von unendlichvielen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten bleibt, kann diese Analogie höchstens dann aufweisen, wenn man seinen Koeffizienten solche Konvergenzbedingungen auferlegt, daß ein Wegstreichen dadurch ausgeschlossen ist, wie z. B. eine Kochsche Normaldeterminante nach Wegstreichung einiger Zeilen den Typus der Kochschen Normaldeterminante verliert oder ein vollstetiges Gleichungssystem im Sinne von Hilbert nach Wegstreichung einiger Gleichungen seinen Charakter als solches einbüßt. Mit diesen Worten ist genauer gekennzeichnet, was in Nr. 2 über den Vorzug der Integralgleichungen zweiter Art vor denen erster Art angedeutet wurde. Wenn man aber den Koeffizienten des Gleichungssystems keine derartigen Bedingungen auferlegt, sondern solche, die durch Wegstreichen von Gleichungen oder Nullsetzen einiger Unbekannten ihren Typus nicht verlieren, wie z. B. die Beschränktheit im Sinne von Hilbert oder im Sinne irgendeiner anderen Konvergenzbedingung über die x_n, oder wie die Voraussetzungen der Schmidtschen Theorie von Nr. **19** oder ihrer Übertragungen auf andere Konvergenzbedingungen für die x_n, oder wie endlich auch die Zeilenfinitheit, so kann man höchstens erwarten, daß diejenigen Sätze gelten, die in der Algebra von m linearen Gleichungen für n Unbekannte richtig sind.

Die Theorie der Systeme von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten, soweit sie den Determinantenbegriff vermeidet, findet ihren vollständigsten Ausdruck in dem Theorem, daß man jedes solche System durch eindeutig invertierbare lineare Transformation der Unbekannten und durch eindeutig invertierbare lineare Kombination der Gleichungen auf die Normalform

$$x_1 = y_1, \ldots, x_r = y_r \qquad (r \leqq m, n)$$

bringen kann. Das hierzu analoge Theorem also beweist Toeplitz für die zeilenfiniten unendlichen Systeme, indem er für die Transformationen und Kombinationen ebenfalls nur solche lineare Substitutionen zuläßt, deren Koeffizientenmatrix zeilenfinit ist und die im Sinne zeilenfiniter Matrizen — deren Kalkül übrigens leicht zu etablieren ist —

eindeutig invertierbar sind. Für beschränkte oder andere Systeme, in denen der Matrizenkalkül möglich, also das in Rede stehende Problem formulierbar ist[226]), wo aber die Verhältnisse wesentlich verwickelter liegen, ist ein solches erschöpfendes System von Normalformen bisher nicht aufgestellt worden.

21. Eigentlich singuläre Integralgleichungen zweiter Art. In den Bereich der in Nr. **18**—**20** dargestellten Untersuchungen gehören ihrem Wesen nach auch die Integralgleichungen 2. Art mit Kernen, die so hoch singulär sind, daß die Sätze der Auflösungstheorie der Integralgleichungen 2. Art mit stetigen Kernen nicht mehr gelten, und ihre Methoden nicht mehr anwendbar sind; sie sollen *eigentlich singuläre Integralgleichungen* (im Gegensatz zu den in Nr. **12** behandelten „uneigentlich singulären") heißen. Der Übergang zu unendlichvielen Variablen, wie er nach den Methoden von Nr. **15** durchführbar ist, läßt erkennen, daß bei hinreichend großer Willkür der zugelassenen Kerne die besondere Form der Integralgleichung 2. Art ihre wesentliche Bedeutung verliert. Diese Transformation führt nämlich stetige und uneigentlich singuläre Integralgleichungen in „vollstetige Gleichungssysteme" (Nr. **16**) über, in deren Koeffizientenmatrix $\mathfrak{E} + \mathfrak{K}$ die aus dem Summanden $\varphi(s)$ der Integralgleichung entstehende Einheitsform $\mathfrak{E}$ sich von der aus dem Integralbestandteil entstehenden vollstetigen Form $\mathfrak{K}$ klar abhebt; demgegenüber fällt bei eigentlich singulären Integralgleichungen die dem Integralbestandteil entsprechende Form $\mathfrak{K}$ nicht mehr vollstetig aus, und das Gleichungssystem hebt sich aus den Systemen der in Nr. **18**—**20** behandelten Art nicht mehr besonders hervor. Demgemäß sind allgemeine Auflösungstheoreme nach Art der Fredholmschen hier nicht zu erwarten[226a]); in der Tat liegen auch nur Aussagen über besondere Typen solcher eigentlich singulären Integralgleichungen vor. Die unbekannte Funktion wird dabei in den meisten Fällen stetig oder doch wenigstens von *konvergentem Quadratintegral* angenommen, entsprechend der in Nr. **18**, **19** verwendeten Bedingung konvergenter Quadratsumme; andere Funktionenklassen werden in Nr. **24** b zu berücksichtigen sein.

a) Die erste hierhin gehörige Gruppe von Untersuchungen bezieht sich auf die Auflösung der sog. Integralgleichungen 3. Art[227]),

226) *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*[164]), § 8.

226a) Die allgemeinen Lösbarkeitsbedingungen von Nr. **18**, **19**, insbesondere Nr. **18** b, 3 hat *H. Weyl*[567]), p. 283 ff. gelegentlich auf Integralgleichungen übertragen.

227) *D. Hilbert,* Gött. Nachr. 1906, 5. Mitteil. = Grundzüge, Kap. XV hatte das Problem der Eigenwerttheorie dieser Integralgleichungen behandelt; s. Nr. **38** b, 1.

das sind Gleichungen der Form

$$(1) \qquad A(s)\varphi(s) - \lambda\int_a^b k(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

wo $A(s)$ im Intervall $a \leqq s \leqq b$ Nullstellen besitzt, während $k(s, t)$ stetig ist. Die Transformation $\psi(s) = A(s)\varphi(s)$ führt sie in eine Integralgleichung 2. Art mit dem an den Nullstellen von $A(t)$ singulären Kern $k(s,t):A(t)$ über. *É. Picard*[228]) hat solche Gleichungen für den Fall behandelt, daß $A(s)$ von *erster Ordnung* an Stellen verschwindet, an denen $k(s, t)$ nicht verschwindet. Sein Verfahren besteht, für den typischen Fall

$$(2) \qquad \varphi(s) - \lambda\int_a^b \frac{k(s,t)}{t}\,\varphi(t)\,dt = f(s), \quad \text{wo } a < 0 < b,$$

ausgesprochen, darin, daß er entsprechend einer Hilbertschen Approximationsmethode (vgl. Nr. **12** b) die Gleichung (2) durch eine Integralgleichung mit endlichem (abteilungsweise stetigem) Kerne annähert:

$$(2\text{a}) \quad \varphi(s) - \lambda\int_a^{-\varepsilon} \frac{k(s,t)}{t}\,\varphi(t)\,dt - \lambda\int_\eta^b \frac{k(s,t)}{t}\,\varphi(t)\,dt = f(s), \text{ wo } \begin{cases} 0 < \varepsilon < -a \\ 0 < \eta < b. \end{cases}$$

Indem er auf diese die Fredholmschen Formeln anwendet und alsdann ε, η so gegen 0 konvergieren läßt, daß $\log\frac{\eta}{\varepsilon}$ einen endlichen Grenzwert $C \neq 0$ hat, zeigt er unter der Voraussetzung eines analytischen Kernes $k(s, t)$, daß die Lösung $\varphi(s)$ von (2a) gegen eine gebrochen lineare Funktion von C konvergiert, die — in dem durch den Grenzübergang bezeichneten Sinne — (2) genügt. Er untersucht ferner die Werte von λ, für die speziell $\varphi(t):t$ bei $t = 0$ endlich bleibt [also das Integral (2) eigentlich existiert] und zeigt, daß sie die Nullstellen einer gewissen ganzen transzendenten Funktion sind.[229]) *Ch. Platrier*[230]) hat diese Untersuchungen auf Nullstellen höherer Ordnung von $A(s)$ und auf Systeme von Integralgleichungen ausgedehnt. Im Zusammenhang damit stehen Bemerkungen von *É. Picard*[228]), *T. Lalesco*[231]) und *G. Julia*[231a]) über Integralgleichungen mit komplexen Integrationswegen.

228) *É. Picard,* Paris C. R. 150 (1910), p. 489—491; 152 (1911), p. 1545—1547; 153 (1911), p. 529—531, 615—617; Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 459—472.

229) Eine andere Herleitung der Picardschen Resultate bei *G. Fubini,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_1 (1912), p. 325—330.

230) *Ch. Platrier,* Paris C. R. 154 (1912), p. 808—811; 156 (1913), p. 1825—1828; 157 (1913), p. 28—31; 162 (1916), p. 118—120; ferner zusammenfassend in [53]), Chap. V.

231) *T. Lalesco,* Literatur A 6, p. 117 ff.

231a) *G. Julia,* Paris C. R. 172 (1921), p. 1279—1281.

b) Vielfach behandelt worden sind weiterhin gewisse Integralgleichungen 2. Art mit Kernen, die wie $\operatorname{ctg}(s-t)$ unendlich werden, und die sich aus Problemen der Funktionentheorie (konforme Abbildung von Gebieten mit Ecken) und anderen Randwertaufgaben ergeben; dabei wird für die Integrale über den Kern stets der *Cauchysche Hauptwert* [$\varepsilon = \eta$ im Beispiel (2a)] genommen. Diese Untersuchungen gehen auf *D. Hilbert*[232]) zurück; auf Grund der „Reziprozitätsformeln" für den ctg-Kern (s. (2) von Nr. 22a) erkannte er, daß sich durch Iterierung der Integraloperation mit einem solchen Kern eine Integraloperation 2. Art mit stetigem oder uneigentlich singulärem Kern ergibt, und er konnte so das Problem auf eine gewöhnliche Integralgleichung 2. Art zurückführen. In anderer Weise (Übergang zu komplexen Integrationswegen unter Benutzung des Cauchyschen Integralsatzes) hat *H. Poincaré*[233]) Kerne der gleichen Art behandelt. *F. Noether*[234]) hat durch konsequente Ausbildung der Hilbertschen Methode und unter Ausfüllung einiger in den früheren Arbeiten gebliebener Lücken[235]) eine eingehende Theorie von Integralgleichungen des Typus

$$(3) \qquad a(s)\,\varphi(s) + \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{b(s)}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} + K(s,t) \right\} \varphi(t)\,dt = f(s)$$

entwickelt, wo $a(s)$, $b(s)$ hinreichenden Stetigkeitsvoraussetzungen genügen und die Periode 2π haben, $a(s)^2 + b(s)^2 \neq 0$ ist, und $K(s,t)$ einen stetigen oder uneigentlich singulären Kern mit derselben Periode bedeutet. Er zeigt insbesondere, daß die Anzahlen d, d' der linear unabhängigen Lösungen der homogenen und der transponierten homogenen Gleichung zwar *endlich* bleiben, aber nicht mehr notwendig gleich sind, und daß ihre Differenz $d - d'$ nur von den Funktionen $a(s)$, $b(s)$ und nicht von dem Zusatzkern $K(s,t)$ abhängt; ferner z. B., daß Satz 3 von Nr. **10** bestehen bleibt.

c) Eigentlich singuläre Integralgleichungen mit unendlichen Grenzen (über die Transformation auf endliche Grenzen vgl. Nr. **12**d)

232) *D. Hilbert,* Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), p. 233—240. — Die Methode ist auf Grund von Hilbertschen Vorlesungen zuerst veröffentlicht von *O. D. Kellogg,* Dissert.[35]), p. 41 ff. und weiterhin angewandt von *O. D. Kellogg,* Math. Ann. 58 (1904), p. 441—456 und 60 (1905), p. 424—433.

233) *H. Poincaré,* Literatur C 4, 2. Vortrag. — Vgl. auch die Behandlung ähnlicher spezieller Integralgleichungen bei *H. Villat,* Paris C. R. 153 (1911), p. 758—761 und Acta math. 40 (1915), p. 101—178.

234) *F. Noether,* Math. Ann. 82 (1920), p. 42—63.

235) Vgl. dazu [234]), p. 46, Fußn. 8) und *D. Hilbert,* Grundzüge, p. 82, Fußn.

sind gelegentlich nach speziellen Methoden behandelt worden, insbesondere wenn der Kern nur von $s - t$ und ähnlichen Ausdrücken abhängt[236]) (vgl. Nr. 14). Eine größere Klasse solcher Integralgleichungen, deren Kerne homogene Funktionen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension von s, t sind, hat neuerdings *A. C. Dixon*[237]) untersucht.

22. Integralgleichungen erster Art. Momentenproblem. Auch die Integralgleichungen 1. Art

$$\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{1}$$

gehören ihrer Natur nach in den Problemkreis von Nr. 18—20, wie der Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen (Nr. 15) unmittelbar zeigt[238]); auch hier ist demgemäß keine eigentliche Auflösungstheorie, sondern nur eine Reihe von besonderen Lösbarkeitskriterien und Lösungsformeln sowie von Resultaten über spezielle Gleichungen vorhanden. Je stärkeren Stetigkeitsforderungen $K(s, t)$ unterworfen wird, um so mehr verengt sich naturgemäß der Bereich der Funktionen $f(s)$, für die (1) etwa durch ein stetiges $\varphi(s)$ lösbar ist[239]); erst Gleichungen (1) mit eigentlich singulären Kernen können unter Umständen in dem Umfang wie reguläre Integralgleichungen 2. Art lösbar sein.[240]) Für die unbekannte Funktion gilt das am Ende der Einleitung von Nr. 21 gesagte.

236) *E. v. Egerváry*[105]); *G. Andreoli,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 26_1 (1917), p. 289—295, 531—538 (spezielle von $\alpha s - \beta t$ abhängige Kerne für kleine Parameterwerte). — *J. E. Littlewood,* Proceed. Cambr. Phil. Soc. 21 (1922), p. 205—214 löst eine homogene Integralgleichung, deren Kern der Integrallogarithmus von $|s-t|$ $(-\infty < s,\ t < +\infty)$ ist; *G. H. Hardy* u. *E. C. Titchmarch,* London Math. Soc. Proc. (2) 23 (1924), p. 1—26 behandeln weitere verwandte Beispiele. — Andersartige aus Differenzialgleichungen entstehende Beispiele bei *P. Humbert*[253]).

237) *A. C. Dixon,* London Math. Soc. Proc. (2) 22 (1923), p. 201—222.

238) Die oft gemachte Bemerkung, daß (1) aus der Integralgleichung 2. Art mit dem Parameter λ (Nr. 11c) im Grenzfall $\lambda \to \infty$ entsteht, ergibt für ihre Behandlung keinerlei Nutzen, da $\lambda = \infty$ eine wesentlich singuläre Stelle der Lösungen der Integralgleichung 2. Art ist.

239) Einige Bemerkungen in dieser Richtung zusammengestellt bei *H. Bateman,* London Math. Soc. Proc. (2) 4 (1906), p. 90—115, 461—498. Für spezielle Kerne vgl. auch *St. Mohorovičić,* Bull. Jugoslav. Acad., math.-phys. Kl. 6—7 (1916), p. 73—88; Rada jugoslav. Acad. 215 (1916), p. 26.

240) Denn damit z. B. (1) für jedes $f(s)$ mit konvergentem Quadratintegral eine Lösung derselben Eigenschaft hat, muß die Koeffizientenmatrix des entsprechenden unendlichen Gleichungssystemes eine beschränkte Reziproke besitzen, und das ist nach dem Toeplitzschen Kriterium (Nr. 18 b, 3) sicher nicht der Fall, wenn sie vollstetig, insbesondere also, wenn $K(s, t)$ stetig oder uneigentlich singulär ist.

a) Gleichungen mit stark singulären Kernen. Diesem Typus gehört eines der ältesten Beispiele einer mit ihrer Lösung bekannten Integralgleichung 1. Art an, die *Fouriersche Doppelintegralformel*[241]) (6) von Nr. 4. Hier liegt noch die Besonderheit vor, daß der Kern $\cos 2\pi st$ symmetrisch ist, und die Lösung durch eine Integralgleichung mit genau dem gleichen Kerne gegeben wird [d. h. im Gebiete der unendlichvielen Veränderlichen entspricht dem eine symmetrische Form, die mit ihrer Reziproken identisch, also orthogonal ist[242])]. Analoge Formeln sind aus der Theorie der Besselschen und verwandten Funktionen bekannt[243]), und sie sind neuerdings auch unter dem formalen Gesichtspunkt der Theorie der Integralgleichungen mehrfach behandelt worden[244]).

Eine ähnliche Formelgruppe spielt in den Anwendungen der Integralgleichungen eine große Rolle, die sog. *Hilbertschen Reziprozitätsformeln für den* ctg-*Kern*[245]), in denen der an einer Stelle des *endlichen* Integrationsintervalles von der Länge 2π *von 1. Ordnung unendliche*, sonst stetige und periodische symmetrische Kern $\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}$ auftritt:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}\,\varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(t)\,dt \\ \varphi(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}\,f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\,dt \end{aligned}\right. \qquad (-\pi \leqq s \leqq +\pi).$$

Diese Gleichungen lösen sich gegenseitig auf, wenn die Integrale als Cauchysche Hauptwerte aufgefaßt werden und $f(s)$, $\varphi(s)$ stetige Funktionen der Periode 2π sind.[246]) Die Reziprozitätsformeln sind in ver-

241) Über dieses und andere ältere Beispiele von Integralgleichungen 1. Art vgl. Encykl. II A 11, *Pincherle,* Nr. 28, 29.

242) Von diesem Gesichtspunkt aus behandelt *H. Weyl*[566]), § 4—6 diese und ähnliche Formeln; vgl. auch *H. Weyl,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 20 (1911), p. 129—141, 339.

243) Vgl. außer [241]) *H. Hankel,* Math. Ann. 8 (1875), p. 471—494.

244) *H. Bateman,* Math. Ann. 63 (1907), p. 525—548, § 1; Mess. of Math. 41 (1912), p. 94—101, 180—184; *G. H. Hardy,* ibid. 42 (1912), p. 89—93; *L. Pisati,* Palermo Rend. 25 (1908), p. 272—282; *M. Plancherel,* London Math. Soc. Proc. (2) 24 (1925), p. 62—70.

245) Zuerst nach *Hilberts* Vorlesungen veröffentlicht bei *O. D. Kellogg,* Dissert.[35]), p. 17 ff. und Math. Ann. 58[232]). Vgl. auch *D. Hilbert,* 2. Mitteil. Gött. Nachr. 1904 = Grundzüge, Kap. IX, p. 75 f. und 3. Mitteil. Gött. Nachr. 1905 = Grundzüge, Kap. X, p. 84 ff.

246) Ausdehnung auf unstetige Funktionen bei *O. D. Kellogg,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 13 (1907), p. 168—170; *A. Plessner,* Dissert. Gießen 1923 (Mitteil. math. Sem. Gießen X), 36 S., § 1.

schiedener Weise auf andere von 1. Ordnung unendliche Kerne ausgedehnt worden[247]).

Kennt man für einen unstetigen Kern eine solche Reziprozitätsformel, so kann man, wie *D. Hilbert* und im Anschluß an ihn *O. D. Kellogg* für eine Reihe von Fällen durchgeführt hat[245]), auch Integralgleichungen 1. Art mit Kernen, die sich von jenem unstetigen Kern nur um einen additiven stetigen Kern unterscheiden, unschwer auf Integralgleichungen 2. Art mit stetigem Kern zurückführen. Ähnlich behandelt *H. Poincaré*[248]) Integralgleichungen 1. Art mit unendlichem Integrationsintervall und Kernen, deren Unstetigkeit vom Typus e^{ist} ist, durch Anwendung der Fourierschen Integralformel.

b) Lösbarkeitskriterien. In einer Reihe von Untersuchungen werden Kriterien für die Lösbarkeit der Integralgleichung (1) mit stetigem oder uneigentlich singulärem Kern unter der Voraussetzung gegeben, daß die von *E. Schmidt* eingeführten, sog. adjungierten Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$, $\psi_n(s)$ und zugehörigen Eigenwerte λ_n von $K(s, t)$ (s. Nr. **36** c) bekannt sind. Nachdem *G. Lauricella*[249]) darauf hingewiesen hatte, daß für die Existenz einer Lösung von (1) mit konvergentem Quadratintegral die *Konvergenz der Quadratsumme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\int_a^b f(s)\, \varphi_n(s)\, ds\right)^2$$

notwendig ist, hat *É. Picard*[250]) aus dem *Fischer-Riesz*schen Satz (s. Nr. **15** d) geschlossen, daß diese Bedingung auch *hinreicht*, um die Existenz wenigstens einer samt ihrem Quadrat im *Lebesgue*schen Sinne integrierbaren Lösung zu garantieren, vorausgesetzt, daß die $\varphi_n(s)$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden; andernfalls tritt als weitere Bedingung die Orthogonalität von $f(s)$ zu allen samt ihrem Quadrat integrierbaren Nullösungen der transponierten homogenen Gleichung

247) *O. D. Kellogg,* Math. Ann. 58[232]); *H. Villat,* Paris C. R. 166 (1918), p. 981—984 und Darb. Bull. (2) 43 (1919), p. 18—48. — Vgl. auch die verwandten Formeln bei *G. H. Hardy,* Mess. of Math. 53 (1924), p. 135—142; 54 (1924), p. 20—27 sowie in der daselbst zitierten Literatur.

248) *H. Poincaré,* Paris C. R. 148 (1909), p. 125—126; Acta math. 33[77]), § 5; Literatur C 4, 1. Vortr., p. 7—10. Im selben Zusammenhang führt er die gleiche Integralgleichung für das Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$, deren Bestehen indessen nur für *ganzzahlige* Werte von s gefordert wird — also ein nach Nr. **22** d gehöriges Problem — durch Anwendung der Fourierschen Reihenentwicklung auf ein unendliches lineares Gleichungssystem zurück.

249) *G. Lauricella,* Rom Acc. Linc. Rend (5) 17_1 (1908), p. 775—786; 17_2 (1908), p. 193—204.

250) *É. Picard,* Paris C. R. 148 (1909), p. 1563—1568, 1707—1708; Palermo Rend. 29 (1910), p. 79—97; vgl. auch Paris C. R. 157 (1913), p. 813—814.

$\int_a^b K(s,t)\chi(s)\,ds = 0$ hinzu[251]). — Andere Formen der Lösbarkeitskriterien, auch unter anderen Bedingungen für $\varphi(s)$, die den in Nr. **18**, **19**, **20** angegebenen entsprechen, haben sich aus den in d) wiederzugebenden Überlegungen ergeben[252]).

c) Besondere Integralgleichungen 1. Art sind von einzelnen Autoren nach speziellen Methoden gelegentlich vollständig gelöst worden. Als geeignetes Hilfsmittel erwies sich dabei vielfach die Methode der komplexen Integration[253]); besonders hervorzuheben ist die Lösung der Integralgleichung mit dem Abelschen Kern $(s-t)^{-\alpha}$ im Intervall (0, 1) durch *T. Carleman.*[254]) Auch Reihenentwicklungen sind in einzelnen Arbeiten herangezogen worden.[255]) — Systeme von

---

251) *G. Lauricella,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 18_2 (1909), p. 71—75; 20_1 (1911), p. 528—536. — Andere Beweisanordnungen und Umformungen dieser Kriterien bei *L. Amoroso,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 19_1 (1910), p. 68—75 (vgl. Nr. **22**d [258])); *H. Bateman,* Mess. of Math. 39 (1910), p. 129—135; *J. Mollerup,* Paris C. R. 150 (1910), p. 313—315 = Palermo Rend. 29 (1910), p. 378—379; *C. Severini,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 23_1 (1914), p. 219—225, 315—321; *L. Silla,* ibid. p. 600—607. Übertragung auf Systeme von Integralgleichungen 1. Art bei *L. Silla* [257]). — Herleitungen, die mit der Begründung der Sätze über adjungierte Eigenfunktionen (s. Nr. **36**c) verknüpft sind, geben *A. Vergerio,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 24_1 (1915), p. 1199—1205; 24_2 (1915), p. 185—190, 513—519, 610—616; Palermo Rend. 41 (1916), p. 1—35; 42 (1917), p. 285—302; *J. Mollerup,* Mat. Tidsskrift 19 (1923), p. 47—53. — Weitere, mehr formale Bemerkungen über die Auflösung gewisser Integralgleichungen 1. Art im Zusammenhang mit der Eigenwerttheorie bei *H. Bateman,* Mess. of Math. 38 (1908), p. 8—13, 70—76; 39 (1909), p. 6—19, 182—191; *A. Vergerio,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 23_2 (1914), p. 385—389; *P. J. Daniell,* ibid. 25_1 (1916), p. 15—17; vgl. auch *K. Popoff,* Paris C. R. 157 (1913), p. 1395—1397 und die Berichtigung dazu von *A. Vergerio,* Lomb. Ist. Rend. (2) 47 (1914), p. 172—176. — Eine Anwendung des Lauricella-Picardschen Kriteriums auf Integralgleichungen, deren Kern einen Parameter enthält, gibt *G. Wiarda,* Dissert. Marburg 1915, 63 S.

252) Durchgeführt insbesondere bei *F. Riesz* [264]), § 12—13 (vgl. auch Nr. **24** b) und bei *E. Helly* [266]), § 10 für Integralgleichungen mit Stieltjesschen Integralen.

253) *H. Bateman,* Math. Ann. 63 [244]), § 2; *C. Cailler,* Arch. Sc. phys. et nat. Genève 38 (1914), p. 301—328. — Vgl. auch die durch Anwendung der Laplaceschen Integraltransformation auf gewisse gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen entstehenden Lösungsformeln besonderer Integralgleichungen bei *S. Pincherle* [321]) und *P. Humbert,* Edinb. Math. Soc. Proc. 32 (1914), p. 19—29; 33 (1915), p. 35—41.

254) *T. Carleman,* Math. Ztschr. 15 (1922), p. 111—120.

255) *C. Runge,* Math. Ann. 75 (1914), p. 130—132 [Kern $k(s-t)$ im Intervall $(-\infty, +\infty)$; formale Lösung durch Reihen Hermitescher Polynome]; vgl. dazu *W. Kapteyn,* Amst. Akad. Versl. 23 (1914), p. 49—59 und *L. Crijns,* Nieuw Arch. Wisk. Amsterdam (2) 13 (1919—20), p. 292—294. — *F. Tricomi,* Palermo Rend. 46 (1922), p. 357—387 (überall endlicher Kern auf geschlossener Fläche als Integrationsbereich).

Integralgleichungen 1. Art sind behandelt bei *Ch. Platrier*[256]), *L. Silla*[257]) und *C. E. Weatherburn*.[102])

d) Das Momentenproblem. Dem Wesen nach äquivalent mit der Lösung der Integralgleichung 1. Art ist das Problem der Bestimmung einer Funktion $\varphi(s)$ durch abzählbar unendlichviele lineare Integralbedingungen

$$(3) \qquad \int_a^b k_n(t)\,\varphi(t)\,dt = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo die $k_n(t)$ gegebene Funktionen, die c_n gegebene Konstante sind; an Stelle des kontinuierlich veränderlichen Parameters s in (1) tritt hier also der ganzzahlige Parameter n. Der Übergang von (1) zu (3) läßt sich wie in Nr. **15** mit Hilfe eines vollständigen Orthogonalsystems unmittelbar bewerkstelligen[258]), und ebenso kann man von (3) zu unendlichvielen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten (Nr. **19, 20**) übergehen [vgl. [248])]. Für den Fall, daß die $k_n(t)$ gleich den Potenzen t^{n-1} sind, ist das Problem (3) lange vor dem Entstehen der Theorie der Integralgleichungen behandelt worden (s. Encykl. II A 11, *Pincherle*, p. 805) und namentlich von *T. J. Stieltjes*[259]) als *Momentenproblem* zum Gegenstand einer klassischen Untersuchung im Zusammenhang mit der Theorie der Kettenbrüche gemacht worden. Stieltjes betrachtet das Integrationsintervall $(0, \infty)$ und fragt nur nach *nichtnegativen Lösungen* $\varphi(t) \geqq 0$ und allgemeiner nach *monotonen Funktionen* $\Phi(t)$, welche — die Integrale im Stieltjesschen Sinne verstanden (s. Encykl. II C 9b, Nr. **35 d**, *Montel-Rosenthal*) — den Gleichungen genügen:

$$(4) \qquad \int_0^\infty t^n\,d\Phi(t) = c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer monotonen Lösung ist die Positivität der Determinanten C_n und C_n' der quadratischen Formen $\sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p+q}\,x_p\,x_q$ und $\sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p+q+1}\,x_p\,x_q$; die Lösungen werden aus der Integraldarstellung der zu der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n z^{-n-1}$

256) *Ch. Platrier*[53]), note II.

257) *L. Silla*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 22_2 (1913), p. 13—20.

258) Darauf beruht die Behandlung der Integralgleichungen 1. Art bei *L. Amoroso*[264])[251]) sowie bei *Ch. Müntz*, Math. Ann. 87 (1922), p. 139—149, § 1, 2.

259) *T. J. Stieltjes*, Récherches sur les fractions continues, Paris C. R. 118 (1894), p. 1315—1317, 1401—1403; Mém. sav. étrang. Paris 32, Nr. 2, 197 S. = Ann. Fac. sciences de Toulouse 8 (1894) J., p. 1—122; 9 (1895) A., p. 5—47. — Über die Bedeutung dieser Untersuchungen für die Theorie der quadratischen Formen unendlichvieler Veränderlicher vgl. Nr. 43 c.

gehörigen Kettenbrüche gewonnen. Unter Verwendung der seither in der Kettenbruchtheorie entwickelten Hilfsmittel hat *H. Hamburger*[260]) das gleiche Problem für das Integrationsintervall $(-\infty, +\infty)$ gelöst:

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\,\Phi(t) = c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit ist $C_n > 0$; bezeichnet C_n'' die Determinante der Form $\sum_{p,q=2}^{n-1} c_{p+q} x_p x_q$, so ist die Lösung im wesentlichen eindeutig bestimmt (derart, daß zwei Lösungen an allen Stetigkeitsstellen übereinstimmen), wenn $\lim_{n=\infty} (C_n : C_n'') = 0$; ist dieser Limes > 0, so gibt es unendlichviele wesentlich verschiedene Lösungen. *M. Riesz*[261]) hat die gleichen Resultate ohne explizite Benutzung der Kettenbrüche hergeleitet und erweitert, indem er die algebraischen Eigenschaften der durch (5) gegebenen Funktionaloperation, die jedem Polynom $x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n$ die Zahl $x_0 c_0 + x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n$ zuordnet, schärfer untersucht und den Grenzprozeß $n \to \infty$ ausführt. Andere Darstellungen unter Benutzung der Eigenschaften analytischer Funktionen haben *R. Nevanlinna*[262]) und *T. Carleman*[263]) gegeben.

Das allgemeine Problem (3) hat *F. Riesz*[264]) genau mit den Methoden behandelt, die er später (Nr. **20**c) auf unendlichviele Glei-

---

260) *H. Hamburger,* Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems, Sitzungsber. Bayr. Akad., Math.-phys. Kl. 1919, p. 381—393; Math. Ann. 81 (1920), p. 235—319; 82 (1921), p. 120—164, 168—187.

261) *M. Riesz,* Sur le problème des moments, Ark. f. Mat. 16 (1921), Nr. 12, 23 S.; Nr. 19, 21 S.; 17 (1923), Nr. 16, 52 S. — Die dritte Arbeit enthält eine von den ersten beiden im Gedankengang unabhängige Begründung, die von einer begrifflichen Ausdehnung jener Funktionaloperation auf beliebige Funktionen ausgeht.

262) *R. Nevanlinna,* Ann. Ac. Scient. Fenn. A 18 (1922), Nr. 5, 53 S.

263) *T. Carleman,* Paris C. R. 174 (1922), p. 1527—1530, 1680—1682.

264) *F. Riesz,* Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497. — Den Fall quadratisch integrierbarer $\varphi(t)$ hat *L. Brand,* Ann. of Math. (2) 14 (1913), p. 101—118 nach dem Muster der *Bôcher-Brand*schen Darstellung[213]) des *E. Schmidt*schen Auflösungsverfahrens von Nr. **19** behandelt; vorher hatte bereits *L. Amoroso,* Ann. di mat. (3) 16 (1909), p. 123—140 durch Anwendung des Orthogonalisierungsverfahrens auf die $k_n(t)$ einige Resultate in dieser Richtung gegeben; sachlich identisch damit ist die Methode von *Ch. Müntz*[258]); vgl. auch *J. Takenaka,* Tôhoku math. J. 23 (1923), p. 167—196. Ferner sind hier die Untersuchungen von *W. Stekloff,* Mem. Ac. Imp. Petersbourg 32 (1915) zu erwähnen. Das Problem (3) mit Nebenbedingungen für $\varphi(s)$ hat weiter untersucht *S. Kakeya,* Tôhoku math. J. 4 (1914), p. 186—190; 8 (1915), p. 14—23; Tokyo Math. Ges. (2) 8 (1916), p. 83—102, 408—420; (2) 9 (1918), p. 93—100.

chungen mit unendlichvielen Unbekannten angewendet hat; er findet als notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung $\varphi(t)$, für die $\int_a^b |\varphi(t)|^\alpha dt$ (im Lebesgueschen Sinne) existiert, die Existenz einer Zahl m derart, daß für jedes ganzzahlige n und beliebige Werte $u_1, \ldots, u_n$

$$(6) \qquad \left|\sum_{p=1}^{n} u_p c_p\right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leqq m \int_a^b \left|\sum_{p=1}^{n} u_p k_p(t)\right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} dt.$$

Darüber hinaus haben *F. Riesz*[265]) und nach ihm *E. Helly*[266]) unter Verwendung des Stieltjesschen Integralbegriffes die Lösbarkeit der Gleichungen

$$(7) \qquad \int_a^b k_n(t)\, d\Phi(t) = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

durch Funktionen *beschränkter Schwankung* untersucht und in der Existenz einer Zahl m gemäß

$$\left|\sum_{p=1}^{n} u_p c_p\right| \leqq m \cdot \underset{a \leqq t \leqq b}{\mathrm{Max}} \left|\sum_{p=1}^{n} u_p k_p(t)\right|$$

für jedes ganzzahlige n und beliebige $u_1, \ldots, u_n$ die Bedingung der Lösbarkeit erkannt.

23. Neuere Untersuchungen über lineare Volterrasche Integralgleichungen.[267])

a) Als Volterrasche Integralgleichungen bezeichnet man [vgl. Nr. 3, Ende[17])] solche Integralgleichungen, in denen die obere Integrationsgrenze gleich der freien Veränderlichen s des Kernes ist oder — allgemeiner — in denen die Grenzen von s abhängen. *J. Le Roux*[18]) und *V. Volterra*[5])[19]) gingen von der Integralgleichung 1. Art dieses Typus aus:

$$(1) \qquad g(s) = \int_0^s N(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \quad \text{wo } g(0) = 0,$$

und bemerkten, daß man sie durch Differentiation in die Gestalt

$$(2) \qquad g'(s) = N(s, s)\, \varphi(s) + \int_0^s \frac{\partial N(s, t)}{\partial s} \varphi(t)\, dt$$

265) *F. Riesz,* Paris C. R. 149 (1909), p. 974—977; 150 (1910), p. 674—677; Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 33—62; es ergeben sich auch Bedingungen für die Existenz monotoner Lösungen. — Vgl. auch *S. Kakeya,* Tôhoku Sc. Rep. 4 (1915), p. 361—372; 5_2 (1916), p. 127—134.

266) *E. Helly,* Wiener Ber. IIa 121 (1912), p. 265—297.

267) Eine ausführlichere Behandlung dieser Gleichungen findet man in folgenden Lehrbüchern: *T. Lalesco,* Literatur A 6, p. 5—18, 103—111; *V. Volterra,* Literatur A 9, p. 34—101; *G. Vivanti,* Literatur A 10, p. 55—99.

umsetzen kann, falls $g(s)$ und $N(s, t)$ stetig differenzierbar sind. Ist $N(s, s) \geqq m > 0$ im ganzen in Betracht gezogenen Intervall $0 \leqq s \leqq b$, so liegt hierin eine (Volterrasche) Integralgleichung 2. Art mit stetigem Kern $K(s, t)$ vor:

$$(3) \qquad f(s) = \varphi(s) + \int_0^s K(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

und *Le Roux*[18]) und *Volterra*[19]) zeigten, daß die Lösung einer solchen Gleichung eindeutig bestimmt ist und durch die in $0 \leqq s \leqq b$ gleichmäßig konvergente Entwicklung nach iterierten Kernen geliefert wird[268]):

$$(4) \qquad \varphi(s) = f(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^s K^{(n)}(s, t) f(t)\, dt;$$

die Definitionsformel der iterierten Kerne [vgl. (1) von Nr. **11**] nimmt hier wegen der besonderen oberen Grenze die Gestalt an:

$$(4\text{a}) \qquad K^{(n)}(s, t) = \int_t^s K^{(n-1)}(s, r) K(r, t)\, dr \quad (t \leqq s;\ n = 2, 3, \ldots),$$

und hieraus ergibt sich unmittelbar, falls $|K(s, t)| \leqq M$ ist, die die behauptete Konvergenz gewährleistende Abschätzung[269])

$$(4\text{b}) \qquad |K^{(n)}(s, t)| \leqq M^n \frac{|s - t|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die früheren Arbeiten über Volterrasche Integralgleichungen, die vor der Fredholmschen Entdeckung entstanden sind, sind in Encykl. II A 11, *S. Pincherle*, Nr. **30**, **31 b** referiert; über die Bedeutung der Volterraschen Integralgleichungen in der Entstehungsgeschichte der allgemeinen Integralgleichungstheorie vgl. Nr. **3**, **4** dieses Artikels. Es bleibt hier noch über eine Reihe neuerer Untersuchungen zu berichten, die die Eigenart der Volterraschen Integralgleichungen gegenüber dem allgemeinen Typ nach verschiedenen Richtungen hin betreffen.

b) Diese Untersuchungen beziehen sich in erster Linie auf das *Verhalten der Lösung in der Umgebung der Stelle* $s = 0$, die bei der Volterraschen Integralgleichung naturgemäß eine besondere Rolle

268) Man kann das zur Reihe (4) führende Verfahren der sukzessiven Approximation auch ohne den Übergang zu (2) direkt auf die durch geeignete andere Kunstgriffe umgeformte Gleichung (1) anwenden; s. *P. Burgatti*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 12_2 (1903), p. 443—452; *É. Picard*, Paris C. R. 139 (1904), p. 245—248. Andererseits kann man von (1) auch durch partielle Integration zu einer Integralgleichung 2. Art mit dem Kern $\frac{\partial N(s, t)}{\partial t}$ und dem unbestimmten Integral von φ als unbekannter Funktion übergehen [vgl. *V. Volterra*[5]), 1. Note].

269) Anwendungen dieser Abschätzung auf die approximative Lösung Volterrascher Gleichungen bei *A. Viterbi*, Ist. Lomb. Rend. (2) 45 (1912), p. 1027—1060.

spielt; man nimmt dabei meist die gegebenen Funktionen als *analytische* Funktionen *komplexer* Veränderlicher und bestimmt $\varphi(s)$ in der komplexen Umgebung von $s = 0$.[270]) So ergibt sich unmittelbar aus der in a) angegebenen Entwicklung das *Volterra*sche Resultat[5])[19]): Sind $g(s)$, $N(s, t)$ bei $s = 0$ bzw. $s = t = 0$ regulär analytisch und ist $N(0, 0) \neq 0$, so hat (1) eine eindeutig bestimmte regulär analytische Lösung $\varphi(s)$ in dem größten Kreis um 0, innerhalb dessen keine Nullstelle von $N(s, s)$ und keine singuläre Stelle von $g(s)$ und $N(s, t)$ liegt. Die Behandlung des Falles $N(0, 0) = 0$ — die entsprechende Integralgleichung zweiter Art (3) ist dann singulär — ist unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen von *V. Volterra*[271]), *E. Holmgren*[272]), *T. Lalesco*[273]) durchgeführt worden; als Hauptresultat sei folgendes angeführt: Sind $\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu s^{n-\nu} t^\nu$ die Glieder niederster Dimension in der Potenzentwicklung von $N(s, t)$ und ist $\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu = \lim_{s=0} s^{-n} N(s, s) \neq 0$, so hat (1) dann und nur dann eine bei $s = 0$ endliche Lösung, wenn $g(s)$ samt seinen ersten n Ableitungen bei $s = 0$ verschwindet und wenn die „charakteristische Gleichung“

$$(5)\quad A_0(\lambda - 1)^{-1} + A_1(\lambda - 2)^{-1} + \cdots + A_n(\lambda - n - 1)^{-1} = 0$$

lauter Wurzeln λ mit positiv reellem Teil hat; hat sie andere Wurzeln, so treten entsprechend viele gleichartige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung auf. Man gewinnt diese Sätze am bequemsten durch ein Verfahren der sukzessiven Approximation[272]), das von einer durch wiederholte Differentiation (bzw. eine analoge Integraloperation) aus (1) gewonnenen linearen Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus ausgeht, deren determinierende Gleichung bei $s = 0$ (5) ist. Den Ausnahmefall $\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu = 0$ hat erst *J. Horn*[274]) wenigstens für $n = 1$ erschöpfend untersucht; hier hat die entsprechende Differentialgleichung eine Stelle der Unbestimmtheit, und demgemäß bestimmt Horn

270) Eine mit der *E. Schmidt*schen Methode (Nr. **10** a) verwandte Methode zur Untersuchung des Verhaltens in der Nähe anderer Stellen, als der in der unteren Grenze auftretenden, bei *L. Orlando,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 24_1 (1915), p. 1040—1041.

271) *V. Volterra*[5]), 3. und 4. Note.

272) *E. Holmgren,* Bihang Sven. Ak. Handl. 25_1 (1899), I, Nr. 3, 19 S.; Upsala nova acta (3) 20 (1899), 32 S.; Torino Atti 35 (1900), p. 570—580.

273) *T. Lalesco,* Thèse[17]), 1. P., Nr. 5—8.

274) *J. Horn,* J. f. Math. 140 (1911), p. 120—158. Vgl. auch *M. Watanabe,* Tokyo Math. Ges. (2) 8 (1915), p. 212—213; Tôhoku Math. J. 8 (1915), p. 130—174; 10 (1916), p. 220—224.

das Verhalten der Lösungen der inhomogenen und homogenen Integralgleichung durch Verwendung der in der Theorie der linearen Differentialgleichungen gebräuchlichen asymptotischen Reihenentwicklungen (vgl. Encykl. II B 5, Nr. 5, *E. Hilb*). *J. Horn* hat weiterhin[275]) die Untersuchung vertieft, indem er die Laplacesche Integraltransformation (vgl. Encykl. II A 11, Nr. 16, *S. Pincherle*) auf die Volterrasche Integralgleichung und ebenso auf *Systeme* Volterrascher Integralgleichungen (bzw. auf die durch Differentiation aus ihnen entstehenden Gleichungen) anwendet und so wiederum zu Volterraschen Integralgleichungen kommt, die er durch konvergente Reihen von erfaßbarem asymptotischen Verhalten lösen kann; ähnlich hat er[276]) die aus linearen Differentialgleichungen und Differenzengleichungen durch die Laplacesche Transformation entstehenden Volterraschen Integralgleichungen behandelt.

In etwas anderer Richtung hat *G. C. Evans*[277]) die Volterrasche Integralgleichung zweiter Art (3) untersucht. Nachdem er zunächst die Gültigkeit der Entwicklung nach iterierten Kernen auf gewisse unstetige absolut integrierbare Kerne ausgedehnt hat[278]), hat er auch nicht absolut integrierbare Kerne in Betracht gezogen und eine Reihe von Bedingungen für die Existenz einer oder auch mehrerer stetiger Lösungen angegeben. *G. C. Evans*[279]) hat ferner diese Resultate auf Volterrasche Integralgleichungen 2. Art mit einer Integrationsgrenze ∞ übertragen.

c) Verallgemeinerte Volterrasche Integralgleichungen. Neben den schon erwähnten Systemen mit mehreren unbekannten Funktionen sind auch im Gebiete der Volterraschen Integralgleichungen die übrigen in Nr. **13** aufgeführten Verallgemeinerungen vielfach untersucht worden. Es sei hier nur die schon von *V. Volterra*[98])

275) *J. Horn,* J. f. Math. 146 (1915), p. 95—115; Math. Ztschr. 3 (1919), p. 265—313; 8 (1920), p. 100—114.

276) *J. Horn,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), p. 210—225, 309—329; 25 (1917), p. 74—83, 301—325; zu den Differenzengleichungen vgl. Encykl. II C 7, Nr. 6, p. 701, *N. E. Nörlund.*

277) *G. C. Evans,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 16 (1909), p. 130—136; Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1910), p. 393—413; 12 (1911), p. 429—472.

278) Vgl. auch die Bemerkungen von *W. H. Young,* Quart. J. 41 (1910), p. 175—192 über Kerne, die in Lebesgueschem Sinne integrierbar sind; weitere spezielle Typen singulärer Kerne bei *R. d'Adhémar,* Atti 4. congr. int. Roma 1909, t. 2, p. 115—121.

279) *G. C. Evans,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 20_1 (1911), p. 409—415, 656—662; 20_2 (1911), p. 7—11; *C. E. Love*, Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), p. 467—476 gibt andere Bedingungen für diesen Fall.

behandelte Integralgleichung 1. Art für Funktionen von zwei Unbekannten hervorgehoben:

$$(6)\qquad \int_0^s\int_0^\sigma N(s,\sigma;t,\tau)\,\varphi(t,\tau)\,dt\,d\tau = g(s,\sigma),$$

aus der durch zweimalige Differentiation eine gemischte Volterrasche Integralgleichung 2. Art vom Typus Nr. **13**, (2) entsteht; diese kann außer durch die in Nr. **13** b genannten Methoden auch durch sukzessive Approximation, d. h. durch passende Verallgemeinerung der Entwicklung nach Iterierten behandelt werden[280]).

Diejenigen Verallgemeinerungen der Volterraschen Integralgleichung (3), bei denen die obere Grenze nicht s, sondern eine beliebig gegebene stetige Funktion $h(s)$ ist, liefern, falls überall $0 \leqq h(s) \leqq s$ ist, nichts Neues. Andernfalls haben sie einen wesentlich anderen Charakter; insbesondere gilt nicht mehr, daß das Bestehen der Integralgleichung in *jedem* Intervall $0 \leqq s \leqq b$ die Funktion $\varphi(s)$ in diesem Intervall eindeutig bestimmt, denn wenn man — bei passendem b — $\varphi(s)$ in den Intervallen $\operatorname{Min} h(s) \leqq s \leqq 0$ bzw. $b \leqq s \leqq \operatorname{Max} h(s)$ willkürlich wählt, bleibt eine gewöhnliche Integralgleichung 2. Art für die Werte von $\varphi(s)$ im Intervall $0 \leqq s \leqq b$ zurück. Man wird also die Gültigkeit der Gleichung für *alle* $s \geqq 0$ bzw. auch für negative s fordern, um zu einem bestimmten Problem zu kommen; sie ist damit einer *singulären* Integralgleichung (mit unendlichem Integrationsintervall) bzw. einem System zweier Integralgleichungen [mit den Werten von $\varphi(s)$ für $s \geqq 0$ und $s \leqq 0$ als Unbekannten] äquivalent.[281]) Analoges gilt natürlich, wenn auch die untere Grenze von s abhängt.

Von Gleichungen dieser Gruppe hat bereits *V. Volterra*[282]) den Fall behandelt, daß beide Grenzen proportional s sind; er führt ihn auf den Typus

$$(7)\qquad g(s) = \int_{\alpha s}^{s} N(s,t)\,\varphi(t)\,dt, \quad |\alpha| \leqq 1,$$

und durch Differentiation auf die verallgemeinerte (funktionale) Volterrasche Integralgleichung 2. Art

$$(8)\qquad \varphi(s) + P(s)\,\varphi(\alpha s) + \int_{\alpha s}^{s} K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

280) *T. Lalesco,* Thèse [17]), 1. P., Nr. 13; *M. Mason,* Math. Ann. 65 (1908), p. 570—575; *T. H. Gronwall,* Ann. of. Math. (2) 16 (1915), p. 119—122.

281) Dieser Sachverhalt kommt in der Mehrzahl der Arbeiten über Probleme dieser Gruppe mehr oder weniger ausdrücklich zur Geltung; ein Beispiel für die Unbestimmtheit der Lösung ist vollständig durchgerechnet bei *P. Nalli,* Palermo Rend. 46 (1922), p. 261—264.

282) *V. Volterra,* Ann. di mat. 25[19]), Art. II.

zurück, die je nach dem Vorzeichen von α für $s \geqq 0$ oder für $s \geqq 0$ und $s \leqq 0$ zu betrachten ist. Eine ähnliche Integralgleichung, in der nur 0 statt αs als untere Grenze auftritt, hat für $|\alpha| < 1$ *É. Picard*[283]) durch sukzessive Approximation von einer Funktionalgleichung aus gelöst; er hat gezeigt, daß sie unter geeigneten Voraussetzungen über die eingehenden Funktionen genau eine bei $s = 0$ stetige Lösung besitzt; *T. Lalesco*[284]) hat diese Methode auf (7) angewandt. Für gewisse singuläre Kerne, wie sie aus einer Abelschen Integralgleichung entstehen (s. Nr. **23** d), hat *P. J. Browne*[285]) die Gleichung (8) eingehend untersucht und hat insbesondere gezeigt, daß die Lösung eine meromorphe Funktion eines in $P(s)$ und $K(s, t)$ linear eingehenden Parameters λ ist. Einen singulären Charakter hat der Fall $\alpha = -1$, den *V. Volterra*[282]) und weiterhin *T. Lalesco*[286]) behandelt hat.

Endlich sind mit ähnlichen Methoden in einer Reihe von Arbeiten[287]), zum Teil in direkter Verbindung mit Randwertaufgaben hyperbolischer Differentialgleichungen, Volterrasche Integralgleichungen 1. und 2. Art untersucht worden, bei denen eine oder beide Grenzen nicht mehr linear von s abhängen.

d) Besondere Volterrasche Integralgleichungen. Das klassische Vorbild der Volterraschen Problemstellung, die Abelsche Integralgleichung [s. Nr. **4**, (7)], d. i. die Gleichung (1) mit dem

283) *É. Picard*, Paris C. R. 144 (1907), p. 1009—1012. Weitere Lösungen dieser Gleichung, die sich aus anderen Lösungen der Ausgangs-Funktionalgleichung ergeben, haben *C. Popovici*, Paris C. R. 158 (1914), p. 1866—1869 und *A. Myller* u. *V. Valcovici*, Bukar. Bull. 3 (1914), p. 165—171 untersucht. Ein Eigenwertproblem für eine solche Integralgleichung bei *P. Nalli*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 29_2 (1920), p. 23—25, 84—86; 30_2 (1921), p. 85—90, 122—127, 295—300, 405—410, 451—456; 31_1 (1922), p. 245—248; Palermo Rend. 47 (1923), p. 1—14. Eine weitere Verallgemeinerung, in der $\varphi(h(s))$ mit gegebenem $h(s)$ statt $\varphi(\alpha s)$ auftritt, behandelt *A. Myller*, Paris C. R. 148 (1909), p. 1090—1091 und Math. Ann. 68 (1909), p. 75—106. Vgl. auch die hierhin gehörige Gleichung bei *G. Andreoli*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 25_1 (1916), p. 79—84.

284) *T. Lalesco*, Thèse[17]), 1. P., Nr. 10; vgl. dazu *M. Picone*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 19_2 (1910), p. 259—265 und *C. Popovici*, Palermo Rend. 39 (1915), p. 341—344.

285) *P. J. Browne*, Paris C. R. 154 (1912), p. 1289—1291, 1402—1404; Thèse (Paris 1913), 146 S. = Ann. Fac. Sc. Toulouse (3) 4 (1912), p. 63—198.

286) *T. Lalesco*, Thèse[17]), 1. P., Nr. 14.

287) *T. Lalesco*, Paris C. R. 152 (1911), p. 579—580; Darb. Bull. (2) 35 (1911), p. 205—212; *M. Picone*, Palermo Rend. 31 (1911), p. 133—169; 32 (1911), p. 188—190; Batt. Giorn. 49 (1911), p. 173—180; *G. Andreoli*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 22_1 (1913), p. 776—781; 23_2 (1914), p. 196—201; Palermo Rend. 37 (1914), p. 76—112; Battagl. Giorn. 53[360]) (auch Gleichungen, in denen nebeneinander Integrale mit konstanten und variablen Grenzen auftreten).

singulären Kern $(s-t)^{-n}$ $(n<1)$, ist samt ihren unmittelbaren Verallgemeinerungen in Encykl. II A 11, Nr. **30**, *S. Pincherle*, behandelt.[288]) Mit Hilfe der Abelschen Umkehrungsformeln lassen sich Integralgleichungen (1) mit Kernen $(s-t)^{-n}G(s,t)$, wo G endlich und stetig ist, leicht auf solche mit endlichem Kern zurückführen.[289])

In seiner ersten Arbeit von 1823[21]) hat *N. H. Abel* ferner einen Gleichungstyp erwähnt, der auf eine Volterrasche Integralgleichung 1. Art mit dem singulären Kern $\frac{1}{t}N\left(\frac{t}{s}\right)$ und den Grenzen as, bs hinauskommt, ohne jedoch eine Lösung anzugeben; er ist ausführlich von *P. J. Browne*[290]) durch Zurückführung auf eine Integralgleichung der Form (8) sowie in speziellen Fällen von *E. Holmgren*[291]) durch Potenzentwicklungen, die formal an Abelsche Gedankengänge anschließen, behandelt worden.

Die, meist in Rücksicht auf bestimmte Anwendungen, explizit gelösten Volterraschen Integralgleichungen haben durchweg Kerne, die Funktionen der Differenz $s-t$ allein sind[292]) (vgl. auch Nr. **14**, **26** a, 3). Hervorgehoben sei hier nur die Behandlung der Integral-

---

288) Der dort angegebenen Literatur ist noch hinzuzufügen: *C. Cailler*, Darb. Bull. (2) 23 (1899), p. 26—48; *E. Goursat*, Acta math. 27 (1903), p. 129—134; *J. G. Rutgers*, Amsterd. Ak. Versl. 22 (1913), p. 265—272; 24 (1915), p. 557—568; *A. Kienast*, Zürich Naturf. Gesellsch. 62 (1917), p. 59—66.

289) *V. Volterra*[5]), 2. Note; Ann. di mat. 25[19]), Art. I; *É. Picard*[268]); *T. Lalesco*, Thèse[17]), 1. P., Nr. 9. — *V. Volterra*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 11[342]), Chap. VI behandelt analog Kerne, die für $s=t$ logarithmisch unendlich werden.

290) *P. J. Browne*, Thèse[285]) sowie Paris C. R. 155 (1912), p. 129—132, 1136—1140; 158 (1914), p. 1562—1565.

291) *E. Holmgren*, Ark. for Mat. 16 (1922), Nr. 15, 20 S.

292) *N. Hirakawa*, Tôhoku Math. J. 8 (1915), p. 38—41; *T. Hayashi*, ibid. 10 (1916), p. 56—59; *J. Usai*, Batt. Giorn. 56 (1918), p. 209—215; Palermo Rend. 45 (1921), p. 271—283; *J. Kaucky*, Univ. Masaryk public. Nr. 17 (1922), 16 S. [Kerne $(s-t)^n$]. — *St. Mohorovičić*, Jugosl. Acad. Bull., Math.-phys. Kl. 6/7 (1916), p. 1—6, 180; Rada jugosl. Acad. 213 (1916), p. 1; *H. Bateman*, Mess. of Math. 49 (1920), p. 134—137; *T. Hayashi*, Tôhoku Math. J. 19 (1921), p. 126—135 (Exponentialfunktion von $s-t$). — *W. Kapteyn*, Amsterd. Akad. Versl. 23 (1914), p. 232—245; *O. Tedone*, Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 22_1 (1913), p. 757—761; 23_1 (1914), p. 120—126, 473—480; 24_1 (1915), p. 544—554 (Besselsche Funktionen von $s-t$). — *O. Tedone*, ibid., 29_1 (1920), p. 333—344; *F. Sbrana*, ibid., 30_2 (1921), p. 492—494 (Hypergeometrische Funktionen von $s-t$). — *E. T. Whittaker*, Lond. Roy. Soc. Proc. (A) 94 (1918), p. 367—383; *F. Sbrana*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 31_1 (1922), p. 454—456; *V. Fock*, Math. Ztschr. 21 (1924), p. 161—173, vgl. dazu *G. Doetsch*, ibid. 24 (1926), p. 785—788 und [345]) (Beliebige Funktionen von $s-t$, bei Whittaker im Hinblick auf numerische Lösung).

gleichungen 2. Art mit den Grenzen $0, s$ und $s - 1, s$ und dem beliebigen Kern $K(s-t)$ durch *G. Herglotz*[293]).

e) Unter den Gleichungssystemen mit unendlichvielen Unbekannten hat *J. Horn*[294]) einen Typus „Volterrascher Summengleichungen" herausgehoben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(s, s+n)\,\varphi(n) = f(s),$$

die genau den Volterraschen Integralgleichungen (1) entsprechen; er hat für sie in genauer Analogie zu seinen in b) erwähnten Arbeiten unter der Annahme, daß $N(s,t)$, $f(s)$ im Unendlichen reguläre Funktionen von s, t sind, das asymptotische Verhalten der Lösung $\varphi(t)$ für große t untersucht.

24. Lineare Funktionaloperationen. Aus der allgemeinen Theorie der Funktionaloperationen[295]) sei hier dasjenige zusammengestellt, was nach Fragestellung und Methode mit der Auflösung der linearen Integralgleichungen und der Systeme von unendlichvielen linearen Gleichungen zusammenhängt.

a) Die Algebra der Funktionaloperationen.

Das Wort „Funktionaloperation" wird in etwas schwankendem Umfange gebraucht. Allgemein zu reden, bezeichnet es irgendeine Operation $\mathfrak{F}$, die nicht auf Zahlen x, sondern auf Funktionen $\varphi(s)$ angewendet wird, wie z. B. das Differenzieren, das Bilden eines bestimmten Integrals in gegebenen Grenzen, das Einsetzen einer Funktion in die linke Seite einer Differentialgleichung oder Integralgleichung u. a. m. Vielfach aber wird es vorzugsweise nur in dem engeren Sinne verwendet, daß das Resultat der Operation eine Zahl ist (wie beim bestimmten Integral), und zum Unterschiede davon werden dann solche Funktionaloperationen, deren Resultat selbst wieder eine Funktion ist, wohl auch als Funktional*transformationen* bezeichnet. Eine *lineare Funktionaloperation* („distributive Operation") insbesondere ist

293) *G. Herglotz*, Math. Ann. 65 (1908), p. 87—106 im Anschluß an die von *P. Hertz*, ibid., p. 1—86 behandelten speziellen Integralgleichungen der Elektronentheorie. Vgl. auch *F. Schürer*[228]), p. 227 ff.

294) *J. Horn*, J. f. Math. 140 (1911), p. 159—174; Arch. Math. Phys. (3) 26 1918), p. 132—145. Vgl. auch *H. v. Koch*, Arkiv 15[217]) und *O. Perron*, Math Ztschr. 8, Math. Ann. 84[217]).

295) Vgl. die Gesamtdarstellung dieses Kalküls Encykl. II A 11, *S. Pincherle* (abgeschlossen 1905; vom Autor erweiterte und bis 1912 fortgeführte Bearbeitung in Encycl. franç. II 26). Vgl. ferner zu a): *S. Pincherle* und *U. Amaldi*, Le operazioni funzionali distributive, Bologna 1901; zu b): *P. Lévy*, Leçons d'analyse, fonctionelle, Paris 1922 (Coll. Borel), 442 S.; Analyse fonctionelle, Paris (Gauthier-Villars) 1925, mém. des sciences math., fasc. V, 56 S.

eine solche, für die gilt:

$$\mathfrak{F}(\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) = \mathfrak{F}(\varphi_1(s)) + \mathfrak{F}(\varphi_2(s)),$$
$$\mathfrak{F}(c\,\varphi(s)) = c\,\mathfrak{F}(\varphi(s)).$$

Betrachtet man gleichzeitig zwei Funktionaloperationen, und zwar zwei solche, die die Eigenschaft haben, jede Funktion einer gegebenen Klasse von Funktionen in eine Funktion derselben Klasse überzuführen, so ergibt sich der Begriff des symbolischen Produkts der beiden Operationen $\mathfrak{F}\mathfrak{G}(\varphi)$ als $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}(\varphi))$, also als der Erfolg der Anwendung erst von $\mathfrak{G}$ auf φ, dann von $\mathfrak{F}$ auf das Resultat $\mathfrak{G}(\varphi)$, insbesondere auch der der symbolischen Potenz $\mathfrak{F}^n$; die Rolle der 1 in diesem Kalkül übernimmt die identische Transformation $\mathfrak{E}(\varphi) = \varphi$. Als *lineare Funktionalgleichung* bezeichnet man die Aufgabe, zu einer gegebenen linearen Funktional*transformation* $\mathfrak{F}$ eine Funktion φ zu finden, für die $\mathfrak{F}(\varphi) = 0$ ist.

Die Idee der sukzessiven Approximation oder — wie ihre Anwendung auf Integralgleichungen und unendlichviele Veränderliche hier durchweg bezeichnet wurde (vgl. Nr. **3**, **11**, (2), **16** d, 3) — die „Entwicklung nach Iterierten" liefert ein Beispiel für den Nutzen einer solchen allgemeinen formalen Begriffsbildung. Dieser analytische Kunstgriff erweist sich nämlich als die Anwendung der elementaren Idee der geometrischen Reihe statt auf Zahlen auf Funktionaloperationen der eben betrachteten Art. Setzt man — indem man dabei von allen Konvergenzüberlegungen absieht — nach dem Muster

$$\begin{array}{r} x = 1 + a + a^2 + \cdots \\ ax = a + a^2 + a^3 + \cdots \\ \hline x - ax = 1 \end{array}$$

die symbolische geometrische Reihe an:

$$\varphi = \mathfrak{E}(f) + \mathfrak{F}(f) + \mathfrak{F}^2(f) + \cdots, \tag{1}$$

so wird entsprechend

$$\mathfrak{F}(\varphi) = \mathfrak{F}(f) + \mathfrak{F}^2(f) + \mathfrak{F}^3(f) + \cdots, \tag{2}$$

also

$$\varphi - \mathfrak{F}(\varphi) = \mathfrak{E}(f) = f, \tag{3}$$

d. h. die Funktionalgleichung (3) wird durch die in (1) definierte Funktion φ gelöst (vgl. Nr. **3**[16])).[296])

Dieser in der Hauptsache von *S. Pincherle* ausgebildete Operations-

296) In ähnlicher Weise erscheint übrigens der Kunstgriff des Abspaltungsverfahrens Nr. **10** a, 4, wenn man ihn in die Sprache dieses Operationskalküls überträgt, als durchaus naturgemäß; vgl. Nr. **24** b Ende, *F. Riesz*[304]).

kalkül[297]) spielt in der Analysis des Funktionenraumes die gleiche Rolle, wie die Vektoranalysis für den dreidimensionalen Raum und wie der Matrizenkalkül für die Algebra des Raumes von n Dimensionen. Seine Nützlichkeit tritt übrigens in der *Eigenwerttheorie* noch stärker hervor (vgl. Nr. **45** a und Nr. **39** a[491])). Im Rahmen der *Auflösungstheorie* ist noch die Einführung der Lieschen Idee der Transformationsgruppe und ihrer infinitesimalen Transformation in die Geometrie des Funktionenraumes zu erwähnen[298]).

b) Der Standpunkt der Mengenlehre.

Die zentrale Stellung der Integraloperationen innerhalb aller linearen Funktionaloperationen hat zuerst *J. Hadamard*[299]) dargetan, indem er bewies: Sei $\mathfrak{F}(\varphi(s))$ eine beliebige lineare Funktionaloperation, die jeder im Intervall $a \leqq s \leqq b$ stetigen Funktion $\varphi(s)$ eine bestimmte Zahl zuordnet, und sei $\mathfrak{F}$ eine *stetige* Operation [d. h. $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{F}(\varphi_n) = \mathfrak{F}(\varphi)$, wenn die $\varphi_n(s)$ im Intervall $a \leqq s \leqq b$ gleichmäßig gegen $\varphi(s)$ konvergieren], so kann man eine Folge stetiger Funktionen $k_n(s)$ so be-

297) In Ergänzung der unter [295]) aufgeführten zusammenfassenden Darstellungen seien hier nur diejenigen Arbeiten zusammengestellt, in denen *S. Pincherle* nach der Entstehung der Integralgleichungstheorie deren Beziehungen zu seinem Kalkül erörtert hat: a) Rom Acc. Linc. Rend. (5) 14_2 (1905), p. 366—374; b) Bol. Mem. (6) 3 (1906), p. 143—171; c) Rom Acc. Linc. Rend. (5) 18_2 (1909), p. 85—86; d) Bol. Mem. (6) 8 (1911), p. 55—90 (117—152 der anderen Paginierung); e) Rom Acc. Linc. Rend. (5) 20_1 (1911), p. 487—493; f) Batt. Giorn. 50 [(3) 3] (1912), p. 1—16; g) Bol. Mem. (6) 9 (1912), p. 61—70. Vgl. auch *H. B. A. Bockwinkel,* Amsterd. Akad. Versl. 25 (1916), p. 363—374, 646—660, 805—821, 905—917, 1017—1032, 1351—1365, 1426—1444; 27 (1919), p. 1232—1235.

298) *G. Kowalewski,* Paris C. R. 153 (1911), p. 931—933 (die aus den Volterraschen Integralgleichungen entspringende Transformationsgruppe), ebenda p. 1452—1454 (projektive Gruppe im Funktionenraum), Wien. Ber. 120 (1911) IIa, p. 77—109, 1435—1472 (die aus den Fredholmschen Integralgleichungen entspringende Gruppe, insbesondere die orthogonalen Transformationen in ihr und deren Cayleysche Parameterdarstellung; Liesche Klammerausdrücke), ebenda 121 (1912) IIa, p. 941—947 (Verwendung der Volterragruppe für lineare homogene Differentialgleichungen). Ferner *E. Vessiot,* Paris C. R. 154 (1912), p. 571—573 und [347]); *L. L. Dines,* Amer. Math. Soc. Trans. 20 (1919), p. 45—65 und anschließend daran *T. H. Hildebrandt,* Amer. Math. Soc. Bull. 26 (1920), p. 400—405 (die projektive Gruppe), endlich *J. A. Barnett,* Amer. Nat. Ac. Proc. 6 (1920), p. 200—204 und *A. D. Michal,* Amer. Math. Soc. Bull. 30 (1924), p. 338—344. — Wegen der Einordnung dieser Untersuchungen in den Komplex der Integrodifferentialgleichungen vgl. Nr. **24** d, 2[319]) und **27** a[362]).

299) *J. Hadamard,* Paris C. R. 136 (1903), p. 351—354; vgl. hierfür und für das folgende Encykl. II A 11, *Pincherle,* Nr. **13**, und Encycl. franç. II 26, Nr. **19**. Anderer Beweis bei *M. Fréchet,* Amer. Math. Soc. Trans. 5 (1904), p. 493—499.

stimmen, daß für jedes stetige $\varphi(s)$

$$\mathfrak{F}(\varphi(s)) = \lim_{n=\infty} \int_a^b k_n(s)\varphi(s)\,ds$$

gilt. Nachdem Hadamard auf diese Weise damit begonnen hatte, den rein formalen Operationskalkül in einem konkreten Falle von einigermaßen allgemeiner Natur zu realisieren, haben *M. Fréchet* u. a. durch Heranführung der Mittel der modernen Mengenlehre den Inhalt dieses Satzes in den drei in Betracht kommenden Richtungen erweitert[300]):

1. wird der Bereich der stetigen Funktionen, auf die die Operation $\mathfrak{F}$ anzuwenden ist, durch einen anderen Funktionenraum ersetzt;
2. wird der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz der bei der Definition der Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ auftretenden Funktionenfolgen durch einen anderen Konvergenzbegriff ersetzt, indem an Stelle des bei der Definition der gleichmäßigen Konvergenz auftretenden $\underset{a \leqq s \leqq b}{\text{Max}} |\varphi_n(s) - \varphi(s)|$ irgendein anderer „Entfernungsbegriff" (écart) im Funktionenraum gesetzt wird (vgl. Encykl. II C 9a, Nr. **26**a, *Zoretti-Rosenthal*);
3. wird der Riemannsche Integralbegriff durch einen anderen (Lebesgueschen, Stieltjesschen usw., vgl. Encykl. II C 9b, Nr. **30**, **35**d) ersetzt.

Insbesondere ist es *F. Riesz*[301]) gelungen, durch Verwendung dieser

300) *M. Fréchet*, Amer. Math. Soc. Trans. 6 (1905), p. 134—140; 8 (1907), p. 433—446 (Raum der im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen; statt gleichmäßiger Konvergenz tritt Konvergenz bis auf eine Nullmenge). *F. Riesz*, Paris C. R. 144 (1907), p. 1409—1411 und *M. Fréchet*, ebenda p. 1414—1416 (summierbare Funktionen, für die $\int_a^b \varphi^2 ds$ beschränkt, Entfernungsbegriff $\int_a^b (\varphi_1(s) - \varphi_2(s))^2 ds$). *M. Fréchet*, Paris C. R. 148 (1909), p. 279—281 und Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 193—216 (Ausdehnung auf mehrfache Integrale). *H. Steinhaus*, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 186—221 (summierbare Funktionen, Entfernungsbegriff $\int_a^b |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\,ds$). Die mit dem Hadamardschen Satz eng zusammenhängende und seit Fréchet gelegentlich aufgeworfene Frage, wie die $k_n(s)$ beschaffen sein müssen, damit $\int k_n(s)\varphi(s)ds$ für jedes φ eines gegebenen Funktionenraumes konvergiert oder beschränkt ist, behandelt systematisch für zahlreiche Funktionenräume *H. Hahn*[223]); vgl. auch *E. W. Chittenden*, Palermo Rend. 45 (1921), p. 265—270 und 47 (1923), p. 336; *T. H. Hildebrandt*, Amer. Math. Soc. Bull. 28 (1922), p. 53—58; *S. Banach*, Fundam. math. 3 (1922), p. 133—181. — Zu dem gesamten Gegenstande vgl. übrigens *A. Schoenflies*, Literatur B 1.

301) *F. Riesz*, Paris C. R. 149 (1909), p. 974—977 und Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 33—62. Eine ähnliche Formulierung für summierbare Funktionen vor-

dritten Erweiterungsmöglichkeit das Theorem selbst folgendermaßen zu vereinfachen: es existiert eine Funktion von beschränkter Schwankung $\varkappa(s)$, so daß

$$\mathfrak{F}(\varphi(s)) = \int_a^b \varphi(s)\, d\varkappa(s);$$

dabei ist das Integral *im Stieltjesschen Sinne* (vgl. Encykl. II C 9 b, Nr. 35 d, *Montel-Rosenthal*) verstanden.

Die Lösung des analogen Problems für lineare Funktional*transformationen*, d. h. deren Darstellung durch ein in irgendeinem Sinne genommenes Integral $\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$, würde jede lineare Funktionalgleichung auf eine lineare, evtl. eigentlich singuläre Integralgleichung zurückzuführen gestatten. Man hat diesen schwierigen Weg nicht beschritten, sondern hat statt dessen direkt für gewisse Funktionenräume die allgemeine lineare Funktionalgleichung nach dem methodischen Muster der Integralgleichungstheorie behandelt.[302]) Insbesondere hat *F. Riesz*[303]) die Lösung von linearen Funktionalgleichungen und die Invertierung von linearen Funktionaltransformationen in Räumen von Funktionen, für die $\int_a^b |\varphi(s)|^p ds$ im Lebesgueschen Sinne existiert, nach den Methoden gewonnen, die er späterhin auf die analogen Probleme in der

---

her bei *M. Fréchet,* Amer. Math. Soc. Trans. 8 [300]). Andere Beweise von *E. Helly* [266]), § 8 und *F. Riesz,* Ann. Éc. Norm. (3) 31 (1914), p. 9—14. Umsetzung in Lebesguesche Integrale bei *H. Lebesgue*, Paris C. R. 150 (1910), p. 86—88; eine andere Umsetzung bei *M. Fréchet,* Paris C. R. 150 (1910), p. 1231—1233; C. R. du congrès des soc. savantes en 1913, sciences (1914), p. 45—54; Amer. Math. Soc. Trans. 15 (1914), p. 135—161, insbes. p. 152; *Ch. A. Fischer*, Amer. Nat. Ac. Proc. 8 (1922), p. 26—29. Übertragung auf bilineare Funktionaloperationen mit Stieltjesschen Doppelintegralen bei *M. Fréchet,* Amer. Math. Soc. Trans. 16 (1915), p. 215—234.

302) Für den Raum der nebst ihrem Quadrat im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen erlaubt der *Fischer-Riesz*sche Satz (Nr. **15** d) jede lineare Funktionaloperation im Raume der unendlichvielen Veränderlichen von konvergenter Quadratsumme zu deuten. Bei sinngemäßer Definition der Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ wird dann das Hadamardsche Theorem zu der leicht beweisbaren Tatsache, daß jede lineare homogene Funktion als Linearform $\sum a_n x_n$ darstellbar ist (vgl. *M. Fréchet* [194])). Analog führt die lineare Funktional*gleichung* auf ein unendliches lineares Gleichungssystem.

303) *F. Riesz* [264]), §§ 12, 13. *J. Radon,* Wien. Ber. 122 (1913) IIa, p. 1295—1438 hat diese Betrachtungen auf Funktionaltransformationen von Funktionenklassen übertragen, deren Elemente gewisse Funktionen von Punktmengen (additive Mengenfunktionen) sind. Ähnliche Übertragungen bei *A. I. Pell,* Amer. Math. Soc. Trans. 20 (1919), p. 343—355.

Theorie der unendlichvielen Veränderlichen angewendet hat (vgl. Nr. **20**c). Ferner hat er[304]) für den Raum der stetigen Funktionen unter Verwendung von $\text{Max}\,|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|$ als Entfernungsbegriff diejenigen Funktionaltransformationen behandelt, die den *vollstetigen* Gleichungssystemen analog sind, und hat für sie durch eine dem Abspaltungsverfahren (Nr. **10**a) analoge Methode eine volle Auflösungstheorie gegeben.

c) Der formal-abstrakte Standpunkt (general analysis). *E. H. Moore*[305]) und seine Schüler haben sich das Ziel gesetzt, dem allgemeinen Analogiegedanken, wie er in Nr. **1**c der Einleitung dieses Artikels geschildert wurde, auch den äußeren, formalen Ausdruck zu geben. „Formal" ist hier allerdings nicht in dem Sinne verstanden, daß es sich lediglich um die Einführung einer zusammenfassenden Nomenklatur handle. Die Aufgabe, die sich Moore stellt, ist die, eine Theorie zu gewinnen, die nicht von stetigen Funktionen $x(s)$ in einem Intervall $a \leqq s \leqq b$ handelt, wie die Integralgleichungslehre, nicht von Stellen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eines n-dimensionalen Raumes, wie die Algebra der linearen Gleichungssysteme, und nicht von Stellen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ von konvergenter Quadratsumme, wie Hilberts Theorie der unendlichvielen Veränderlichen, sondern von Belegungen $x(s)$ der Elemente s einer ganz beliebigen abstrakten Menge $\mathfrak{P}$ mit reellen (oder auch komplexen) Zahlen; Moores Ziel ist also eine Theorie, die über die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ dieser Belegungen $x(s)$ solche Aussagen macht, daß darin die Sätze der Integralgleichungstheorie (für den Fall, daß $\mathfrak{P}$ das Intervall $a \leqq s \leqq b$ ist) ebenso als Spezialfälle enthalten sind, wie die Auflösungssätze über lineare Gleichungen mit n Unbekannten (falls $\mathfrak{P}$ aus n Dingen besteht) und die Sätze über unendliche lineare Gleichungssysteme (wenn $\mathfrak{P}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen bedeutet). Das ist, was Moore *„unifizieren"* nennt, und *„general analysis"* ist die allgemeine Theorie, die sich ihm dabei ergibt.

---

304) *F. Riesz,* Acta math. 41 (1916), p. 71—98. Hierzu entsprechende Übertragungen von *J. Radon,* Wien. Anz. 56 (1919), p. 189 und Wien. Ber. 128 (1919) IIa, p. 1083—1121. — Vgl. dazu auch *Ch. A. Fischer,* Amer. Math. Soc. Bull. 27 (1920), p. 10—17.

305) *E. H. Moore:* a) Introduction to a form of general analysis, New Haven Colloquium 1910, p. 1—150, hervorgegangen aus Vorlesungen im September 1906; b) Amer. Math. Soc. Bull. 12 (1906), p. 280, 283—284; c) Rom 4. intern. Math. Kongr. 2 (1909), p. 98—114; d) Amer. Math. Soc. Bull. 18 (1912), p. 334—362; e) Cambr. 5. intern. Math. Kongr. 1 (1913), p. 230—255. Wegen der abstrakten, reichlich Symbole und z. T. sogar Begriffsschrift verwendenden Schreibweise Moores ist die ausführliche Einführung von *O. Bolza,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 248—303 besonders hervorzuheben.

Es ist das Charakteristikum gerade der Untersuchungen von *E. Schmidt* und ist als solches oben (Nr. **7**, Schlußbemerkung, **16** d, **18** b, 4) hervorgehoben worden, daß er sowohl für die Eigenwerttheorie der Integralgleichungen[41]) als auch für die Auflösungstheorie[42]) solche Methoden gegeben hat, die sich unmittelbar auf unendlichviele Veränderliche übertragen lassen; insbesondere in der Eigenwerttheorie sind seine Methoden so beschaffen, daß sie auch für das Hauptachsentheorem der Formen von n Veränderlichen in derselben Weise funktionieren und hier eine sehr einfache Lösung dieser algebraischen Aufgabe darstellen, und Schmidt hat auch gelegentlich[306]) Axiome zusammengestellt, die für den Aufbau seiner Eigenwerttheorie ausreichen. Seine Auflösungstheorie ist nicht bis zu solcher axiomatischer Formulierung durchgeführt, da sie sowohl für Integralgleichungen als auch für unendlichviele Veränderliche das Problem auf die Lösung von n Gleichungen mit n Unbekannten zurückführt, also diese elementare algebraische Aufgabe bereits als gelöst voraussetzt, ohne sie erneut mitzulösen.

Daß eine solche axiomatische Formulierung oder Unifizierung noch mancherlei Aufgaben in sich birgt, wird vielleicht am deutlichsten, wenn man einen der wichtigsten Punkte dieses Bereichs ins Auge faßt. Sowohl in der Fredholmschen Theorie (Nr. **9**) als auch beim Beweise der Konvergenz der Entwicklung nach Iterierten für Volterrasche Kerne (Nr. **23** a) und für kleine Kerne (Nr. **10** a, 2[63])) wird der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ausgiebig verwendet. Die parallellaufenden Schlüsse im Hilbertschen Bereich der Veränderlichen von konvergenter Quadratsumme können sich nicht des genau entsprechenden Begriffs bedienen. Das Beispiel der Folge von Stellen[307])

$$x^{(1)} = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$$
$$x^{(2)} = \left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0,\ \ldots\right)$$
$$x^{(3)} = \left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 0,\ \ldots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

die offenbar alle dem Hilbertschen Raum angehören und *gleichmäßig* gegen die Stelle

$$x = \left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{4}},\ \cdots\right)$$

konvergieren, die *nicht* dem Hilbertschen Raum angehört, zeigt, daß ein genaues Analogisieren des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz

306) Wiedergegeben bei *A. Kneser*[98]), p. 191 ff.; vgl. Nr. **13** b[99]).

307) Vgl. *E. H. Moore*[305]) a), p. 38.

auf den Hilbertschen Raum nicht in Betracht kommt. Und ebensowenig paßt der Begriff der „stark konvergenten Folge", dessen sich *D. Hilbert*[168]) und *E. Schmidt*[196]) bedienen, auf die Verhältnisse der stetigen Funktionen.

Das Vorgehen von *Moore* wird nun an diesem Falle besonders deutlich. Er ersetzt den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz durch den der „relativ-gleichmäßigen Konvergenz in bezug auf den Bereich $\mathfrak{M}$": Eine Folge von Stellen $x^{(1)}(s)$, $x^{(2)}(s)$, ... von $\mathfrak{M}$ konvergiert relativ-gleichmäßig bezüglich $\mathfrak{M}$ gegen die Stelle $x(s)$, wenn man eine Stelle $\varrho(s)$ in $\mathfrak{M}$ finden kann und zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n(\varepsilon)$, so daß für alle $\nu \geqq n(\varepsilon)$ und für alle Elemente s von $\mathfrak{P}$ die Ungleichung $|x^{(\nu)}(s) - x(s)| \leqq \varepsilon\varrho(s)$ gilt. Ist $\mathfrak{M}$ der Bereich der stetigen Funktionen, so genügt die Verwendung *konstanter* $\varrho(s)$, um einzusehen, daß jede im gewöhnlichen Sinne gleichmäßig konvergente Folge auch relativ-gleichmäßig bezüglich $\mathfrak{M}$ konvergiert, und wegen der Existenz eines Maximums bei stetigen Funktionen ist offenbar auch das Umgekehrte richtig; hier kommen also beide Begriffe überein, und da die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen selbst eine stetige Funktion ist, gehört also in *diesem* Falle die Grenzfunktion $x(s)$ stets selbst dem Bereich $\mathfrak{M}$ der stetigen Funktionen an. Für den Hilbertschen Raum gilt nun ebenfalls, daß die Grenzstelle einer in bezug auf ihn relativ-gleichmäßig konvergierenden Folge von Stellen von konvergenter Quadratsumme selbst stets wieder eine Stelle von konvergenter Quadratsumme ist[308]). Damit ist also ein Allgemeinbegriff gefunden, der die beiden Tatbestände in einen einzigen zusammenfaßt, „unifiziert", nämlich der Begriff des Bereichs $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

C (closure property): Die Grenzstelle einer bezüglich $\mathfrak{M}$ relativ-gleichmäßig konvergierenden Folge von Stellen aus $\mathfrak{M}$ gehört stets wieder $\mathfrak{M}$ an.

Indem nun *E. H. Moore* nach diesem Rezept die Schlüsse von *J. Fredholm*[29]) und *E. Schmidt*[41]) genau und systematisch analysiert, gelangt er zu folgendem Ergebnis[305d]). Er stellt eine Liste weiterer

---

308) Man beweist dies entweder leicht direkt oder folgert es aus der ebenfalls unmittelbar ersichtlichen Tatsache, daß jede relativ-gleichmäßig konvergierende Folge stark konvergiert, mit Hilfe des Satzes von *E. Schmidt*[196]). Übrigens braucht nicht umgekehrt jede stark konvergente Folge relativ-gleichmäßig zu konvergieren, wie man an der Hand des Beispiels

$$x_\alpha^{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{\nu}\log\nu} \quad \text{für} \quad \alpha \leqq \nu, \qquad x_\alpha^{(\nu)} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha > \nu$$

feststellen kann.

Eigenschaften des Bereichs $\mathfrak{M}$ auf, die der Eigenschaft C an die Seite treten:

L (Linearität). Mit $x(s)$ und $y(s)$ gehört auch $x(s)+y(s)$ und $cx(s)$ für jede Konstante c dem Bereich an.

D (erste Dominanteneigenschaft). Zu jeder Folge $x^{(1)}(s), x^{(2)}(s), \ldots$ von Stellen von $\mathfrak{M}$ kann man eine Folge positiver Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ und eine Stelle $x(s)$ so hinzubestimmen, daß $|x^{(n)}(s)| \leqq \mu_n |x(s)|$ für jedes n und für jedes Element s von $\mathfrak{P}$ gilt.

D_0 (zweite Dominanteneigenschaft). Zu jeder Stelle $x(s)$ aus $\mathfrak{M}$ kann man eine reelle, nicht-negative Stelle $\mu(s)$ von $\mathfrak{M}$ finden, so daß $|x(s)| \leqq \mu(s)$ für alle Elemente s von $\mathfrak{P}$ gilt.

R (Realität). $\mathfrak{M}$ enthält mit $x(s)$ stets auch die dazu konjugiert-imaginäre Stelle $\overline{x(s)}$ in sich.

Er fügt dem eine weitere Liste von Eigenschaften der *Funktionaloperation* J hinzu, die im Falle der stetigen Funktionen die Rolle der bestimmten Integration, im Falle des Hilbertschen Raumes die Rolle der Summation übernehmen soll[309]:

L (Linearität). $J(ax(s)+by(s)) = aJ(x(s)) + bJ(y(s))$.

M (Modulareigenschaft). Es gibt neben J eine andere Funktionaloperation M, die jeder reellen, nirgends negativen Stelle $\mu(s)$ eine reelle, nicht negative Zahl $M(\mu(s))$ zuordnet und für die mit $|x(s)| \leqq \mu(s)$ stets auch $|J(x(s))| \leqq M(\mu(s))$ zutrifft.

P (Positivität). $J(x\bar{x})$ ist reell und nicht negativ für jede Stelle $x(s)$ des Bereichs, auf dem die Operation J definiert wird.

P_0 (eigentliche Positivität). Die Eigenschaft P ist in dem Sinne erfüllt, daß $J(x\bar{x}) = 0$ nur für $x = 0$ eintritt.

H (Hermite-Eigenschaft). $\overline{J(x)} = J(\bar{x})$ oder allgemeiner, wenn J auf Funktionen von zwei Veränderlichen definiert ist, $\overline{J(x(s)\cdot y(t))} = J(\overline{x(t)\cdot y(s)})$.

Mit Hilfe dieser beiden Listen von Axiomen gelingt nun *Moore* die Unifizierung der Fredholmschen Theorie in folgendem Sinne. Er setzt einen Stellenbereich $\mathfrak{M}$ voraus, der die Eigenschaften L, C, D, D_0

309) Die in [306]) und [99]) erwähnten Axiome unterscheiden sich von den hier aufgeführten — abgesehen davon, daß sie nicht für ein allgemeines $\mathfrak{P}$, sondern für „belastete Integralgleichungen", d. h. in Moores Sprache für ein aus einem stetigen Intervall und außerdem n Dingen bestehendes $\mathfrak{P}$ formuliert sind — nur in dem einen Punkte, daß die Vertauschbarkeit der Integrationsfolge noch außerdem postuliert wird, während Moore dies unterlassen kann, weil er hernach den Stellenbereich, auf den er die Operation J anwendet, so einschränkt, daß er für ihn die Vertauschbarkeit mehrfacher Anwendungen der Operation J beweisen kann.

besitzt, und bildet aus ihm einen Bereich $\mathfrak{K}$ von Stellen $x(s,t)$ (Funktionen von zwei Veränderlichen), indem er Aggregate $x^{(1)}(s)y^{(1)}(t) + \cdots + x^{(n)}(s)y^{(n)}(t)$ aus Stellen von $\mathfrak{M}$ bildet und alles, was sich aus diesen im Sinne relativ-gleichmäßiger Konvergenz in bezug auf $\mathfrak{M}$[309a]) ableiten läßt; sodann bildet er den Bereich $\mathfrak{N}$ von Stellen mit *einem* Argument, die sich aus den Stellen von $\mathfrak{K}$ durch Gleichsetzen der beiden Argumente s, t ergeben. Für diesen Bereich $\mathfrak{N}$ nun denkt er die Operation J definiert, und dem Bereich $\mathfrak{K}$ entnimmt er den Kern $K(s,t)$ der „generalisierten" Integralgleichung

$$(G) \qquad x(s) + J_t(K(s,t)\cdot x(t)) = y(s),$$

in der der Operator J auf das als Funktion von t dem Bereich $\mathfrak{N}$ angehörige Produkt $K(s,t)\,x(t)$ angewendet wird. Alsdann kann er die Fredholmschen Schlüsse und die von E. Schmidt alle nachahmen.[310])

309a) d. h. die Majoranten werden hier in der Form $\varrho(s)\cdot\sigma(t)$ angenommen, wo ϱ, σ dem Bereich $\mathfrak{M}$ angehören.

310) In dieser Form ist die Behauptung zuerst in [305]) d) ausgesprochen, und in [305]) e) sind die wichtigsten zu ihrer Durchführung nötigen Hilfssätze zusammengestellt; [305]) a) hatte die „Basis" der Betrachtung, d. h. die Bereiche $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{N}$ weiter angelegt, hatte dafür aber eine größere Zahl von Postulaten über sie einführen müssen. Die Darstellung in [305]) d) und [305]) e) vollzieht zugleich eine andere Verallgemeinerung: anstatt die für den Bereich $\mathfrak{N}$ erklärte Operation J auf $K(s,t)\,x(t)$ anzuwenden, das in Rücksicht auf das Argument t dem Bereich $\mathfrak{N}$ angehört, wendet sie eine für den Bereich $\mathfrak{K}$ definierte, wiederum mit den Eigenschaften L, M ausgestattete Operation J auf $K(s,t)\,x(u)$ an, das in bezug auf die beiden Argumente t, u dem Bereich $\mathfrak{K}$ (demselben also, wie der Kern K) angehört. Ein Beispiel einer solchen zweiargumentigen Operation J wäre die aus zwei sukzessiven einargumentigen Operationen J und einer Funktion $\omega(t,u)$ aufgebaute Operation $J_{tu}(K(s,t)\,\omega(t,u)\,x(u))$ (Doppelintegral, Doppelsumme). — Solche Erweiterungen der Integralgleichungstheorie, wie sie in Nr. **13** in einzelnen Richtungen erörtert wurden, insbesondere die Theorie der gemischten Integralgleichungen, sind in der general analysis in einheitlicher Weise geleistet.

Außer den aufgeführten sind noch folgende weitere Arbeiten von E. H. Moore und seinen Schülern zu nennen: *E. H. Moore*, Brit. Ass. Rep. 79 (1910), p. 387—388; Amer. Nat. Ac. Proc. 1 (1915), p. 628—632 (der generalisierte Grenzwertbegriff, mit Anwendung auf die Definition des Prozesses J, der „in der früheren Theorie undefiniert geblieben war"); Math. Ann. 86 (1922), p. 30—39 (Andeutungen über die Unifizierung der Hilbertschen Theorie der beschränkten quadratischen und Hermiteschen Formen, Nr. **43**); *E. H. Moore* und *H. L. Smith*, Amer. J. 44 (1922), p. 102—121 (insbesondere auf p. 113 f. die Analyse des Integralbegriffs); *M. E. Wells*, Amer. J. 39 (1917), p. 163—184 (Verallgemeinerungen der Schwarzschen Ungleichung); *T. H. Hildebrandt*, Ann. of Math. (2) 21 (1920), p. 323—330 (die Pseudoresolvente[51]) in der Redeweise der general analysis); Amer. Math. Soc. Bull. 29 (1923), p. 309—315 (beschränkte Formen, insbesondere der Konvergenzsatz[203])); *A. D. Pitcher*, Kansas Univ. Bull. 7 (1913), p. 1—67 und *E. W. Chittenden*, Amer. J. 44 (1922), p. 153—162 (die logische Abhängigkeit von acht grundlegenden Axiomen aus Moores Theorie).

Vergleicht man diese Theorie mit dem in Nr. **20**d aufgestellten zusammenfassenden Theorem, so bemerkt man *auf der einen Seite,* daß 1. Nr. **20**d sich von vornherein auf den Fall unendlichvieler Veränderlicher beschränkt oder — in Moores Redeweise — auf den Fall, daß $\mathfrak{P}$ die Menge der positiven, ganzen Zahlen ist, und daß man 2. aus den in Nr. **20**d zur Grundlage genommenen vier Postulaten unschwer folgern kann, daß der Bereich $\mathfrak{M}$ der diesen vier Postulaten genügenden Stellen $(x_1, x_2, \ldots)$ die Eigenschaften L, C, D, D_0, R hat; insoweit also verhält sich der Inhalt von Nr. **20**d spezieller als die general analysis. *Auf der anderen Seite* ist die Voraussetzung der Vollstetigkeit der Funktionaltransformation $\mathfrak{K}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q$ erheblich weiter, als die entsprechenden Annahmen bei Moore und in ganz anderer Art formuliert, insofern sie in einem einfachen Postulat über die Funktionaltransformation besteht, während Moore diese in Summationsoperation und Kern auflöst und über beides einzeln Postulate aufstellt. Für den Hilbertschen Fall laufen die Mooreschen Postulate auf die Konvergenz von $\sum_{p,q=1}^{\infty} |K_{pq}|^2$ hinaus, die weit enger ist als die Hilbertsche Vollstetigkeit (vgl. Nr. **16**a, p. 1402f.), für den Raum der Konvergenz von $\sum |x_p|$ auf die Bedingung $\sum_{p,q=1}^{\infty} |K_{pq}|$ konvergent, die weit enger ist als etwa die Dixonsche (vgl. Nr. **20**a).

Soweit die *materiellen* Unterschiede. *Prinzipiell* hebt sich die Betrachtungsweise, die in Nr. **20**d ihre präzise Formulierung gefunden hat, von der Mooreschen dadurch ab, daß sie nicht wie Moore an ein bestimmtes Lösungs*verfahren,* das Fredholmsche oder sonst eines, anknüpft und Postulate für seine Durchführbarkeit sucht, sondern daß sie die Lösungs*tatsachen* von den Lösungs*formeln* trennt und nun nach den Axiomen fragt, aus denen diese Lösungs*tatsachen* abgeleitet werden können. Als erstes Resultat ergibt sich auf diesem Wege — was bei Moore nie hervorgehoben wird — daß das Wirkungsfeld der Fredholmschen Formeln und ähnlich in der Eigenwerttheorie das Wirkungsfeld der Existenzschlüsse von E. Schmidt[41]) im Vergleich mit dem vollen Ausmaß der für vollstetige Formen gültigen Sätze ein begrenztes ist. Vom Standpunkt der Eigenwerttheorie wird der Sachverhalt in Nr. **45**b noch deutlicher gekennzeichnet werden können.

d) Besondere lineare Funktionalgleichungen.

Es soll hier endlich ein summarischer Überblick über diejenigen besonderen linearen Funktionalgleichungen gegeben werden, deren Auflösung in ausdrücklichem, mehr oder weniger engem Zusammenhang

mit der Theorie der Integralgleichungen und der unendlichvielen Veränderlichen behandelt worden ist.[311])

1. *H. v. Koch*[312]) hat bereits im Anschluß an seine ersten Untersuchungen über unendliche Determinanten ein System von unendlichvielen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit unendlichvielen unbekannten Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$, ...

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}(t)\, x_q(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

untersucht, wo die $a_{pq}(t)$ gegebene für $|t| \leqq \varrho$ reguläre analytische Funktionen sind, die daselbst durch Produkte $m_p n_q$ mit konvergentem $\sum_{p=1}^{\infty} m_p n_p$ majorisiert werden: $|a_{pq}(t)| \leqq m_p n_q$; durch Potenzentwicklung und Majorisierung zeigt er in genauer Analogie zu dem Existenzsatz bei endlichen Systemen die Existenz regulärer Lösungen $x_p(t)$, die für $t = 0$ vorgegebene Werte x_p^0 annehmen, für die $\sum_{p=1}^{\infty} |x_p^0|\, n_p$ konvergiert. Mit Hilfe seiner Determinantentheorie überträgt er ferner[313]) den Begriff des Fundamentalsystems und untersucht das Verhalten bei analytischer Fortsetzung um einen singulären Punkt. *W. L. Hart*[314]) hat das gleiche System unter der Annahme, daß die $a_{pq}(t)$ eine beschränkte Matrix (s. Nr. **18**a, 1) bilden, mit Hilfe der Theorie der beschränkten Gleichungssysteme behandelt. Die Existenzbeweise sind genau nach dem Vorbild endlicher Systeme unter verschiedenen Konvergenzbedingungen auf nichtlineare Systeme übertragen worden[315]) (vgl. Nr. **25**a).

2. Läßt man an Stelle der diskontinuierlichen Parameter p bzw. q die stetigen Veränderlichen s bzw. r treten, so entsteht aus (1) die

311) Die klassische Lehre von den Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, die begrifflich hierhin gehört, würde, insofern sie eine *Anwendung* der Integralgleichungstheorie ist, den Rahmen dieses Artikels überschreiten. (Vgl. die Vorbemerkung.)

312) *H. v. Koch*, Stockholm Öfvers. 56 (1899), p. 395—411. — Den gleichen Existenzsatz beweist *P. Flamant*, Darboux Bull. (2) 45 (1921), p. 81—87.

313) *H. v. Koch*, Acta math. 24 (1900), p. 89—122. — Im wesentlichen die gleichen Sätze bei *W. Sternberg*, Heidelberger Akad. Sitzungsber. 1920, Nr. 10, 21 S.; spezielle Fälle bei *W. G. Simon*, Amer. J. 42 (1920), p. 27—46, berichtigt von *O. Perron* in Fortschr. d. Math. 47 (1924), p. 376 f.

314) *W. L. Hart*, Amer. Math. Soc. Bull. 23 (1917), p. 268—270; Amer. J. 39 (1917), p. 407—424.

315) *H. v. Koch*[312]); *F. R. Moulton*, Nat. Ac. Proc. 1 (1915), p. 350—354; *W. L. Hart*[336]) und Amer. J. 43 (1921), p. 226—231. Verschärfungen der *Koch*schen Sätze gibt *A. Wintner*, Math. Ann. 95 (1926), p. 544—556 mit seiner in [216]) angewandten Methode.

lineare Integrodifferentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial t} = \int_0^1 k(s,r;t)\,\varphi(r,t)\,dr,$$

wo $k(s,r;t)$ gegeben, $\varphi(s,t)$ gesucht ist. Nachdem *V. Volterra*[316]) spezielle Fälle, namentlich den einem Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten entsprechenden Fall, daß k nicht von t abhängt, gelöst hatte, hat *L. Schlesinger*[317]) für analytisch von t abhängige k die analytische Theorie der endlichen linearen Differentialsysteme (Fundamentalsystem, Verhalten an singulären Punkten u. dgl.) durch den aus der Theorie der Integralgleichungen bekannten Grenzübergang (s. Nr. **1**) auf (2) übertragen; *E. Hilb*[318]) hat sodann diese Theorie direkt durch Anwendung der Integralgleichungslehre entwickelt. Auch dieses Problem (2) ist nach verschiedenen Richtungen verallgemeinert worden[319]). — Über die weitere Theorie der Integrodifferentialgleichungen vgl. Nr. 27.

3. Ein formal mit (1) verwandtes, aber sachlich zu etwas anderen Fragestellungen führendes Problem ist das der linearen Differentialgleichung unendlichhoher Ordnung, etwa in der Form:

$$(3) \qquad P_0(t)\,x(t) + P_1(t)\frac{dx}{dt} + P_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + \cdots = g(t),$$

wo die $P_n(t)$ und $g(t)$ gegeben sind; die charakteristische Frage ist die nach Lösungen $x(t)$, für die die Folge der $x^{(n)}(t)$ ein bestimmtes

316) *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 19_1 (1910), p. 107—114; 23_1 (1914), p. 393—399. Vgl. auch *M. Gramegna,* Torino Atti 45 (1910), p. 469—491 (bzw. math.-phys. Kl., p. 291—313); *J. A. Barnett,* Amer. Math. Soc. Bull. 26 (1919), p. 193—203. Weitere Verallgemeinerungen s. Nr. 28[375]).

317) *L. Schlesinger,* Paris C. R. 158 (1914), p. 1872—1875; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), p. 84—123. Vgl. auch *A. Saßmannshausen,* Diss. Gießen 1916, 52 S.; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916), p. 145—156.

318) *E. Hilb,* Math. Ann. 77 (1916), p. 514—535. Seine Behandlung kommt darauf hinaus, daß (2) nach t integriert und dann als eine gewöhnliche Integralgleichung 2. Art in zwei Dimensionen angesehen wird.

319) *L. Amoroso,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_2 (1912), p. 41—47, 141—146, 257—263, 400—404; Atti soc. ital. del science, 6. reun. 1912, p. 743—746 (ähnliche Integrodifferentialgleichungen 1. u. 2. Ordn.); *T. H. Hildebrandt,* Amer. Math. Soc. Trans. 18 (1917), p. 73—96 (Verallgemeinerung im Mooreschen Sinne, Nr. **24**c); *M. Tah Hu,* ibid. 19 (1918), p. 363—407 (verschiedene Randbedingungen im Reellen); *A. Vergerio,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 28_1 (1919), p. 274—276, 297—300 (analoge Gleichungen n^{ter} Ordnung); *J. A. Barnett,* Amer. J. 44 (1922), p. 172—190 (nichtlineare Gleichung, auch für Volterrasche Linienfunktionen (s. Nr. 28) statt der Integrale); ibid. 45 (1923), p. 42—53 (analoge Gleichungen mit partiellen funktionalen Ableitungen, vgl. Nr. 28[375])). — Hierhin gehören auch die in Nr. **24**a[298]) erwähnten Untersuchungen.

infinitäres Verhalten aufweist, insbesondere $\sqrt[n]{|x^{(n)}(t)|}$ unter einer bestimmten endlichen Grenze ϱ bleibt. Für den Fall konstanter Koeffizienten $P_n(t) = a_n$ finden sich konkrete Resultate in dieser Richtung bereits bei *C. Bourlet*[320]); dabei tritt der Zusammenhang mit den Nullstellen der bei ihm als ganz transzendent angenommenen Funktion $a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + \cdots$ auf, die durch Aufsuchen von Lösungen der homogenen Gleichung mit dem Ansatz $x(t) = e^{\varrho t}$ entsteht. *S. Pincherle*[321]) hat dieselbe Gleichung im Zusammenhang mit seiner Lehre von den linearen Funktionaloperationen und mit gewissen Integralgleichungen 1. Art betrachtet. Im Zusammenhang mit seiner Behandlung der Volterraschen Integralgleichungen gewinnt *T. Lalesco*[322]) eine Reihe von Aussagen über verschiedene Typen von Gleichungen (3), die durch unendlich oft wiederholte Differentiation (vgl. Nr. **23** b, p. 1461) aus einer Volterraschen Integralgleichung entstehen.

Das allgemeine Problem (3) hat *E. Hilb*[323]), zunächst für in t lineare Koeffizienten, in Angriff genommen, indem er aus (3) durch wiederholte Differentiation unendlichviele lineare Gleichungen für die Unbekannten $x(t), x'(t), x''(t), \ldots$ gewinnt, die der Bedingung Nr. **20** b genügen, und die Hilfsmittel der Theorie der beschränkten Gleichungssysteme (s. Nr. **18** b, 2) anwendet: das transponierte System ist dann das System der Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Potenzentwicklung des Integrals einer gewöhnlichen Differentialgleichung endlicher — hier erster — Ordnung, und daher werden die Lösungen von (3) mit Hilfe der bekannten Eigenschaften der Lösungen dieser Hilfsdifferentialgleichung beherrscht. Als charakteristisches Resultat sei angegeben: Ist $P_n(t) = a_n + b_n t$, sind die Reihen $\sum a_n z^n$ und $\sum b_n z^n$ für $|z| \leqq \varrho$ regulär, hat die zweite Reihe $m + 1$ Nullstellen, deren Be-

320) *C. Bourlet*, Ann. Éc. Norm. (3) 14 (1897), p. 133—190.

321) *S. Pincherle*, Palermo Rend. 18 (1904), p. 273—293; Soc. It. Mem. (3) 15 (1908), p. 3—43. Vgl. *J. F. Ritt*, Amer. Math. Soc. Bull. 22 (1916), p. 484; Amer. Math. Soc. Trans. 18 (1917), p. 27—49.

322) *T. Lalesco*[17]), 2ième partie; weitere mehr formale Beziehungen in Paris C. R. 147 (1908), p. 1042—1043, Bucarest Bul. 19 (1910), p. 319—330 und Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 27_1 (1918), p. 432—434.

323) *E. Hilb*[183]). Für konstante Koeffizienten hat bereits *F. Schürer*, Leipz. Ber. 70 (1918), p. 185—240 das entsprechende spezielle Resultat auf einem anderen, funktionentheoretischen Wege erhalten; bei ihm erscheinen die Gleichungen (3) mit konstanten Koeffizienten als Spezialfall allgemeiner Funktionalgleichungen, die aus ihnen durch Ersetzung des Differentiationsprozesses durch die Iterationen einer bestimmten Postulaten genügenden allgemeinen linearen Funktionaloperation entstehen. — Eine spezielle Gleichung (3) mit konstanten Koeffizienten hat *F. R. Berwald*, Ark. f. mat. 9 (1913), Nr. 14, 17 S. auf ein unendliches Gleichungssystem zurückgeführt, das er im Anschluß an *P. Appell*[147]) löst.

trag kleiner als ϱ ist, und genügt endlich die rechte Seite der Bedingung $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|g^{(n)}(t)|} \leqq \varrho$, so hat (3) abgesehen von einem leicht anzugebenden Ausnahmefall eine genau m willkürliche Konstante enthaltende in t ganze transzendente Lösung, für die $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|x^{(n)}(t)|} \leqq \varrho$ ist. Den Fall, daß die $P_n(t)$ Polynome beschränkten Grades sind, haben im Anschluß daran fast gleichzeitig *E. Hilb*[324]) und *O. Perron*[325]) durch Ausbildung und Modifikation dieser Methode und *H. v. Koch*[326]) auf funktionentheoretischem Wege erledigt. *E. Hilb*[327]) hat sein Verfahren, das in weitem Umfang von der speziellen Art der zu behandelnden linearen Funktionalgleichung unabhängig ist, weiterhin auf lineare Differenzengleichungen angewendet.

4. Bekanntlich lassen sich Differenzengleichungen und Differentialgleichungen, in denen die Werte der unbekannten Funktion an verschiedenen Stellen auftreten, mit Hilfe der Taylorschen Reihe formal auf Differentialgleichungen unendlichhoher Ordnung zurückführen. Hierhin gehören auch die funktionalen Differentialgleichungen vom Typus

$$(4) \quad \varphi^{(n)}(s) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(s - h_{n-1}) + \cdots + a_0\varphi(s - h_0) = g(s)$$

— wo $a_0, \ldots, a_{n-1}, h_0, \ldots, h_{n-1}$ gegebene Konstante sind —, für die *E. Schmidt*[328]) bereits vor den im letzten Abschnitt referierten Untersuchungen eine vollständige Theorie entwickelt hatte. Er betrachtet unter Annahme durchweg reeller h diese Gleichung für den Bereich aller reellen s und fragt nach sämtlichen Lösungen, die samt ihren ersten $n - 1$ Ableitungen für alle reellen s stetig und bei hinreichend großen s absolut unter einer passend gewählten Potenz $|s|^\alpha$ bleiben, falls $g(s)$ der gleichen Bedingung genügt. Durch den Ansatz $\varphi(s) = e^{i\varrho s}$ bildet er die ganze Transzendente $l(\varrho) = (i\varrho)^n + a_{n-1}(i\varrho)^{n-1}e^{-h_{n-1}i\varrho} + \cdots + a_0 e^{-h_0 i\varrho}$ und zeigt insbesondere, daß, falls $l(\varrho)$ keine reelle Nullstelle besitzt, (4) genau eine Lösung im angegebenen Sinne hat, daß aber, falls es m reelle Nullstellen besitzt, unendlichviele Lösungen existieren,

324) *E. Hilb*, Math. Ann. 84 (1921), p. 16—30, 43—52.

325) *O. Perron*, Math. Ann. 84 (1921), p. 31—42.

326) *H. v. Koch*, Ark. f. mat. 16 (1921), Nr. 6, 12 S.

327) *E. Hilb*, Math. Ann. 85 (1922), p. 89—98; Math. Ztschr. 14 (1922), p. 211—229; 15 (1922), p. 280—285; 19 (1924), p. 136—144. — Über die in diesem Rahmen nicht weiter zu erörternde Theorie der Differenzengleichungen s. Encykl. II C 7, *N. E. Nörlund* und den Bericht von *A. Walther*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1926), p. 118—131.

328) *E. Schmidt*, Math. Ann. 70 (1911), p. 499—524. *O. Polossuchin*, Diss. Zürich 1910, 52 S., hatte auf seine Anregung einige spezielle Typen verwandter funktionaler Differentialgleichungen durch Anwendung der Auflösungstheorie der Integralgleichungen behandelt.

die von m willkürlichen Konstanten linear und ganz abhängen; darüber hinaus kann die Art des Unendlichwerdens der Lösungen noch näher präzisiert und das Theorem auf etwas allgemeinere Gleichungstypen ausgedehnt werden. Methodisch geht Schmidt analog zur Behandlung gewöhnlicher Randwertaufgaben vor, indem er durch Integration der Funktion $e^{\varrho s} : l(\varrho)$ der komplexen Veränderlichen ϱ sich ein Analogon der Greenschen Funktion verschafft und passend bestimmte den Greenschen Formeln entsprechende Transformationen anwendet. An *Schmidt*s Arbeit schließen eine Reihe von Untersuchungen von *F. Schürer*[329]), *E. Hilb*[330]), *G. Hoheisel*[331]) an.

D. Nichtlineare Probleme.

25. Nichtlineare Integralgleichungen und nichtlineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten. Die Übertragung der Auflösungssätze über lineare Gleichungssysteme mit n Unbekannten auf lineare Integralgleichungen und auf unendliche lineare Gleichungssysteme hat den Versuch nahegelegt, auch den Sätzen der Algebra über die Lösungen *nichtlinearer* Gleichungssysteme mit n Unbekannten Aussagen über *nichtlineare* Integralgleichungen und *nichtlineare* unendliche Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten nachzubilden. Tatsächlich angegriffen und zu bestimmten Resultaten gefördert ist die Übertragung der Aussagen über „Lösbarkeit im Kleinen", d. h. über die Existenz solcher Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ der einen (oder auch mehrere) Parameter y enthaltenden n Gleichungen

$$F_p(x_1, \ldots, x_n; y) = 0 \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

die sich aus einer für einen speziellen Parameterwert $y = b$ bekannten Lösung $x_p = a_p$ für ein hinreichend nahe an b gelegenes y ergeben.[332]) Und zwar handelt es sich einmal um die Existenz einer

329) *F. Schürer,* Leipz. Ber. 64 (1912), p. 167—236; 65 (1913), p. 139—143, 239—246, 247—263; 66 (1914), p. 137—159; 67 (1915), p. 356—363 (Verschärfung der Schmidtschen Resultate in Spezialfällen mit anderen Methoden); ibid. 70 (1918)[323]) (allgemeinere Funktionalgleichungen analoger Art; Zurückführung auf Differentialgleichungen unendlichhoher Ordnung); Preisschrift Jablonowskische Ges. 46 (1919), 69 S. (ein Fall nichtkonstanter Koeffizienten und Integral-Differenzengleichungen).

330) *E. Hilb,* Math. Ann. 78 (1918), p. 137—170 (Allgemeinere Typen, bei denen die Schmidtsche Randbedingung unendlichviele Lösungen zuläßt und Festlegung der Lösung durch Werte in einem endlichen Intervall).

331) *G. Hoheisel,* Math. Ztschr. 14 (1922), p. 34—98 (nichtkonstante Koeffizienten).

332) Nur einzelne Beispiele spezieller, meist quadratischer Integralgleichungen sind gelegentlich nach besonderen Methoden ohne solche Einschrän-

eindeutig bestimmten solchen Lösung, falls die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial F_p}{\partial x_q}\right|$ für $x_p = a_p$, $y = b$ nicht verschwindet — andererseits um die *Puiseux*schen Sätze über die Verzweigung der Lösungen bei variierenden Parametern, falls jene Determinante verschwindet.

a) Einen Satz der ersten Art hat bereits *H. v. Koch*[333]) für das Gleichungssystem

$$(1) \qquad x_p = a_p t + f_p(t; x_1, x_2, \ldots) \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

aufgestellt, wo die f_p *„analytische Funktionen"* ihrer unendlichvielen Veränderlichen sind, die nur Glieder zweiter und höherer Dimension in ihnen enthalten. Unter einer analytischen Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$ wird dabei eine Potenzreihe des Typus

$$(1\text{a}) \quad f(x_1, x_2, \ldots) = c + \sum_{p=1}^{\infty} c_p x_p + \sum_{p,q=1}^{\infty} c_{pq} x_p x_q + \sum_{p,q,r=1}^{\infty} c_{pqr} x_p x_q x_r + \cdots$$

verstanden, die für alle den Ungleichungen $|x_p| < R_p$ genügenden Wertsysteme konvergiert, wenn man alle einzelnen Terme durch ihre absoluten Beträge ersetzt. *H. v. Koch* zeigt nun, daß, falls alle in der p^{ten} Gleichung (1) auftretenden Koeffizienten absolut unter einer endlichen Schranke m_p bleiben, die Gleichungen (1) für hinreichend kleine t eindeutig bestimmte Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ haben, die für $t = 0$ verschwinden. Diese Lösungen werden zunächst formal durch Potenzreihen nach t dargestellt und die Konvergenz durch einfache Majorisierung dargetan. Tritt an Stelle von (1) das allgemeine System mit weiteren linearen Gliedern in den x_p:

$$(2) \qquad \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq} x_q = a_p t + f_p(t; x_1, x_2, \ldots) \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

so beweist *v. Koch* mit Hilfe seiner Determinantentheorie für den Fall, daß die A_{pq} eine Normaldeterminante bilden und daß diese nicht verschwindet, das gleiche Resultat; im Falle verschwindender Determinante deutet er an, wie mit den gleichen Hilfsmitteln die Zurückführung auf endlichviele Gleichungen mit endlichvielen Unbekannten möglich ist.

---

kungen gelöst worden: *G. Fubini,* Ann. di mat. (3) 20 (1913), p. 217—244 (Anwendung eines Verfahrens der Variationsrechnung), verallgemeinert von *C. Poli,* Torino Atti 51 (1916), p. 912—922; *C. Runge*[255]) (formale Reihenentwicklung; vgl. auch *L. Crijns*[255])); *G. Polya,* Math. Ann. 75 (1914), p. 376—379 (Übertragung des Rungeschen Problems auf unendliche Gleichungssysteme und Konvergenzuntersuchung).

333) *H. v. Koch,* Soc. math. Fr. Bull. 27 (1899), p. 215—227. — Ein etwas schärferer Existenzsatz für speziellere Systeme (1) bei *A. Wintner*[216]).

Die hier verwendete Entwicklung der Lösungen nach Potenzen des Parameters t läßt sich, wie bekannt, auch als Anwendung des Verfahrens der sukzessiven Approximation deuten. Dies Verfahren ist in derselben Gestalt, in der es bei linearen Integralgleichungen zweiter Art zur Lösung durch die Entwicklung nach iterierten Kernen führt (s. Nr. **3**, (5) und Nr. **5**, (11) sowie Nr. **24** a), auch auf besondere nichtlineare Integralgleichungen vielfach angewendet worden, welche etwa die Gestalt

$$\varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt + \int_a^b H(s,t)\{\varphi(t)\}^2\,dt + \cdots = g(s)$$

haben, oder in welche gegebene Verbindungen dieser die unbekannte Funktion $\varphi(s)$ enthaltenden bestimmten Integrale oder mehrfache Integrale eingehen; es liefert alsdann eine Lösung für kleine Werte eines in der Integralgleichung auftretenden Parameters λ.[334]) Insbesondere ist auch der Fall der *nichtlinearen Volterraschen Integralgleichung* dieses Typus, wo also die Unabhängige s als obere Integrationsgrenze auftritt, vielfach mit dieser Methode behandelt worden.[335])

Im Gebiete unendlicher Gleichungssysteme ist der Kochsche Existenzsatz von *W. L. Hart*[336]) ausgedehnt worden auf Systeme der Gestalt

$$(3) \qquad f_p(x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots) = 0,$$

wo die f_p entweder vollstetige Funktionen ihrer Veränderlichen im Sinne der Definition von Nr. **16** a, Ende — jedoch bezogen auf einen

334) *G. Fubini*, Torino Atti 40 (1904), p. 616—631; *V. Volterra*, Paris C. R. 142 (1906), p. 691—695; *H. Block*, Ark. f. mat. 3 (1907), Nr. 22, 18 S.; *L. Orlando*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 16_2 (1907), p. 601—604; *R. d'Adhémar*, Bull. Soc. Math. Fr. 36 (1908), p. 195—204; *G. Bratu*, Paris C. R. 150 (1910), p. 896—899; 152 (1911), p. 1048—1050; *A. Pellet*, Bull. Soc. Math. Fr. 41 (1913), p. 119—126. Ein anderes Verfahren zur Bestimmung benachbarter Lösungen bei *A. Collet*, Toul. Ann. (3) 4 (1912), p. 199—249. — Vgl. auch die in Nr. **26** b, 2 und 3 behandelten nichtlinearen Integralgleichungen.

335) *T. Lalesco*[17]), 1. P., Nr. 12; *M. Picone*, Palermo Rend. 30 (1910), p. 349—376; *E. Cotton*, Bull. Soc. Math. Fr. 38 (1910), p. 144—154; Paris C. R. 150 (1910), p. 511—513; Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 473—521; *J. Horn*, J. f. Math. 141 (1912), p. 182—216; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 85—90; *H. Galajikian*, Amer. Math. Soc. Bull. 19 (1913), p. 342—346; Ann. of Math. (2) 16 (1915), p. 172—192; *M. Nanni*, Battagl. Giorn. 58 (1920), p. 125—160; *A. Vergerio*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 31_1 (1922), p. 15—17, 49—51; vgl. auch *A. Viterbi*[269]). Allgemeinere verwandte funktionale Integralgleichungen bei *C. Severini*, Atti Acc. Gioen. (5) 4 (1911), Nr. 15, 16; 5 (1912), Nr. 20. — Vgl. auch die in Nr. **26** a, 2 erwähnten weiteren Typen Volterrascher Integralgleichungen.

336) *W. L. Hart*, Amer. Math. Soc. Bull. 22 (1916), p. 292—293; Amer. Math. Soc. Trans. 18 (1917), p. 125—160; Nat. Ac. Proc. 2 (1916), p. 309—313; Amer. Math. Soc. Trans. 23 (1922), p. 30—50.

Bereich $|x_p - a_p| \leqq r_p$ — oder stetige Funktionen im Sinne von (4) von Nr. 18a sind und wo die „Funktionaldeterminante" aus den $\frac{\partial f_p}{\partial x_q}$ im Kochschen Sinne existiert.

b) Eine Übertragung der *Puiseux*schen Sätze in gewissem Umfang umfaßt die weitergehende Theorie, die *E. Schmidt*[337]) aufgestellt hat. Er hat sie für nichtlineare Integralgleichungen entwickelt, die eine etwa den Systemen (2) entsprechende Allgemeinheit haben, bei denen aber die zu ihrer Aufstellung und Behandlung notwendigen Mittel schwieriger zu übersehen waren als bei unendlichvielen Veränderlichen. Schmidt bezeichnet als *Integralpotenzreihe* $\mathfrak{P}\binom{s}{u, v}$ von beispielsweise zwei stetigen Argumentfunktionen $u(s)$, $v(s)$ eine unendliche Reihe von Gliedern der Form

$$u(s)^{\alpha_0} v(s)^{\beta_0} \int_a^b \ldots \int_a^b K(s, t_1, \ldots, t_\nu)\, u(t_1)^{\alpha_1} v(t_1)^{\beta_1} \ldots u(t_\nu)^{\alpha_\nu} v(t_\nu)^{\beta_\nu} dt_1 \ldots dt_\nu$$

$$(\alpha_0 + \beta_0 \geqq 0, \quad \alpha_1 + \beta_1 \geqq 1, \quad \ldots, \quad \alpha_\nu + \beta_\nu \geqq 1, \quad \nu \geqq 0),$$

wo die Koeffizientenfunktionen $K(s, t_1, \ldots, t_\nu)$ stetige Funktionen ihrer Argumente im Intervall (a, b) und ν, α, β nichtnegative ganze Zahlen sind[338]); er bildet eine Majorantenreihe von $\mathfrak{P}$, indem er, eventuell nach Zusammenfassung gleichartiger Glieder, $u(s)$, $v(s)$ überall durch Konstante h, k, die Koeffizientenfunktionen durch ihren Betrag und sodann die Integrale durch ihr Maximum ersetzt, und nennt $\mathfrak{P}$ *regulär konvergent*, wenn diese Majorantenreihe konvergiert. Alsdann konvergiert die Integralpotenzreihe für je zwei stetige, absolut unterhalb h bzw. k bleibende Funktionen $u(s)$, $v(s)$ absolut und gleichmäßig und stellt eine stetige Funktion von s dar.

Es sei nun eine solche regulär konvergente Integralpotenzreihe $\mathfrak{P}\binom{s}{u, v}$ gegeben, die kein von u und v freies Glied enthält, *unter deren Gliedern 1. Dimension aber eines der Form* $A(s)u(s)$ *mit* $A(s) \geqq m > 0$

337) *E. Schmidt,* Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen, Math. Ann. 65 (1908), p. 370—399.

338) Dieser Begriff ist analog dem der analytischen Funktionen unendlichvieler Veränderlicher von *H. v. Koch* (s. Nr. 25a), und zwar entspricht die Integralpotenzreihe einem *System* von unendlichvielen analytischen Funktionen $f_p(x_1, x_2, \ldots)$ (Funktionaltransformation), wobei die Variable s dem Index p entspricht. Die Analogie tritt noch klarer hervor, wenn man in die Integralpotenzreihe nur eine Argumentfunktion anstatt der oben in Rücksicht auf das folgende verwendeten zwei einführt; dann ist das oben hingeschriebene allgemeine Glied genau so gebaut, wie das allgemeine Glied der Reihe (1a) für die p^{te} Funktion $f_p(x_1, x_2, \ldots)$.

vorkommt; dann wird die nichtlineare Integralgleichung

$$\mathfrak{P}\binom{s}{u,\, v} = 0,$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$u(s) + \int_a^b K(s,\, t)\, u(t)\, dt = \mathfrak{P}_1\binom{s}{u,\, v}, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{P}_1$ regulär konvergent ist und außer Gliedern mindestens zweiter Dimension in u und v nur lineare Glieder in v enthält, durch $u = 0$, $v = 0$ befriedigt, und die Aufgabe ist, *für jede gegebene stetige Funktion $v(s)$ mit hinreichend kleinem Maximum des Betrages eine Lösung von* (4) *zu suchen.*

Die verschiedenen Möglichkeiten der Lösungsexistenz gruppieren sich alsdann nach der Art der Lösbarkeit der aus (4) entstehenden linearen homogenen Integralgleichung

$$u(s) + \int_a^b K(s,\, t)\, u(t)\, dt = 0; \tag{5}$$

deren Fredholmsche Determinante spielt also die gleiche Rolle, wie die Funktionaldeterminante von endlichvielen Gleichungen und die unendliche Determinante in den Fällen von Nr. **25** a. Im einzelnen gilt folgendes:

1. *Gleichung* (5) *habe keine nicht identisch verschwindende Lösung; dann gibt es zwei positive Zahlen h', k', so daß zu jeder stetigen Funktion $v(s)$, für die* $\text{Max}\,|v(s)| \leqq k'$ *ist, genau eine Lösung $u(s)$ von* (4) *von der Eigenschaft* $\text{Max}\,|u(s)| \leqq h'$ *existiert, die sich übrigens als regulär konvergente Integralpotenzreihe in $v(s)$ darstellen läßt.* Schmidts Beweis geht davon aus, daß dann (vgl. Nr. **10**, Satz 2) ein lösender Kern von K existiert und daß sich mit dessen Hilfe (4) in die Gestalt

$$u(s) = \mathfrak{P}_2\binom{s}{u,\, v} \tag{6}$$

setzen läßt, wo $\mathfrak{P}_2$ von derselben Art wie $\mathfrak{P}_1$ in (4) ist. Für diese Gleichung ergibt sich durch sukzessive Approximation (bzw. Potenzentwicklung nach λ, wenn v durch $\lambda v(s)$ ersetzt wird), eine sie formal befriedigende Integralpotenzreihe, deren reguläre Konvergenz durch ein Majorantenverfahren dargetan wird.

2. *Gleichung* (5) *besitze genau eine Lösung.* Dann läßt sich eine ganze transzendente Gleichung in einer Unbekannten x („Verzweigungsgleichung") der Form

$$L_2 x^2 + L_3 x^3 + \cdots = \mathfrak{R}\binom{s}{v} \tag{7}$$

aufstellen, wo $L_2, L_3, \ldots$ durch sukzessive Integrationen aus bekannten Funktionen herstellbare Konstante und $\mathfrak{R}$ eine mit $v = 0$ verschwindende bekannte regulär konvergente Integralpotenzreihe in v ist. *Ist nun L_ν der erste nicht verschwindende Koeffizient, so gibt es zu jedem $v(s)$ mit hinreichend kleinem Maximum genau ν Lösungen von* (4), *d. h. es liegt eine ν-fache Verzweigung wie im algebraischen Falle vor; verschwinden aber* alle *L_ν, so hat* (4) *für $v(s) = 0$ kontinuierlich viele* (*von dem willkürlich bleibenden x abhängige*) *Lösungen — über die Lösungen für benachbarte $v(s)$ aber* (*Art der Verzweigung*) *wird keine Aussage gewonnen.* Der Beweis geht aus von der unter der vorliegenden Annahme möglichen Darstellung von $K(s, t)$ als Summe eines Produktkernes $\psi(s)\varphi(t)$ vom Range 1 und eines Kernes, der einen lösenden Kern besitzt (s. Nr. **39** a, 2[490a]). Damit läßt sich (4) wiederum in eine Integralgleichung der Form (6) überführen, die jedoch noch den Integralwert

$$x = \int_a^b u(t)\,\varphi(t)\,dt \tag{8}$$

linear enthält und die daher durch eine regulär konvergente Integralpotenzreihe in $v(s)$ und diesem Parameter x gelöst wird:

$$u(s) = \mathfrak{Q}\binom{s}{x, v}. \tag{9}$$

Die beiden Gleichungen (8), (9) geben die Lösung des Problems: Einsetzen von (9) in (8) gibt die Verzweigungsgleichung (7), jede hinreichend kleine Lösung x von dieser gibt durch (9) eine Lösung von (4).

3. *Hat* (5) *n linear unabhängige Lösungen,* so ergeben sich ebenso *n Verzweigungsgleichungen,* d. h. n mindestens mit quadratischen Gliedern beginnende Gleichungen vom Typus (7) in n Parametern, derart, daß jedes System hinreichend kleiner Lösungen von ihnen eine Lösung von (4) liefert. Die Verzweigung kann von algebraischem Typus sein, oder es kann der oben hervorgehobene Ausnahmefall eintreten.

Die Entwicklungen von *Schmidt* sind so eingerichtet, daß sich die hier angegebenen Hauptresultate in verschiedenen Richtungen (Potenzreihen nach mehreren Funktionen, mehrere unabhängige Variable, Unstetigkeiten der Koeffizientenfunktionen u. a.) erweitern lassen.[339])

339) *H. Falkenberg,* Diss. Erlangen 1912, 32 S. betrachtet in einem besonderen Falle die aus der Verzweigungsgleichung entstehende Entwicklung der Lösung nach gebrochenen Potenzen eines in $v(s)$ als Faktor auftretenden Parameters. Weitere Beispiele bei *L. Orlando,* Atti 4. congr. int. Roma 2 (1909), p. 122—128; *P. Levy,* Paris C. R. 150 (1910), p. 899—901; *G. Bucht,* Ark. f. mat. 8 (1912), Nr. 8, 20 S.; *G. Bratu,* Bull. Soc. Math. Fr. 41 (1913), p. 346—350; 42 (1914), p. 113–142; *St. Mohorovicic,* Jugoslav. Ak. Bull. math.-phys. Kl. 6/7 (1916), p. 7—18; Rada jugosl. Akad. 213 (1916), p. 12 ff.

26. Vertauschbare Kerne. In einer an *V. Volterra*[340]) anschließenden Reihe von Untersuchungen ist für gewisse Klassen von Kernen ein Kalkül entwickelt worden, der in seinem Bereich dem Kalkül mit beschränkten Matrizen (s. Nr. **18** a, 5.) entspricht, und der auf lineare und namentlich auch nichtlineare Integralgleichungen angewendet wird. Dabei wird als Summe zweier Kerne $K_1(s, t)$, $K_2(s, t)$ die Summe im gewöhnlichen Sinne $K_1 + K_2$, als Produkt der „zusammengesetzte Kern"

$$(1) \qquad K_3(s, t) = \int_a^b K_1(s, r) K_2(r, t)\, dr = K_1 K_2(s, t) = K_1 K_2$$

betrachtet[340]); diese Zusammensetzung („composition") ist die gleiche Operation, die bei der Iterierung von Kernen (s. Nr. **11** a) und bei der Faltung von Matrizen bzw. Bilinearformen (s. Nr. **18** a, 4.) auftritt. Die Gültigkeit des assoziativen und kommutativen Gesetzes der Addition sowie die des distributiven Gesetzes ist evident; ferner ergibt die Vertauschbarkeit der Integrationsfolge unter hinreichenden Stetigkeitsvoraussetzungen für die Kerne unmittelbar die Assoziativität der Multiplikation:

$$(K_1 K_2) K_3 = K_1 (K_2 K_3),$$

während sie im allgemeinen ersichtlich *nicht kommutativ* ist ($K_1 K_2 \neq K_2 K_1$). Volterra hat nun insbesondere solche Bereiche von Kernen behandelt, in denen *auch das kommutative Gesetz* gilt.

a) Volterrasche Kerne (Vertauschbarkeit 1. Art).

1. *V. Volterra* hat diesen Kalkül in erster Linie auf Kerne Volterrascher Integralgleichungen (s. Nr. **3**, **23**), d. h. für $t > s$ verschwindende Kerne angewandt.[340]) Mit K_1 und K_2 zugleich ist auch das Produkt (1) ein solcher Volterrascher Kern und sein Wert für $t \leqq s$ ist (vgl. Nr. **23**, (4a))

$$(2) \qquad K_3(s, t) = \int_t^s K_1(s, r) K_2(r, t)\, dr.$$

In diesem Falle spricht Volterra von „Zusammensetzung 1. Art" und bezeichnet die Funktion (2) mit

$$(2\text{a}) \qquad \overset{*}{K_1} \overset{*}{K_2}(s, t) \quad \text{oder} \quad K_1 K_2(s, t).$$

340) Erste Veröffentlichung: *V. Volterra*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 19_1 (1910), p. 169—180. Zusammenfassende Darstellungen bei *V. Volterra*, Literatur A 9, Chap. IV, insbes. p. 147 ff.; Literatur B 6, Chap. IX—XIV; Proc. 5. intern. congr. Cambridge (1912) I, p. 403—406; *V. Volterra*, The theory of permutable functions (Princeton Univ. press 1915); *V. Volterra* u. *J. Pérès*, Leçons sur la composition et les fonctions permutables, Paris (Coll. Borel) 1924, VIII u. 184 S.; Formales über die Operationsgesetze bei *G. C. Evans*, Rom Acc. Linc. Mem. (5) 8 (1911), p. 695—710.

Ist diese Zusammensetzung speziell für zwei Kerne kommutativ:

$$K_2K_1(s,t) = \int_t^s K_2(s,r)K_1(r,t)\,dr = K_1K_2(s,t),$$

so heißen K_1, K_2 „vertauschbar von der 1. Art" (permutable de première espèce); ist c eine Konstante, so sind gleichzeitig auch cK_1 und K_2 vertauschbar.

Liegt ein System endlichvieler paarweise vertauschbarer Kerne $K_1, K_2, \ldots, K_n$ vor, so sind alle Kerne, die man aus ihnen durch endlichviele Additionen und Zusammensetzungen unter Hinzunahme der Multiplikation mit konstanten Faktoren bilden kann, wiederum miteinander vertauschbar[340]); sie lassen sich insgesamt durch lineare Aggregate endlichvieler „Potenzprodukte" $K_1^{\alpha_1}K_2^{\alpha_2}\ldots K_n^{\alpha_n}$ mit konstanten Koeffizienten darstellen, wobei Potenzen als Zusammensetzung gleicher Volterrascher Kerne (Iterationen wie in Nr. **11** bzw. **23**, (4a)) zu verstehen sind. Hiernach entsteht aus jedem Polynom $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in n Veränderlichen, das kein konstantes Glied enthält ($P(0, 0, \ldots, 0) = 0$), ein bestimmter Kern $P(K_1, K_2, \ldots, K_n)$, indem man jede Potenz $z_\nu^{\alpha_\nu}$ durch den iterierten Volterraschen Kern $K_\nu^{\alpha_\nu}$, Multiplikation der Variablen z_ν durch Zusammensetzung der K_ν ersetzt. Das gleiche Verfahren läßt ferner aus jeder für $z_\nu = 0$ verschwindenden Potenzreihe $\mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_n) = \sum a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$, die in einem gegebenen Bereich $|z_\nu| \leqq R_\nu$ absolut konvergiert, einen mit den K_ν vertauschbaren Kern $\mathfrak{P}(K_1, \ldots, K_n)$ entstehen, falls jedes K_ν als Funktion von s, t beschränkt ist[341]); die Definition (2) ergibt nämlich unmittelbar für die Zusammensetzung von m beschränkten Volterraschen Kernen eine Abschätzung proportional $\frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!}$ (vgl. die analoge Abschätzung Nr. **23** a, (4 b) für den iterierten Kern K^m), und das liefert die absolute Konvergenz der Integralpotenzreihe $\mathfrak{P}(K_1, \ldots, K_n)$. Die Komposition zweier solcher Kerne $\mathfrak{P}_1(K_1, \ldots, K_n)$ und $\mathfrak{P}_2(K_1, \ldots, K_n)$ ist dann der nach dem gleichen Verfahren aus dem Produkt der Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(z_1, \ldots, z_n)$ und $\mathfrak{P}_2(z_1, \ldots, z_n)$ entstehende Kern.[342])

---

341) *V. Volterra*[340]). Erweiterung für gewisse nicht konvergente Potenzreihen bei *J. Pérès,* J. de Math. (7) 1 (1915), p. 1—97, insbes. chap. I. — Wegen der Beziehungen zum Summationsverfahren divergenter Potenzreihen vgl. *V. Volterra,* Literatur B 6, p. 159 f. und *P. Nalli,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 206—226.

342) *V. Volterra* hat darauf hingewiesen (vgl. z. B. Literatur B 6, p. 138), daß man diese Betrachtungen auch auf Potenzreihen mit nicht verschwindendem konstanten Glied ausdehnen kann. Das kommt darauf hinaus, daß der „Einheitskern" E, für den $EK = KE = K$ ist, der aber freilich durch keine stetige Funktion von s, t dargestellt werden kann, rein formal zu jedem System vertauschbarer Kerne hinzugenommen wird; dann ist $cE + K_1$ mit K_2 vertauschbar

2. Aus diesen Bemerkungen entnimmt *Volterra* unmittelbar die Lösung einer Klasse nichtlinearer Integralgleichungen, die einen besonders einfach zu handhabenden Spezialfall der in Nr. 25 behandelten Gleichungen darstellen. Sind nämlich $\Phi(z_1, \ldots, z_n, \zeta)$, $\mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_n)$ für kleine Argumente absolut konvergente Potenzreihen, die für verschwindende Argumente verschwinden, und erfüllt $\zeta = \mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_n)$ identisch in $z_1, \ldots, z_n$ die Gleichung

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n, \zeta) = 0, \tag{4}$$

so wird die nichtlineare Integralgleichung für K

$$\Phi(K_1, \ldots, K_n, \mathsf{K}) = 0 \tag{5}$$

— unter $K_1, \ldots, K_n$ gegebene vertauschbare Volterrasche Kerne verstanden — durch die Integralpotenzreihe

$$\mathsf{K} = \mathfrak{P}(K_1, \ldots, K_n)$$

gelöst.[343]) Neben den zahlreichen Beispielen hierzu, die in den zu dieser Nr. genannten Arbeiten gelegentlich enthalten sind, sei besonders der Fall hervorgehoben, daß die K_ν und K nur von der Differenz $s - t$ abhängen, was, wie leicht auszurechnen, die Vertauschbarkeit 1. Art notwendig nach sich zieht; mit K hängen auch die iterierten Kerne $\mathsf{K}^{(\nu)}$ nur von $s - t$ ab, und daher geht (5) in eine nichtlineare Integralgleichung über, in die die unbekannte Funktion $\varphi(s) = \mathsf{K}(s + t, t)$ in den Bildungen

$$\varphi^{(1)}(s) = \varphi(s), \quad \varphi^{(\nu)}(s) = \int_0^s \varphi^{(\nu-1)}(s - r)\varphi(r)\,dr$$

---

und ihr Produkt ist der eigentliche Kern $cK_2 + K_1 K_2$. Weitere formale Ausdehnungen des Kalkuls in ähnlicher Richtung geben *G. C. Evans*, Palermo Rend. 34 (1912), p. 1—28; 35 (1912), p. 394; *V. Volterra*, Rom Acc. Linc. Mem. (5) 11 (1916), p. 167—249; *J. Pérès*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 26_1 (1917), p. 45—49, 104—109.

343) *V. Volterra*[340]). Der einfachste Fall hiervon ist die Lösung der linearen Integralgleichung $\mathsf{K} - K\mathsf{K} = K$ durch die Potenzreihe $\mathsf{K} = K + K^2 + K^3 + \cdots$, d. h. die Bestimmung der Resolvente eines Volterraschen Kernes durch Reihenentwicklung nach Iterierten, deren Beziehung zur geometrischen Reihe $\zeta = z + z^2 + \cdots$ als Lösung von $(1 - z)\zeta = z$ hier klar zutage tritt (vgl. Nr. 24a). Hiermit verwandte Beispiele gibt *G. C. Evans*, Rom Acc. Linc. Rend. 20_2 (1911), p. 453—460, 688—694. Vgl. weiter eine Anwendung auf die Bestimmung von Kernen $K(s - t)$ linearer Volterrascher Integralgleichungen, deren Resolvente sich durch Integrationen und Differentiationen aus K ergibt, bei *V. Volterra*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 23_1 (1914), p. 266—269. — Auf nicht vertauschbare Kerne wird der obige Satz in gewissem Umfang ausgedehnt von *V. Volterra*[365a]) und *J. Pérès*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 22_1 (1913), p. 66—70.

eingeht. Besondere Integralgleichungen dieser Art haben *J. Horn*[344]), *F. Bernstein*[345]) und *G. Doetsch*[345]) nach verschiedener Richtung untersucht.

3. *V. Volterra* hat sich weiterhin insbesondere mit der Bestimmung *aller* mit einem gegebenen $K(s, t)$ vertauschbaren Kerne beschäftigt. Sein erstes Resultat, das aus einem Problem der Anwendungen (problème du cycle fermé) entstand, war die Tatsache, daß alle mit dem Volterraschen Kern $K(s, t) = \text{Const.}$ vertauschbaren Kerne die Gestalt $F(s - t)$ haben und daher untereinander vertauschbar sind.[340]) Er hat ferner das Problem für Kerne der Ordnung 1 und 2 durch Zurückführung auf eine Integrodifferentialgleichung gelöst; dabei heißt $K(s, t)$ von der Ordnung n, wenn es in der Form $(s - t)^{n-1} F(s, t)$ darstellbar ist, wo $F(s, t)$ Ableitungen bis zur Ordnung $n - 1$ besitzt und $F(s, s) \neq 0$ ist.[346]) Im Anschluß daran hat *E. Vessiot*[347]) bewiesen, daß alle mit einem gegebenen Kern endlicher Ordnung vertauschbaren Kerne untereinander vertauschbar sind. *J. Pérès*[348]) hat das Volterrasche Verfahren für den Fall, daß K von s, t analytisch abhängt, auf

344) *J. Horn*, J. f. Math. 144 (1914), p. 167—189; 146 (1915), p, 95—115; 151 (1921), p. 167—199; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 303—313; 25 (1915), p. 301—325; 27 (1918), p. 48—53; Math. Ztschr. 1 (1918), p. 80—114. Die Integralgleichungen gehen durch eine Laplacesche Transformation aus nichtlinearen Differential- und Funktionalgleichungen hervor.

345) *F. Bernstein*, Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wiss. 1920, p. 735—747; Amst. Ak. Versl. 29 (1920), p. 759—765 = Amst. Ac. Proc. 23 (1920), p. 817—823; *F. Bernstein* und *G. Doetsch*, Gött. Nachr. 1922, p. 32—46, 47—52; Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 31 (1922), p. 148—153; *G. Doetsch*, Math. Ann. 90 (1923), p. 19—25. Hier werden zunächst eine quadratische Integralgleichung jener Art für die elliptische Thetanullfunktion und weiterhin analoge Gleichungen aufgestellt und durch funktionentheoretische Methoden oder mit Hilfe der Laplaceschen Integraltransformation untersucht. *G. Doetsch*, Math. Ann. 89 (1923), p. 192—207 behandelt im Anschluß an diese Untersuchungen Integralgleichungen derselben Art, die sich durch eine Modifikation des oben geschilderten Volterraschen Prozesses aus algebraischen Gleichungen ergeben und durch eine Laplacesche Transformation mit Differentialgleichungen zusammenhängen.

346) *V. Volterra*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 19_1 (1910), p. 425—437; 20_1 (1911), p. 296—304; vgl. dazu *E. Bompiani*, ibid. 19_2 (1910), p. 101—104. — Etwas modifizierte Darstellungen gibt *J. Pérès*, Paris C. R. 166 (1918), p. 939—941; Ann. Éc. Norm. (3) 36 (1919), p. 37—50; Bull. Soc. Math. Fr. 47 (1919), p. 16—37; Rom Acc. Linc. Rend. (5) 30_1 (1921), p. 318—322; 344—348. Er gibt ferner hier sowie in Paris C. R. 166 (1918), p. 723—726, 806—808 und Rom Acc. Linc. Rend. (5) 27_2 (1918), p. 27—29, 374—378, 400—402 Anwendungen auf Entwicklungen nach Funktionssystemen, die durch eine Volterra-Transformation aus den sukzessiven Potenzen entstehen (Besselsche Funktionen u. dgl.).

347) *E. Vessiot*, Paris C. R. 154 (1912), p. 682—684.

348) *J. Pérès*, Paris C. R. 156 (1913), p. 378—381 und [341]), chap. II.

beliebige ganzzahlige Ordnung ausgedehnt; er hat aber darüber hinaus bewiesen[349]), daß alle mit $K(s, t)$ vertauschbaren von s, t *analytisch* abhängigen Kerne durch eine Reihe $\sum a_\nu K^\nu(s, t)$ nach Iterationen von K darstellbar sind, wobei nur $\sum a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$ in einer Umgebung von $z = 0$ konvergieren muß, während alle *stetigen* Kerne, die mit einem Kern 1. Ordnung vertauschbar sind, wenigstens durch Polynome in K gleichmäßig approximiert werden können.

b) Konstante Integrationsgrenzen (Vertauschbarkeit 2. Art).

1. Die allgemeine Operation (1) nennt *V. Volterra*[340]) „Zusammensetzung 2. Art" und bezeichnet ihr Resultat mit

$$\text{(1a)} \qquad \overset{**}{K_1}\overset{**}{K_2}(s, t) \quad \text{oder} \quad K_1 K_2(s, t).$$

Ist $\overset{**}{K_1}\overset{**}{K_2} = \overset{**}{K_2}\overset{**}{K_1}$, so heißen K_1 und K_2 „vertauschbar von der 2. Art" (permutable de deuxième espèce). Genau wie in Nr. 26a, 1. kann man aus endlichvielen vertauschbaren Kernen $K_1, \ldots, K_n$ durch endlichviele Additionen und Zusammensetzungen 2. Art unter Hinzunahme der Multiplikation mit konstanten Faktoren neue mit $K_1, \ldots, K_n$ vertauschbare Kerne bilden, die man formal als Polynome $P(K_1, \ldots, K_n)$ darstellen kann.[350])

Geht man jedoch zu Potenzreihen über, so gestalten sich die Verhältnisse wesentlich anders als in Nr. 26a, 1., da der durch die Zusammensetzung 2. Art aus m beschränkten Kernen entstehende Kern eine nur der Potenz $(b - a)^{m-1}$ proportionale obere Grenze hat. Ist $\mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_n)$ eine für $z_\nu = 0$ verschwindende *beständig konvergente* Potenzreihe der $z_1, \ldots, z_n$ (*ganze Funktion*), so wird die Ersetzung von z_ν durch K_ν unter Verwendung der Zusammensetzung 2. Art an Stelle der Multiplikation eine absolut konvergente Integralpotenzreihe $\mathfrak{P}(K_1, \ldots, K_n)$ liefern, die einen mit $K_1, \ldots, K_n$ auf die zweite Art vertauschbaren Kern darstellt. Dagegen wird die durch das gleiche Verfahren aus einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_n)$ von *endlichem* Konvergenzbereich $|z_\nu| < R_\nu$ entstehende Reihe im allgemeinen nicht mehr konvergieren; jedenfalls aber wird die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z_1 K_1, \ldots, z_n K_n)$, in der jedem Kern K_ν der Faktor z_ν hinzugefügt ist, für hinreichend kleine Parameterwerte

349) *J. Pérès,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 22_2 (1913), p. 649—654; 23_1 (1914), p. 870—873; [341]), Chap. IV.

350) Vgl. dazu die in [340]) zitierte Literatur sowie *G. C. Evans*[342]). Spezielle Kerne bei *G. Giorgi,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_1 (1912), p. 748—754; *G. Andreoli,* ibid. 25_2 (1916), p. 252—257, 299—305.

z_ν konvergieren. In dem besonderen Falle, daß

$$(6) \qquad \mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\mathfrak{P}_1(z_1, \ldots, z_n)}{1 + \mathfrak{P}_2(z_1, \ldots, z_n)}$$

die Potenzentwicklung des Quotienten zweier ganzen transzendenten Funktionen von $z_1, \ldots, z_n$ ist, zeigt *V. Volterra*[351]), daß der durch $\mathfrak{P}(z_1 K_1, \ldots, z_n K_n)$ zunächst für kleine $|z_\nu|$ definierte Kern K ebenfalls über diesen Bereich hinaus eindeutig fortsetzbar und als Quotient zweier beständig konvergenter Integralpotenzreihen in $z_1 K_1, \ldots, z_n K_n$ darstellbar ist. Aus der Identität

$$\mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_n) + \mathfrak{P}_2(z_1, \ldots, z_n) \cdot \mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_n) = \mathfrak{P}_1(z_1, \ldots, z_n)$$

entsteht nämlich durch den Volterraschen Prozeß die lineare Integralgleichung 2. Art für K

$$(7) \qquad \mathsf{K} + \mathfrak{P}_2(z_1 K_1, \ldots, z_n K_n) \cdot \mathsf{K} = \mathfrak{P}_1(z_1 K_1, \ldots, z_n K_n),$$

und die Anwendung der *Fredholm*schen Formeln auf sie ergibt die behauptete Quotientendarstellung.

2. Auch diesen Betrachtungen kann *Volterra* wiederum die *Lösung gewisser nichtlinearer Integralgleichungen*, diesmal mit beliebigen *konstanten Integrationsgrenzen*, entnehmen. Ist nämlich

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n, \zeta) = 0$$

eine Gleichung, die durch einen Quotienten ζ zweier ganzer Funktionen von $z_1, \ldots, z_n$ gelöst wird, so ergibt die Ersetzung von z_ν durch $z_\nu K_\nu(s, t)$ und von ζ durch K unter Verwendung der Zusammensetzung zweiter Art eine nichtlineare Integralgleichung

$$\Phi(z_1 K_1, \ldots, z_n K_n, \mathsf{K}) = 0,$$

und man erhält ihre Lösung durch die Betrachtungen von Nr. **26** b, 1.[352])

Über spezielle aus ganzen rationalen Φ entstehende Integralgleichungen vgl. Nr. **26** b, 3.

3. Das Problem der Bestimmung aller mit einem gegebenen Kern vertauschbaren Kerne ist hier bei der 2. Art wesentlich schwieriger und tiefer liegend als bei der 1. Art; es umfaßt die analoge Aufgabe für endliche Matrizen und greift tief in die Übertragung der Elementarteilertheorie auf Integralgleichungen ein (s. Nr. **39**, insbesondere d[502])). *L. Sinigallia*[353]) und allgemeiner *V. Volterra*[354]) haben dargelegt, wie

351) *V. Volterra*[340]) und Rom Acc. Linc. Rend. (5) 20_2 (1911), p. 79—88. — Über die Beziehung zur Funktionentheorie vgl. *H. Lebesgue,* Bull. Soc. Math. Fr. 40 (1912), p. 238—244.

352) *V. Volterra*[351]) und Literatur B 6, Chap. XIII.

353) *L. Sinigallia,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 20_1 (1911), p. 563—569; 20_2 (1911), p. 460—465; 21_2 (1912), p. 831—837; 22_1 (1913), p. 70—76. — Einige mehr formale Bemerkungen früher bei *H. Bateman,* Cambr. Phil. Trans. 20 (1908), p. 233—252.

354) *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 20_1 (1911), p. 521—527.

sich für Kerne endlichen Ranges (Nr. **10**a, 1) $\sum_{p,q=1}^{n} c_{pq}\varphi_p(s)\psi_q(t)$ die Vertauschbarkeitssätze unmittelbar aus der Elementarteilertheorie für die n-reihigen Matrizen (c_{pq}) und $\left(\int_a^b \varphi_p(s)\psi_q(s)\,ds\right)$ gewinnen lassen.[355]) — Im Zusammenhang damit sind von *V. Volterra*[354]) und anderen[356]), gleichfalls in Analogie zu bekannten Anwendungen der Elementarteilertheorie, „algebraische Gleichungen" für unbekannte Kerne in zahlreichen besonderen Fällen untersucht worden, d. h. Gleichungen vom Typus

$$K_0 \mathsf{K}^n + K_1 \mathsf{K}^{n-1} + \cdots + K_n = 0,$$

wo die Iterationen von K ganz rational auftreten und $K_0, \ldots, K_n$ vertauschbar sind.

27. Integrodifferentialgleichungen.[357]) Gewisse lineare Funktionalgleichungen, in denen die unbekannte Funktion außer Integrationen auch Differentiationsoperationen unterworfen ist, sind bereits in Nr. **24**d, 2 behandelt worden. Probleme der Anwendungen[358]) sowohl, wie auch der Wunsch, die in der Theorie der Integralgleichungen entwickelten Begriffsbildungen und Methoden weiterhin auszunutzen, haben den Anlaß gegeben, eine große Reihe verschiedenartiger Typen solcher linearer und nichtlinearer „Integrodifferentialgleichungen" zu

355) Die Beziehungen zwischen den Eigenfunktionen bzw. den Hauptfunktionen (s. Nr. **39**a) vertauschbarer Kerne behandelt *J. Soula*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_2 (1912), p. 425—431; 22_1 (1913), p. 222—225. — *G. Lauricella,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 22_1 (1913), p. 331—346 hat für alle mit einem beliebigen $K(s,t)$ vertauschbaren Kerne konvergente Darstellungsformeln angegeben, indem er die Kenntnis der *Schmidt*schen adjungierten Eigenfunktionen (Nr. **36**c) voraussetzt und die Theorie der Orthogonalfunktionen benutzt. Vgl. auch *C. Severini,* Atti Acc. Gioen. (5) 7 (1914), mem. 20, 22 S. — Vgl. auch *S. Pincherle*[297g]).

356) *T. Lalesco*[492]); *G. Lauricella,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 20_1 (1911). p. 885—896; Ann. di mat. (3) 21 (1913), p. 317—351; *E. Daniele,* Palermo Rend. 37 (1914), p. 262—266; *J. Soula,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 23_1 (1914), p. 132—137; *A. Vergerio*, Torino Atti 51 (1916), p. 227—237 (bzw. math.-nat. Kl., p. 199—209); *G. Andreoli,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 25_2 (1916), p. 360—366, 427—433; 26_1 (1917), p. 234—239; *M. Precchia*, Atti Acc. Gioen. (5) 10 (1917), mem. 25, 41 S.

357) Zusammenfassende Darstellungen findet man bei *V. Volterra,* Literatur A 9, Chap. IV; B 6, Chap. V—X, XIII, XIV.

358) Es handelt sich hier insbesondere um Probleme der *Nachwirkung* und *Fernwirkung,* bei denen der momentane Zustand an einer Stelle des Systems jeweils auch von allen vor diesem Moment durchlaufenen Zuständen an dieser und allen anderen Stellen des Systems abhängt, und die man jetzt vielfach nach *É. Picard* als *hereditäre Mechanik* bezeichnet (vgl. Encykl. IV 30, Nr. **6**, p. 640f., *E. Hellinger*). Ein Teil der weiterhin zu nennenden Arbeiten knüpft direkt an solche Probleme an.

untersuchen, die Integrations- und Differentiationsprozesse gemischt enthalten. Eine methodische Durcharbeitung dieses außerordentlich vielgestaltigen Problemkreises liegt naturgemäß nicht vor; die einfache Bemerkung, daß die Integrodifferentialgleichungen alle Arten von Integralgleichungen und Differentialgleichungen als Sonderfälle enthalten, zeigt, mit welchen verschiedenen Fragestellungen man an sie herantreten kann. So beschränken sich die vorhandenen Resultate auf einzelne von bekannten Integralgleichungen oder Differentialgleichungen oder auch von algebraischen oder funktionentheoretischen Analogien her leichter zugängliche Gleichungstypen und enthalten Aussagen über die Existenz der Lösungen, Lösungsformeln und gelegentlich auch besondere Eigenschaften der Lösungen (Nr. 27 a). Eine weiterreichende Methode zur Erfassung einer größeren Klasse von Integrodifferentialgleichungen hat *V. Volterra* durch seinen Kalkul mit vertauschbaren Kernen von Nr. 26 gegeben (Nr. 27 b).

a) Als unmittelbare Verallgemeinerung des Ansatzes der linearen Integralgleichungen ergeben sich lineare Integrodifferentialgleichungen des folgenden Typus:

$$\sum_{\nu=0}^{m} K_\nu(s)\frac{d^\nu\varphi(s)}{ds^\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}\int_a^b K_\nu(s,t)\frac{d^\nu\varphi(t)}{dt^\nu}\,dt = f(s), \tag{1}$$

die übrigens als Grenzfälle der gemischten Integralgleichung Nr. 13 b, (1) aufgefaßt werden können. Einfachere Gleichungen dieser Art für den *Volterraschen Fall* (obere Integrationsgrenze s) haben sich zuerst bei der Behandlung der gewöhnlichen Volterraschen Integralgleichung 1. Art durch sukzessive Differentiation (s. Nr. 23 b) von selbst dargeboten, und nach dem Muster dieser Theorie hat man den Volterraschen Fall der Gleichung (1) unter mehr oder weniger einschränkenden Bedingungen behandeln können.[359]) Andererseits kann (1), wenn man die höchste auftretende Ableitung als unbekannte Funktion ansieht, durch wiederholte partielle Integration in eine gewöhnliche Integralgleichung für diese Funktion übergeführt werden, wobei eventuell noch mehrfache Integrale auftreten; auch von dieser Seite her sind viele Fälle von (1) gelöst worden.[360]) Auf Grund desselben Gedanken-

359) *R. Burgatti,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 12_2 (1903), p. 596—601; *G. Fubini,* Rend. Napoli (3) 10 (1904), p. 61—64; *T. Lalesco*[17]), 1. P., Nr. 11; *L. Sinigallia,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 17_2 (1908), p. 106—112.

360) *N. Praporgesco,* Bucarest Soc. Bulet. 20 (1911), p. 6—9; *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_2 (1912), p. 1—12; *G. Andreoli,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 22_2 (1913), p. 409—414; 23_2 (1914), p. 196—201; Battagl. Giorn. 53 (1915), p. 97—135; Torino Atti 50 (1915), p. 1036—1052; *St. Mohorovičić*[292])[239]). Vgl. auch *W. Sternberg,* Math. Ann. 81 (1920), p. 119—186.

ganges ist von einer Reihe von Autoren auch der allgemeinere Fall konstanter Integrationsgrenzen unter verschiedenen Bedingungen behandelt worden.[361]) Diese Betrachtungen sind gelegentlich auch auf einfache Fälle ähnlicher Integrodifferentialgleichungen für Funktionen mehrerer Unabhängiger ausgedehnt worden.[362])

Auch andere in der Theorie der Differentialgleichungen ausgebildete Methoden sind auf Integrodifferentialgleichungen angewendet worden. *L. Lichtenstein*[363]) hat als Beispiel seiner Methode der direkten Zurückführung von Randwertaufgaben auf Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten (Nr. **15**e) eine bestimmte *Randwertaufgabe für eine Integrodifferentialgleichung 2. Ordnung* ((1) mit $m = 2$, $n = 0$), die einen linearen Parameter enthält und genau analog der sich selbst adjungierten Differentialgleichung 2. Ordnung gebildet ist, nebst ihrer Eigenwerttheorie vollständig behandelt. Die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für eine der Potentialgleichung entsprechend gebildete Integrodifferentialgleichung in zwei Unabhängigen (vgl. Nr. **27**b, (3a)) hat *G. Fubini*[332]) mit Methoden der Variationsrechnung bewiesen.

In ähnlicher Weise wie die Gleichung (1) sind auch analog gebildete nichtlineare Integrodifferentialgleichungen im Zusammenhang mit der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen gelegentlich untersucht worden.[364]) Besonders hervorzuheben sind hier

361) *G. Fubini*, Boll. Acc. Gioen. 83 (1904), p. 3—7; *G. Lauricella*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 17_1 (1908), p. 775—786; *E. Bounitzky*, Darboux Bull. (2) 32 (1908), p. 14—31; *U. Crudeli*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 18_1 (1909), p. 493—496; *S. Pincherle*, ibid. 18_2 (1909), p. 85—86; *G. Bratu*, Paris C. R. 148 (1909), p. 1370—1373; *N. Praporgesco*[360]); *Ch. Platrier*, Nouv. Ann. (4) 11 (1911), p. 508—513; *Ch. Platrier*[53]), note I. Übertragung der Eigenwerttheorie auf gewisse Gleichungstypen bei *A. Vergerio*, Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 81—119.

362) *L. Sinigallia*[100]); *M. Gevrey*, Paris C. R. 152 (1911), p. 428—431; J. de Math. (6) 9 (1914), p. 305—471, insbes. § 19, § 22; *G. Andreoli*, Venet. Ist. Atti 74 (1915), p. 1265—1274. Weitere Verallgemeinerungen im Sinne der general analysis (Nr. **24**c) bei *T. H. Hildebrandt*, Amer. Math. Soc. Trans. 19 (1918), p. 97—108. — Hierhin gehören ferner noch die in Nr. **24**d, 2 und Nr. **24**a[298]) erörterten besonderen linearen Integrodifferentialgleichungen.

363) *L. Lichtenstein*, Festschr. f. H. A. Schwarz (Berlin 1914), p. 274—285. — Hierhin gehören auch die von *R. v. Mises*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 21 (1913), p. 241—248 und Festschr. f. H. Weber (Leipzig 1912), p. 252—282 behandelten Randwertaufgaben mit Integralnebenbedingung sowie die nach *A. Kneser*schen Methoden (s. Nr. **33**c, **34**c) von *L. Koschmieder*, J. f. Math. 143 (1913), p 285—293, *H. Laudien*, ibid. 148 (1917), p. 79—87 und Diss. (Breslau 1914), 90 S., *W. Jaroschek*, Diss. (Breslau 1918), 103 S. behandelten Integrodifferentialgleichungen der Thermomechanik und die umfassenderen Problemstellungen bei *R. Courant*, Acta math. 49 (1926), p. 1—68 (vgl. Nr. **45**c).

364) *J. Horn*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 303—313; *L. Baeri*, Palermo Rend. 44 (1920), p. 103—138.

eine Reihe von Untersuchungen von *L. Lichtenstein*[365]) über die Integrodifferentialgleichungen, welche die Gestalt der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten bestimmen; die Lösung erfolgt durch sukzessive Approximation von einer linearen Integralgleichung aus, und insbesondere wird nach dem Vorbild der *E. Schmidt*schen Theorie der nichtlinearen Integralgleichung (Nr. **25** b) die *Verzweigung* der Lösungen vollständig untersucht.

b) *V. Volterra* hat seine in Nr. **26** dargestellten Begriffsbildungen vorzugsweise zur Behandlung einer umfassenden Klasse von Integrodifferentialgleichungen angewendet.[357]) Die Grundlage seiner Betrachtungen bildet die folgende Erweiterung des Satzes von Nr. **26** a, 2 über die Lösung gewisser Integralgleichungen[340]): Die für verschwindende Argumente $z_1, \ldots, z_n$ verschwindende und in einem gewissen Bereich konvergente Potenzreihe $\zeta = \mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n)$ gehe bei Ersetzung der Variablen $z_1, \ldots, z_n$ vermöge des Verfahrens von Nr. **26** a, 1 durch die von der 1. Art vertauschbaren Kerne $K_1(s, t), \ldots, K_n(s, t)$ in die gleichmäßig im betrachteten Bereich der $x_1, \ldots, x_m, s, t$ konvergente Integralpotenzreihe

$$\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_m; s, t) = \mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m, K_1, \ldots, K_n)$$

über; erfüllt dann ζ die algebraische Differentialgleichung

$$(2) \qquad \Phi\left(x_1, \ldots, x_m; z_1, \ldots, z_n, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0,$$

so genügt $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_m; s, t)$ der durch Ersetzung von $z_1, \ldots, z_n, \zeta$ durch $K_1, \ldots, K_n, \mathsf{K}$ vermöge des gleichen Verfahrens aus (2) entstehenden Integrodifferentialgleichung:

$$(2\text{a}) \qquad \Phi\left(x_1, \ldots, x_m; K_1, \ldots, K_n, \mathsf{K}, \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 \mathsf{K}}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \mathsf{K}}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0.$$

Diese Methode hat *V. Volterra*[365a]) zuerst auf die „Integrodifferentialgleichung 2. Ordnung von elliptischem Typus“

$$(3\text{a}) \qquad \sum_{\nu=1}^{3} \left\{ \frac{\partial^2 \mathsf{K}(x_1, x_2, x_3; s, t)}{\partial x_\nu^2} + \int_t^s \frac{\partial^2 \mathsf{K}(x_1, x_2, x_3; s, r)}{\partial x_\nu^2} K_\nu(r, t)\, dr \right\} = 0$$

365) *L. Lichtenstein,* Math. Ztschr. 1 (1918), p. 229—284; 3 (1919), p. 172—174; 7 (1920), p. 126—231; 10 (1921), p. 130—159; 12 (1922), p. 201—218; 13 (1922), p. 82—118; 17 (1923), p. 62—110. — Diese Integrodifferentialgleichungen treten in speziellerer Gestalt bereits in den Untersuchungen von *A. Liapounoff* [Mém. Ac. imp. St. Pétersbourg (8) 17 (1905), Nr. 3, p. 1—31; Mém. prés. à l'Ac. imp. des sciences 1906, p. 1—225; 1914, p. 1—112] auf; vgl. den historischen Bericht bei *L. Lichtenstein,* Math. Ztschr. 1.

365a) *V. Volterra*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 19_1 (1910), p. 361—363 (mit einer Bemerkung über Ausdehnung auf nicht vertauschbare K_ν).

angewandt, die der Differentialgleichung

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{3}(1+z_\nu)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_\nu^2}=0$$

entspricht; aus der Potenzentwicklung ihrer Grundlösung

$$\zeta = c\left\{\sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu^2}{1+z_\nu}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

erhält er so, wenn er noch die Konstante c durch den willkürlichen Kern $C(s, t)$ ersetzt, als „Grundlösung" von (3a) die beständig konvergente Reihe

$$K(x_1, x_2, x_3; s, t) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\left\{C(s,t)+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\binom{-\frac{1}{2}}{p}\int_t^s C(s,r)\left[\sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu^2 R_\nu(r,t)}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right]^p dr\right\},$$

wo

$$R_\nu(s,t) = K_\nu - K_\nu^2 + K_\nu^3 \mp \cdots$$

die $1-(1+z_\nu)^{-1}$ entsprechende Resolvente des Volterraschen Kernes $K_\nu(s, t)$ bedeutet. Weiterhin hat *Volterra*[365b]) nach Übertragung der Greenschen Sätze der Potentialtheorie auf (3a) die Eindeutigkeit der Lösung der „1. und 2. Randwertaufgabe" für (3a) bewiesen; die Lösung dieser Randwertaufgaben hat *J. Pérès*[100]) mit Hilfe desselben Übertragungsprinzipes nach dem Muster der Potentialtheorie durch Zurückführung auf Integralgleichungen gegeben. Von verschiedenen Autoren sind sodann analoge Untersuchungen für Integrodifferentialgleichungen von hyperbolischem und parabolischem Typus[365c]) sowie für solche höherer Ordnung[365d]) durchgeführt worden. Auch durch geeignete Modifikationen des Volterraschen Prozesses sind gelegentlich weitere Integrodifferentialgleichungen der Behandlung erschlossen worden.[366])

365b) *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 18_1 (1909), p. 167—174; Acta math. 35 (1912), p. 295—356. — Die gleichen Entwicklungen für den zweidimensionalen Fall bei *L. Sinigallia,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 24_1 (1915), p. 325—330.

365c) *V. Volterra*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 19_1 (1910), p. 239—243; *G. C. Evans*[342]); *G. C. Evans,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_2 (1912), p. 25—31; ibid. 22_1 (1913), p. 855—860; Amer. Math. Soc. Trans. 15 (1914), p. 477—496.

365d) *J. Pérès,* Paris C. R. 156 (1913), p. 378—381; *G. C. Evans,* Amer. Math. Soc. Trans. 15 (1914), p. 215—226; *N. Zeilon,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 24_1 (1915), p. 584—587, 801—806. — Integrodifferentialgleichungen höherer Ordnung werden auch in den in [346]) aufgeführten Untersuchungen von *V. Volterra* angewendet.

366) *G. Giorgi,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_2 (1912), p. 683—688; *G. C. Evans*[342])[365d]); *E. Daniele,* Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 26_1 (1917), p. 302—308; *G. Doetsch,* Math. Ann. 89 (1923), vgl. [345]).

V. Volterra[367]) hat auch die Operation der Zusammensetzung 2. Art zur Bildung von Integrodifferentialgleichungen verwendet, in denen die auftretenden Integrale konstante Grenzen haben; sie entstehen aus der Differentialgleichung (2) durch den in Nr. **26** b, 1 geschilderten Prozeß der Ersetzung der Variablen z_ν durch vertauschbare Kerne 2. Art $z_\nu K_\nu$. Auch für sie kann er — analog der Aussage von Nr. **26** b, 2 über Integralgleichungen — eine Lösung angeben, die obendrein einer gewöhnlichen linearen Integralgleichung 2. Art genügt, wenn die Lösung von (2) ein Quotient beständig konvergenter Potenzreihen in $z_1, \ldots, z_n$ ist. Auf dieser Grundlage hat *V. Volterra* besonders die elliptische Integrodifferentialgleichung der Art (3a) mit konstanten Integrationsgrenzen behandelt.[368])

Über Verallgemeinerungen des Begriffes der Integrodifferentialgleichungen[368a]) vgl. Nr. **28**[375]).

28. Allgemeine nichtlineare Funktionaloperationen. Die mannigfaltigen Untersuchungen über nichtlineare Funktionaloperationen, Funktionen von Funktionen und Kurven (fonctions de lignes) u. dgl. haben die gemeinsame Tendenz, die Elemente der reellen und komplexen Funktionentheorie von einer oder mehreren Veränderlichen auf unendlichdimensionale Räume (unendlichviele Veränderliche unter verschiedenen Konvergenzbedingungen, Funktionsgesamtheiten verschiedener Art; vgl. Nr. **20**, **24**) zu übertragen. Sie stehen ihrem Ursprung und ihrer Fragestellung nach zum Teil in so engen Beziehungen zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen und der nichtlinearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, daß hier wenigstens die wichtigsten Arbeitsrichtungen kurz skizziert und dabei diejenigen Arbeiten auf-

367) *V. Volterra*[351]). Vgl. auch die Darstellung bei *V. Volterra,* Literatur B 6, Chap. XIII, wo zunächst die entsprechenden Sätze für endliche Matrizen entwickelt und die Integrodifferentialgleichungen durch Grenzübergang gewonnen werden.

368) *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 20_1 (1911), p. 95—99; 22_2 (1913), p 43—49.

368a) Die von *G. C. Evans* in den beiden letzten in [365c]) genannten Arbeiten, in [369]), Lect. IV sowie Rom Acc. Linc. Rend. (5) 28_1 (1919), p. 262—265 und Rendic. semin. matem. Roma 5 (1919), p. 29—48 behandelten „Integrodifferentialgleichungen von *Bôcher*schem Typus" stehen zu dem hier behandelten Gegenstand nur in loser Beziehung; sie bestehen im wesentlichen in der Umsetzung einer partiellen Differentialgleichung in eine Identität — im Falle zweier Unabhängiger — zwischen einem Integral über eine beliebige geschlossene Kurve und einem über das von dieser umschlossene Flächenstück, wie sie durch die Greenschen Sätze geliefert wird.

geführt werden sollen, die mit dem Auflösungsproblem mehr oder weniger zusammenhängen.[369])

Die durch absolut konvergente Potenzreihen definierten analytischen Funktionen unendlichvieler Veränderlicher, die *H. v. Koch*[312])[333]) zur Aufstellung und Auflösung nichtlinearer Gleichungssysteme benutzt hatte (s. Nr. 25a), hat *D. Hilbert*[370]), insbesondere auch im Hinblick auf analytische Fortsetzung, Gruppeneigenschaft u. dgl., näher untersucht; mit reellen Funktionen unendlichvieler Veränderlicher, insbesondere auch mit der Bestimmung ihrer Extremwerte sowie mit Anwendungen auf die partiellen Differentialgleichungen hat sich *J. Le Roux*[371]) befaßt. Die unendlichvielen Veränderlichen sind bei diesen Untersuchungen zumeist an die Bedingung $|x_p| \leqq R_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ gebunden.

M. Fréchet[372]) hat seine Untersuchungen über lineare Funktionaloperationen (Nr. 24b) unter Zugrundelegung der nämlichen Entfernungsbegriffe auf nichtlineare Operationen im Funktionenraum ausgedehnt und hat da insbesondere für stetige Funktionaloperationen das Analogon des Weierstraßschen Satzes über Approximation durch Polynome entwickelt. In systematischer Weise hat *V. Volterra*[373]) in

369) Vgl. außer den beiden in [295]) genannten Encyklopädiereferaten die zusammenfassenden Darstellungen von *G. C. Evans,* Functionals and their applications (Cambridge Colloqu. 1916, New York 1918, 136 S.; s. auch Amer. Math. Soc. Bull. 25 (1919), p. 461—463), *P. Lévy*[295]) sowie *G. Doetsch,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 36 (1927), p. 1—30.

370) *D. Hilbert,* Palermo Rend. 27 (1909), p. 59—74. Vgl. dazu auch *W. D. A. Westfall,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 16 (1910), p. 230; Palermo Rend. 39 (1915), p. 74—80 (Polynome von unendlichvielen Variablen); *H. Bohr,* Gött. Nachr. 1913, p. 441—488 (Anwendung auf Dirichletsche Reihen unter Benutzung eines Resultates von *O. Toeplitz*[134])); *R. Gâteaux,* Bull. Soc. Math. Fr. 47 (1919), p. 70—96 (anderer Bereich der Veränderlichen); *E. H. Moore,* Math. Ann. 86 (1922), p. 30—39 (Einreihung in die general analysis).

371) *J. Le Roux,* Trav. Univ. Rennes 1 (1902), p. 237—250; 2 (1903), p. 23—29, 293—303; J. de Math. (5) 9 (1903), p. 403—455; Nouv. Ann. (4) 4 (1904), p. 448—458; Paris C. R. 150 (1910), p. 88—91, 202—204, 377—378.

372) *M. Fréchet,* Paris C. R. 139 (1904), p. 848—850; 140 (1905), p. 27—29, 567—568, 873—875; 148 (1909), p. 155—156; 150 (1910), p. 1231—1233; Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 193—216. Diese Untersuchungen wurden weiter ausgedehnt von *R. Gâteaux,* Paris C. R. 157 (1913), p. 325—327; Rom Acc. Linc. Rend. (5) 22_2 (1913), p. 646—648; 23_1 (1914), p. 310—315, 405—408, 481—486; Bull. Soc. Math. Fr. 47 (1919), p. 47—70; 50 (1922), p. 1—37; vgl. auch *P. Lévy.* Paris C. R. 168 (1919), p. 752—755; 169 (1919), p. 375—377.

373) *V. Volterra* hat selbst zusammenfassende Darstellungen seiner Entwicklungen (Erste Veröffentlichungen: Rom Acc. Linc. Rend. (4) 3_2 (1887), p. 97—105, 141—146, 153—158, 225—230, 274—281, 281—287; 4_1 (1888), p. 107—115, 196—202) in seinen Leçons sur les équations aux dérivées partielles, Stockholm

seiner Theorie der „fonctions de lignes“ die Grundbegriffe der Analysis, wie partielle Ableitung, Differential, Taylorsche Reihe auf Funktionaloperationen übertragen; von den neuen Problemen, die damit entstehen, sind hier die Frage der Umkehrung von Funktionaltransformationen[374]) [Verallgemeinerung der Lösung der nichtlinearen Integralgleichungen (Nr. 25) und Integrodifferentialgleichungen (Nr. 27)] sowie das Problem der „équations aux dérivées fonctionelles“[375]) (das Analogon der partiellen Differentialgleichungen und Integrodifferentialgleichungen) hervorzuheben.

Endlich ist hier noch auf die wichtige Rolle zu verweisen, die die Betrachtung der Funktionaloperationen und der Funktionen von Funktionen in der neueren Variationsrechnung spielt.[375a])

(Upsala 1906 und Paris 1912, 82 S.), Leç. I, V, VI, VII sowie in Literatur A 9, Chap. I und Literatur B 6, Chap. I—IV gegeben. Über den Begriff des Differentials vgl. auch *M. Fréchet,* Amer. Math. Soc. Trans. 15 (1914), p. 135—161. — Beispiele für den Zusammenhang mit Integralgleichungen bei *E. Daniele,* Atti Acc. Gioen. (5) 8 (1915), mem. 13, 9 S. und *E. Le Stourgeon,* Amer. Math. Soc. Trans. 21 (1920), p. 357—383.

374) *G. C. Evans,* Proc. 5. Congr. of Math. Cambridge 1912, I, p. 387—396; *A. A. Bennett,* Nat. Ac. Proc. 2 (1916), p. 592—598; Amer. Math. Soc. Bull. 23 (1916), p. 209; *P. Lévy,* Paris C. R. 168 (1919), p. 149—152; Bull. Soc. Math. Fr. 48 (1920), p. 13—27; *J. A. Barnett*[319]). — *G. D. Birkhoff* u. *O. Kellogg,* Amer. Math. Soc. Trans. 23 (1922), p. 96—115, haben durch Anwendung topologischer Gesichtspunkte (Existenz eines Fixpunktes bei stetiger Deformation) ein allgemeines Existenztheorem für nichtlineare Funktionalgleichungen der Form $\varphi(s) = \mathfrak{F}(\varphi(s))$ gegeben.

375) *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 23_1 (1914), p. 393—399, 551—557 behandelt *lineare* Gleichungen dieser Art durch Zurückführung auf Integrodifferentialgleichungen 1. Ordn. vom Typus Nr. 24 d, (2) (oder allgemeiner auf solche, in denen an Stelle der Integrale allgemeine Funktionaltransformationen der unbekannten Funktionen auftreten), genau wie man lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordn. auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführt; *E. Freda,* ibid. 24_1 (1915), p. 1035—1039; *J. A. Barnett*[319]). — Weitere Klassen hierher gehöriger funktionaler Differentialgleichungen, die in gewissem Sinne totalen Differentialgleichungen analog sind, gehen auf das Vorbild der Relationen für die Variation Greenscher Funktionen zurück, die *J. Hadamard* aufgestellt und untersucht hatte (Paris C. R. 136 (1903), p. 351—354; Mémoir. Sav. étrang. Paris 33 (1908), Nr. 4, 128 S.; Leçons sur le calcul des variations, I (Paris 1910), p. 303—312); sie hat *P. Lévy* eingehend behandelt: Paris C. R. 151 (1910), p. 373—375, 977—979; 152 (1911), p. 178—180; 154 (1912), p. 56—58, 1405—1407; 156 (1913), p. 1515—1517, 1658—1660; J. Éc. Polyt. (2) 17 (1913), p. 1—120 (= thèse, Paris); Palermo Rend. 33 (1912), p. 281—312; 34 (1912), p. 187—219; 37 (1914), p. 113—168. Vgl. auch *J. Hadamard,* Paris C. R. 170 (1920), p. 355—359; *G. Julia,* ibid. 172 (1921), p. 568—570, 738—741, 831—833.

375a) Man vgl. hierüber etwa *L. Tonelli,* Fondamenti di calcolo delle variazioni, T. I (Bologna 1921), T. II (1923), insbes. Cap. V—XII von T. I und Cap. I, V von T. II sowie *R. Courant,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), p. 90—117.

29. Numerische Behandlung linearer und nichtlinearer Probleme.[376]) Für die angenäherte Auflösung der linearen Integralgleichungen 2. Art ist die Mehrzahl der theoretisch gegebenen Methoden (vgl. Nr. **9** und **10**) nur von geringem Nutzen. Alle Methoden, die das Problem auf die Aufgabe der Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten zurückführen, wie z. B. die Methode des Grenzübergangs aus *Hilberts* erster Mitteilung (vgl. Nr. **1** a und [54])), bedeuten numerisch keine wesentliche Förderung[377]); denn die numerische Auflösung eines endlichen linearen Systems mit einer größeren Zahl von Unbekannten stellt ein im Grunde nicht viel einfacheres Problem dar, für dessen praktische Bewältigung vor allem die dem Algebraiker und dem Zahlentheoretiker wichtigen Determinantenformeln im allgemeinen ausscheiden.[378]) Aus demselben Grunde kommt auch die *Fredholm*sche Auflösungsformel, die der Determinantenformel analog ist, in der Regel nicht in Betracht.

Eine Ausnahme bildet das in Nr. **10** a ausführlich dargestellte *Abspaltungsverfahren von E. Schmidt.* Bei seiner praktischen Durchführung kommt alles darauf an, durch geschickte Wahl der Funktionen $u_1, \ldots, u_n$; $v_1, \ldots, v_n$ zu erreichen, daß $H(s, t) = K(s, t) - u_1(s)v_1(t) - \cdots - u_n(s)v_n(t)$ bei verhältnismäßig niedrigem n möglichst klein ausfällt; denn von der Kleinheit von H hängt die Güte der Konvergenz der Entwicklung nach Iterierten ab, von der Größe von n aber die Rechenarbeit bei der Auflösung der n linearen Gleichungen, auf die das Verfahren die Integralgleichung zurückführt. Auch hier ist also schließlich ein endliches System aufzulösen; aber der prinzipielle Unterschied liegt darin, das man ein einziges solches System mit einem niedrigen n, nicht eine Kette solcher Systeme mit wachsendem n zu lösen hat.[378a])

---

376) Die numerische Behandlung der Eigenwertprobleme ist hier alsbald mit einbezogen.

377) Die Annäherung einer Kurve durch Treppenfiguren ist ein numerisch recht ungünstiges Verfahren. Wenn also *L. Ballif,* Ens. math. 18 (1916), p. 111—116 einen aus n kommunizierenden Röhren bestehenden mechanischen Apparat zur Auflösung von n linearen Gleichungen beschreibt, um damit durch den eben genannten Grenzübergang lineare Integralgleichungen aufzulösen, so wirkt die Ungünstigkeit dieser Approximation dem Vorteil seiner Apparatur entgegen.

378) Vgl. die Artikel von *C. Runge,* Encykl. I B 3a, Nr. **15**, p. 448 und von *J. Bauschinger,* I D 2, Nr. **11**, p. 791. Die dort allein in Betracht gezogene sukzessive Approximation ist auf Integralgleichungen ebensogut direkt anwendbar (Entwicklung nach Iterierten, vgl. Nr. **3**, **10** a, 2 und **11** a).

378a) Eine Modifikation bei *H. Bateman,* London Roy. Soc. Proc. A 100 (1922), p. 441—449. — *F. Tricomi,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 33_1 (1924), p. 483

Ferner hat *D. Enskog*[72])[66]) sein in Nr. **15** e angegebenes Auflösungsverfahren praktisch erprobt und den numerischen Ansatz anwendungsbereit dargestellt. Das dürften die beiden einzigen vorliegenden Methoden von *allgemeiner* Anwendbarkeit sein.[379])

Für die angenäherte Auflösung von unendlichvielen linearen Gleichungen gilt in sinngemäßer Übertragung genau das gleiche. Hier hat *E. Goldschmidt*[189]) die verschiedenen in Betracht kommenden Methoden einer vergleichenden theoretischen und praktischen Prüfung unterzogen und ist zu dem entsprechenden Ergebnis gekommen: das Abspaltungsverfahren tritt wieder in den Vordergrund und ist hier noch bequemer in Gang zu setzen, da man sich nur einen passenden *Abschnitt* auszusuchen braucht.

Bei den unendlichvielen Veränderlichen tritt noch deutlicher als bei den Integralgleichungen in Erscheinung, daß das Problem der Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten schon genau die gleichen Schwierigkeiten enthält, und daß umgekehrt das wenige, was hier zu wirklicher numerischer Bearbeitung erdacht worden ist, unmittelbar auch für unendliche Systeme wirksam ist. Hier hat *Ph. L. Seidel*[379a]) die Ausgleichung eines Systems mit einer großen Anzahl von Unbekannten (sein System enthält 72 Unbekannte) bearbeitet. Die Ausgleichung erfordert, die Quadratsumme Q der linken Seiten der Gleichungen zum Minimum zu machen. Es ist dies genau der Kunstgriff der Zurückführung des Systems $\mathfrak{A}$ auf das System $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$, der in Nr. **10** b, 1 und Nr. **18** b, 3 besprochen worden ist — nur daß dort, was nebensächlich ist, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ statt $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ gebildet wurde; vom Standpunkt der Ausgleichungsrechnung erscheint er als selbstverständlich, und Seidel unterläßt es nicht zu bemerken, daß er auch dann brauchbar bleibt, wenn die Zahl der Gleichungen die der Unbekannten nicht übertrifft, so daß es sich nur um gewöhnliche Auflösung handelt.

—486; 33_2 (1924), p. 26—30 schätzt die durch den Kern endlichen Ranges geleistete Annäherung mit den Mitteln des Hadamardschen Determinantensatzes ab.

379) Volterrasche Kerne von dem besonderen Typus $K(s, t) = k(t - s)$ behandelt *E. T. Whittaker*[292]) numerisch nach verschiedenen, auf den speziellen Fall zugeschnittenen Methoden.

379a) *Ph. L. Seidel*, Münch. Akad. Abh. 11 (1874), 3. Abt., p. 81—108. — Aus einem Brief von Gauß an Gerling vom 26. 12. 1823 (*C. F. Gauß,* Werke IX, p. 279f.; vgl. auch *Ch. L. Gerling,* Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, Hamburg und Gotha 1843, p. 386—393), ergibt sich, daß *Gauß* bereits damals im Besitze der Seidelschen Methode gewesen ist.

Dieses symmetrische System nun behandelt *Seidel* mittels eines Reduktionsverfahrens, das sich auf die nämliche Formel stützt wie die Lagrangesche Transformation der quadratischen Form auf eine Summe von Quadraten; er hält dieses an sich für brauchbarer als die Methode, die er als Student bei *C. G. J. Jacobi* kennen gelernt hatte, als er ihm behilflich war, die Leverrierschen Gleichungen für die Säkularstörungen der sieben Planeten genauer nachzurechnen. *Jacobi*[379b]) hatte dieses Eigenwertproblem einer quadratischen Form von sieben Veränderlichen behandelt, indem er sich auf den Satz stützte, daß eine binäre orthogonale Transformation von x_p, x_q allein, die das Glied $a_{pq}x_px_q$ beseitigt, die Quadratsumme der *außerhalb* der Diagonale stehenden Koeffizienten der Form um $2a_{pq}^2$ vermindert; nachdem er durch zehn solche vorbereitende binäre Transformationen alle beträchtlichen, außerhalb der Diagonale stehenden Glieder beseitigt hatte, hatte er das Eigenwertproblem der so präparierten Form durch eine Art von sukzessiver Näherung behandelt. Diese Methode von Jacobi ist dort, wo es sich nicht um die Herstellung der gesamten Eigenwerte und Eigenlösungen handelt, sondern nur um die *Auflösung* der Gleichungen, in der Tat ein Umweg, und das Verfahren von Seidel oder die in Nr. **18** b, 3 geschilderten Methoden (Jacobische Transformation oder Entwicklung nach Iterierten in dem von *Hilb* gegebenen Arrangement) sind dafür angemessener.

Für die numerische Behandlung der Eigenwerttheorie aber bleibt Jacobis Verfahren gewiß von Interesse. Auf diesem Gebiet ist späterhin erhebliches hinzugekommen.[380]) *W. Ritz*[123]) hat allerdings seine Rechnungen durchweg an Eigenwertprobleme für *Differential*gleichungen angeknüpft. Aber *R. Courant*, der die Ritzschen Untersuchungen im Anschluß an *Hilbert*sche Methoden in mannigfacher Weise ausgebaut hat, hat gelegentlich[67])[422]) (vgl. Nr. **10** b, 3 und Nr. **33** d) ihre Auswertung für Integralgleichungen ausgeführt (vgl. dazu auch Nr. **45** c).

379b) *C. G. J. Jacobi*, Astron. Nachr. 22 (1844), Nr. 523 = Werke, Bd. 3, p. 467—478; J. f. Math. 30 (1846), p. 51—94 = Werke, Bd. 7, p. 97—144.

380) Auch die Rechnungen von *G. W. Hill*[12]) gehören eigentlich hierher, da es sich bei ihnen in Wahrheit nicht um ein Auflösungsproblem, sondern um ein Eigenwertproblem gehandelt hat, das dann in den daran anschließenden Arbeiten von *H. v. Koch* ganz in den Hintergrund getreten ist.

III. Eigenwerttheorie.

A. Integralgleichungen mit reellem symmetrischem Kern.

Die von *D. Hilbert*[35]) entwickelte, von *E. Schmidt*[41]) neu begründete Eigenwerttheorie[381]) behandelt eine Integralgleichung 2. Art

$$(i) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b k(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \qquad (a \leqq s \leqq b),$$

deren *Kern* $k(s,t)$ *eine reelle symmetrische Funktion der im Intervall* (a, b) *variierenden reellen Veränderlichen* s, t *ist:*

$$(1) \qquad k(s,t) = k(t,s) \qquad (a \leqq s,\ t \leqq b);$$

λ ist ein unbestimmter, beliebiger reeller und komplexer Werte fähiger Parameter. Zur Vereinfachung der Darstellung sei zunächst die für die Gültigkeit der Theorie übrigens nicht wesentliche Annahme (s. Nr. **36**a) gemacht, daß $k(s,t)$ *eine stetige Funktion ihrer beiden Veränderlichen sei.*

30. Eigenwerte und Eigenfunktionen. *Eigenwert* (*constante caractéristique, valori eccezionali*) *des Kernes* $k(s,t)$ heißt ein Wert von λ, für den die zu (i) gehörige homogene Integralgleichung

$$(i_h) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b k(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

eine nicht identisch verschwindende stetige (reelle oder komplexe) Lösung $\varphi(s)$ besitzt; jede solche Lösung heißt eine *zu dem Eigenwert* λ *gehörige Eigenfunktion* (*fonction fondamentale, normal fonction*)[382]). Es bestehen nun die folgenden grundlegenden Tatsachen:

---

381) Vgl. die Darstellung der historischen Entwicklung des Gegenstandes in Nr. **1**, **6** und **7**, die übrigens im folgenden nicht vorausgesetzt wird. Die *Hilbert*sche Theorie wird im folgenden nach dem Abdruck seiner 1. Mitteil. (Gött. Nachr. 1904, p. 49—91) in den „Grundzügen“, 1. Abschnitt, die von ihr unabhängige Theorie von *E. Schmidt* nach dem Abdruck seiner Dissertation[41]) in Math. Ann. 63, p. 433—476 zitiert. — Über die Begründung der Eigenwerttheorie durch die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen vgl. Nr. **40**e.

382) In dieser Form stehen die Definitionen an der Spitze der Theorie von *E. Schmidt*[381]), § 4; sie setzen die Analogie mit den Längen und Richtungen der Hauptachsen einer quadratischen Fläche im n-dimensionalen Raum (s. Nr. **1**) sowie mit den ausgezeichneten Parameterwerten und Eigenschwingungen der Eigenschwingungstheorie (s. Nr. **6**) in Evidenz. Bei *Hilbert*[381]), p. 14, 16 entstehen Eigenwerte und Eigenfunktionen durch den Grenzübergang aus dem algebraischen Problem (s. Nr. **33**b).

a) Jeder Eigenwert ist reell.[383]) Denn aus (i_h) folgt nach Multiplikation mit der zu $\varphi(s)$ konjugiert komplexen Funktion $\overline{\varphi}(s)$ und Integration von a bis b:

$$\int_a^b \varphi(s)\overline{\varphi}(s)\,ds = \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds = \lambda \int_a^b\int_a^b k(s,t)\overline{\varphi}(s)\varphi(t)\,ds\,dt,$$

und hieraus ergibt sich die Behauptung, da das Doppelintegral wegen (1) reell und $\int_a^b |\varphi(s)|^2 ds$ reell und > 0 ist. Bei reellem λ genügen Real- und Imaginärteil von $\varphi(s)$ selbst der Gleichung (i_h); man betrachtet daher *nur reelle Eigenfunktionen.*

b) Zu jedem Eigenwert λ gehört eine endliche Anzahl n linear unabhängiger Eigenfunktionen; λ heißt alsdann ein n-facher Eigenwert. Das ist eine unmittelbare Folge des Satzes 1 von Nr. **10**. *E. Schmidt*[384]) beweist sie unabhängig davon auf Grund der Bemerkung, daß jede mit konstanten Koeffizienten gebildete lineare homogene Kombination aus zu λ gehörigen Eigenfunktionen wieder eine solche ist; er bildet nämlich mit seinem Orthogonalisierungsprozeß[111]) (vgl. Nr. **15** a, (4)) aus n zu λ gehörigen linear unabhängigen Eigenfunktionen n zueinander in bezug auf das Intervall (a, b) orthogonale und normierte Eigenfunktionen und erhält durch Anwendung der Besselschen Ungleichung[385]) die Abschätzung

$$(2) \qquad n \leqq \lambda^2 \int_a^b\int_a^b k(s,t)^2\,ds\,dt.$$

383) *D. Hilbert*[381]), p. 13f. durch Grenzübergang aus dem entsprechenden algebraischen Satz (Realität der Wurzeln der Säkulargleichung). — *E. Schmidt*[381]), § 4 führt den schon von *S. D. Poisson,* Bull. Soc. philomat. 1826, p. 147 für die Realität der ausgezeichneten Parameterwerte von Randwertaufgaben und von *A. Cauchy,* Exerc. de math. 4 (1829), p. 140 = Oeuvres, 2. sér., t. IX, p. 174—195 für die Realität der Wurzeln der Säkulargleichung gegebenen Beweis direkt für die Integralgleichung durch, was sich von der Anordnung des Textes nur unwesentlich durch Vorwegnahme von c) unterscheidet.

384) *E. Schmidt*[381]), § 5.

385) Über diese *Besselsche Ungleichung* vgl. Encykl. II C 11, Nr. **2**, (6), *Hilb-Szász;* sie besagt, daß, wenn $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ normierte Orthogonalfunktionen sind, für jede stetige (und sogar jede quadratisch integrierbare) Funktion $u(s)$ gilt:

$$\left[\int_a^b u(s)\varphi_1(s)\,ds\right]^2 + \cdots + \left[\int_a^b u(s)\varphi_n(s)\,ds\right]^2 \leqq \int_a^b u(s)^2\,ds.$$

Vgl. dazu auch Nr. **15** a, (2a) und [109]).

c) Zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \lambda^*$ gehörige Eigenfunktionen $\varphi(s)$, $\varphi^*(s)$ sind zueinander orthogonal:

$$\int_a^b \varphi(s)\,\varphi^*(s)\,ds = 0, \tag{3}$$

wie unmittelbar aus den für λ, λ^* angesetzten Gleichungen (i_h) folgt[386]. Ordnet man jedem n-fachen Eigenwert wie in b) ein System von n orthogonalen und normierten Eigenfunktionen zu, so erhält man ein normiertes Orthogonalsystem von (höchstens abzählbar unendlichvielen) Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ (*vollständiges normiertes Orthogonalsystem von* $k(s, t)$) derart, *daß jede Eigenfunktion von* $k(s, t)$ *eine lineare homogene Kombination von endlichvielen* $\varphi_\nu(s)$ *mit konstanten Koeffizienten ist.*[384]) In der gleich numerierten Reihe der entsprechenden Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tritt jeder Eigenwert so oft auf, wie seine Vielfachheit angibt. Durch Anwendung der Besselschen Ungleichung auf eine Anzahl der $\varphi_\nu(s)$ schließt *E. Schmidt*[384]) analog zu (2) für jede Anzahl dieser Eigenwerte

$$\sum_{(\nu)} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leq \int_a^b\!\!\int_a^b k(s, t)^2\, ds\, dt; \tag{4}$$

also *existieren höchstens abzählbar unendlichviele Eigenwerte, und falls unendlichviele existieren, haben sie im Endlichen keine Häufungsstelle:*

$$\lim_{\nu = \infty} \lambda_\nu = \infty,$$

und die Summe ihrer reziproken Quadrate, ein jedes nach seiner Vielfachheit gezählt, konvergiert und genügt (4)[387]).

d) Die Frage nach der Existenz der Eigenwerte greift über den Bereich dieser mehr formalen Aussagen hinaus (s. Nr. 33). Jedoch kann man hier bereits folgendes aussagen: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von $k(s, t)$ und $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen, so hat der durch Subtraktion der endlichen Summe

$$k^*(s, t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \tag{5}$$

386) *D. Hilbert*[381]), p. 17; *E. Schmidt*[381]), § 4. Das Verfahren entspricht formal vollständig dem, das man seit *S. D. Poisson*[383]) zum Beweis der Orthogonalität der ausgezeichneten Lösungen des Eigenschwingungsproblems verwendet.

387) Ein Teil dieser Aussagen folgt auch aus der Tatsache, daß die λ_ν die Nullstellen der Fredholmschen ganzen Transzendenten $\delta(\lambda)$ sind (vgl. Nr. 9 Ende). — Bei Summation über *alle* Eigenwerte geht (4) in eine *Gleichung* über s. Nr. **34 a**, (25).

von k entstehende Kern

$$k(s,t) - k^*(s,t) = k(s,t) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \tag{6}$$

keine der Funktionen $\varphi_\nu(s)$ *mehr zur Eigenfunktion;* sind ferner alle anderen Eigenwerte von $k(s,t)$ von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ verschieden, so hat $k - k^*$ *keines der* λ_ν *mehr zum Eigenwert.* Alle übrigen Eigenfunktionen und Eigenwerte von $k(s,t)$ aber stellen die sämtlichen Eigenfunktionen und Eigenwerte von $k - k^*$ dar[388]. Die gleichen Schlüsse sind für unendlichviele Eigenwerte und Eigenfunktionen jedenfalls dann möglich, wenn die entsprechend (5) gebildete unendliche Reihe gleichmäßig konvergiert; die allgemeine Überwindung dieser Schwierigkeit ist ein Hauptpunkt der Theorie (vgl. Nr. **34** a).

e) Eine stetige Funktion $\chi(s)$, für die

$$\int_a^b k(s,t)\,\chi(t)\,dt = 0 \tag{7}$$

ist, kann man als *eine zum Eigenwert* ∞ *gehörige Eigenfunktion* bezeichnen (vgl. Nr. 7); die Schlüsse von b) lassen sich nicht übertragen, es kann tatsächlich — z. B. bei dem Kern (5) — unendlichviele linear unabhängige solche Eigenfunktionen geben. Jedoch ergibt sich unmittelbar, daß auch eine solche Eigenfunktion $\chi(s)$ orthogonal zu jeder zu einem endlichen Eigenwert gehörigen Eigenfunktion $\varphi_\nu(s)$ ist:

$$\int_a^b \chi(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{7'}$$

Weiterhin aber folgt umgekehrt (7) aus dem Bestehen von (7′) für *alle* Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$; diese Tatsache liegt wesentlich tiefer und ergibt sich erst aus dem Entwicklungssatz (24) oder (24a) von Nr. **34** a[389]).

Ein Kern, der keine zum Eigenwert ∞ gehörige stetige Eigenfunktion besitzt, heißt *abgeschlossen.*[390])

31. Die iterierten und assoziierten Kerne.

a) Die in Nr. **11** dargelegten *Beziehungen zwischen einem Kern und seinen iterierten Kernen* lassen sich bei reellen stetigen symme-

---

388) Diese in den Betrachtungen von *Hilbert* und *Schmidt*[381]) enthaltenen Tatsachen ergeben sich unmittelbar durch formale Rechnung mit Hilfe von (3) und (7′). — Übrigens löst (6) unmittelbar die Aufgabe, einen Kern mit endlichvielen beliebig vorgegebenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ als Eigenwerten und n beliebigen normierten Orthogonalfunktionen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ als Eigenfunktionen zu bilden.

389) *E. Schmidt*[381]), § 9.

390) *D. Hilbert*[381]), p. 23.

trischen Kernen $k(s, t)$ weiter ausgestalten und führen zu folgenden für den Aufbau der Theorie wichtigen Ergebnissen: Jeder iterierte Kern $k^{(n)}(s, t)$ ist wiederum reell, stetig und symmetrisch und ist für ein nicht identisch verschwindendes $k(s, t)$ nicht identisch Null, und jede Spur von geradem Index (vgl. Nr. **11**, (5)) ist positiv[391]):

$$(8) \qquad u_{2n} = \int_a^b k^{(2n)}(s, s)\, ds = \int_a^b\!\!\int_a^b [k^{(n)}(s, t)]^2\, ds\, dt > 0.$$

Die n^{ten} Potenzen der Eigenwerte von $k(s, t)$ stellen die sämtlichen Eigenwerte von $k^{(n)}(s, t)$ dar; jedes vollständige normierte Eigenfunktionssystem des einen der beiden Kerne hat die gleiche Bedeutung für den anderen[392]).

b) Jeder der in Nr. **11** d) definierten *assoziierten Kerne*

$$(9) \qquad \frac{1}{n!}\, k\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} k(s_1, t_1) & \ldots & k(s_1, t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k(s_n, t_1) & \ldots & k(s_n, t_n) \end{vmatrix}$$

ist für symmetrisches $k(s, t)$ symmetrisch in den Variablenreihen $s_1, \ldots, s_n$ einerseits und $t_1, \ldots, t_n$ andererseits. Betrachtet man ihn als Kern einer Integralgleichung in n Veränderlichen (vgl. Nr. **13** a, **36** b)

$$(10) \quad \varphi(s_1, \ldots, s_n) = \mu \int_a^b \cdots \int_a^b k\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} \varphi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n,$$

so besitzt er als Eigenwerte die Produkte von je n Eigenwerten von $k(s,t)$

$$(10\text{a}) \qquad \mu = \lambda_{\alpha_1} \cdot \lambda_{\alpha_2} \ldots \lambda_{\alpha_n},$$

als zugehörige Eigenfunktionen die aus den entsprechenden Eigenfunktionen des vollständigen Systems von $k(s, t)$ gebildeten Determinanten

$$(10\text{b}) \qquad \varphi(s_1, \ldots, s_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(s_1) & \ldots & \varphi_{\alpha_1}(s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\alpha_n}(s_1) & \ldots & \varphi_{\alpha_n}(s_n) \end{vmatrix},$$

und diese liefern, für alle Indizeskombinationen gebildet, sein vollständiges Eigenfunktionensystem.[393]) *O. D. Kellogg*[394]) hat auf Grund

---

391) *E. Schmidt*[381]), § 6, § 11 Anfang. — *A. Kneser,* Festschr. f. H. A. Schwarz (Berlin 1914), p. 177—191, hat in Analogie zu der *Kummer*schen Darstellung der Diskriminante der Säkulargleichung durch eine Quadratsumme eine Darstellung gewisser Determinanten aus den u_n durch Integrale über Quadrate von Determinanten aus den $k^{(n)}(s, t)$ gegeben.

392) *D. Hilbert*[381]), p. 20 sowie Grundzüge, 2. Abschn., p. 69 f. (Satz 23, 24) für $n = 2$; *E. Schmidt*[381]), § 6.

393) *J. Schur*[79]), insbes. § 7, § 15. Vgl. auch Nr. **39** b[494]).

394) *O. D. Kellogg,* Amer. J. 40 (1918), p. 145—154.

dieser Tatsache nachgewiesen, daß die Ungleichungen

$$(11)\qquad k\binom{s_1,\ldots,s_n}{s_1,\ldots,s_n} > 0,\quad k\binom{s_1,\ldots,s_n}{t_1,\ldots,t_n} \geqq 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} a < s_1 < \cdots < s_n < b \\ a < t_1 < \cdots < t_n < b \\ \qquad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

hinreichend dafür sind, daß je eine Eigenfunktion mit 0, 1, 2, ... Nullstellen im Intervall $a < s < b$ vorhanden ist, und daß die Nullstellen zweier Funktioneu mit benachbarter Nullstellenzahl sich trennen.

32. Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte.

a) Im Mittelpunkt der *Hilbert*schen Theorie steht das folgende von der willkürlichen stetigen Funktion $x(s)$ abhängige Doppelintegral[395])

$$(12)\qquad \mathfrak{K}(x, x) = \int_a^b\!\!\int_a^b k(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt,$$

die sog. *zum Kern $k(s, t)$ gehörige quadratische Integralform.* Ist $\varphi_\nu(s)$ eine zum Eigenwert λ_ν gehörige normierte Eigenfunktion, so folgt unmittelbar

$$(12\text{a})\qquad \mathfrak{K}(\varphi_\nu, \varphi_\nu) = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b \varphi_\nu(s)^2 ds = \frac{1}{\lambda_\nu},$$

d. h. die reziproken Eigenwerte sind jedenfalls in der Menge der Werte enthalten, die $\mathfrak{K}(x, x)$ unter der Nebenbedingung

$$(13)\qquad \int_a^b x(s)^2 ds = 1$$

annimmt.

Für einen Kern $k^*(s, t)$ mit endlichvielen Eigenwerten (5) ergibt sich aus (5) die Formel

$$\int_a^b\!\!\int_a^b k^*(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu}\Big(\int_a^b \varphi_\nu(s)\, x(s)\, ds\Big)^2;$$

es ist das *Fundamentaltheorem*[395]) der Hilbertschen Theorie (für den Beweis s. Nr. **33** b und [436])), daß die gleiche Formel für *jeden* Kern gilt, wobei die Summe über alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen zu erstrecken ist und absolut und für alle (13) genügenden Funktionen gleichmäßig konvergiert:

$$(14)\qquad \mathfrak{K}(x, x) = \int_a^b\!\!\int_a^b k(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\nu)} \frac{1}{\lambda_\nu}\Big(\int_a^b \varphi_\nu(s)\, x(s)\, ds\Big)^2;$$

---

395) *D. Hilbert*[381]), p. 19 f.; der Name Grundzüge, p. XI. In der algebraischen Analogie von Nr. **1** a entspricht $\mathfrak{K}(x, x)$ einer quadratischen Form von n Veränderlichen, die Formel (14) ihrer Hauptachsentransformation (2 a), (2 b) von Nr. **1**; über diese Analogie und ihre Bedeutung für die Hilbertsche Theorie vgl. im übrigen Nr. **1** und **6**.

im selben Sinne gilt für die zugehörige *bilineare Integralform* (Polarform):

$$(14\text{a})\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}(x, y) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b k(s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt \\ \quad = \sum\limits_{(\nu)} \frac{1}{\lambda_\nu} \int\limits_a^b \varphi_\nu(s)\, x(s)\, ds \int\limits_a^b \varphi_\nu(s)\, y(s)\, ds. \end{cases}$$

b) Ein Kern heißt *eigentlich positiv definit*[396]), wenn die Integralform $\mathfrak{K}(x, x)$ für jedes nicht identisch verschwindende stetige $x(s)$ positiv ist; er heißt schlechthin *positiv definit* (oder auch *von positivem Typus*[397])), wenn $\mathfrak{K}(x, x)$ niemals negativ ist; ein eigentlich definiter Kern ist stets abgeschlossen.[396]). Nach (12a) und (14) ist ein Kern dann und nur dann definit, wenn seine Eigenwerte durchweg positiv sind.[398]) Ein anderes, gleichfalls einer bekannten Eigenschaft endlicher quadratischer Formen analoges notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür hat *J. Mercer*[397]) angegeben: es müssen die sämtlichen Spuren der assoziierten Kerne nicht negativ sein, d. h.

$$(15)\qquad \int\limits_a^b \cdots \int\limits_a^b k\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_n \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

oder — was genau dasselbe besagt — es müssen die Integranden $k\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} \geqq 0$ für alle $s_1, \ldots, s_n$ sein, falls sie stetig sind. Definite Kerne erhält man, wie unmittelbar ersichtlich, durch Iteration eines symmetrischen Kernes, oder — etwas allgemeiner — durch Zusammensetzung eines beliebigen reellen unsymmetrischen Kernes $G(s, t)$ mit seinem transponierten: $\int\limits_a^b G(s, r)\, G(t, r)\, dr.$[399])

c) Aus der Darstellung (14) folgt unter Heranziehung der Besselschen Ungleichung[385]) unmittelbar, daß *der größte Wert, den* $|\mathfrak{K}(x, x)|$ *unter der Nebenbedingung* (13) *annimmt, der reziproke absolut kleinste Eigenwert* ist, und daß dieser Wert nur angenommen wird, wenn $x(s)$ einer zugehörigen Eigenfunktion gleich ist. Sind positive Eigenwerte

396) *D. Hilbert*[381]), Kap. V, p. 28.

397) *J. Mercer*, Phil. Trans. Roy. Soc. London 209 A (1909), p. 415—446; Proc. Roy. Soc. London (A) 83 (1910), p. 69—70.

398) *D. Hilbert*[396]). Anderer Beweis bei *H. Bateman*, Rep. Brit. Assoc. 77 (1907), p. 447—449.

399) Vgl. hierzu auch *H. Bateman*, Messenger 37 (1907), p. 91—95. Andersartige Beispiele definiter Kerne bzw. Kriterien geben *J. Mercer*[397]); *W. H. Young*, Mess. of Math. 40 (1911), p. 37—43; *J. Schur*, Math. Ztschr. 7 (1920), p. 232—234.

vorhanden, so ist *der größte (positive) Wert von $\mathfrak{K}(x, x)$ unter der gleichen Nebenbedingung gleich dem reziproken kleinsten positiven Eigenwert* und wird für eine zugehörige Eigenfunktion angenommen; analoges gilt für negative Werte.[400]) In gleicher Weise lassen sich die *weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen* durch Maximaleigenschaften von $\mathfrak{K}(x, x)$ charakterisieren, wenn man eine Reihe von linear unabhängigen Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ als bekannt annimmt; läßt man nämlich nur solche Funktionen $\varphi(s)$ zu, die außer (13) noch die n linearen Nebenbedingungen

$$(16) \qquad \int_a^b x(s)\varphi_1(s)\,ds = 0, \quad \ldots, \quad \int_a^b x(s)\varphi_n(s)\,ds = 0$$

erfüllen, so ist das Maximum von $|\mathfrak{K}(x, x)|$ der reziproke Wert der absolut kleinsten, dasjenige von $\mathfrak{K}(x, x)$ der reziproke Wert der kleinsten positiven Zahl, die nach Fortlassung der n zu $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ gehörigen Eigenwerte in der Folge der nach ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte übrig bleibt; dieser größte Wert wird wiederum für die zugehörigen Eigenfunktionen angenommen. Daher ist es möglich, *die ihrer absoluten Größe nach geordneten Eigenwerte $|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq \cdots$ sukzessive als reziproke Maxima von $|\mathfrak{K}(x, x)|$* zu charakterisieren: *$|\lambda_{n+1}|^{-1}$ ist das Maximum unter den Nebenbedingungen* (13), (16) *und wird für die zugehörige Eigenfunktion $\varphi_{n+1}(s)$ angenommen, wenn $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ die vorher bestimmten zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gehörigen Eigenfunktionen sind.*[401]) Entsprechendes gilt für die positiven und negativen Eigenwerte für sich.

In derselben Weise kann man weiter Aussagen über die Extrema von $\mathfrak{K}(x, x)$ unter anderen quadratischen oder linearen Nebenbedingungen, wie

$$\int_a^b \left(\int_a^b k(s, t)\,x(t)\,dt\right)^2 ds = 1 \quad \text{oder} \quad \int_a^b x(s) f(s)\,ds = 0$$

400) *D. Hilbert*[381]), Kap. V, p. 29 f.; kürzerer Beweis Kap. XIV, p. 193. Die erste Variation dieses Maximalproblems liefert übrigens gerade die Integralgleichung (i_h). — Ein anderer Beweis, der an Stelle der Entwicklung (14) die mit dem lösenden Kern gebildete Integralform verwendet, bei *H. Bateman,* Trans. Cambr. Phil. Soc. 20 (1907), p. 371—382; 21 (1908), p. 123—128. — Eine Abschätzung des kleinsten Eigenwertes λ_1 auf Grund dieses Satzes für definites $k(s, t)$ und positives und konvexes $\varphi_1(s)$ gibt *Ph. Frank,* Paris C. R. 158 (1914), p. 551—554.

401) *D. Hilbert*[400]). — Diese Aussagen entsprechen in der algebraischen Analogie (Nr. 1, 6) offenbar der bekannten Charakterisierung der kleinsten Hauptachsen einer quadratischen Mittelpunktsfläche als kleinster Durchmesser überhaupt, der zweiten als kleinster Durchmesser in dem dazu senkrechten ebenen Schnitt durch das Zentrum, u. s. f.

machen, die für Anwendungen auf Differentialgleichungen von Belang sind.[402])

d) Eine neue, namentlich auch für die Anwendungen wichtige Wendung hat *R. Courant*[403]) diesen Fragestellungen gegeben, indem er eine den n^{ten} Eigenwert λ_n charakterisierende Extremumseigenschaft aufstellte, die *nicht* die Kenntnis der zu den vorhergehenden Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen voraussetzt.[404]) Es seien nämlich $f_1(s), \ldots, f_n(s)$ n willkürlich gewählte stetige Funktionen und M_f *die obere Grenze*[404a]) *aller Werte, die* $|\mathfrak{K}(x,x)|$ *unter den Bedingungen*

$$(17) \qquad \int_a^b x(s) f_1(s)\, ds = 0, \quad \ldots, \quad \int_a^b x(s) f_n(s)\, ds = 0$$

und (13) *annimmt, dann ist* $|\lambda_{n+1}|^{-1}$ *das Minimum aller Werte* M_f, *die sich bei verschiedener Wahl der n Funktionen* $f_1(s), \ldots, f_n(s)$ *ergeben.* In der Tat kann man $n+1$ Konstante $c_1, \ldots, c_{n+1}$ so bestimmen, daß $\tilde{x}(s) = c_1\varphi_1(s) + \cdots + c_{n+1}\varphi_{n+1}(s)$ (13), (17) erfüllt, und hat dann aus (14) $|\mathfrak{K}(\tilde{x}, \tilde{x})| \geqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}$, also auch $M_f \geqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}$; andererseits ist für $f_1 = \varphi_1, \ldots, f_n = \varphi_n$ nach c) $M_f = |\lambda_{n+1}|^{-1}$.[403]) — Entsprechendes gilt für die positiven und negativen Eigenwerte für sich.

402) *D. Hilbert*[381]), p. 30; Kap. VII, p. 56 ff. — Das Problem mit linearer Nebenbedingung ist nach der Methode von Nr. **15** ausführlich behandelt von *W. Cairns*, Diss. Göttingen 1907, 68 S.; vgl. auch *A. J. Pell*, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 16 (1910), p. 412—415.

403) *R. Courant*, Gött. Nachr. 1919, p. 255—264; Math. Ztschr. 7 (1920), p. 1—57; Ztschr. angew. Math. Mech. 2 (1922), p. 278—285. Wegen der Übertragung auf Integralgleichungen vgl. *B. Hostinsky*[493]), *R. Courant*[422]). — Im wesentlichen das gleiche Schlußverfahren wird bereits in den Untersuchungen von *H. Weyl*[443]) zur Herleitung von Aussagen über die Größenbeziehung der Eigenwerte verschiedener Kerne verwendet; insbesondere leitet *H. Weyl* ([443]), d), p. 166 f.; e), § 6, Satz III) einen die Courantsche Aussage für den Fall *einer* Nebenbedingung (17) umfassenden Satz her, ohne allerdings die begrifflich bedeutsame Wendung zur independenten Definition der höheren Eigenwerte zu vollziehen.

404) Diese auch in der algebraischen Geometrie wichtige Eigenschaft ist früher merkwürdigerweise nur vereinzelt ausgesprochen worden [*E. Fischer*, Monatsh. f. Math. 16 (1905), p. 249; vgl. auch eine gelegentliche Bemerkung für ein besonderes Randwertproblem bei *H. Poincaré*, J. de Math. (5) 2 (1896), p. 261]; sie besagt, daß in der Reihe der ihrer Größe nach geordneten Absolutwerte der Hauptachsenquadrate einer quadratischen Zentralfläche des r-dimensionalen Raumes der $(n+1)^{\text{te}}$ Wert der größte ist, der unter den absolut kleinsten Hauptachsenquadraten der sämtlichen durch den Mittelpunkt gelegten $(r-n)$-dimensionalen Schnitte der Fläche vorkommt.

404a) Man kann die Aussage leicht dahin ergänzen — was aber für diesen Zusammenhang unwesentlich ist — daß M_f *Maximum* dieser Werte $|\mathfrak{K}(x,x)|$ ist (vgl. *W. Cairns*[402]); *R. Courant*, Literatur A 11, p. 115 f.).

33. Die Existenz der Eigenwerte. Das Kernstück der Eigenwerttheorie ist der folgende von *D. Hilbert*[405]) aufgestellte und bewiesene *Existenzsatz*:

1. *Jeder reelle symmetrische stetige nicht identisch verschwindende Kern besitzt mindestens einen Eigenwert.*

Darüber hinaus gelten folgende Aussagen:

2. Ein Kern hat dann und nur dann endlichviele Eigenwerte, wenn er von endlichem Range (s. Nr. **10** a, 1) ist.[405])
3. Ein Kern $k(s, t)$ hat jedenfalls dann unendlichviele Eigenwerte, wenn er *abgeschlossen* (Nr. **30** e) oder *allgemein* (Nr. **34** d) ist.[406])

Diese Sätze sind auf sehr verschiedene Arten abgeleitet worden.

a) Der Beweis von *E. Schmidt*[407]) beruht auf folgenden beiden Grundgedanken. Den einen kann man in der Bemerkung finden, daß die durch die Rekursionsformeln

$$g_{\nu+1}(s) = c_\nu \int_a^b k(s, t) g_\nu(t) dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

von einem willkürlichen $g_1(s)$ ausgehend definierten Funktionen offenbar gegen eine Eigenfunktion von $k(s, t)$ konvergieren, wenn die Folge der Konstanten $c_1, c_2, \ldots$ so bestimmt ist, daß sie einen Limes hat (der der Eigenwert wird), und daß die $g_\nu(s)$ gleichmäßig aber nicht gegen 0 konvergieren.[408]) Diese Bestimmung erreicht Schmidt — und das ist der andere Grundgedanke des Beweises — indem er das Verfahren auf den iterierten Kern $k^{(2)}(s, t)$ anwendet, der definit ist, und indem er einen dem Verfahren von *D. Bernoulli* zur Auflösung algebraischer Gleichungen (vgl. Encykl. I B 3a, Nr. **13**, *C. Runge*) nachgebildeten einfachen Limesausdruck für den *kleinsten Eigenwert* μ *von*

---

405) *D. Hilbert*, Gött. Nachr. 1904[381]), p. 72; Grundzüge[381]), p. 22.

406) *D. Hilbert*[381]), p. 23 f., 25 f., 193 f.

407) *E. Schmidt*[381]), § 11. Der Beweis ist einem Existenzbeweis von *H. A. Schwarz*[25]) nachgebildet; vgl. Nr. **5**, p. 1352.

408) In der algebraischen Analogie entspricht dem die bekannte Tatsache, daß durch immer wiederholte Iteration einer und derselben Kollineation aus jedem Element unter gewissen Bedingungen in der Grenze ein sich selbst entsprechendes Element der Kollineation entsteht — angewandt auf die Kollineation zwischen den Richtungen g_s $(s = 1, \ldots, n)$ durch den Mittelpunkt einer quadratischen Zentralfläche $\sum_{s,t=1}^{n} k_{st} x_s x_t = 1$ und den Normalenrichtungen $g_s^* = c \sum_{t=1}^{n} k_{st} g_t$ ihrer konjugierten Ebenen; hier hat man bekanntlich jedenfalls dann, wenn die quadratische Form definit ist, stets Konvergenz gegen die (bzw. bei Rotationsflächen gegen eine) kleinste Hauptachse, es sei denn, daß man gerade von einer auf ihr (bzw. auf ihnen) senkrechten Richtung ausgeht.

$k^{(2)}(s, t)$ aufstellt[409]) und diesen als gemeinsamen Wert der Konstanten c_ν verwendet. Dieser Limes ist aus den nicht verschwindenden sukzessiven Spuren von geradem Index des Kernes $k(s, t)$ gebildet (Nr. 31, (8)):

(19a) $$\mu = \lim_{\nu=\infty} \frac{u_{2\nu}}{u_{2\nu+2}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\left|\sqrt[\nu]{u_{2\nu}}\right|} > 0;$$

(18) liefert alsdann, wenn noch $k(s, t)$ durch $k^{(2)}(s, t)$ ersetzt wird, für $c_\nu = \mu$, $g_1(t) = \mu k^{(2)}(s, r)$ als *zum Eigenwert* μ *gehörige Eigenfunktion* von $k^{(2)}(s, t)$ den gleichmäßig konvergenten, übrigens noch den Parameter r enthaltenden Limes

(19b) $$\varphi(s, r) = \lim_{\nu=\infty} \mu^\nu k^{(2\nu)}(s, r),$$

der wegen der Ungleichung

(19c) $$\int_a^b \varphi(s, s)\, ds = \lim_{\nu=\infty} \mu^\nu u_{2\nu} \geqq 1$$

nicht identisch und also auch nicht für jedes r als Funktion von s identisch verschwindet.

Der Beweis dieser Aussagen beruht auf den aus der Schwarzschen Ungleichung (Nr. 7, (22)[40])) folgenden Ungleichungen

(20) $$u_{2\nu}^2 \leqq u_{2\nu-2} \cdot u_{2\nu+2}, \quad u_{2\nu+2n} \leqq u_{2\nu} \cdot u_{2n},$$

aus denen man die Konvergenz und sogar den monotonen Charakter der Folgen (19a) sowie die Ungleichung (19c) entnehmen kann; da die erste Folge (19a) abnehmend, die zweite zunehmend ist, ist damit zugleich eine auch praktisch brauchbare Abschätzung von μ gegeben. Endlich folgt auch die gleichmäßige Konvergenz von (19b) lediglich durch Abschätzung mittels der Schwarzschen Ungleichung.

---

409) Bei dem algebraischen Problem der Hauptachsentransformation handelt es sich nämlich analog um die Auflösung der algebraischen Gleichung (1) von Nr. 1. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ wiederum ihre Wurzeln, die Eigenwerte des algebraischen Problemes, so sind deren Potenzsummen, wie man etwa der Formel Nr. 1, (2b) der Hauptachsentransformation entnehmen kann, die Spuren der iterierten Formen

$$\frac{1}{\lambda_1^\nu} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n^\nu} = \sum_{s=1}^{n} k_{ss}^{(\nu)} = v_\nu, \quad \text{wo} \quad k_{st}^{(\nu)} = \sum_{r=1}^{n} k_{sr} k_{rt}^{(\nu-1)},$$

und man erkennt in der (19a) entsprechenden und in dieser Gestalt leicht zu verifizierenden Limesgleichung für den kleinsten Eigenwert λ_1

$$\lambda_1^2 = \lim_{\nu=\infty} \frac{v_{2\nu}}{v_{2\nu+2}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{\frac{1}{\lambda_1^{2\nu}} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n^{2\nu}}}{\frac{1}{\lambda_1^{2\nu+2}} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n^{2\nu+2}}}$$

die Ausgangsgleichung der Bernoullischen Methode. Über die analogen Ausdrücke der u_ν durch die Eigenwerte von $k(s, t)$ vgl. Nr. 34, (25).

Weiterhin ist μ der kleinste Eigenwert von $k^{(2)}(s, t)$, und $\varphi(s, r)$ liefert die sämtlichen zu ihm gehörigen Eigenfunktionen von $k^{(2)}(s, t)$ in folgender Weise[410]): Der Grenzwert (19c) ist eine ganze Zahl m, die Vielfachheit des Eigenwertes μ; sind $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_m(s)$ m orthogonale und normierte zu μ gehörige Eigenfunktionen von $k^{(2)}(s, t)$, so ist

$$(19\text{d}) \qquad \varphi(s, r) = \varphi_1(s)\varphi_1(r) + \cdots + \varphi_m(s)\varphi_m(r),$$

und jede Eigenfunktion $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_m(s)$ läßt sich durch lineare Kombinationen von Funktionen $\varphi(s, r_1), \ldots, \varphi(s, r_m)$ für passend gewählte Parameterwerte $r_1, \ldots, r_m$ darstellen.

Mit der Existenz eines Eigenwertes μ von $k^{(2)}(s, t)$ ist nun nach Nr. **31**a auch die Existenz eines Eigenwertes $+\sqrt{\mu}$ oder $-\sqrt{\mu}$ von $k(s, t)$ gegeben. Sofern weitere Eigenwerte existieren, gewinnt sie *E. Schmidt*[411]) durch Anwendung des somit bewiesenen Existenzsatzes auf den nach Nr. **30**d, (6) von den ersten Eigenwerten und Eigenfunktionen befreiten Kern.

J. Schur[412]) hat durch Anwendung der *Schmidt*schen Methode auf die von ihm untersuchten assoziierten Kerne (Nr. **31**b) Grenzwertausdrücke von der Art (19a) erhalten, die direkt auch die folgenden Eigenwerte liefern; der n^{te} assoziierte Kern ist nämlich dann nicht identisch Null, wenn $k(s, t)$ der Vielfachheit nach gerechnet mindestens n Eigenwerte hat (vgl. Nr. **11**d) — dann aber gibt das Schmidtsche Verfahren einen Grenzwertausdruck für den Absolutwert seines kleinsten Eigenwertes, der nach Nr. **31**, (10a) gleich dem Produkt der n absolut kleinsten Eigenwerte $|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n|$ von $k(s, t)$ ist, und als Quotient zweier solcher Ausdrücke erhält man $|\lambda_n|$ selbst. Analog erhält *Schur* die zugehörigen Eigenfunktionen.

---

410) *J. Schur*[79]), § 12 gibt einen direkten einfachen Beweis hierfür im Anschluß an den Schmidtschen Gedankengang; man kann diese Tatsachen auch nachträglich aus (24a) und (25) von Nr. **34** entnehmen.

411) *E. Schmidt*[381]), § 8.

412) *J. Schur*[79]), § 13 ff. — *Ch. Müntz* [Paris C. R. 156 (1913), p. 43—46, 860—862; Gött. Nachr. 1917, p. 136—140; Prace mat.-fiz. 29 (1918), p. 109—177] untersucht auch für den algebraischen Fall andere Verfahren zur Auffindung der höheren Eigenfunktionen. In der gleichen Richtung streben die Modifikationen, die *A. Vergerio* [Rom Acc. Linc. Rend. (5) 24_2 (1915), p. 324—329, 365—369; Lomb. Ist. Rend. (2) 48 (1915), p. 878—890; Torino Atti 51 (1916), p. 227—237; Palermo Rend. 41 (1916), p. 1—35], *J. Mollerup* [Palermo Rend. 47 (1923), p. 115—143] an dem Schmidtschen Verfahren anbringen, indem sie insbesondere $g_1(s)$ und die c_ν in (18) anders wählen; der Beweis von *M. Botasso* [Atti Ist. Veneto 71, IIa (1912), p. 917—930] ist unzutreffend. *O. D. Kellogg*, Math. Ann. 86 (1922), p. 14—17 kürzt das Verfahren obendrein durch Anwendung eines Auswahlverfahrens auf die $g_\nu(s)$ ab, ohne damit natürlich den vollen Sachverhalt erhalten zu können.

b) In der ursprünglichen Behandlung der Theorie durch *D. Hilbert*[413]) ergeben sich die Existenzsätze aus dem entsprechenden algebraischen Problem, der orthogonalen Transformation der quadratischen Form von n Variablen $\sum_{p,q=1}^{n} k\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) x_p x_q$ durch den Grenzübergang $n \to \infty$ (vgl. dazu Nr. **1**, **6**). Im Anschluß an seine Darstellung der Fredholmschen Determinante von $\lambda k(s, t)$ als Grenzwert von Determinanten aus den Koeffizienten $k\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$ (vgl. Nr. **9**[54])) gelingt es *Hilbert*, den Grenzübergang in der Formel der Hauptachsentransformation jener quadratischen Form (Nr. **1**, (2b)) direkt durchzuführen, falls die Variablenwerte x_p die Werte einer stetigen Funktion $x(s)$ an den Stellen $s = \frac{p}{n}$ bedeuten, und er erhält so die Fundamentalformel (14) bzw. (14a); dabei sind die λ_ν die Nullstellen der Fredholmschen Determinante von $\lambda k(s, t)$, die $\varphi_\nu(s)$ aber Minoren von ihr für diese Werte λ_ν (vgl. Nr. **9**, 2). Aus dieser Fundamentalformel ergibt sich nun unmittelbar das Existenztheorem und die ergänzenden Aussagen 2, 3.

c) Von einer Reihe von Autoren sind der Theorie der analytischen Funktionen Methoden zum Beweise der Existenzsätze entnommen worden (vgl. Nr. **6**, insbes. [34])). Den Ausgangspunkt bildet dabei die Tatsache, daß die Resolvente der Integralgleichung (i) und ebenso ihre Lösung eine analytische Funktion des Parameters λ ist (s. Nr. **9**, Ende), die höchstens an den Eigenwerten λ_ν (den Nullstellen der Fredholmschen Determinante $\delta(\lambda)$) Pole, und im Falle eines reellen symmetrischen Kernes sogar nur einfache Pole (s. Nr. **34**, (26), (29) und **39** a, [492])) besitzt; der Beweis des Existenztheorems kommt also darauf hinaus, zu zeigen, daß diese meromorphe Funktion *tatsächlich stets mindestens einen Pol* besitzt.

A. Kneser[414]) hat dies im Verfolg von Gedankengängen, wie sie in den früher[34]) genannten Arbeiten über die Differentialgleichungen der mathematischen Physik entwickelt worden waren, in folgender Weise erschlossen: die Reihe (6) von Nr. **11** muß aus funktionentheoretischen Gründen einen Konvergenzkreis haben, der bis zur absolut kleinsten Nullstelle von $\delta(\lambda)$ reicht; ihre Koeffizienten sind aber

---

413) *D. Hilbert*[381]), Kap. II—IV, p. 8—22. Direkte Durchführung des Grenzübergangs im Fall mehrfacher Nullstellen von $\delta(\lambda)$ ohne die von *Hilbert*[381]), Kap. VI, p. 36 ff. benutzte stetige Variation des Kernes bei *E. Garbe*[54]).

414) *A. Kneser*, Palermo Rend. 22 (1906), p. 233—240. — Man kann den Beweis auch auf die Entwicklung der Resolvente nach Potenzen von λ (Nr. **11**, (2a)) stützen, aus der für $s = t$ durch Integration nach s Nr. **11**, (6) entsteht.

gerade die Spuren von $k(s, t)$, und aus den für sie geltenden Ungleichungen (20) folgt, daß die Reihe einen *endlichen* Konvergenzkreis hat. Da die Eigenwerte reell sind, sind mit dem Konvergenzradius auch die absolut kleinsten Eigenwerte gefunden, und man kann weiterhin nach bekannten funktionentheoretischen Methoden der Reihe nach die übrigen Pole der Funktion (6) von Nr. **11**, d. h. die übrigen Eigenwerte bestimmen.[414])

In der klassischen Arbeit *H. Poincarés*[27]) über die schwingende Membran ist aber darüber hinaus, wie zuerst *A. Korn*[415]) ausgesprochen hat, eine auf jede Integralgleichung anwendbare Methode enthalten, die nicht nur die sämtlichen Eigenwerte mit einem Schlage liefert, sondern auch den meromorphen Charakter der Lösung, die also genau wie die Schmidtsche Methode von der Bezugnahme auf die Fredholmschen Formeln frei ist. Sie beruht auf der Betrachtung einer Integralgleichung (i), deren rechte Seite $\sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu f_\nu(s) = F(s)$ einer p-dimensionalen Funktionenschar angehört, und auf der Bemerkung, daß man p so groß und die Konstanten c_ν dann derart wählen kann, daß ihre Lösung $\Phi(s)$ in einem beliebig großen, jedenfalls aber endlichen Kreise $|\lambda| < R_p$ regulär analytisch in λ ist.[416]) Wendet man dies auf die Folge der Funktionen $f_\nu(s) = \int_a^b k^{(\nu)}(s, t) f_0(t)\, dt$ an und sind $\varphi_{\nu+1}(s)$ die zugehörigen Lösungen von (i)

$$(21)\qquad \varphi_{\nu+1}(s) - \lambda\int_a^b k(s, t)\,\varphi_{\nu+1}(t)\, dt = \int_a^b k^{(\nu)}(s, t) f(t)\, dt = f_\nu(s),$$

so folgt leicht

$$(21\text{a})\qquad \varphi_\nu(s) - \lambda\,\varphi_{\nu+1}(s) = f_{\nu-1}(s) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p-1),$$

während nach dem vorausgeschickten

$$(21\text{b})\qquad c_0\varphi_1(s) + c_1\varphi_2(s) + \cdots + c_{p-1}\varphi_p(s) = \Phi(s)$$

415) *A. Korn*, Paris C. R. 144 (1907), p. 1411—1414; Literatur A 3; Arch. d. Math. (3) 25 (1916), p. 148—173. Der Beweis ist auch durchgeführt bei *A. Chicca*, Torino Atti 44 (1909), p. 151—159.

416) Dies wird aus dem einer Aussage von *Poincaré*[27]) nachgebildeten Hilfssatz geschlossen, daß der Quotient der beiden Integrale

$$\int_a^b\!\!\int_a^b k^{(2)}(s,t)\, F(s)\, F(t)\, ds\, dt : \int_a^b F(s)^2 ds, \quad \text{wo} \quad F(s) = \sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu f_\nu(s),$$

durch Wahl von p und der c_ν beliebig klein gemacht werden kann; damit kann man dann, analog wie oben [414]) angedeutet, den Konvergenzkreis der Potenzentwicklung der Lösung $\Phi(s)$ nach λ abschätzen.

für $|\lambda| < R_p$ regulär ist. Die Elimination von $\varphi_2(s), \ldots, \varphi_p(s)$ aus den p linearen Gleichungen (21a), (21b) ergibt für $\varphi_1(s)$, d. i. die Lösung der Integralgleichung (i) mit der rechten Seite $f(s) = f_0(s)$, eine Quotientendarstellung, aus der hervorgeht, daß sie in $|\lambda| < R_p$ höchstens $p - 1$ Pole besitzt, darüber hinaus aber, wie $\Phi(s)$, sicher Singularitäten besitzt. Da aber $f(s)$ beliebig gewählt werden kann, ist damit gezeigt, daß die Lösung *jeder* Integralgleichung (i) meromorph und niemals ganz transzendent ist.

Andersartige auf funktionentheoretischen Methoden beruhende Beweise des Existenzsatzes haben *T. Lalesco*[417]) und *E. Goursat*[418]) den Sätzen über das Geschlecht der Fredholmschen Determinante (s. Nr. **39** c) entnommen.

d) Eine letzte Gruppe von Existenzbeweisen stützt sich auf die in Nr. **32** c angegebenen Extremumseigenschaften und geht damit den Weg des Dirichletschen Prinzips, den zuerst — noch ohne strenge Begründung — *H. Weber*[419]) für das Problem der schwingenden Membran eingeschlagen und den *D. Hilbert*[420]) durch seine Arbeiten über das Dirichletsche Prinzip für strenge Beweisführung gangbar gemacht hatte. *D. Hilbert* selbst hat diesen Gedankengang für das entsprechende Problem in unendlichvielen Veränderlichen durchgeführt und seine Resultate durch sein Übertragungsverfahren (Nr. **15**) auf Integralgleichungen übertragen (s. Nr. **40**). Kurz vor der Publikation dieser Resultate hat *E. Holmgren*[421]) das gleiche Verfahren direkt auf Integralgleichungen angewandt. Es sei $|\lambda_1|^{-1}$ die bei nicht identisch verschwindendem $k(s, t)$ sicher von Null verschiedene *obere Grenze* der Werte der quadratischen Integralform $|\mathfrak{K}(x, x)|$ (Nr. **32**, (12)) für alle der Bedingung (13) genügenden stetigen Funktionen $x(s)$, derart daß

417) *T. Lalesco,* Paris C. R. 145 (1907), p. 906—907; Literatur A 6, p. 64: sein Kriterium für Kerne ohne Eigenwerte (Nr. **39** c, p. 1552) ergibt wegen $u_4 \neq 0$ sofort den Existenzsatz.

418) *E. Goursat*[74]), insbes. p. 97: die Fredholmsche Determinante von $k^{(4)}(s, t)$ ist vom Geschlecht 0, also müßte sie für eigenwertlose Kerne gleich 1 sein (vgl. Nr. **39**, (10)), was wiederum $u_4 \neq 0$ widerspricht.

419) *H. Weber,* Math. Ann. 1 (1869), p. 1—36; vgl. darüber Encykl. II A 7 c, Nr. **9**, *A. Sommerfeld.*

420) *D. Hilbert,* Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900), p. 184—188 = J. f. Math. 129 (1905), p. 63—67 sowie [137]).

421) *E. Holmgren,* Paris C. R. 142 (1906), p. 331—333; Ark. f. mat. 3 (1906), Nr. 1, 24 S. (vgl. auch ibid. 1 (1904), p. 401—417); Math. Ann. 69 (1910), p. 498—513; im wesentlichen der gleiche Gedankengang unter Ausdehnung auf die inhomogene Gleichung bei *A. Hammerstein,* Sitzungsb. Berlin. Math. Ges. 23 (1924), p. 3—13. Ein ähnliches Verfahren unter geringeren Voraussetzungen über $k(s, t)$ wendet *F. Riesz,* Math. és term. ért. 27 (1909), p. 220—240 und [516]) an.

die Werte $\mathfrak{K}(x, x)$ selbst λ_1^{-1} beliebig nahe kommen; es kommt dann darauf an zu zeigen, daß λ_1^{-1} in diesem Bereich *Extremum* ist, d. h. daß es eine (13) genügende stetige Funktion $\varphi_1(s)$ gibt, für die $\mathfrak{K}(\varphi_1, \varphi_1) = \lambda_1^{-1}$ ist — dann ist nach Nr. **32** c (wie auch direkt leicht nachzuweisen) λ_1 der absolut kleinste Eigenwert, $\varphi_1(s)$ eine zugehörige Eigenfunktion. Jenen Beweis erbringt nun *Holmgren*, indem er von einer Folge stetiger, der Bedingung (13) genügender Funktionen $x_n(s)$ ausgeht, für die $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{K}(x_n, x_n) = \lambda_1^{-1}$ ist, und aus ihr nach dem von *Hilbert* beim Dirichletschen Prinzip angewandten Auswahlverfahren[137]) eine Teilfolge $x_{n_\nu}(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ derart auswählt, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \int_a^b k(s, t)\, x_{n_\nu}(t)\, dt$$

für jeden rationalen Wert s $(a \leqq s \leqq b)$ konvergiert; die Anwendung der Schwarzschen Ungleichung[40]) zeigt, daß die so bestimmten Grenzwerte sich zu den Werten einer *stetigen* Funktion $\lambda_1 \varphi_1(s)$ zusammenschließen, und durch weitere Grenzbetrachtungen wird gezeigt, daß dieses $\varphi_1(s)$ die gesuchte Extremalfunktion ist. Analoge Überlegungen im Anschluß an die Extremumssätze von Nr. **32** c liefern sukzessive die anderen Eigenwerte und Eigenfunktionen.

R. Courant[422]) hat neuerdings diesen Beweisgedanken des Dirichletschen Prinzips derart ausgestaltet, daß er nicht nur wie bisher die *Existenz* des Eigenwertes verbürgt, sondern auch bestimmte als Grundlage numerischer Behandlung von Integralgleichungen verwendbare *Verfahren zur Approximation der Eigenwerte und Eigenfunktionen* liefert. Er geht aus von der Tatsache, daß man jeden stetigen symmetrischen Kern gleichmäßig im Integrationsgebiet durch symmetrische Kerne $k_n(s, t)$ endlichen Ranges n approximieren kann, die durch passende Systeme orthogonaler und normierter Funktionen in der Form

$$k_n(s, t) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}\, \omega_p(s)\, \omega_q(t), \quad a_{pq} = a_{qp}$$

dargestellt werden können.[423]) Das Übergangsverfahren von Nr. **10** a, 1

422) *R. Courant,* Math. Ann. 89 (1923), p. 161—178; Literatur A 11, Kap. III, insbes. § 4, 8 sowie Kap. II, § 2, 3 für die Hilfsbegriffe.

423) Vgl. Nr. **10** a, 3. Ist der dort bestimmte Kern $G(s, t)$ unsymmetrisch, so ist $k_n(s, t) = \frac{1}{2}(G(s, t) + G(t, s))$ symmetrisch und leistet bei symmetrischem $k(s, t)$ das gleiche wie $G(s, t)$. Die Ersetzung der Funktionen $u_p(s)$, $v_p(s)$ von Nr. **10** a durch orthogonale normierte lineare Kombinationen ergibt die Formel des Textes.

und die Formel

$$\mathfrak{K}_n(x, x) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p x_q, \quad \text{wo} \quad x_p = \int_a^b x(s)\,\omega_p(s)\,ds,$$

für die zu $k_n(s, t)$ gehörige quadratische Integralform zeigt, daß die Theorie der Integralgleichung mit dem Kern $k_n(s, t)$ unmittelbar aus der Theorie der orthogonalen Transformation der quadratischen Form $\sum a_{pq} x_p x_q$ von n Veränderlichen entnommen werden kann.

Da sich nun ferner die Werte der Integralformen $\mathfrak{K}(x, x)$ und $\mathfrak{K}_n(x, x)$ für alle (13) genügenden Funktionen beliebig wenig unterscheiden, gilt das gleiche für ihre Extremwerte, und daher müssen speziell die absolut kleinsten Eigenwerte $\lambda_1^{(n)}$ von $k_n(s, t)$ im Limes den von $k(s, t)$ liefern. Darüber hinaus aber wird aus den zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_1^{(n)}(s)$, die

$$\varphi_1^{(n)}(s) = \lambda_1^{(n)} \int_a k_n(s, t)\,\varphi_1^{(n)}(t)\,dt \tag{22}$$

genügen, durch ein ähnliches Auswahlverfahren wie bei *Holmgren* eine Teilfolge entnommen, die gegen eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion $\varphi_1(s)$ von $k(s, t)$ gleichmäßig konvergiert.

Eine *zweite* Methode von *R. Courant* macht sich auch von diesem Auswahlverfahren frei. Sie beruht auf folgenden beiden Begriffen[423a]), die den Begriff der linearen Unabhängigkeit und der Dimensionszahl von linearen Funktionsscharen auf Folgen solcher Scharen auszudehnen gestatten:

1. Das *Unabhängigkeitsmaß* der Funktionen $f_1(s), \ldots, f_m(s)$ ist das Minimum der quadratischen Form

$$\int_a^b \{x_1 f_1(s) + \cdots + x_m f_m(s)\}^2\,ds = \sum_{p,q=1}^{m} x_p x_q \int_a^b f_p(s) f_q(s)\,ds$$

unter der Nebenbedingung $x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1$.

2. Die *asymptotische Dimensionenzahl* r einer Folge $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ ist die kleinste ganze Zahl der Art, daß nach Fortlassung hinreichend vieler Funktionen aus jener Folge jeder aus dem Rest herausgegriffene Komplex von $r+1$ Funktionen ein beliebig kleines Unabhängigkeitsmaß hat.

Nun zeigt *Courant* durch ein den *E. Schmidt*schen Beweis des Satzes von Nr. **30** b verallgemeinerndes Verfahren, daß die Folge der sämtlichen zu den kleinsten Eigenwerten $\lambda_1^{(n)}$ der $k_n(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_1^{(n)}(s)$ eine endliche positive asymptotische Dimensionenzahl r

---

423a) *R. Courant*, Math. Ann. 85 (1922), p. 280—325 sowie [422]).

besitzt. Daraus und aus der Darstellung (22) bestimmt er eine Schar von r linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_r(s)$ als *Grenzschar* der Folge $\varphi_1^{(n)}(s)$ in dem Sinne, daß sich für hinreichend große n jedes $\varphi_1^{(n)}(s)$ von einer passend gewählten Funktion $c_1\varphi_1(s) + \cdots + c_r\varphi_r(s)$ beliebig wenig unterscheidet: *diese Schar enthält die sämtlichen zu λ_1 gehörigen Eigenfunktionen von $k(s,t)$.* — In analoger Weise werden die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen im Anschluß an die Extremumseigenschaften von Nr. 32 d bestimmt.

34. Entwicklungssätze. Auf Grund des Existenzsatzes (Nr. **33**) und der formalen Tatsachen von Nr. **30**, **31** ergeben sich eine Reihe von Sätzen über die Entwicklung des *Kernes*, seiner *Iterierten* sowie *willkürlicher Funktionen* in *Reihen nach Eigenfunktionen* des Kernes.[424])

a) Entwicklung des Kernes und seiner Iterierten. Für einen stetigen symmetrischen Kern $k(s,t)$ gilt die *Entwicklung nach dem vollständigen normierten System* seiner zu den Eigenwerten λ_ν gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$

$$k(s,t) = \sum_{(\nu)} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \qquad (a \leqq s,\ t \leqq b) \tag{23}$$

jedenfalls dann, wenn diese Reihe gleichmäßig in beiden Veränderlichen im Gebiet $a \leqq s,\ t \leqq b$ konvergiert[425]); insbesondere gilt sie also für Kerne mit endlichvielen Eigenwerten λ_ν. Der Beweis hierfür ergibt sich aus dem Existenztheorem in Verbindung mit den Sätzen von Nr. **30** d.

Die Reihe (23) braucht jedoch nicht für jeden stetigen Kern zu konvergieren. Ist nämlich $k(s,t) = f(t-s) = f(s-t)$ eine *gerade* Funktion der Differenz $t-s$ von der Periode 2π und sind $a = 0$, $b = 2\pi$ die Integrationsgrenzen, so bestätigt man leicht durch Rechnung, daß $\cos \nu s$, $\sin \nu s$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ ihre Eigenfunktionen und die reziproken Werte der Fourierkoeffizienten $\pi c_\nu = \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x \, dx$ die zugehörigen Eigenwerte sind (c_0 einfach, die andern doppelt zählend). Die Entwicklung (23) lautet also bei richtiger Normierung

424) Diese Sätze enthalten die vollständige in der Analysis mögliche Übertragung des Hauptachsentheorems der Algebra; vgl. über die Möglichkeit und die Grenzen dieser Übertragung Nr. **6** und **7**, insbesondere die Formeln (16)—(21) daselbst im Vergleich zu den in der entsprechenden Bezeichnung geschriebenen analogen algebraischen Formeln $(\overline{16})$—$(\overline{21})$.

425) *E. Schmidt*[381]), § 8. Bei *D. Hilbert*[381]), p. 21 wird ausdrücklich nur der Fall endlichvieler Eigenwerte erwähnt und — wie das unverändert auch für den allgemeinen Fall möglich ist — aus der Fundamentalformel (14) gefolgert.

der trigonometrischen Funktionen

$$\tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(\cos \nu s \cos \nu t + \sin \nu s \sin \nu t) = \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cos \nu(t-s)$$

und stimmt daher genau mit der Fourierreihe der geraden Funktion $f(t-s)$ überein. Verwendet man nun für $f(x)$ eine stetige Funktion mit divergenter Fourierreihe[426]), so ist $k(s, t) = f(t-s)$ ein Kern mit divergenter Entwicklung (23).

Die entsprechend gebildeten Entwicklungen der iterierten Kerne lauten (vgl. Nr. **31** a)

$$(24) \qquad k^{(2)}(s, t) = \sum_{(\nu)} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2},$$

$$(24\,\text{a}) \qquad k^{(n)}(s, t) = \sum_{(\nu)} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^n} \qquad (n = 3, 4, \ldots);$$

sie konvergieren stets gleichmäßig und absolut im Gebiete $a \leqq s,\ t \leqq b$ *und stellen die iterierten Kerne dar. E. Schmidt*[427]) beweist die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Reihen (24a) ($n \geqq 3$), indem er die gleichmäßige Beschränktheit der Reihe $\sum_{(\nu)} |\lambda_\nu^{-2}\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)|$ nach Umformung mit Hilfe der homogenen Integralgleichung (i_h) aus der Besselschen Ungleichung[385]) entnimmt und daraus schließt, daß der Rest ($\nu \geqq N$) der Reihe (24a) gleichmäßig wie $\lambda_N^{-(n-2)}$ gegen Null geht. Die Gültigkeit von (24) kann alsdann genau wie der Entwicklungssatz von Nr. **34** c oder direkt aus diesem erschlossen werden, wobei sich allerdings nur *gleichmäßige Konvergenz in einer der beiden Veränderlichen* ergibt; die gleichmäßige Konvergenz in *beiden* Veränderlichen kann nachträglich bewiesen werden.[428])

---

426) Vgl. Encykl. II C 10, Nr. 7, *Hilb-Riesz.*

427) *E. Schmidt*[381]), § 8. — Bei *D. Hilbert*[381]) folgen die Formeln (24a) aus dem Fundamentaltheorem (14); vgl. insbes. p. 22, Satz 4. — Eine spezielle Anwendung dieser Sätze zur Bestimmung der Kerne, für die in (i) $\int_a^b \varphi^2 ds = \int_a^b f^2 ds$ ist, bei *G. Sannia,* Lomb. Ist. Rend. (2) 44 (1911), p. 91—98.

428) *E. Schmidt* im Annalenabdruck seiner Dissertation, Ann. 63[381]), § 19 mit Hilfe eines Satzes von *U. Dini* (Fondam. per la theoria delle funz. di var. reali, Pisa 1878, § 99) über die gleichmäßige Konvergenz einer gegen eine stetige Funktion konvergierenden Reihe stetiger positiver Funktionen. *O. Szász* hat im Juni 1908 den Verfassern mündlich einen direkten Beweis der gleichmäßigen Konvergenz von (24) mitgeteilt; er beruht darauf, daß die Schwankung des Restes der für $s = t$ gebildeten Reihe (24)

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} \lambda_\nu^{-2}\{\varphi_\nu(s)^2 - \varphi_\nu(s_1)^2\} = \sum \lambda_\nu^{-2}\{\varphi_\nu(s) - \varphi_\nu(s_1)\}\,\{\varphi_\nu(s) + \varphi_\nu(s_1)\}$$

Unter besonderen Voraussetzungen über den Kern kann man weitergehende Entwicklungstatsachen beweisen: *A. Hammerstein*[429]) hat gezeigt, daß die Reihe (23) jedenfalls dann gleichmäßig konvergiert und $k(s, t)$ darstellt, wenn

$$\int_a^b \left\{\frac{k(s_1, t) - k(s_2, t)}{s_1 - s_2}\right\}^2 dt \leqq c$$

ist, wo c eine von s_1, s_2 unabhängige Konstante ist.

Aus (24) folgen wegen der gleichmäßigen Konvergenz in beiden Veränderlichen für die Spuren (Nr. **11**, (5)) des symmetrischen Kernes von der zweiten an die Reihen[430])

$$(25) \qquad u_n = \int_a^b k^{(n)}(s, s)\,ds = \sum_{(\nu)} \frac{1}{\lambda_\nu^n} \qquad \text{für } n = 2, 3, \ldots.$$

Weiterhin ergibt sich mit Hilfe von Nr. **11**, (2a) für die Resolvente der Integralgleichung (i) die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(26) \qquad \varkappa(\lambda; s, t) = k(s, t) + \lambda \sum_{(\nu)} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda)};$$

sie zeigt einmal, daß $\varkappa$ als analytische Funktion von λ die Eigenwerte λ_ν zu einfachen Polen hat mit Residuen, die sich aus den zugehörigen Eigenfunktionen aufbauen — andererseits, daß $\varkappa$ für ein von allen λ_ν verschiedenes λ selbst die Eigenwerte $(\lambda_\nu - \lambda)$ und die Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ besitzt.[431])

---

unter Benutzung von (i_h) und der Besselschen Ungleichung durch

$$\int_a^b \{k(s, t) - k(s_1, t)\}^2\, dt \cdot \int_a^b \{k(s, t) + k(s_1, t)\}^2\, dt$$

abgeschätzt werden kann und also wegen der *gleichmäßigen* Stetigkeit von $k(s, t)$ gleichmäßig mit $|s - s_1|$ beliebig klein wird; damit kann aber aus der Konvergenz jener Reihe unmittelbar die gleichmäßige Konvergenz erschlossen werden. — Für die gleichmäßige Konvergenz von (24) ist die *Stetigkeit* von $k^{(2)}(s, t)$ wesentliche Voraussetzung; *O. Toeplitz,* Festschr. f. H. A. Schwarz (Berlin 1914), p. 427—431, hat ein Beispiel eines unstetigen Kernes (mit unstetigen Eigenfunktionen) angegeben, bei dem $k^{(2)}(s, t)$ beschränkt und nur an *einer* Stelle unstetig ist, die Reihe (24) aber nicht mehr in beiden Veränderlichen gleichmäßig konvergiert (vgl. hierzu auch Nr. **34b**[432])).

429) *A. Hammerstein,* Sitzungsber. Preuß. Ak. d. Wiss. 1923, p. 181—184. *A. Hammerstein*, ibid. 1925, p. 590—595 gibt ferner ein Summationsverfahren für die Reihe (23) im Falle eines logarithmisch unendlichen Kernes in 4 Veränderlichen an.

430) *E. Schmidt*[428]). — Wegen der Bedeutung dieser Formeln für die algebraische Analogie vgl. [409]).

431) *D. Hilbert*[381]), Kap. III, insbes. p. 20f. — Die Formel (26) kann auch aus den Entwicklungssätzen von Nr. **34c** gefolgert werden.

b) Definite Kerne; der Satz von *J. Mercer*[432]): *Ist $k(s,t)$ stetig und (eigentlich oder uneigentlich) definit* (Nr. 32 b), *so konvergiert bereits die Reihe* (23) *für den Kern selbst absolut und gleichmäßig in beiden Veränderlichen.* Nach *A. Kneser*[433]) und *J. Schur*[433]) kann man diesen Satz unmittelbar auf Grund der Tatsache beweisen, daß mit $k(s,t)$ zugleich auch der durch Subtraktion einer Teilreihe von (23) entstehende Kern Nr. 30 b, (6) definit ist, da seine Eigenwerte sämtlich auch Eigenwerte von $k(s,t)$ sind, und daß daher nach den Kriterien von Nr. 32 b $k(s,s) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{-1} \varphi_\nu(s)^2 \geqq 0$ ist; daraus folgt aber die Konvergenz der positiven Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-1} \varphi_\nu(s)^2$ und diese Reihe konvergiert auf Grund des *Dini*schen Satzes[428]) gleichmäßig. Die Schwarzsche Summenungleichung[114]) ergibt endlich die gleichmäßige Konvergenz von (23) in beiden Veränderlichen.

Aus dem *Mercer*schen Satz folgt für die Spur jedes definiten Kernes selbst die Reihe

$$u_1 = \int_a^b k(s,s)\,ds = \sum_{(\nu)} \frac{1}{\lambda_\nu}. \tag{25a}$$

c) Entwicklung willkürlicher Funktionen. *Jede mit Hilfe einer willkürlichen stetigen Funktion $x(t)$ durch den Kern $k(s,t)$ in der Gestalt*

$$f(s) = \int_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt \tag{27}$$

darstellbare (stetige) Funktion[434]) *ist in die folgende nach Fourierscher*

---

432) *J. Mercer*[397]); der Beweis beruht auf der Darstellung (26) der für $\lambda < 0$ sicher definierten Resolvente, die für $\lambda \to -\infty$ untersucht wird. — Daß die Voraussetzung der *Stetigkeit* für diesen Satz wesentlich ist, zeigt das Beispiel von *O. Toeplitz*[428]).

433) *A. Kneser*[98]), p. 195 ff. unter Verwendung eines von *E. Schmidt* herrührenden Beweisgedankens; *J. Schur*, Festschr. f. H. A. Schwarz (Berlin 1914), p. 392—409, § 5. Die Anordnung dieser Beweise weicht von der im Text gegebenen insofern etwas ab, als aus der ohne Benutzung des Dinischen Satzes zu schließenden gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (23) in *einer* der beiden Variablen die Gleichung (23) in ähnlicher Weise wie beim *E. Schmidt*schen Entwicklungssatz (Nr. 34 c) erschlossen wird. — Ein anderer Beweis bei *E. W. Hobson*, London Math. Soc. Proc. (2) 14 (1914), p. 5—30; er konstruiert einen (unstetigen) Kern (vgl. Nr. 36 a [453])), dessen iterierter $k(s,t)$ ist.

434) Wegen der Bedeutung dieser Bedingung von Seiten der algebraischen Analogie vgl. Nr. 6, 7, p. 1363 ff. — Ist $k(s,t)$ *nicht abgeschlossen* (Nr. 30 e), so ist für die Darstellbarkeit von $f(s)$ durch (27) *notwendig,* daß es orthogonal zu den zum Eigenwert ∞ gehörigen Eigenfunktionen ist. Aber auch bei *abgeschlossenem*

Art gebildete Reihe nach Eigenfunktionen von $k(s, t)$ entwickelbar:

$$(28) \qquad f(s) = \sum_{(\nu)} c_\nu \varphi_\nu(s), \quad wo$$

$$(28\text{a}) \qquad c_\nu = \int_a^b f(s)\varphi_\nu(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b x(t)\varphi_\nu(t)\,dt;$$

die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig. Diesen Satz hat *D. Hilbert*[435]) für den Fall eines *allgemeinen Kernes* (Nr. **34**d), *E. Schmidt*[436]) sodann ohne jede Einschränkung bewiesen. *Schmidts* Beweis beruht darauf, daß zunächst die absolute und gleichmäßige Konvergenz der mit Hilfe von (27) und (i_h) in die Gestalt

$$\sum_{(\nu)} \int_a^b x(t)\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b k(s, t)\varphi_\nu(t)\,dt$$

umgeschriebenen Reihe (28) aus der Schwarzschen[40]) und Besselschen Ungleichung[385]) entnommen wird; danach aber ist $f(s) - \sum_{(\nu)} c_\nu\varphi_\nu(s) = \chi(s)$ stetig und zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonal, also (nach Nr. **30**e) eine zum Eigenwert ∞ gehörige Eigenfunktion und daher wegen (27) auch zu $f(s)$ orthogonal; daraus wird auf $\int_a^b \chi(s)^2 ds = 0$ und also auf das identische Verschwinden von $\chi(s)$ geschlossen.

Aus diesem Entwicklungssatz ergibt sich speziell für die Lösung der inhomogenen Integralgleichung (i) (p. 1504) mit dem symmetrischen Kern $k(s, t)$ und stetigem $f(s)$ die Darstellung[437])

$$(29) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{(\nu)} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda}\int_a^b f(t)\varphi_\nu(t)\,dt,$$

$k(s, t)$ braucht keineswegs jedes stetige $f(s)$ durch (27) darstellbar zu sein; betrachtet man nämlich den abgeschlossenen Kern $k(s, t)$ von [440]), für den eine im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbare, unstetige Funktion $\omega(s)$ die einzige zu ∞ gehörige Eigenfunktion ist, und wählt man dabei $\omega(s)$ so, daß es zu irgendeiner stetigen Funktion $f(s)$ nicht orthogonal ist, so ist dieses $f(s)$ nicht durch (27) darstellbar (vgl. Nr. **7**, p. 1365).

435) *D. Hilbert*[381]), p. 24 ff. (Gött. Nachr. 1904, p. 75 ff.). — Zum Beweis wird zunächst die Entwickelbarkeit einer durch den *iterierten* Kern $k^{(2)}(s, t)$ analog (27) darstellbaren Funktion aus der Hilbertschen Fundamentalformel Nr **32**, (14 a) entnommen und dann auf Grund der Allgemeinheit des Kernes die Darstellung (27) durch eine ebensolche mit dem iterierten Kern approximiert.

436) *E. Schmidt*[381]), § 2, § 9. Aus dem Entwicklungssatz gewinnt *Schmidt* nachträglich die Hilbertsche Fundamentalformel (14) von Nr. **32**.

437) *E. Schmidt*[381]), § 10. — Bemerkungen hierzu bei *T. Boggio,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 17_2 (1908), p. 454—458 und *A. Proszynski,* Nouv. Ann. (4) 11 (1911), p. 394—407.

die in jedem von Eigenwerten λ_ν freien λ-Bereich gleichmäßig konvergiert und übrigens mit (26) im wesentlichen äquivalent ist; sie setzt den Charakter der Lösung $\varphi(s)$ als analytische Funktion von λ in Evidenz (jedes λ_ν ist einfacher Pol, außer wenn der zugehörige Fourierkoeffizient von $f(s)$ verschwindet).

Der Entwicklungssatz umfaßt, wenn man ihn auf geeignete spezielle Kerne anwendet, Sätze über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach zahlreichen besonderen Orthogonalsystemen. Insbesondere erhält man die Entwicklungstheoreme nach Eigenfunktionen sich selbst adjungierter Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, wenn man ihn auf die Greensche Funktion des betreffenden Problems als Kern anwendet (s. Encykl. II C 11, 1. Teil, *E. Hilb*, insbes. Nr. 6—9). Die bekannten und nach anderen Methoden aufgestellten Entwicklungssätze gehen hier zum Teil über die (27) entsprechende Bedingung für die zu entwickelnde Funktion hinaus; daher ist die Bemerkung wichtig, daß der *Mercer*sche Satz (Nr. **34** b) eine Erweiterung des Bereiches der entwickelbaren Funktionen über (27) hinaus liefern kann; denn er gibt die Entwicklung des bei festem t als Funktion von s angesehenen $k(s,t)$, das unter Umständen *nicht* in der Form (27) darstellbar ist.[438])

Wegen der Anwendung *funktionentheoretischer Methoden* zur Herleitung der Entwicklungssätze sei hier nur auf Encykl. II C 11, 1. Teil, *E. Hilb*, insbes. Nr. **11**, **13**, verwiesen[439]); diese Methoden sind auf zahlreiche Randwertprobleme angewendet worden, die sachlich mit besonderen Integralgleichungen übereinstimmen, nicht aber — wie es an sich möglich wäre (vgl. Nr. **43** a, 4.) — auf die allgemeine Theorie der Integralgleichungen. Sie würden hier auf die Untersuchung von $\varkappa(\lambda; s, t)$ bzw. $\int_a^b \varkappa(\lambda; s, t)\, x(t)\, dt$ als Funktion von λ, komplexe Integration längs eines wachsenden die Eigenwerte einschließenden Weges und Anwendung des Residuensatzes hinauskommen.

438) Ist z. B. $k(s,t)$ die Greensche Funktion des Randwertproblemes einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung, hat also bei $s = t$ eine Unstetigkeit in der 1. Ableitung wie $|s - t|$, so liefert (27) die Entwicklung aller zweimal differenzierbaren Funktionen, während der Mercersche Satz die Entwickelbarkeit einer (und damit jeder) Funktion liefert, deren erste Ableitung an einer oder endlichvielen Stellen Sprünge hat. Vgl. hierzu neben dem im Text zitierten *Hilb*schen Encyklopädiereferat (s. insbes. auch Nr. 4) die bei *A. Kneser*, Literatur A 12, zusammenfassend dargestellten Untersuchungen von *A. Kneser* und seinen Schülern in dieser Richtung.

439) Wegen der Rolle dieser Methoden in der historischen Entwicklung der Integralgleichungslehre vgl. [84]).

d) Vollständigkeit des Eigenfunktionssystemes. Für die Frage, wie weit man *alle* willkürlichen, nicht nur die mit $k(s,t)$ in besonderem Zusammenhang stehenden Funktionen nach Eigenfunktionen entwickeln bzw. durch sie approximieren kann, ist entscheidend, ob die sämtlichen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ der „*Vollständigkeitsrelation*" (2a) von Nr. **15** genügen. Bei einem nicht abgeschlossenen Kerne ist das jedenfalls nicht der Fall, da dann (s. Nr. **30** e) stetige zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonale „Eigenfunktionen des Eigenwertes ∞" existieren; aber auch bei abgeschlossenen Kernen braucht es unter Umständen nicht der Fall zu sein[440]). *Notwendig und hinreichend dafür, daß das Eigenfunktionensystem die Vollständigkeitsrelation erfüllt, ist die von D. Hilbert als Allgemeinheit bezeichnete Eigenschaft des Kernes*[441]): Jede stetige Funktion $f(s)$ soll durch Funktionen der Gestalt $\int_a^b k(s,t)x(t)\,dt$ mit passendem stetigem $x(s)$ im Mittel beliebig approximiert werden können, derart, daß $\int_a^b \left\{f(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt\right\}^2 ds$ beliebig klein wird.

35. Abhängigkeit der Eigenwerte vom Integrationsbereich und ihr asymptotisches Verhalten. Allgemeine Aussagen über die Verteilung der Eigenwerte, falls unendlichviele existieren, sind in den Sätzen von Nr. **30** c und Nr. **34**, (25), (25a) enthalten. Darüber hinaus sind unter speziellen Annahmen über die Natur des Kernes weitere

440) Ein Beispiel findet man so: *E. Fischer,* Paris C. R. 144 (1907), p. 1148—1151 hat gezeigt, wie man zu einer willkürlich gegebenen samt ihrem Quadrat im Lebesgueschen Sinne integrierbaren unstetigen Funktion $\omega(s)$ unendlichviele *stetige* Funktionen $\varphi_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ hinzukonstruieren kann, die mit $\omega(s)$ zusammen ein vollständiges Orthogonalsystem bilden; bestimmt man nun solche Werte λ_ν, daß $\sum_{(\nu)} \lambda_\nu^{-1}\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t) = k(s,t)$ gleichmäßig konvergiert, so ist $k(s,t)$ abgeschlossen, da die *unstetige* Funktion $\omega(s)$ die einzige zum Eigenwert ∞ gehörige Eigenfunktion ist, aber die zu den endlichen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ bilden für sich kein vollständiges System.

441) *D. Hilbert*[381]), p. 25. Daß diese Bedingung hinreichend ist, findet man ibid. p. 27 und 193; daß sie notwendig ist, ergänzt man leicht aus der Bemerkung, daß man jede stetige Funktion auf Grund der Vollständigkeitseigenschaft durch ein Aggregat von endlichvielen Eigenfunktionen im Mittel beliebig annähern kann. — Den allgemeinen Kernen entsprechen in der algebraischen Analogie quadratische Formen mit nicht verschwindender Determinante (eigentliche Zentralflächen, die keine Zylinder sind). Die Unterscheidung zwischen abgeschlossenen und allgemeinen Kernen hat kein algebraisches Analogon; ein abgeschlossener nicht allgemeiner Kern[440]) hat zwar keine stetigen zum Eigenwert ∞ gehörigen Eigenfunktionen, wohl aber unstetige bei der notwendigen Ergänzung des Funktionenraumes (vgl. Nr. 7).

Resultate gewonnen worden, die für die Anwendungen von großer Bedeutung sind.[442]) Man kann alle hierhin gehörigen Resultate, die zuerst von *H. Weyl*[443]) bewiesen worden sind, am kürzesten nach *R. Courant*[444]) einheitlich mittels dessen Definition der Eigenwerte durch ein Maximum-Minimum-Problem (Nr. **32** d) begründen, das die Veränderung der Eigenwerte bei Veränderung des Integrationsintervalles und des Kernes leicht zu überblicken gestattet.

a) Abhängigkeit vom Integrationsbereich. Ist (a', b') ein Teilintervall von (a, b), so ist der n^{te} der ihrer absoluten Größe nach geordneten Eigenwerte λ_n eines Kernes $k(s, t)$ für das Intervall (a, b) absolut nicht größer als der entsprechende λ_n' desselben Kernes für das Intervall (a', b'); analoges gilt für die positiven und negativen Eigenwerte für sich, und bei stetiger Änderung des Intervalls ändert sich jeder Eigenwert stetig.[445]) Denn in der Gesamtheit derjenigen Werte der Integralform $\mathfrak{K}(x, x)$, deren obere Grenze gemäß Nr. **32** d zur Definition von $|\lambda_n|^{-1}$ führt, treten auch die sämtlichen in gleicher Weise zu $|\lambda_n'|^{-1}$ führenden Werte der für (a', b') gebildeten Integralform $\mathfrak{K}'(x, x)$ auf, wenn man nur $x(s)$ außerhalb (a', b') gleich 0 nimmt; daraus folgt aber unmittelbar $|\lambda_n'|^{-1} \leqq |\lambda_n|^{-1}$. Ebenso ergibt sich[446]): Werden endlichviele Teilintervalle von (a, b) ohne gemeinsame innere Punkte betrachtet, so ist $|\lambda_n|$ nicht größer als die n^{te} Zahl aus der Reihe der ihrer absoluten Größe nach geordneten sämtlichen Eigen-

---

442) Sie sind übrigens direkt durch Vermutungen angeregt worden, die aus physikalischen Betrachtungen über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte bei der schwingenden Membran, der Hohlraumstrahlung und ähnlichen Problemen gewonnen wurden; vgl. *A. Sommerfeld,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1057—1066, insbes. p. 1061f. sowie *H. A. Lorentz,* ebenda, p. 1234—1257, insbes. p. 1248.

443) *H. Weyl,* a) Gött. Nachr. 1911, p. 110—117; b) Math. Ann. 71 (1912), p. 441—479, insbes. § 1, 2; c) J. f. Math. 141 (1912), p. 1—11, insbes. § 2, 3; d) ebenda, p. 163—181, insbes. § 1; e) Palermo Rend. 39 (1915), p. 1—50, insbes. § 6. — In den anderen Teilen dieser Arbeiten sowie im J. f. Math. 143 (1914), p. 177—202 werden diese Sätze zur Bestimmung der asymptotischen Eigenwertverteilung bei bestimmten Randwertaufgaben angewendet.

444) *R. Courant*[422]), insbes. § 6, sowie vorher in einer Reihe von Arbeiten [[408]) sowie Math. Ztschr. 15 (1922), p. 195—200; vgl. auch Literatur A 11, Kap. VI] in direkter Anwendung dieses Gedankens auf Randwertprobleme von Differentialgleichungen.

445) *H. Weyl*[443]), a), b). — Andere Beweise bei *T. Lalesco,* Paris C. R. 153 (1911), p. 541—542; Bucarest Bull. 21 (1912), p. 383—389 und *A. Blondel,* Paris C. R. 153 (1911), p. 1456—1458 (auch für unsymmetrische Kerne, s. Nr. **39** c).

446) *R. Courant*[408]) für Randwertprobleme von Differentialgleichungen; seine Betrachtung überträgt sich sofort auf Integralgleichungen, wobei sie sich durch den Fortfall der Randbedingungen noch etwas vereinfacht.

werte der Teilintervalle. Die gleichen Sätze gelten für Integralgleichungen mit mehrdimensionalem Integrationsbereich (Nr. **36** a).

b) Abhängigkeit vom Kern. Ist

$$k(s, t) = k'(s, t) + k''(s, t), \tag{30}$$

so gilt für die ihrer absoluten Größe nach geordneten entsprechend bezeichneten Eigenwerte bei gleichbleibendem Integrationsintervall

$$|\lambda_{m+n+1}|^{-1} \leqq |\lambda'_{m+1}|^{-1} + |\lambda''_{n+1}|^{-1}; \tag{30a}$$

analoges gilt für die für sich geordneten positiven und negativen Eigenwerte[443a, b, d, e]. Das folgt aus dem Theorem von Nr. **32** d, wenn man $\mathfrak{K}(x, x)$ für alle zu den ersten m Eigenfunktionen von $k'(s, t)$ und den ersten n Eigenfunktionen von $k''(s, t)$ orthogonalen $x(s)$ betrachtet. — Von den zahlreichen oft anwendbaren Sonderfällen dieses Satzes seien hervorgehoben: Ist $k''(s, t)$ *positiv definit*, so ist der n^{te} positive Eigenwert von $k(s, t)$ nicht größer als der n^{te} positive von $k'(s, t)$[443c, e]. Ist ferner $k''(s, t)$ ein *Kern von endlichem Range* $\leqq N$ (Nr. **10** a, 1.), so ist $|\lambda'_m| \leqq |\lambda_{m+N}|$[447]; hierin ist der von *E. Schmidt*[448] bewiesene Satz enthalten, daß bei jeder Annäherung von $k(s, t)$ durch einen Kern $k''(s, t)$ von endlichem Range $\leqq N$

$$\int_a^b\!\!\int_a^b \{k(s,t) - k''(s,t)\}^2 ds\, dt \geqq \sum_{\nu = N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \tag{31}$$

ist; der Minimalwert wird für $k''(s, t) = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu^{-1} \varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)$ erreicht. Endlich folgt, wenn man $k''(s, t)$ beliebig klein nimmt, daß der n^{te} Eigenwert λ_n sich mit $k(s, t)$ stetig ändert, und zwar genügt es, stetige Änderung von $k(s, t)$ nur in dem Sinne zu verlangen, daß das Doppelintegral von $(k(s, t) - k''(s, t))^2$ beliebig klein wird.[449]

c) Asymptotisches Verhalten der Eigenwerte. Läßt sich ein Kern durch die in b) auftretenden Verfahren aus einfachen Kernen mit bekannten Eigenwerten aufbauen bzw. durch sie approximieren, so kann man den angeführten Sätzen Aussagen über das asymptotische Verhalten seiner Eigenwerte mit wachsendem n entnehmen. So hat *H. Weyl*[443a, b], bewiesen, daß für einen *h-mal stetig differen-*

447) *H. Weyl*[443], a), b), d). Eine Verallgemeinerung bei *H. Bateman*, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 18 (1912), p. 179—182.

448) *E. Schmidt*[381], § 18; der Satz wird hier für unsymmetrische Kerne unter Verwendung der Begriffe von Nr. **36** c bewiesen (s. dazu *H. Weyl*[443], d).

449) *H. Weyl*[443], b), p. 447; *R. Courant*[422], § 6. — Bemerkungen über die Variation der Hauptfunktionen unsymmetrischer Kerne (s. Nr. **39** a) bei Abänderung des Kernes macht *H. Block*, Lunds univ. årsskrift 7 (1911), Nr. 1, 34 S.

zierbaren Kern $k(s, t)$

(32) $$\lim_{n=\infty} n^{h+\frac{1}{2}} \lambda_n^{-1} = 0$$

ist, und daß unter den gleichen Voraussetzungen für einen Kern $k(s_1, s_2, t_1, t_2)$ einer Integralgleichung in 2 Veränderlichen (s. Nr. **36** a), deren Integrationsgebiet von einer rektifizierbaren Kurve begrenzt wird, $\lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{2}(h+1)} \lambda_n^{-1} = 0$ ist.

Wichtiger für die Anwendungen sind die Sätze über die Eigenwerte solcher Kerne, die *Greensche Funktionen* von Randwertaufgaben gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen sind, und die durch das Auftreten typischer Singularitäten (von der Art der Funktionen $|s-t|$ bzw. $\log\{(s_1-t_1)^2+(s_2-t_2)^2\}$ bzw. $\{(s_1-t_1)^2+(s_2-t_2)^2 + (s_3-t_3)^2\}$) charakterisiert sind. *H. Weyl*[443]) hat gezeigt, daß aus jenen Theoremen das asymptotische Verhalten in allen hierhin gehörigen Fällen gewonnen werden kann, insbesondere auch die Tatsache[442]), daß die asymptotische Verteilung der Eigenwerte in erster Annäherung unabhängig von der Gestalt und nur abhängig von der Größe des Integrationsbereiches ist. Diese Resultate greifen, da in das Gebiet der Differentialgleichungen gehörig, über den Rahmen dieses Referates hinaus; zudem ist es *R. Courant*[444]) gelungen, sie direkt ohne Benutzung der Theorie der Integralgleichungen herzuleiten, indem er die Maximum-Minimumdefinition der Eigenwerte (Nr. **32** d) und die analog a), b) aus ihr folgenden Aussagen über die Anordnung der Eigenwerte direkt für die Randwertprobleme unter Benutzung der bekannten zugehörigen Variationsprinzipe ausspricht (vgl. Nr. **45** c).

d) Asymptotisches Verhalten der Eigenfunktionen. In gewissem Umfange kann man für die Eigenfunktionen analoge Resultate aussprechen, wie für die Eigenwerte; die vorhandenen Untersuchungen beziehen sich hier allerdings noch mehr nur auf Randwertprobleme bzw. die zugehörigen Kerne.[450]) Von allgemeinen Resultaten ist hier nur der von *R. Courant*[422]) mit seiner in Nr. **33** d dargestellten Methode gewonnene Satz hervorzuheben: Konvergieren die Kerne $k_n(s, t)$ gleichmäßig gegen $k(s, t)$, so daß ihre r Eigenwerte $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_r^{(n)}$ gegen einen r-fachen Eigenwert λ_1 von $k(s, t)$ konvergieren, so konvergiert die lineare Schar aus den zu $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_r^{(n)}$ gehörigen Eigenfunktion von $k_n(s, t)$ gleichmäßig gegen die lineare Schar der zu λ_1 gehörigen Eigenfunktionen von $k(s, t)$.

450) In etwas allgemeinerer Form hat *A. Hammerstein,* Math. Ann. 93 (1924), p. 113—129; 95 (1926), p. 102—109 eine asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen von Kernen gegeben, die die charakteristische Singularität von Greenschen Funktionen haben.

36. Uneigentlich singuläre symmetrische Integralgleichungen. Allgemeinere Integrationsbereiche. Systeme von Integralgleichungen.

a) Uneigentlich singuläre symmetrische Integralgleichungen.[450a]) Genau wie bei der Auflösungstheorie (s. Nr. **12**) ist auch für die Begründung der Mehrzahl der Sätze der Eigenwerttheorie die bisher gemachte Voraussetzung der Stetigkeit des Kernes entbehrlich. *D. Hilbert*[451]) hat bereits in seiner ersten Darstellung nachgewiesen, daß seine Resultate auch für solche symmetrische Kerne gelten, die an endlichvielen analytischen Kurven $s = g(t)$ im Quadrat $a \leqq s, t \leqq b$ *unendlich von niederer als* $\frac{1}{2}^{\text{ter}}$ *Ordnung* werden (d. h. wo für ein $\alpha < \frac{1}{2}$ $[s - g(t)]^\alpha k(s, t)$ stetig bleibt). *E. Schmidt*[452]) hat gezeigt, daß seine Methode unverändert unter den folgenden Bedingungen anwendbar bleibt (vgl. Nr. **12** c): 1. Die Unstetigkeitsstellen von $k(s, t)$ haben auf jeder Geraden $s =$ konst. den äußeren Inhalt 0; 2. $\int\limits_a^b [k(s, t)]^2 dt$ existiert für $a \leqq s \leqq b$ und ist daselbst eine stetige Funktion von s. Alsdann ist $k^{(2)}(s, t)$ stetig in s und t und verschwindet nur dann identisch, wenn $k(s, t)$ in seinem Stetigkeitsbereich verschwindet; die Sätze von Nr. **31**—**35** bleiben ungeändert mit Ausnahme derjenigen, die sich auf die Entwicklung von $k(s, t)$ selbst beziehen, insbesondere des *Mercer*schen Satzes[453]). Übrigens können die Entwicklungssätze von Nr. **34** c dahin erweitert werden, daß $x(t)$ in (27) eine samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion bedeutet.[453a])

450a) „*Eigentlich* singuläre Integralgleichungen", d. h. solche, bei denen die Sätze der Eigenwerttheorie nicht mehr unverändert gelten, findet man in Nr. **44**.

451) *D. Hilbert*[381]), Kap. VI, p. 30—35; die Methode ist die in Nr. **12** b geschilderte; vgl. auch *E. Garbe*[54]), 2. Abschn. Weiterhin kann man nach *Hilbert* (ibid., p. 35), falls $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, durch Übergang zu einem hinreichend oft iterierten stetigen Kern wie in Nr. **12** a entsprechend modifizierte Sätze erhalten.

452) *E. Schmidt*[381]), § 12. Ausdehnungen dieser Resultate auf in Lebesgueschem Sinne integrierbare Kerne geben *W. H. Young*[278]), *E. W. Hobson*[433]), *O. D. Kellogg*[412]); *E. W. Hobson* untersucht weiterhin, wann es Kerne gibt, für die $k(s, t)^2$ im Lebesgueschen Sinne nach t integrierbar ist und die vorgegebene Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzen, sowie verwandte Fragen.

453) Vgl. dazu [432]). *E. W. Hobson*[433]) gibt übrigens eine Ausdehnung des *Mercer*schen Satzes auf gewisse im Lebesgueschen Sinne quadratisch nach t integrierbare Kerne, wobei nur Konvergenz mit Ausnahme von Nullmengen behauptet werden kann. — Für symmetrische Kerne der Form $|s - t|^{-\alpha} H(s, t)$, wo $H(s, t)$ stetig und $0 < \alpha < 1$ ist, beweist *T. Carleman*, Ark. f. matem. 13 (1918), Nr. 6, 7 S., daß unendlichviele positive Eigenwerte λ_ν^+ vorhanden sind und daß $\sum (\lambda_\nu^+)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ konvergiert, falls in einem Teilintervall $H(s, s) > 0$ ist; der Beweis beruht auf der Ausdehnung des *Hilbert*schen Entwicklungssatzes.

453a) Darüber hinaus hat für den Fall eines *definiten* Kernes *J. Mercer*

b) Allgemeinere Integrationsbereiche. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die Sätze der Eigenwerttheorie genau wie die der Auflösungstheorie für *Integralgleichungen mit mehrfachen Integralen* in dem in Nr. **13** a bezeichneten Sinne in Geltung bleiben[454]), wobei der Kern eine *symmetrische Funktion von zwei Reihen von Veränderlichen* wird, die die Stellen s, t im n-dimensionalen Integrationsgebiet bestimmen. Ebenso läßt sich die Eigenwerttheorie für gemischte oder belastete Integralgleichungen der in Nr. **13** b beschriebenen Gestalt entwickeln[455]); dabei werden durch die *Symmetriebedingung*[456]) die in den Summen und verschiedendimensionalen Integralen auftretenden Koeffizientenfunktionen miteinander verknüpft — z. B. lautet die symmetrische belastete Integralgleichung der Form Nr. **13** b, (1)

$$(33)\qquad \varphi(s) - \lambda\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu k(s, x_\nu)\,\varphi(x_\nu) - \lambda\int_a^b k(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

$$\text{wo } k(s,t) = k(t,s),\ m_\nu \text{ beliebig.}$$

*E. Schmidt*s Theorie läßt sich alsdann ohne wesentliche Änderung in Methode und Resultaten übertragen[99]); so hat z. B. *A. Kneser*[98]) den *Mercer*schen Satz für die Integralgleichung (33) entwickelt.

c) Systeme von Integralgleichungen. Genügen die Koeffizientenfunktionen des Systemes von n Integralgleichungen mit n unbekannten Funktionen

$$(34)\quad \varphi_\alpha(s) - \lambda\sum_{\beta=1}^{n}\int_a^b k_{\alpha\beta}(s,t)\,\varphi_\beta(t)\,dt = f_\alpha(s)\qquad (\alpha = 1,\ldots,n;\ a \leqq s \leqq b)$$

den Symmetriebedingungen

$$(34\text{a})\qquad k_{\alpha\beta}(s,t) = k_{\beta\alpha}(t,s)\qquad (\alpha,\beta = 1,\ldots,n)$$

so läßt es sich nach Nr. **13** c zu *einer* Integralgleichung mit *symme-*

[London Roy. Soc. Proc. (A) 84 (1911), p. 573—575; Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 211 (1911), p. 111—198] den Entwicklungssatz auf in Lebesgueschem Sinne integrierbare $x(s)$ ausgedehnt, sowie ein Summationsverfahren für die Reihen (28) solcher Funktionen $f(s)$ angegeben, die nicht in der Gestalt (27) darstellbar sind [Abschätzung der Partialsummen von (28) durch Limites von mit der Resolvente $\varkappa$ von $k(s,t)$ gebildeten Integralen $\int_a^b \varkappa(\lambda; s,t) f(t)\,dt$].

454) *D. Hilbert*[381]), p. 3; *E. Schmidt*[381]), § 12.

455) *W. A. Hurwitz*[98]), *A. Kneser*[98]), *G. Andreoli*[101]).

456) *Jeder* einzelne Wert $\varphi(t)$ muß in die für eine beliebige Stelle s hingeschriebene Integralgleichung mit demselben Koeffizienten eingehen, wie $\varphi(s)$ in die für t geschriebene Integralgleichung, wobei die Integrale im Sinne von Nr. 1 a als Summengrenzwerte aufzufassen sind.

trischem Kern zusammenfassen; die gesamte Eigenwerttheorie ist also unmittelbar zu übertragen.[457])

Hier ist die Theorie der adjungierten Eigenfunktionenpaare eines stetigen *unsymmetrischen* Kernes $k(s,t)$ zu erwähnen, die *E. Schmidt*[458]) entwickelt hat. $\varphi(s)$, $\psi(s)$ heißt ein zum *Eigenwert* λ gehöriges *Paar adjungierter Eigenfunktionen*, wenn es ohne identisch zu verschwinden die Gleichungen

$$(35)\qquad \varphi(s) - \lambda\int_a^b k(s,t)\psi(t)\,dt = 0, \quad \psi(s) - \lambda\int_a^b k(t,s)\varphi(t)\,dt = 0$$

erfüllt; $\varphi(s)$, $\psi(s)$ dürfen stets reell, die Eigenwerte λ positiv angenommen werden. Dann sind $\varphi(s)$ bzw. $\psi(s)$ die zum Eigenwert λ^2 gehörigen Eigenfunktionen der beiden symmetrischen definiten Kerne

$$(36)\qquad \bar{k}(s,t) = \int_a^b k(s,r)k(t,r)\,dr \quad \text{bzw.} \quad \underline{k}(s,t) = \int_a^b k(r,s)k(r,t)\,dr,$$

und man erhält aus allen Paaren adjungierter Eigenfunktionen sämtliche Eigenfunktionen von $\bar{k}$ und $\underline{k}$. Von den der Eigenwerttheorie des symmetrischen Kernes völlig entsprechenden Sätzen, die *E. Schmidt* hieraus gewinnt, sei der *Entwicklungssatz* hervorgehoben: Jede in der Form

$$(37)\qquad f(s) = \int_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt$$

darstellbare Funktion ist in die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(s) = \sum_{(\nu)} c_\nu \varphi_\nu(s), \quad c_\nu = \int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

nach den ersten Funktionen der adjungierten Paare (Eigenfunktionen von $\bar{k}(s,t)$) entwickelbar — und das gleiche gilt bei Vertauschung von $k(s,t)$ mit $k(t,s)$ in bezug auf die $\psi_\nu(s)$.[459])

457) Vgl. neben der in Nr. **13**c genannten Literatur insbes. *D. Hilbert,* 6. Mitteil., Gött. Nachr. 1910 = Grundzüge, Kap. XVI, p. 208 ff.

458) *E. Schmidt*[381]), § 14—16; Ausdehnung auf Unstetigkeiten § 17. Wegen der algebraischen Bedeutung dieser Theorie s. [483]). — Andere Herleitungen geben durch Übergang zu unendlichvielen Unbekannten (s. Nr. **40**e) *J. Mollerup,* Darb. Bull. (2) 35 (1911), p. 266—273 sowie durch direkte Anwendung des *Schmidt*schen Verfahrens (Nr. **33**a) zur Approximation der Eigenwerte in modifizierter Gestalt (vgl. [412])) *A. Vergerio,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 285—302; *J. Mollerup*, ibid. 47 (1923), p. 375—395 und 7. Skand. Mat. Kong. København (1926), p. 447—455. Ein spezieller Fall bei *É. Picard,* Paris C. R. 149 (1909), p. 1337—1340 = Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 569—574.

459) *J. Schur*[433]), § 1—3 beweist darüber hinaus, daß die Funktionen (37) auch nach Eigenfunktionen jedes durch Addition eines beliebigen positiv definiten Kernes aus $\bar{k}(s,t)$ entstehenden Kernes entwickelbar sind und gibt weitere Verallgemeinerungen.

D. Hilbert[460]) hat darauf hingewiesen, daß die Gleichungen (35) ein System der Art (34) bilden, und daß sie sich daher in eine Integralgleichung mit dem Integrationsintervall $(a, 2b - a)$ und dem durch

$$K(s, t) = 0, \quad \text{wenn} \quad a \leqq s, t < b \quad \text{und} \quad b \leqq s, t \leqq 2b - a$$

$$K(s, t) = k(s, t - (b - a)), \quad \text{wenn} \quad a \leqq s < b, b \leqq t \leqq 2b - a$$

definierten symmetrischen Kern zusammenfassen lassen. Die Eigenwerte dieses Kernes sind die oben definierten Eigenwerte von $k(s, t)$ sowie die absolut gleichen negativen Zahlen, seine Eigenfunktionen liefern durch ihre Werte in den Teilintervallen (a, b) und $(b, 2b - a)$ die Funktionen $\varphi(s)$, $\psi(s)$ sowie $\varphi(s)$, $-\psi(s)$ der adjungierten Paare. Danach lassen sich aus der Eigenwerttheorie des Kernes $K(s, t)$ ohne weiteres alle Sätze über die adjungierten Eigenfunktionen ablesen, wenn man das doppelte Integrationsintervall wieder in seine beiden Teile zerlegt und die Eigenfunktionen in bezug auf das einfache Intervall (a, b) statt auf das doppelte $(a, 2b - a)$ normiert.[461])

37. Besondere symmetrische Kerne. Auf die zahlreichen besonderen Kerne, die gelegentlich der Anwendungen der Eigenwerttheorie auf Randwertprobleme von Differentialgleichungen und Reihenentwicklungen der mathematischen Physik behandelt worden sind, ist hier gemäß der Begrenzung dieses Artikels nicht einzugehen[462]); es soll nur ein kurzer Überblick über diejenigen besonderen Kerne gegeben werden, für die gelegentlich über die allgemeinen Sätze hinausgehende Resultate in der Theorie der Integralgleichungen gegeben worden sind.

Als Beispiele werden vielfach behandelt die schon in Nr. **34** a erwähnten Kerne $k(s, t) = f(s - t)$, wo $f(x)$ eine gerade periodische Funktion ist (vgl. auch Nr. **14**), deren Eigenfunktionen die trigonometrischen Funktionen sind.[463]) Eine in gewissem Sinne analoge Rolle

460) *D. Hilbert,* 5. Mitteil., Gött. Nachr. 1906 = Grundzüge, Kap. XIV, p. 194; weiter ausgeführt bei *E. Bounitzky,* Darb. Bull. (2) 31 (1907), p. 121—128. — Für die Übertragung der Resultate von Nr. **35** s. *H. Weyl*[443]), d).

461) Das Eigenwertproblem für ein etwas anderes System zweier Integralgleichungen mit zwei unbekannten Funktionen hat *A. J. Pell,* Amer. Math. Soc. Trans. 23 (1922), p. 198—211 durch Übergang zum analogen Problem in unendlichvielen Unbekannten behandelt; eine Ausdehnung auf symmetrisierbare Kerne (s. Nr. **38** b) bei *M. Buchanan,* Amer. J. 45 (1923), p. 155—185.

462) Den direkten Zusammenhang zwischen typischen Schwingungsproblemen und symmetrischen Integralgleichungen erörtern *Ph. Frank,* Wien Akad. Sitzungsb. math.-nat. Kl. IIa, 117 (1908), p. 279—298; *A. Kneser,* Jahresb. Schles. Ges. vaterl. Kult. 1909, math. Sekt., 8 S.; *A. Sommerfeld*[442]) und Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 21 (1913), p. 309—353.

463) Den Zusammenhang mit Theoremen über Fourierreihen behandelt *J. Schur*[188]), § 4; Kerne dieser Art, die bei optischen Problemen auftreten, erörtert *L. Mandelstam,* Festschr. f. H. Weber (1912), p. 228—241. — *H. Weyl,* Math.

spielen zweidimensionale Integralgleichungen, deren Integrationsgebiet eine geschlossene Fläche des Raumes und deren Kern die reziproke Entfernung zweier Punkte oder eine ähnliche Funktion ist.[464]) Entsprechende Untersuchungen über die Eigenwerttheorie gewisser dreidimensionaler symmetrischer Integralgleichungen treten in *D. Hilberts* kinetischer Gastheorie[465]) auf.

B. Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern.

38. Besondere unsymmetrische Kerne, die sich wie symmetrische verhalten. a) Alternierende und Hermitesche Kerne. Ein Kern heißt *alternierend*, wenn $K(t, s) = -K(s, t)$ gilt. Sowohl die reellen symmetrischen als auch die reellen alternierenden Kerne begreifen sich dem allgemeineren Begriff der *Hermiteschen Kerne* unter; dies sind komplexe Kerne (im reellen Bereich $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ als komplexe Funktionen der reellen Variablen s, t definiert), die der Bedingung $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$ genügen.[466]) Sind sie reell, so sind sie symmetrisch, sind sie rein-imaginär, so sind sie das i-fache eines alternierenden Kernes. Sie sind den sog. „Hermiteschen Formen" der Algebra nachgebildet, und ebenso, wie sich auf diese die gesamte Hauptachsentheorie von den reellen quadratischen Formen überträgt, überträgt sich die gesamte Eigenwerttheorie unmittelbar auf Hermitesche Kerne.[467]) Dabei müssen als Eigenfunktionen ebenfalls komplexe

Ann. 97 (1926), p. 338—356 hat die Theorie der fastperiodischen Funktionen auf einen solchen Kern für das Intervall $(-\infty, +\infty)$ zurückgeführt, wobei an Stelle der Integrale Mittelwerte auftreten; er geht genau nach dem Muster der *E. Schmidt*schen Methode vor.

464) Einen speziellen Fall (Kugelfläche) hat *E. R. Neumann*, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 238—261 durch Zurückführung auf Differenzengleichungen vollständig durchgerechnet, allgemeinere werden in den Untersuchungen von *L. Lichtenstein*[365]) über Gleichgewichtsfiguren eingehend behandelt; vgl. auch *J. Schur*[399]).

465) *D. Hilbert*, Math. Ann. 72 (1912), p. 562—577 = Grundzüge, Kap. XXII, sowie *D. Enskog*[72]) und *E. Hecke*[72]). Auch die Begründung der Strahlungstheorie von *D. Hilbert*, Gött. Nachr. 1912, p. 773—789 = Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1913), p. 1—20 = Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 1056—1064 ist hier zu nennen.

466) Überstreichen bedeutet Übergang zu der konjugiert-imaginären Größe.

467) Seitdem *D. Hilbert* dies (Grundzüge, p. 162) ausdrücklich (in der Übertragung auf unendlichviele Veränderliche; für Integralgleichungen ausgesprochen und ohne den Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen bewiesen bei *J. Schur*, Math. Ann. 66[485]), p. 507) bemerkt hatte, ist es zu wiederholten Malen erneut ausgeführt worden, für den besonderen Fall alternierender Kerne von *T. Lalesco*, Paris C. R. 151 (1910), p. 1336—1337 und Literatur A 6, p. 73—78, allgemeiner von *R. Perhavc*, Wien. Ber. 121 (1912), p. 1551—1562; *Th. Anghelutza*, Paris C. R. 158 (1914), p. 243—245, leitet die Sätze für alternierende Kerne $T(s, t)$ aus der Bemerkung ab, daß der iterierte Kern $T^{(2)}(s, t)$ symmetrisch ist [vgl. dazu auch

Belegungen zugelassen werden, und an Stelle der orthogonalen Funktionensysteme, die durch $\int_a^b \varphi_\alpha(s)\varphi_\beta(s)\,ds = e_{\alpha\beta}$ charakterisiert sind, treten die *unitären* Funktionensysteme (vgl. [201])), für die $\int_a^b \varphi_\alpha(s)\overline{\varphi_\beta(s)}\,ds = e_{\alpha\beta}$ gilt, und die, falls sie reell sind, schlechthin orthogonal sind. Mindestens ein Eigenwert eines Hermiteschen Kernes ist stets vorhanden, alle sind reell und einfache Pole der Resolvente; die Entwicklungssätze gelten in genau der gleichen Weise.

Alle diese Tatsachen sind als Spezialfälle in der allgemeineren enthalten, daß die gesamten Entwicklungssätze bei jedem Kern gelten, der der Bedingung

$$(1) \qquad \int_a^b K(s,r)\overline{K(t,r)}\,dr = \int_a^b \overline{K(r,s)}K(r,t)\,dr$$

genügt. Wegen der Begründung dieser Behauptung vgl. Nr. **41** a. Die Eigenwerte sind in diesem Falle nicht mehr notwendig reell, sondern irgendwelche komplexe Zahlen, die sich nirgends im Endlichen häufen; sie sind aber sämtlich einfache Pole der Resolvente.

b) Symmetrisierbare Kerne. Eine andere geläufige Erweiterung des Hauptachsentheorems der Algebra hat das Muster für eine Reihe weiterer Untersuchungen abgegeben, die eine unmittelbare Ausdehnung der Eigenwerttheorie auf gewisse unsymmetrische Kerne bezwecken. Es handelt sich um diejenigen Verallgemeinerungen des Hauptachsentheorems, bei denen an Stelle der Orthogonalität $\sum x_\alpha y_\alpha = 0$ die *Polarität* $\sum d_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta = 0$ bezüglich irgendeiner definiten quadratischen Form $\mathfrak{D} = \sum d_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ tritt. Dies war auch der Grund, aus dem *Hilbert* die besondere Klasse von Integralgleichungen, für die er um gewisser Anwendungen willen diese Gedankenrichtung bis zu Ende verfolgt hat, als *polare Integralgleichungen* bezeichnet hat.

1. *D. Hilbert*[467a]) bezeichnet die Gleichung

$$(2) \qquad v(s)\varphi(s) - \lambda\int_a^b D(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

T. Lalesco, Roum. Ak. Bull. 3 (1915), p. 326—327]. *R. Weitzenböck,* Palermo Rend. 35 (1913), p. 172—176, zeigt, daß eine Funktion von zwei Veränderlichen $K(x,y)$ dann und nur dann von der Form $\sum_{\alpha=1}^{n}[\varphi_\alpha(x)\psi_\alpha(y) - \psi_\alpha(x)\varphi_\alpha(y)]$ ist, also, als Kern einer Integralgleichung angesehen, ein alternierender Kern mit nur endlichvielen Eigenwerten ist, wenn das Fredholmsche $K\binom{s_1 \ldots s_\nu}{s_1 \ldots s_\nu}$ für $\nu = 2n$ nicht identisch 0 ist, wohl aber für alle weiteren ν (vgl. Nr. **11** d).

467a) *D. Hilbert,* 5. Mitteil., Gött. Nachr. 1906, p. 462ff. = Grundzüge, Kap. XV, p. 195—204.

als *Integralgleichung 3. Art* (vgl. Nr. **21** a) und redet insbesondere von einer polaren Integralgleichung, wenn der Kern $D(s,t)$ reell, symmetrisch und positiv definit[468]) ist (s. Nr. **32** b):

$$(3) \qquad \int_a^b\int_a^b D(s,t)u(s)u(t)\,ds\,dt \geqq 0,$$

und wenn außerdem $v(s)$ keine anderen als die Werte ± 1 annimmt, mit nur endlichmaligem, aber mindestens einmaligem Wechsel.[469]) Die Eigenwerte, d. h. die Werte von λ, für welche die zu (2) gehörige *homogene* Gleichung

$$(2_h) \qquad v(s)\varphi(s) - \lambda\int_a^b D(s,t)\varphi(t)\,dt = 0$$

lösbar ist, sind alle reell und einfache Pole der Resolvente. Das System der zugehörigen Eigenfunktionen kann so normiert werden, daß

$$(4) \quad \int_a^b v(s)\pi_\alpha(s)\pi_\beta(s)\,ds = 0 \;(\alpha \neq \beta), \quad \int_a^b v(s)[\pi_\alpha(s)]^2\,ds = \varepsilon_\alpha \;\;(\varepsilon_\alpha = \pm 1)$$

ist („polares Funktionensystem"). Jede in der Form

$$f(s) = \int_a^b\int_a^b v(s)D(s,r)v(r)D(r,t)g(t)\,dr\,dt$$

darstellbare Funktion läßt sich in die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$(5) \qquad f(s) = c_1\pi_1(s) + c_2\pi_2(s) + \cdots$$

entwickeln, wo

$$(5') \qquad c_\alpha = \varepsilon_\alpha\int_a^b f(s)v(s)\pi_\alpha(s)\,ds$$

ist. Dann und nur dann, wenn

$$(6) \qquad \int_a^b D(s,r)v(r)D(r,t)\,dr \equiv 0$$

---

468) In den Arbeiten über symmetrisierbare Kerne wird für diesen Begriff zumeist die Bezeichnung „von positivem Typus" (bei *A. Korn*[474]) „positivierend") gebraucht, dagegen das Wort „definit" für dasjenige, was hier (vgl. Nr. **32** b) als eigentlich positiv definit bezeichnet wurde (vgl. etwa *T. Lalesco*, Literatur A 6, p. 70). Es erscheint jedoch unzweckmäßig, die Benennung gerade in dem entscheidenden Punkte so zu wählen, daß sie derjenigen der Algebra geradezu zuwiderläuft und die Gegenüberstellung erschwert.

469) Der Fall eines durchweg *positiven*, im übrigen beliebige Werte durchlaufenden $v(s)$ läßt sich durch eine einfache Transformation von φ und f auf den Fall eines symmetrischen Kernes zurückführen, wie schon *É. Goursat*, Paris C. R. 146 (1908), p. 327—329 aus Anlaß einer Notiz von *T. Boggio*, Paris C. R. 145 (1907), p. 619—622 hervorgehoben hat.

ist, ist kein Eigenwert vorhanden. Wenn der Kern $D(s, t)$ allgemein (also auch *eigentlich* positiv definit) ist und übrigens auch nur dann, so kann jedes stetige $f(s)$ durch lineare Kombinationen von der Form $a_1 \pi_1(s) + \cdots + a_n \pi_n(s)$ im Mittel beliebig approximiert werden (vgl. Nr. **34** d, Ende); es sind dann sicher sowohl unendlichviele positive als auch unendlichviele negative Eigenwerte vorhanden.

Hilberts Beweismethode[467a]) beruht auf einem von dem in Nr. **15** und **40** e geschilderten insofern abweichenden Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen, als an Stelle des vollständigen Orthogonalsystems $\omega_p(s)$ ein „vollständiges polares Funktionensystem" verwendet wird, das Bedingungen der Form (4) und einer entsprechend modifizierten Vollständigkeitsbedingung genügt; so wird das Problem in ein entsprechendes über Scharen von quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen übergeführt und dieses dann behandelt (vgl. darüber Nr. **41** b, 4). Einen davon verschiedenen Beweis hat *G. Fubini*[470]) gegeben, indem er nicht zu unendlichvielen Veränderlichen übergeht, sondern in der Art wie es *E. Holmgren*[421]) (vgl. Nr. **33** d) im Falle einer Integralgleichung 2. Art tut, im Funktionenraum selbst operierend mit den Methoden, die Hilbert beim Dirichletschen Prinzip angewendet hatte, die Existenz der Eigenwerte als Extrema erhielt (vgl. Nr. **41** b, 2[522])). *E. Garbe*[471]) behandelt die Gleichung

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b v(s) D(s, t) \varphi(t)\, dt = f(s) \tag{7}$$

— die Hilbertsche Gleichung (2) kann durch die Transformation $v(s)\varphi(s) = \psi(s)$ leicht auf diese Gestalt gebracht werden (vgl. Nr. **21** a) — unter der Voraussetzung, daß D positiv definit ist, $v(s)$ aber lediglich (bis auf eine endliche Anzahl von Sprüngen) stetig. Unter dieser den Hilbertschen Fall einschließenden Voraussetzung zeigt er, daß über den Hilbertschen Entwicklungssatz hinaus, wenn die Normierung (4) des polaren Funktionensystems sinngemäß durch

$$\int_a^b \int_a^b D(s, t) \pi_\alpha(s) \pi_\beta(t)\, ds\, dt = \frac{1}{\lambda_\alpha} \int_a^b \frac{\pi_\alpha(s) \pi_\beta(s)}{v(s)}\, ds = e_{\alpha\beta} \tag{4a}$$

ersetzt wird, nicht nur die Entwicklung

$$\int_a^b D(s, r) v(r) D(r, t)\, dr = \frac{1}{v(s) v(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s) \pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^3} \tag{5a}$$

---

470) *G. Fubini,* Ann. di mat. (3) 17 (1910), p. 111—139; davon, daß $v(s) = \pm 1$ ist, wird entscheidender Gebrauch gemacht; es wird aber nicht wie bei Hilbert benutzt, daß $v(s)$ nur *endlich*viele Zeichenwechsel im Intervall erleidet.

471) *E. Garbe,* Math. Ann. 76 (1915), p. 527—547.

absolut und gleichmäßig konvergiert[472]), sondern daß auch, wenn $D(s,t)$ ein allgemeiner Kern ist (vgl. Nr. **34** d),

$$(5\text{b}) \qquad D(s,t) = \frac{1}{v(s)v(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Für $v(s) = 1$ ist dieses Ergebnis in dem Satz von *Mercer* (Nr. **34** b) enthalten, von dem sich der allgemeinere Fall Garbes dadurch wesentlich abhebt, daß in ihm die Möglichkeit unendlichvieler negativer neben unendlichvielen positiven Eigenwerten vorliegt (vgl. auch 4. dieser Nummer).

2. *A. J. Pell*[473]) gelingt es, für die Integralgleichung mit dem Kern

$$(8) \qquad K(s,t) = \int_a^b S(s,r)D(r,t)\,dr,$$

wo S symmetrisch und D positiv definit ist, den Hilbertschen Entwicklungssätzen entsprechende nach einer verwandten, aber doch in wesentlichen Punkten abweichenden Methode (vgl. darüber Nr. **41** b, 5) aufzustellen. Für den Fall eines *abgeschlossenen* D besagen ihre Resultate (insbes. Trans. 12, p. 1701—75), daß jede durch $K(s,t)$ quellenmäßig darstellbare Funktion eine Entwicklung

$$(5\text{c}) \qquad f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)\,dt = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b f(t)\psi_\nu(t)\,dt$$

gestattet, wo $\psi_\nu(s) = \int_a^b D(s,t)\varphi_\nu(t)\,dt$ die Eigenfunktionen des transponierten Kernes $K(t,s)$ sind (vgl. 4. und auch Nr. **39** a). Eigenwerte sind hier stets vorhanden, wenn S nicht identisch verschwindet. Wenn D *nicht abgeschlossen* ist, sind Eigenwerte dann und nur dann nicht vorhanden, wenn

$$(6\text{b}) \qquad \int_a^b\int_a^b D(s,u)S(u,v)D(v,t)\,du\,dv$$

472) Die analoge Formel für den dreimal iterierten Kern ist bereits in dem Entwicklungssatz von *D. Hilbert*[467a]) enthalten; in dieser durch die Form der Normierung (4a) bedingten Gestalt (5a) findet sie sich bei *J. Marty*, Paris C. R. 150 (1910), p. 515—518, 603—606.

473) *A. J. Pell*, Biorthogonal systems of functions, Amer. Trans. 12 (1911), p. 135—164 (eingereicht April 1909), sowie Applications of biorthogonal systems of functions to the theory of integral equations, p. 165—180 (eingereicht Sept. 1909) und die Voranzeigen dazu Amer. Math. Soc. Bull. (2) 16 (1910), p. 459—460, 513—515; (2) 17 (1910), p. 73—74. Die Verfasserin betrachtet statt des Kernes $D(s,t)$ allgemeiner eine Operation $\mathfrak{D}$, die im Sinne der general analysis durch einige Postulate festgelegt ist. — Eine Notiz ohne Beweis, daß bei Kernen von der hier betrachteten Art alle Eigenwerte reell sind, findet sich schon bei *H. Bateman*[398]) „als Analogon eines bekannten *Weierstraß*schen Satzes".

identisch verschwindet. Ist insbesondere nur *eine* Eigenfunktion $p(s)$ des Kernes D für den Eigenwert ∞ vorhanden, $\int_a^b D(s,t)p(t)\,dt = 0$, so ist für die Nichtexistenz eines Eigenwerts notwendig und hinreichend, daß S die Form hat

$$(7)\qquad S(s,t) = \alpha(s)p(t) + \alpha(t)p(s) + kp(s)p(t),$$

wo $\alpha(s)$ eine stetige Funktion, k eine Konstante ist, und beim Entwicklungssatz (5c) tritt für ein solches D ein Summand $cp(s)$ hinzu.

3. *A. Korn*[474]) hat die Methode von *H. Poincaré* wie auf den Fall eines beliebigen symmetrischen Kernes (vgl. Nr. 33c) so auch auf solche unsymmetrische Kerne K ausgedehnt, zu denen man zwei reelle symmetrische Kerne D_1, D_2 hinzubestimmen kann, so daß folgendes gilt:

1) $\int_a^b\int_a^b D_1(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt \geqq 0$, und das Gleichheitszeichen gilt nur für solche $\varphi(s)$, für die zugleich $\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = 0$ ist.

2) $\int_a^b\int_a^b D_2(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt \geqq 0$, und das Gleichheitszeichen gilt nur für solche $\varphi(s)$, für die zugleich $\int_a^b K(t,s)\varphi(t)\,dt = 0$ ist.

3) $$\int_a^b\int_a^b D_2(s,u)\,D_1(u,v)\,K(v,t)\,du\,dv = K(s,t),$$

$$\int_a^b\int_a^b K(s,u)\,D_2(u,v)\,D_1(v,t)\,du\,dv = K(s,t),$$

oder in leicht verständlicher Symbolik analog dem Kalkül mit Matrizen (vgl. Nr. 18a):

$$(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1)\mathfrak{K} = \mathfrak{K},\quad \mathfrak{K}(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1) = \mathfrak{K}.$$

D_1, D_2 heißen dann „zueinander reziprok bezüglich K“, bzw. „im ver-

---

474) *A. Korn,* Paris C. R. 153 (1911), p. 171—173, 327—328, 539—541; Sitzungsb. Berl. Math. Ges. 11, p. 11—18 im Arch. d. Math. (3) 19 (1912); Tôhoku J. 1 (1912), p. 159—186; 2 (1912), p. 117—136; Paris C. R. 156 (1913), p. 1965—1967; Sitzungsb. Berl. Math. Ges. 15 (1916), p. 107—114; Arch. d. Math. (3) 25 (1916), p. 148–173; 27 (1918), p. 97—120. — Der Kern, auf den Fredholm zuerst bei der potentialtheoretischen Randwertaufgabe gestoßen war, ist selbst unsymmetrisch und bildet den Ausgangspunkt dieser Versuche, die Eigenwerttheorie auf Klassen unsymmetrischer Kerne auszudehnen. Ganz im Rahmen der potentialtheoretischen Redeweise bleiben *J. Blumenfeld* und *W. Meyer,* Wien. Ber. 123 (1914), p. 2011—2047, die die Entwicklungssätze für diesen Fall, aber unter Benutzung der Mittel der Integralgleichungstheorie durchführen.

allgemeinerten Sinne reziprok“, wenn rechts statt K irgendeine Iterierte von K steht.

$$4)\ \int_a^b D_1(s,u)K(u,t)\,du = \int_a^b K(u,s)D_1(t,u)\,du,$$

$$\int_a^b K(s,u)D_2(u,t)\,du = \int_a^b D_2(u,s)K(t,u)\,du,$$

bzw. symbolisch

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{D}_1\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'\mathfrak{D}_1' = \mathfrak{S}_1', \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{K}\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2'\mathfrak{K}' = \mathfrak{S}_2'.$$

Unter diesen Voraussetzungen, von denen Korn insbesondere die Voraussetzung 3) als gewiß nicht entbehrlich bezeichnet, erbringt er den vollen Beweis der Entwicklungssätze.

Wird 4) durch die geringere Voraussetzung $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1' = \mathfrak{S}_2'\mathfrak{S}_1$ ersetzt, so brauchen die Eigenwerte nicht mehr reell zu sein, aber sie bleiben einfache Pole der Resolvente.

4. Ein Kern $K(s,t)$ heißt *linksseitig symmetrisierbar*, wenn man einen reellen symmetrischen, positiv definiten Kern $D_1(s,t)$ hinzubestimmen kann, so daß

$$\mathfrak{D}_1\mathfrak{K} = \mathfrak{S}_1, \quad \text{d. h.} \quad \int_a^b D_1(s,r)K(r,t)\,dr = S_1(s,t)$$

symmetrisch ist, *rechtsseitig symmetrisierbar*, wenn ebenso

$$\mathfrak{K}\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{S}_2, \quad \text{d. h.} \quad \int_a^b K(s,r)D_2(r,t)\,dr = S_2(s,t)$$

symmetrisch ausfällt.[475]) Die drei vorstehend geschilderten Arten von Kernen sind sämtlich in beiderlei Sinne symmetrisierbar — bei der 3. Art ist es unmittelbar klar, da hier die Eigenschaft 4) unmittelbar die beiderseitige Symmetrisierbarkeit aussagt, bei der 2. Art ist, symbolisch geschrieben, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{S}\mathfrak{D}\mathfrak{S}$ zu wählen, und bei der 1. Art ist in ganz ähnlicher Weise zu verfahren.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar: wenn $\varphi(s)$ irgendeine Eigenfunktion des Kernes $K(s,t)$ ist, so ist $\int_a^b D_1(s,t)\varphi(t)\,dt$ eine zu dem nämlichen Eigenwert gehörige Eigenfunktion des Kernes $K(t,s)$,

475) Nach einer vorangehenden Bemerkung von *É. Goursat*, Soc. Math. Fr. Bull. 37 (1909), p. 197—204 am Schluß, über Kerne der Form $p(s)q(t)S(s,t)$ hat *J. Marty*, Paris C. R. 150 (April/Juni 1910), p. 1031—1033, 1499—1502 diesen zusammenfassenden Begriff aufgestellt. Vgl. auch die Darstellungen bei *T. Lalesco*, Literatur A 6, p. 78—85; *É. Goursat*, Literatur B 10, p. 466—468. Wegen *G. Fubini*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 19 (1910), p. 669—676 am Schluß, vgl. Nr. 41 b, 2[512]).

und wenn umgekehrt $\psi(s)$ eine solche von $K(t, s)$ ist, ist $\int_a^b D_2(s, t)\psi(t)\,dt$ eine solche für $K(s, t)$. Die Iterierten eines symmetrisierbaren Kernes sind wieder symmetrisierbar[476]). *Setzt man nun außerdem den Kern D_1 als abgeschlossen voraus*, so folgt durch die bekannten Schlüsse[477]), daß alle Eigenwerte reell und einfache Pole der Resolvente sind, sowie die Existenz mindestens eines Eigenwerts.

T. Lalesco[478]) gibt ein Beispiel eines Kernes, der mit einem und demselben, aber *nicht abgeschlossenen* D beiderseitig symmetrisierbar ist und bei dem alle diese Sätze nicht mehr gelten. Andererseits zeigt *J. Marty*[475]), daß umgekehrt jeder reelle Kern, der nur reelle Eigenwerte hat, die alle einfache Pole der Resolvente sind, beiderseits symmetrisierbar ist. Bilden nämlich $\varphi_1, \varphi_2, \ldots; \psi_1, \psi_2, \ldots$ ein biorthogonales System von Hauptfunktionen (vgl. Nr. **39** b) und wählt man die positiven Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ so, daß $\sum \frac{\psi_\alpha(s)\,\psi_\alpha(t)}{\mu_\alpha}$ absolut und gleichmäßig konvergiert, so rechnet man leicht nach, daß der hierdurch definierte positiv definite Kern $D_1(s, t)$ als linksseitiger Symmetrisator dienen kann; in entsprechender Weise erhält man einen rechtsseitigen Symmetrisator. Aber diese sind nicht notwendig abgeschlossen. Es ist also keine in sich abgerundete Theorie, die auf diese Weise zustande kommt.

Der wesentliche Mangel dieses ganzen allgemeinen Ansatzes ist aber das Fehlen der eigentlichen Entwicklungssätze.[479]) *J. Mercer*[480]) hat in Anknüpfung an seine Untersuchungen über definite symmetrische Kerne[397]) und in Verallgemeinerung der Resultate von *E. Garbe* für den polaren Fall[471]) die *vollständig symmetrisierbaren* Kerne untersucht. Er nennt einen Kern „vollständig linkssymmetrisierbar", wenn

476) *T. Lalesco*, Soc. Math. Fr. Bull. 45 (1917), p. 144—149, Paris C. R. 166 (1918), p. 252—253, wo ein „genre" der symmetrisierbaren Kerne eingeführt wird.

477) *J. Marty*[475]) führt den Beweis für die Existenz eines Eigenwerts nach dem Muster von *E. Schmidt* (Nr. **33** a), *G. Vivanti*, Lomb. Ist. Rend. (2) 48 (1915), p. 121—127 nach dem Muster von *A. Kneser* (Nr. **33** c[414])). Vgl. ferner *Th. Anghelutza* u. *O. Tino*, Paris C. R. 159 (1914), p. 362—364, sowie *O. Tino*, Roum. Akad. Bull. 3 (1914), p. 141—145, wo unter Benutzung von (9) von Nr. **39** b die höheren Eigenwerte als Grenzwerte dargestellt werden.

478) *T. Lalesco*, Literatur A 6, p. 79 f.; dieses D hat nur einen einzigen endlichen Eigenwert; vgl. näheres Nr. **41** b, 2. Ein Beispiel dafür, daß die Eigenwerte Pole 2. Ordnung der Resolvente sein können, wenn D nicht positiv definit, sondern nur reell und symmetrisch ist, gibt er Paris C. R. 166 (1918), p. 410—411.

479) Der Beweis, den *T. Lalesco*, Literatur A 6, p. 84 f. angibt, ist falsch.

480) *J. Mercer*, London Roy. Soc. Proc. (A) 97 (1920), p. 401—413; die Beweise sind nur skizziert.

keine zu einem endlichen Eigenwert gehörige Eigenfunktion des Kernes K zugleich eine Eigenfunktion von D_1 für den Eigenwert ∞ (also eine Lösung von $\int D_1 \varphi\, dt = 0$) ist.[481]) Für einen solchen Kern bildet er nach *Marty*[475]) das biorthogonale System von Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots; \psi_1, \psi_2, \ldots$ und beweist im Sinne absoluter und gleichmäßiger Konvergenz

$$(8) \qquad D_1(s, t) = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\mu_\nu} + \sum_\nu \frac{\eta_\nu(s)\,\eta_\nu(t)}{\varrho_\nu},$$

wo 1) die $\eta_\nu(s)$ ein Orthogonalsystem stetiger Funktionen bilden,
2) $\int K(t, s)\,\eta_\nu(t)\,dt = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$,
3) die μ_ν durch $\mu_\nu \iint D_1(s, t)\,\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)\,ds\,dt = 1$ definiert sind,
4) alle $\varrho_\nu > 0$ sind.[482])

Für den *polaren* Fall und für den von *A. Pell* vermag er dann außerdem zu zeigen, daß

$$(9) \qquad K(s, t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu} + \sum_\nu \frac{\xi_\nu(s)\,\eta_\nu(t)}{\varrho_\nu},$$

wo im polaren Falle $\xi_\nu(s) = v(s)\,\eta_\nu(s)$, jedes ξ_ν orthogonal zu jedem ψ_ν, jedes η_ν orthogonal zu jedem φ_ν ist. Ist insbesondere D_1 *eigentlich* positiv definit, oder ist statt dessen $v(s) > 0$, so sind alle $\xi_\nu(s) \equiv 0$.

Damit hat also *J. Mercer* ein allgemeines Resultat, das in den besonderen Fällen die Ergebnisse von *Hilbert* und *Garbe* und die von *Pell* vollständig enthält, aber doch für den allgemeinen Fall dem eigentlichen Entwicklungssatz ausweicht. Dieser allgemeine Entwicklungssatz ist in Wahrheit gar nicht richtig — es ist zweckmäßiger, dies erst in Nr. **41** b, 7 in der Sprache der unendlichvielen Variablen darzulegen, wo der Unterschied von allgemeinen und abgeschlossenen Kernen (von stetigen und quadratisch integrierbaren Funktionen) wegfällt und alles deutlicher zu übersehen, Gegenbeispiele bequemer zu bilden sind. Dort wird klar werden, wie gerade vom Standpunkt der bis zu Ende durchgedachten Analogie mit der Algebra der Ansatz der symmetrisierbaren Kerne in seiner formalen Allgemeinheit ins Unbestimmte greift.

39. Elementarteilertheorie der allgemeinen unsymmetrischen Kerne (Entwicklung nach Hauptfunktionen).

a) Die zu einem einzelnen Eigenwert gehörigen Hauptfunktionen. Eigenwert eines unsymmetrischen Kernes $k(s, t)$ heißt

---

481) Diese Voraussetzung hängt offenbar mit den beiden ersten der vier Voraussetzungen (s. Nr. 38b, 3) zusammen, die *A. Korn*[474]) zugrunde legt.

482) Unter geringeren Voraussetzungen (Unstetigkeiten von K und D_1), die aber den Rahmen der Beschränktheit nicht überschreiten, modifiziert sich diese Konvergenzaussage etwas.

ein Wert von λ, für den

$$(i_h)\qquad \varphi(s) - \lambda\int_a^b k(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

und somit (auf Grund der Fredholmschen Theorie, Nr. **9** oder **10**, Satz 1) auch die transponierte Gleichung

$$(i_h')\qquad \psi(s) - \lambda\int_a^b k(t,s)\,\psi(t)\,dt = 0$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung hat; zu jedem Eigenwert gehört hier nicht nur *ein* System linear unabhängiger Eigenfunktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, sondern *zwei* solche Systeme, ein System linear unabhängiger Lösungen von (i_h), $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n$, und ein anderes von ebenso vielen Lösungen $\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_n$ von (i_h').[483]) Dem Problem der Entwicklung des Kernes k nach diesen Eigenfunktionen stellen sich nun zunächst genau diejenigen Schwierigkeiten entgegen, denen der Algebraiker begegnet, wenn er vom Hauptachsentheorem zur Elementarteilertheorie der allgemeinen Bilinearformen aufsteigt. Die Höchstzahl n der linear unabhängigen Lösungen von (i_h) und (i_h') braucht nämlich nicht gleich der Vielfachheit des betreffenden Eigenwerts als Nullstelle der Fredholmschen Determinante $\delta(\lambda)$ zu sein, sondern kann unter Umständen kleiner sein; z. B. berechnet man für den Kern

$$(1)\qquad \frac{1}{\lambda_1}\{\varphi_1(s)[\psi_1(t)+\psi_2(t)] + \cdots + \varphi_{\nu-1}(s)[\psi_{\nu-1}(t)+\psi_\nu(t)] + \varphi_\nu(s)\psi_\nu(t)\},$$

483) Diese beiden Gruppen von Eigenfunktionen sind nicht zu verwechseln mit den „zueinander adjungierten Eigenfunktionen" eines unsymmetrischen Kernes, die *E. Schmidt*[458]) (vgl. Nr. 36c) eingeführt hat [vgl. *T. Lalesco,* Ac. Roum. Bull. 3 (1915), p. 269—270]. Der Unterschied der dort von Schmidt behandelten Theorie von der Elementarteilertheorie der Integralgleichungen, um die es sich hier handelt, wird am besten deutlich, wenn man sich die algebraischen Analoga beider Theorien vergegenwärtigt. Dort handelt es sich um die Transformation einer Bilinearform $\sum a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ durch zwei orthogonale Transformationen $x_\alpha = \sum u_{\alpha p}\xi_p$, $y_\beta = \sum v_{\beta q}\eta_q$ auf die Gestalt $\sum \varrho_p \xi_p \eta_p$, hier um die Vereinfachung einer linearen Transformation (Affinität) $y_\alpha = \sum a_{\alpha\beta}x_\beta$ der Punkte eines und desselben Raumes dadurch, daß eine zweckmäßige Koordinatentransformation $x_\beta = \sum w_{\beta q}\xi_q$, $y_\alpha = \sum w_{\alpha p}\eta_p$ vorgenommen wird (wobei die Transformation $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{W}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{W}$ übergeht). Das erste Problem ist mit den gleichen Mitteln zu behandeln, wie das Hauptachsentheorem, von dem beide Probleme Verallgemeinerungen nach verschiedener Richtung darstellen; das zweite ist bereits algebraisch von weit schwierigerem Charakter und bildet den Gegenstand der *Weierstraß*schen Elementarteilertheorie. Wie die Theorie der symmetrisierbaren Formen (Kerne) in die letztere einzuordnen ist, ist in Nr. **41**b näher dargelegt.

wo

$$\int_a^b \varphi_\alpha(s)\,\psi_\beta(s)\,ds = e_{\alpha\beta} \tag{2}$$

d. h. wo $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$; $\psi_1, \ldots, \psi_\nu$ irgendein biorthogonales System von 2ν Funktionen ist, durch eine ähnliche Rechnung wie in Nr. **10** a, 1 leicht, daß $c\varphi_1(s)$ die einzige Lösung von (i_h) und $c\psi_\nu(s)$ die einzige Lösung von (i_h') ist, während λ_1 eine ν-fache Nullstelle von $\delta(\lambda)$ ist, und übrigens die einzige.

Sehr bald nach dem Bekanntwerden der Fredholmschen Entdeckung haben eine Reihe von Forschern die Maßnahmen, mit denen die Elementarteilertheorie die berührten Schwierigkeiten überwindet, auf Integralgleichungen übertragen.[484]) Der entscheidende Schritt ist dabei, daß an Stelle der Eigenfunktionen die sog. *invarianten Funktionensysteme* des Kernes k betrachtet werden, d. h. solche Systeme von n linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, für die $\int k(s,t)\,\varphi_\alpha(t)\,dt$ nicht, wie bei einer Eigenfunktion, $= \frac{1}{\lambda}\varphi_\alpha(s)$ ist, sondern sich linear aus allen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ zusammensetzen läßt:

$$\int_a^b k(s,t)\,\varphi_\alpha(t)\,dt = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\varphi_\beta(s) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Hauptfunktionen (fonctions principales) heißen alle diejenigen Funktionen, die in irgendeinem solchen invarianten System auftreten; insbesondere sind also alle Eigenfunktionen von k auch Hauptfunktionen von k, während umgekehrt bereits bei dem besonderen Kern (1) alle ν Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ ein invariantes System bilden, ohne sämtlich Eigenfunktionen zu sein.

Ersetzt man $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ durch irgendwelche n linearen Kombinationen $\Phi_\alpha(s) = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\varphi_\beta(s)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ mit nichtverschwinden-

484) Veröffentlicht haben ihre einschlägigen Untersuchungen *A. C. Dixon*[43]) (1902), p. 203 und [95]) (1909), am Ende; *J. Plemelj,* Monatsh. f. Math. 15 (1904), p. 93—124; *É. Goursat,* Paris C. R. 145 (1907), p. 667—670, 752—754; Toulouse Ann. (2) 10 (1908), p. 5—98; S. M. Fr. Bull. 37 (1909), p. 197—204; *H. B. Heywood,* Paris C. R. 145 (1907), p. 908—910; J. de math. (6) 4 (1908), p. 283—330 = thèse, Paris (Gauthier-Villars), sowie Literatur A 5, p. 146—159; *G. Landsberg,* Math. Ann. 69 (1910), p. 227—265. — Man vergleiche vor allem die Darstellung bei *É. Goursat,* Literatur B 10 und die bei *T. Lalesco,* Literatur A 6, p. 34—63, der hierbei seine früheren Arbeiten [Paris C. R. 151 (1910), p. 928—930, 1033—1034; S. M. Fr. Bull. 39 (1911), p. 85—103] verwendet, sowie auch den Bericht von *H. Hahn* (1911), Literatur C 8, p. 20—27. Eine andere Darstellung der Plemeljschen Resultate insbesondere bei *H. Mercer,* Cambr. Trans. 21 (1908), p. 129—142.

der Koeffizientendeterminante, so bilden auch diese ein invariantes System oder, wie man es zweckmäßiger ausdrücken kann, eine andere Basis desselben invarianten Systems. Durch passende Wahl der $c_{\alpha\beta}$ kann man es erreichen[485]), daß die Relationen (3) für die Φ_a die besondere Form annehmen:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b k(s,t)\,\Phi_1(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_1}\,\Phi_1(s)\\
(4)\quad &\int_a^b k(s,t)\,\Phi_2(t)\,dt = A_{21}\,\Phi_1(s) + \frac{1}{\lambda_2}\,\Phi_2(s)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int_a^b k(s,t)\,\Phi_n(t)\,dt = A_{n1}\,\Phi_1(s) + A_{n2}\,\Phi_2(s) + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\,\Phi_n(s).
\end{aligned}$$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sämtlich Eigenwerte von k, und es gilt[486])

$$(5)\qquad \frac{1}{|\lambda_1|^2} + \cdots + \frac{1}{|\lambda_n|^2} \leqq \int_a^b\!\!\int_a^b [k(s,t)]^2\,ds\,dt.$$

Man gelangt von hier aus endlich zu dem Begriff, auf den es eigentlich ankommt, nämlich zu dem *zu einem Eigenwert* λ_1 *gehörigen vollständigen System von Hauptfunktionen.* Aus (4) folgt nämlich, daß für ein System von n Hauptfunktionen, für das bei der linearen Transformation auf die Gestalt (4) $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ ausfällt, $n \leqq |\lambda_1|^2 \iint k^2\,ds\,dt$ wird. Es gibt also nicht Systeme von beliebig vielen Hauptfunktionen mit dieser besonderen Eigenschaft, und es muß eine Maximalzahl für den Eigenwert λ_1 vorhanden sein und ein zugehöriges System von dieser Maximalzahl von Hauptfunktionen. Dieses System ist — bis auf lineare Transformationen der Basis — eindeutig durch λ_1 bestimmt.[487])

---

485) Dies folgt aus dem algebraischen Satze von *J. Schur,* Math. Ann. 66 (1909), p. 488—510, insbes. p. 489—492, der besagt, daß man jede Bilinearform $\sum a_{pq} x_p y_q$ durch eine unitäre Transformation $x_p = \sum \overline{w}_{\alpha p}\xi_\alpha$, $y_q = \sum w_{q\beta}\eta_\beta$, d. h. durch eine Transformation, für die $\sum w_{p\alpha}\overline{w}_{q\alpha} = e_{pq}$, $\sum w_{\alpha p}\overline{w}_{\alpha q} = e_{pq}$ gilt, in eine solche Bilinearform $\sum b_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta$ überführen kann, bei der $b_{\alpha\beta}$ für $\alpha < \beta$ stets 0 ist. Dieser Satz ist die unmittelbare Übertragung des Hauptachsentheorems auf allgemeine Bilinearformen mit komplexen Koeffizienten und enthält noch nichts von den Schwierigkeiten der algebraischen Elementarteilertheorie.

486) *J. Schur* folgert dies aus dem in [485]) angegebenen Satze und aus der Tatsache, daß $\sum |a_{pq}|^2$ bei unitärer Transformation invariant, also $= \sum |b_{\alpha\beta}|^2$ ist.

487) *J. Schur*[485]), § 15.

Nachdem diese Begriffsbildung ohne die Heranziehung eines spezifischen Formelapparats vollzogen ist[488]), können nun die Haupttatsachen der Theorie formuliert werden:

1. Die Höchstzahl n ist genau gleich der Vielfachheit von λ_1 als Nullstelle der Fredholmschen Determinante $\delta(\lambda)$. Da $k(t, s)$ das nämliche $\delta(\lambda)$ hat, ist hierin enthalten, daß das für den Kern $k(t, s)$ zu λ_1 gehörige vollständige System von Hauptfunktionen aus der gleichen Anzahl von Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ besteht. Es kann so gewählt werden, daß es zu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ „*biorthogonal*" ist, d. h. daß zwischen beiden Funktionensystemen die Relationen (2) bestehen [vgl. Encykl. II C 11 (*Hilb-Szász*), p. 1232, Formel (II)].

2. Zwei Kerne $A(s, t)$, $B(s, t)$ heißen zueinander orthogonal, wenn

$$\int_a^b A(s, r)\, B(r, t)\, dr = 0, \quad \int_a^b B(s, r)\, A(r, t)\, dr = 0 \tag{6}$$

ist.[489]) Für zwei zueinander orthogonale Kerne A, B gelten die beiden Sätze:

α) die Resolvente von $A + B$ ist gleich der Summe der Resolventen von A und von B,

β) die Fredholmsche Determinante von $A + B$ ist gleich dem Produkt der Fredholmschen Determinanten der Summanden.[490])

Man kann nun $k(s, t)$ in zwei zueinander orthogonale Summanden $k_1(s, t) + r_1(s, t)$ zerlegen, derart, daß $k_1(s, t)$ ein Kern mit dem einzigen Eigenwert λ_1 ist, der aber für diesen einen Eigenwert λ_1 genau die n Hauptfunktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und $\psi_1, \ldots, \psi_n$ besitzt, die für $k(s, t)$ zu λ_1 gehören; und zwar kann man diese so wählen, daß entweder k_1 der aus diesen φ, ψ für $\nu = n$ gebildete Kern (1) ist, oder daß sie in einander korrespondierender Weise in mehrere Gruppen von bzw. $\nu_1, \nu_1', \nu_1'', \ldots$ Gliedern $(\nu_1 + \nu_1' + \nu_1'' + \cdots = n)$ zerfallen und daß k_1 die Summe der aus den φ, ψ jeder solchen Gruppe einzeln gebildeten Kerne von dem oben als Beispiel hingeschriebenen speziellen Typus (1) ist. Der Rest $r_1(s, t)$ hat λ_1 nicht mehr zum Eigenwert.[490a])

---

488) Dieses Arrangement in Anlehnung an *J. Schur*[485]), § 15 und [79]), § 1.

489) Diese Begriffsbildung nebst den beiden anschließenden Sätzen, die bei Plemelj noch fehlt, zuerst bei *É. Goursat*[484]) und *H. B. Heywood*[484]).

490) Wegen der Fredholmschen Determinante der Summe zweier zueinander *nicht* orthogonaler Kerne vgl. *T. Lalesco,* Darb. Bull. 42 (1918), p. 195—199.

490a) Eine ähnliche, aber nur die Eigenfunktionen berücksichtigende Zerlegung hat *E. Schmidt*[42]), § 6, [337]), § 7 im Anschluß an seine Auflösungstheorie (Nr. **10a**) angegeben: gehören zu λ_1 genau r_1 Eigenfunktionen (r_1 ist dann also eventuell *kleiner* als die Vielfachheit des Eigenwerts λ_1), so kann man von $k(s, t)$

3. Jeder andere Eigenwert λ_2 von k ist auch Eigenwert von $r_1(s, t)$ und das System der zu λ_2 gehörigen Hauptfunktionen ist auch für den Kern $r_1(s, t)$ ein solches.

Diese auf den speziellen Typus (1) gestützte kanonische Zerspaltung des Kerns entspricht genau der Weierstraßschen Normalform in der algebraischen Elementarteilertheorie. Die Summanden $\nu_\alpha, \nu'_\alpha, \nu''_\alpha, \ldots$, in die sich die Vielfachheiten n_α der einzelnen Eigenwerte hier zerlegt haben, entsprechen dem, was man in der Algebra Elementarteilerexponenten nennt.

Die Beweise für diesen Tatsachenkomplex werden in den veröffentlichten Darstellungen in mehr oder weniger engem Anschluß an die *Weierstraß*sche Theorie und unter größerer oder geringerer Benutzung dieser algebraischen Theorie durch die Methode der *Partialbruchzerlegung der Resolvente* erbracht.[491]) Man entwickelt die Resolvente $\varkappa(s, t; \lambda)$ von k, die den Eigenwert λ_1 zum Pol von einer Ordnung $m \leqq n$ hat, um die Stelle λ_1:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varkappa(s, t; \lambda) = \dfrac{B_m(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^m} + \cdots + \dfrac{B_1(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)} + \varrho_1(s, t; \lambda) \\ \qquad\qquad = \qquad \varkappa_1(s, t; \lambda) \qquad + \varrho_1(s, t; \lambda), \end{cases}$$

und bedient sich der Formel

$$(8) \qquad \varkappa(s, t; \lambda) - \varkappa(s, t; \mu) = (\lambda - \mu)\int_a^b \varkappa(s, r; \lambda)\, \varkappa(r, t; \mu)\, dr,$$

die aus den die Resolvente definierenden Relationen (3a) und (3b)

---

eine Summe von r_1 Produkten $u_\alpha(s) v_\alpha(t)$ derart abspalten, daß der Rest λ_1 nicht mehr zum Eigenwert hat, und zwar ist dies durch weniger als r_1 Produkte nicht zu erreichen.

491) Einen von jedem speziellen Formelapparat freien Beweis erhält man aus *der* Methode der Elementarteilertheorie, die weit einfacher und durchsichtiger ist als die Weierstraßsche und die im Prinzip auf *E. Weyr* und *S. Pincherle* zurückgeht: für n Variable *E. Weyr,* Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 163—236 sowie *S. Pincherle* und *U. Amaldi,* Le operazioni distributive e loro applicazioni all' analisi, Bologna (Zanichelli) 1901, XII u. 490 S., cap. IV; für Integralgleichungen oder allgemeinere distributive Operationen im Bereich der stetigen Funktionen *S. Pincherle*[297]) und Rom Acc. Linc. Rend. (5) 21_2 (1912), p. 572—577. Neuerdings hat für den algebraischen Fall *O. Schreier* unter Benutzung einer Überlegung von *H. Weyl* in der Druckausgabe von *F. Kleins* Vorlesungen über „höhere Geometrie" (Grundl. d. math. Wiss. 22, Berlin (Springer) 1926), § 96—98, eine Darstellung dieser Theorie gegeben. Diese kann zur Abspaltung des zu einem einzelnen Eigenwert gehörigen Hauptbestandteils sinngemäß verwendet werden. — Die Frage, ob man hierbei zu einer Auflösungstheorie der Integralgleichungen gelangen kann, die gleichzeitig auch für n Gleichungen mit n Unbekannten gilt und die deren Theorie nicht schon, wie alle vorhandenen Theorien, als bekannt voraussetzt, ist noch nirgends erörtert.

von Nr. **9** in der Modifikation von Nr. **11**c leicht abzuleiten ist und sie zusammenfaßt. Man zeigt nun, daß man ein biorthogonales Funktionensystem $\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \psi_1, \ldots, \psi_n$ so bestimmen kann, daß $B_1 = \varphi_1\psi_1 + \cdots + \varphi_n\psi_n$ wird und daß $B_2, \ldots, B_m$ bilineare Kombinationen dieser $2n$ Funktionen werden.[492]) Ferner ist $\varkappa(s, t; 0)$ nichts anderes als $k(s, t)$ selbst; setzt man nach diesem Muster $\varkappa_1(s, t; 0) = k_1(s, t)$, $\varrho_1(s, t; 0) = r_1(s, t)$, so sind k_1, r_1 zueinander orthogonale Kerne; daß r_1 vom Eigenwert λ_1 frei ist, dagegen sonst die nämlichen Eigenwerte und Hauptfunktionen wie k hat, ist hier aus der Partialbruchentwicklung unmittelbar ersichtlich.

b) Das volle System der Eigenwerte und Hauptfunktionen. Jede zu einem Eigenwert λ gehörige Hauptfunktion $\varphi_\alpha(s)$ der einen Art ist zu jeder zu einem von λ verschiedenem Eigenwert μ gehörigen Hauptfunktion $\psi_\beta(s)$ der anderen Art orthogonal, d. h. es besteht zwischen beiden Funktionen die Relation (2). Indem man nun für jeden einzelnen Eigenwert von k der Reihe nach das biorthogonale Hauptfunktionensystem $\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \psi_1, \ldots, \psi_n$ aufstellt und alle diese Systeme zusammenfügt, erhält man ein biorthogonales Funktionensystem, „das *volle biorthogonale System der Hauptfunktionen* der Kerne $k(s, t)$ und $k(t, s)$". Jede Hauptfunktion läßt sich aus endlichvielen Funktionen dieses vollen, kanonischen Systems linear zusammensetzen. Zu jedem Eigenwerte gehören darin genau so viele Paare von Hauptfunktionen, als die Vielfachheit des betreffenden Eigenwerts als Nullstelle von $\delta(\lambda)$ beträgt.

Aus (5) kann daher *J. Schur*[485]) unmittelbar den Satz folgern, daß die Summe der reziproken Eigenwertquadrate, jedes in der rich-

---

492) Man hat im einzelnen die Relationen $\int B_p(s, r)\, B_q(r, t)\, dr = 0$ für $p + q > m + 1$, $= B_{p+q-1}(s, t)$ für $p + q \leq m + 1$, also insbesondere $B_1(s, t) = \int B_1(s, r)\, B_1(r, t)\, dr$, die dafür notwendig und hinreichend ist, daß B_1 sich in der Form $\varphi_1(s)\psi_1(t) + \cdots + \varphi_\nu(s)\psi_\nu(t)$ darstellen läßt, wo φ_α, ψ_α ein biorthogonales Funktionensystem ist (vgl. *T. Lalesco,* Literatur A 6, p. 46 f.). m ist daher der größte Index, für den die m-fache Iterierte des Kernes $B_1(s, t)$ nicht identisch verschwindet, und auch die größte der am Ende von Nr. **39**a, 2 erwähnten Gliederzahlen $\nu_1, \nu_1', \ldots$. Vgl. auch [356]) sowie *A. Hoborski,* Arch. Math. Phys. (3) 25 (1916), p. 200—202 und Krakau Akad. Bull., math.-phys. Cl. A (1917), p. 279—295. — Ein Versuch von *G. D. d'Arone,* Batt. G. 50 [(3) 3] (1912), p. 191—192, die Stelle bei *Lalesco* p. 40, Zeile 10—14, zu vereinfachen, ist mißglückt. — *Ch. Platrier,* J. de math. (6) 9 (1913), p. 233—304, insbes. im 2. Kap. des I. Abschn. gibt die Ausdrücke der Elementarteilerexponenten durch die Fredholmschen Minoren nach dem Muster der algebraischen Elementarteilertheorie. — Ist $k(s, t)$ symmetrisch, so ergibt sich leicht $B_r = 0$ für $r > 1$, also $m = 1$, alle Pole der Resolvente sind einfach (vgl. etwa *Heywood,* Literatur A 5, p. 87).

tigen Vielfachheit eingesetzt, absolut konvergiert und daß gilt[493])

$$(9) \qquad \sum_{\nu} \frac{1}{|\lambda_\nu|^2} \leqq \int_a^b \int_a^b (k(s,t))^2 \, ds \, dt.$$

Ferner kann *J. Schur* den in Nr. **31** b ausgesprochenen Satz über die Eigenwerte und Eigenfunktionen der assoziierten Kerne eines symmetrischen Kernes auf die eines unsymmetrischen Kernes ausdehnen, wobei die Hauptfunktionen die Rolle der Eigenfunktionen übernehmen.[494])

Was die Gesamtheit der *Eigenwerte* betrifft, so ist der Satz von *J. Bendixson* und *A. Hirsch*[495]) über die Lage der Eigenwerte einer Bilinearform von n Veränderlichen auf Integralgleichungen übertragen worden.[496])

R. Jentzsch[497]) überträgt die Sätze von *O. Perron* und *G. Frobenius* über Matrizen mit lauter positiven Elementen auf Integralgleichungen, bei denen $K(s,t) \geqq 0$ ist (0 aber nur in einer Menge vom Maß 0): ein solcher Kern besitzt stets einen reellen, positiven Eigenwert, der einfach ist und kleiner als die Beträge aller anderen Eigenwerte; die zugehörige Eigenfunktion ist einerlei Zeichens. Der Beweis benutzt die Theorie der Hauptfunktionen.

---

493) Andere, die Theorie der Hauptfunktionen vermeidende Beweise geben *J. Marty,* Toul. Ann. (3) 5 (1913), p. 259—268 und *D. Enskog*[66]), Math. Ztschr. 25 (1926), § 2 (p. 302—304). — *B. Hostinsky,* Univ. Mazaryk publ. Cislo 1 (1921) 14 S., beweist, daß $\sum \frac{1}{\lambda_n^2} = \int\int k(s,t)\, k(t,s)\, ds\, dt$ ist; *J. Kaucky,* ebenda, Cislo 13 (1922) 8 S., beweist es ohne Laguerresche Theorie, gestützt auf *J. Schur*[485]) und *T. Carleman*[88]). — *T. Lalesco,* Akad. Roum. Bull. 3 (1915), p. 271—272, verallgemeinert (9) dahin, daß für jeden Kern $k(s,t) = \int A(s,r)\, B(r,t)\, dr$ die Summe der reziproken Eigenwerte absolut konvergiert.

494) *J. Schur*[79]) (1909), Satz III und IV. Dasselbe Resultat ohne Beweis bei *A. Blondel,* Paris C. R. 150 (1910), p. 957—959.

495) *J. Bendixson,* Acta math. 25 (1902), p. 359—366 und *A. Hirsch,* ebenda, p. 367—370.

496) *E. Laura,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 20_2 (1911), p. 559—562; *N. Kryloff,* Paris C. R. 156 (1913), p. 1587—1589 erhält einen Spezialfall und eine andere, falsche Aussage durch einen Beweis, der einen einfachen Rechenfehler enthält; *O. Toeplitz,* Math. Ztschr. 2 (1918), p. 187—197 erweitert den algebraischen Satz[495]) in einer Weise, die auf vollstetige Bilinearformen von unendlichvielen Veränderlichen und somit auf Integralgleichungen übertragbar bleibt (vgl. die Schlußbemerkung); *G. Pick,* Ztschr. f. ang. Math. u. Mech. 2 (1922), p. 353—357 vermutet das gleiche für eine andere Verschärfung von [495]); andere Aussagen über Kerne k, für die $\int\int k(s,t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt \geq 0$ ist, macht *C. E. Seely,* Amer. Math. Soc. Bull. 24 (1918), p. 470 und Ann. of math. (2) 20 (1919), p. 172—176.

497) *R. Jentzsch,* J. f. Math. 141 (1912), p. 235—244.

c) Das Geschlecht von $\delta(\lambda)$; Kerne ohne Eigenwert. In der Arbeit von *G. W. Hill*[12]), die den Ausgangspunkt der Theorie der unendlichen Determinanten gebildet hat, handelt es sich um eine Determinante, die Funktion von λ ist und deren Nullstellen sich alle aus einer durch Addition oder Subtraktion einer ganzen Zahl ergeben. Ihrer numerischen Auswertung liegt bei Hill die stillschweigende Voraussetzung zugrunde, daß sie eine ganze Transzendente vom Geschlecht 1 ist und keine unnötigen Exponentialfaktoren enthält. *H. Poincaré* widmet dieser Frage in seiner Arbeit zur mathematischen Rechtfertigung der *Hill*schen Rechnungen[13]) noch seine genaue Aufmerksamkeit; in der weiteren Entwicklung der Lehre von den unendlichen Determinanten tritt sie dann ganz zurück. Erst als *Fredholm* seine Theorie entwickelte, fügte er die Bemerkung hinzu, daß $\delta(\lambda)$ sicher vom Geschlecht 0 ist, wenn der Kern einer sog. Lipschitzschen Bedingung

$$\left|\frac{k(s,t_1)-k(s,t)}{t_1-t}\right| < M$$

genügt[497a]). Ist der Kern lediglich beschränkt, so liefert die Abschätzung der Determinantenformel mit Hilfe des Hadamardschen Determinantensatzes (Nr. **9**, p. 1371), daß die „Ordnung“ von $\delta(\lambda)$ höchstens 2 und somit das Geschlecht $\leqq 2$ ist. Aus dem Satz von *J. Schur* (Formel (9)) geht aber hervor, daß man nur konvergenzerzeugende Faktoren *ersten* Grades zu verwenden braucht, daß also

$$(10) \qquad \delta(\lambda) = e^{\alpha\lambda+\beta\lambda^2}\prod_n\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}$$

ist. Im Falle eines symmetrischen Kernes folgt durch Logarithmieren in Verbindung mit Formel (6) von Nr. **11** sofort $\beta = 0$.[498]) Daß auch im Falle eines unsymmetrischen Kernes das Geschlecht höchstens 1 ist, zeigte *T. Carleman*[499]), und zwar lediglich unter der Annahme der Existenz von $\iint |K(s,t)|^2\,ds\,dt$ im Lebesgueschen Sinne. Für einen definiten symmetrischen Kern ist das Geschlecht 0 und somit auch für $k^{(2)}$, wenn k ein symmetrischer Kern ist[498])[500]). Aus-

497a) *J. Fredholm,* Acta 27[29]), p. 368.

498) Vgl. *T. Lalesco,* Literatur A 6, p. 73 und *J. Mercer*[397]).

499) *T. Carleman,* Ark. för Mat., Astr. och Fys. 12 (1917), Nr. 15, 5 S. und [88]), entgegen einer Behauptung von *O. Tino,* Roum. Akad. Bull. 3 (1915), p. 229—233, 277—279.

500) *E. Garbe*[471]) überträgt dies auf die polare Integralgleichung (Nr. **38** b): sind λ_ν die polaren Eigenwerte, λ_ν' die Eigenwerte des definiten Kernes $D(s,t)$, so ist $\sum\frac{1}{|\lambda_\nu|}\leqq\sum\frac{1}{\lambda_\nu'}$, also ebenfalls konvergent, und $\delta(\lambda)=e^{\alpha\lambda}\prod\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$; bei *allgemeinem* Kern ist überdies $\alpha = 0$, also $\delta(\lambda)$ vom Geschlecht 0.

sagen über das Geschlecht bei uneigentlich singulären Kernen, bei denen ein iterierter Kern beschränkt ist, bei *T. Lalesco.*[500a])

Aus (10) in Verbindung mit Formel (6) von Nr. **11** hat *T. Lalesco* den Satz abgeleitet[501]): ein Kern hat dann und nur dann keinen Eigenwert, wenn die Spuren $u_n = \int_a^b k^{(n)}(s, s)\, ds$ für $n > 2$ sämtlich verschwinden.

d) Die Entwicklungssätze. Daß es wirklich unsymmetrische Kerne ohne Eigenwert gibt, war von vornherein aus dem Beispiel der Volterraschen Kerne bekannt. Selbst wenn es also gelänge, nach dem Muster der reellen, symmetrischen Kerne allgemein bei einem beliebigen unsymmetrischen eine Summe von kanonischen Kernen vom Typus (1) so abzuspalten, daß der Rest frei von Eigenwerten wäre, würde noch nicht folgen, daß der Rest identisch verschwindet und daß somit die Entwicklungssätze gelten. Vielmehr ist das Problem der Kanonisierung aller eigenwertlosen Kerne ein transzendentes, verglichen mit den durchaus algebraischen Entwicklungen dieser Nummer.[502])

Aber auch dies ist nicht richtig, daß die Summe der kanonischen Bestandteile, wenn ihrer unendlichviele sind, stets konvergiert, auch dann nicht, wenn man statt der Kerne die bilinearen Integralformen $\int\int k(s, t)\, u(s)\, v(t)\, ds\, dt$ betrachtet. Die Widerlegung läßt sich jedoch präziser in der Sprache der unendlichvielen Veränderlichen geben (vgl. Nr. **42**, Ende).

500a) *T. Lalesco,* Literatur A 6, p. 116f. und *S. Mazurkiewicz*, Sitzungsber. Warsch. Ges. d. Wiss. 8 (1916), p. 656—662 zeigen unter der Annahme $|k(s, t_1) - k(s, t_2)| \leq M r^\varrho$, wo $\varrho > 0$ und wo $r = |t_1 - t_2|$ (*Lalesco*) bzw. die Distanz der Stellen t_1, t_2 des p-dimensionalen Raumes (*Mazurkiewicz*) ist, daß die Ordnung von $\delta(\lambda)$ höchstens $2p/2\varrho + p$ ist. — Eine Ausdehnung der Sätze von *H. Weyl*[443]) (Nr. **35** c) über das asymptotische Verhalten der Eigenwerte stetig differenzierbarer Kerne auf den unsymmetrischen Fall bei *L. Mazurkiewicz,* Sitzungsber. Warsch. Ges. d. Wiss 8 (1916), p. 805—810; vgl. auch *A. Blondel*[445]) und *H. Block*[449]).

501) *T. Lalesco,* Paris C. R. 145 (1907), p. 906—907, 1136—1137; Bukar. Bull. Soc. de Stünte 19 (1910), p. 46—57; vgl. dazu *J. Kaucky*[493]).

502) Aus diesem Grunde reichen die Sätze über die Hauptfunktionen auch nicht hin, um für die Lehre von den vertauschbaren Kernen (Nr. **26** b, 3) einen wesentlichen Nutzen zu bringen.

C. Die vollstetigen quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

40. Hilberts Hauptachsentheorie der vollstetigen quadratischen Formen. Im Rahmen seiner Lehre von den unendlichvielen Veränderlichen hat *D. Hilbert*[503]) eine Theorie der orthogonalen Transformation der vollstetigen quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen geschaffen, aus der er die Eigenwerttheorie der Integralgleichungen aufs neue ableitete.

a) Vollstetige quadratische Formen unendlichvieler Veränderlicher. Eine wie in Nr. **16**a zunächst formal definierte quadratische Form der unendlichvielen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$

$$(1) \qquad \mathfrak{K}(x, x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q, \quad \text{wo} \quad k_{pq} = k_{qp},$$

heißt *vollstetig*[128])[129]), wenn die Differenz zweier *Abschnitte* der Art

$$(1\,\text{a}) \qquad \mathfrak{K}_n(x, x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q$$

mit wachsenden Indizes gleichmäßig für alle der Bedingung

$$(2) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \leqq 1$$

genügenden Wertsysteme gegen 0 konvergiert:

$$(3) \qquad |\mathfrak{K}_n(x, x) - \mathfrak{K}_m(x, x)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad n, m > N(\varepsilon).$$

Für die zu $\mathfrak{K}(x, x)$ gehörige *symmetrische Bilinearform* (*Polarform*)

$$(4) \qquad \mathfrak{K}(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p y_q, \qquad k_{pq} = k_{qp}$$

folgt dann leicht aus der Identität

$$(4\,\text{a}) \qquad \mathfrak{K}_n(x, y) = \tfrac{1}{4}\{\mathfrak{K}_n(x+y, x+y) - \mathfrak{K}_n(x-y, x-y)\},$$

daß sie im Sinne von Nr. **16**a *vollstetig* ist. Daher übertragen sich alle Aussagen von Nr. **16**a über vollstetige Bilinearformen ohne weiteres auf die hier definierten vollstetigen quadratischen Formen.[504])

---

503) *D. Hilbert,* 4. Mitteil., Gött. Nachr. 1906, insbes. p. 200—205, im folgenden zitiert nach dem Abdruck in „Grundzügen", Kap. XI, insbes. p. 147—153. Wegen der Einordnung in die historische Entwicklung vgl. Nr. **8**, die im folgenden nicht benutzt wird; die weniger aussagenden, aber die umfassendere Klasse der unsymmetrischen vollstetigen Formen behandelnden Sätze, die die Auflösungstheorie der Integralgleichungen liefern, s. in Nr. **16**.

504) *J. Schur,* Math. Ztschr. 12 (1922), p. 287—297 hat ein über die daraus folgenden Bedingungen hinausreichendes notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}(x, x)$ angegeben: Sind $\varrho_1^{(n)} \geqq \varrho_2^{(n)} \geqq \cdots \geqq \varrho_n^{(n)}$ die

b) Orthogonale Transformationen im Raume von unendlichvielen Veränderlichen. Die affine Transformation (vgl. Nr. **19** a, 4)

$$(5)\qquad \xi_\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p} x_p \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

heißt eine orthogonale Transformation der unendlichvielen Veränderlichen[505]), wenn ihre Koeffizienten den beiden Serien von Orthogonalitätsbedingungen genügen:

$$(6)\qquad \sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p} w_{\beta p} = e_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta) \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots),$$

$$(6')\qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty} w_{\alpha p} w_{\alpha q} = e_{pq} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases} \quad (p, q = 1, 2, \ldots).$$

Sie ordnet jedem Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme ein Wertsystem $\xi_1, \xi_2, \ldots$ von konvergenter und *gleicher* Quadratsumme zu:

$$(7)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \xi_\alpha^2 = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2.$$

Umgekehrt wird dabei jedes Wertsystem ξ_α von konvergenter Quadratsumme aus genau einem solchen Wertsystem x_p erhalten, und zwar ist wegen (6), (6′)

$$(5')\qquad x_p = \sum_{\alpha=1}^{\infty} w_{\alpha p} \xi_\alpha \qquad (p = 1, 2, \ldots);$$

das ist gleichfalls eine orthogonale Transformation mit dem transponierten Koeffizientenschema.[506])

Die Aufeinanderfolge zweier orthogonaler Transformationen liefert wieder eine orthogonale Transformation; die orthogonalen Transformationen insgesamt bilden eine Gruppe.

Durch die orthogonale Transformation (5), (5′) geht die voll-

---

Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{K}_n(x, x)$, so müssen die (übrigens sogar für jede beschränkte Form $\mathfrak{K}(x, x)$ (s. Nr. **43** a, 1) notwendig existierenden) Limites $\varrho_\nu = \lim\limits_{n=\infty} \varrho_\nu^{(n)}$, $\varrho_\nu^* = \lim\limits_{n=\infty} \varrho_n^{(\nu+n-1)}$ der Bedingung $\lim\limits_{\nu=\infty} \varrho_\nu = \lim\limits_{\nu=\infty} \varrho_\nu^* = 0$ genügen.

505) *D. Hilbert*[503]), p. 129 ff. — Die Linearformen (5) sind laut (6) orthogonal und normiert, d. h. ihre Koeffizienten bilden ein System orthogonaler, normierter Vektoren im Sinne von Nr. **19** a, 2.

506) Diese Tatsachen ergeben sich entweder aus der Bemerkung, daß für die unendliche Matrix $\mathfrak{W} = (w_{pq})$ die Formeln (6), (6′) in der Schreibweise des Matrizenkalküls (Nr. **18** a, 5) besagen, daß

$$\mathfrak{W}\mathfrak{W}' = \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{W}'\mathfrak{W} = \mathfrak{E}$$

ist und daß also nach Nr. **18**, (8a) $\mathfrak{W}$ beschränkt ist (*D. Hilbert*[505])) — oder aber wie in [509]) unter nachträglicher Hinzunahme von (6′).

stetige quadratische Form $\mathfrak{K}(x, x)$ wiederum in eine *vollstetige* quadratische Form der neuen Veränderlichen über[507]):

$$\mathfrak{K}(x, x) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{\infty} \left(\sum_{p, q = 1}^{\infty} w_{\alpha p} k_{pq} w_{\beta q}\right) \xi_\alpha \xi_\beta = \mathfrak{H}(\xi, \xi). \tag{8}$$

Die Operation der Faltung (Nr. **16** a, β) ist orthogonalen Transformationen gegenüber kovariant, die (den Integralausdrücken Nr. **11**, (5) analogen) *Spuren* der Form $\mathfrak{K}(x, x)$ sind, falls sie absolut konvergieren, *Invarianten*[505]):

$$\sum_{p=1}^{\infty} k_{pp} = \sum_{p=1}^{\infty} h_{pp}, \quad \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq}^2 = \sum_{p,q=1}^{\infty} h_{pq}^2, \quad \ldots \tag{8a}$$

Genügen die Koeffizienten von (5) nur den Bedingungen (6), aber nicht (6′), so gilt an Stelle von (7) nur die Ungleichung (*Besselsche Ungleichung*)[508])

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \xi_\alpha^2 \leqq \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2. \tag{7a}$$

Man kann dann zu den Linearformen (5) weitere Linearformen in höchstens abzählbar unendlicher Zahl

$$\xi_\alpha^* = \sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p}^* x_p \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots) \tag{5*}$$

so hinzufügen, daß für das erweiterte System die Bedingungen (6) *und* (6′) und damit auch die Gleichung (7) gelten (Ergänzung des Systems der Formen ξ_α zu einem „vollständigen System“)[509]). Daraus folgt

507) In der Schreibweise des Matrizenkalküls (Nr. **18** a, 5) besagt das

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{W}\mathfrak{K}\mathfrak{W}',$$

und daraus folgt wegen Nr. **18** a, 4 und der Bemerkung in [175]) der Beweis der obigen Behauptung. Um sie ohne Benutzung der Sätze von Nr. **18** im Sinne der Betrachtungen von Nr. **16** a zu begründen, bemerke man, daß $\mathfrak{H}(\xi, \xi)$ wegen der Vollstetigkeit von $\mathfrak{K}$ gleichmäßig durch den Abschnitt $\mathfrak{K}_n(x, x)$ angenähert wird, dessen endlichviele Veränderliche $x_1, \ldots, x_n$ als Linearformen (Nr. **16** a, p. 1401) *vollstetige* Funktionen der $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sind. — Die gleiche Aussage gilt übrigens für beliebige affine Transformationen (Nr. **19** a, 4).

508) Vgl. dazu, auch für den Beweis, Nr. **19** a, 2. und [198]); für n Gleichungen (5) mit n Veränderlichen ist bekanntlich (6′) und (7) eine Folge von (6), für $m < n$ Gleichungen folgt (7 a).

509) *D. Hilbert*[503]), p. 141 ff.; der Beweis ist in dem Satz p. 142 und dessen folgenden Anwendungen enthalten und läßt sich in der Ausdrucksweise von Nr. **19** a so wiedergeben: ist $E^{(q)}$ der erste Einheitsvektor, der dem linearen Vektorgebilde mit der Basis $(w_{\alpha 1}, w_{\alpha 2}, \ldots)$ nicht angehört, so werden die Koeffizienten $e_{qp} - \sum_{\alpha=1}^{\infty} w_{\alpha p} w_{\alpha q}$ des Lotes von ihm auf dieses Vektorgebilde (Nr. **19**, (9)) mit passenden Normierungsfaktoren als Koeffizienten der ersten dem System (5)

speziell, daß man eine orthogonale Transformation stets so bestimmen kann, daß eine beliebig vorgegebene Stelle $(a_1, a_2, \ldots)$ mit $\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 = 1$ in $(1, 0, 0, \ldots)$ übergeht; man braucht dieses Verfahren nur auf die *eine* Gleichung $\xi_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots$ anzuwenden.

c) Existenz des Maximums. Der Wertvorrat einer vollstetigen quadratischen Form im Bereich (2) ist beschränkt (Nr. **16** a, (10)); weiterhin hat *D. Hilbert* als wesentlichste Eigenschaft dieser Formen erkannt, daß für sie — und so für jede vollstetige Funktion (vgl. Nr. **16** a, Ende) — das *Analogon des Weierstraßschen Satzes von der Existenz des Maximums und Minimums gilt*[510]. Insbesondere existiert das Maximum der Werte $|\mathfrak{K}(x, x)|$ unter der Nebenbedingung (2), d. h. es existiert eine Stelle $(a_1, a_2, \ldots)$ im Bereich (2), so daß

(9) $$\varrho_1 = \mathfrak{K}(a, a) \quad \text{und}$$

(9a) $$|\mathfrak{K}(x, x)| \leqq |\varrho_1|, \quad \text{wenn} \quad \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \leqq 1,$$

oder, ohne Nebenbedingung ausgedrückt,

(9b) $$|\mathfrak{K}(x, x)| \leqq |\varrho_1| \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2;$$

daraus folgt überdies, wenn $\mathfrak{K}(x, x)$ nicht identisch 0 (d. h. wenn $\varrho_1 \neq 0$) ist,

(9c) $$a_1^2 + a_2^2 + \cdots = 1.$$

d) Die Hauptachsentransformation. Mit diesen Hilfsmitteln gelingt es *D. Hilbert*[511]), die orthogonale Transformation einer voll-

hinzuzufügenden Linearform verwendet, und auf das so erweiterte System wird das gleiche Verfahren immer wieder angewendet. Das kommt offenbar auf eine bestimmte Anordnung des allgemeinen Lösungsverfahrens von Nr. **19** b, **1** für die besonderen homogenen Gleichungen $\sum_{\alpha=1}^{\infty} w_{\alpha p} u_p = 0$ hinaus; vgl. [208]).

510) *D. Hilbert*[503]), p. 148. Diese Tatsache kann etwa so begründet werden, daß man eine Folge von Stellen in (2) bestimmt, an denen $\mathfrak{K}(x, x)$ gegen ϱ_1 konvergiert, wo $|\varrho_1|$ die obere Grenze aller Werte $|\mathfrak{K}(x, x)|$ ist, und aus ihnen nach dem Auswahlverfahren von Nr. **16** b eine in dem dort bezeichneten Sinne gegen eine Stelle (a_p) konvergierende Folge herausgreift; wegen der Vollstetigkeitseigenschaft (Nr. **16** a, (5)) besteht dann (9). (Man vgl. dazu den Schluß von Nr. **33** d über das Maximum der quadratischen Integralform, der wegen des Auftretens stetiger Funktionen als Argumente wesentlich komplizierter ist.) Auch andere Beweisanordnungen des Weierstraßschen Satzes kann man auf Grund der Bemerkung übertragen, daß $\mathfrak{K}(x, x)$ im Bereich (2) durch die Funktion $\mathfrak{K}_n(x, x)$ von n Veränderlichen gleichmäßig approximiert wird.

511) *D. Hilbert*[503]), p. 148—150; die folgende Darstellung weicht nur in der Anordnung von der Hilbertschen ab. Man vgl. zu dieser Konstruktion die

stetigen quadratischen Form auf eine Summe von Quadraten in restloser Analogie zu dem algebraischen Problem (vgl. Nr. 1b, 8) zu entwickeln. Man bestimme von dem Resultat c) ausgehend, nach der Schlußbemerkung von b) eine orthogonale Transformation der $x_1, x_2, \ldots$ in neue Veränderliche $\xi_1, x_2', x_3', \ldots$, die das Wertsystem $x_p = a_p$ in dasjenige $\xi_1 = 1$, $x_2' = x_3' = \cdots = 0$ überführt; dann wird

$$\mathfrak{K}(x, x) = \varrho_1 \xi_1^2 + \mathfrak{K}'(x', x'),$$

wo $\mathfrak{K}'$ eine vollstetige quadratische Form lediglich der Veränderlichen $x_2', x_3', \ldots$ ist. Denn die Differenz

$$\mathfrak{K}(x, x) - \varrho_1 \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = \mathfrak{K}(x, x) - \varrho_1(\xi_1^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \cdots)$$

$$= \mathfrak{K}' - \varrho_1 \sum_{p=2}^{\infty} x_p'^2$$

verschwindet wegen (9) für $x_p = a_p$ (d. h. $x_p' = 0$), enthält also kein Glied mit ξ_1^2 mehr; ferner ist sie wegen (9b) negativ oder positiv definit, je nachdem $\varrho_1 \gtrless 0$, und darf daher kein in ξ_1 lineares Glied mit $\xi_1 \cdot x_p'$ enthalten.

Dieselbe Betrachtung liefert, wenn die Form $\mathfrak{K}'(x', x')$ nicht identisch verschwindet und die der Ungleichung

$$|\varrho_2| \leqq |\varrho_1|$$

genügende Zahl ϱ_2 das gemäß c) bestimmte Maximum von $|\mathfrak{K}'(x', x')|$ unter der Nebenbedingung (2) ist, eine orthogonale Transformation der $x_2', x_3', \ldots$ in neue Veränderliche $\xi_2, x_3'', x_4'', \ldots$ derart, daß

$$\mathfrak{K}'(x', x') = \varrho_2 \xi_2^2 + \mathfrak{K}''(x'', x'').$$

Setzt man dies Verfahren fort, so führt es entweder nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem identisch verschwindenden Rest oder man erhält abzählbar unendlichviele den Ungleichungen

$$|\varrho_1| \geqq |\varrho_2| \geqq |\varrho_3| \geqq \cdots \tag{10a}$$

genügende Zahlen ϱ_α und unendlichviele Veränderliche ξ_α; für jedes endliche n werden dabei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ durch n Schritte (Zusammensetzung von n orthogonalen Transformationen) endgültig als Linearformen der x_p bestimmt und gehören daher einer orthogonalen Transformation an. Daher genügen die *sämtlichen* so bestimmten Linearformen

$$\xi_\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p} x_p \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

---

analogen Eigenschaften bei Integralgleichungen, Nr. 32c; auch die *Courant*sche Maximum-Minimumdefinition (Nr. 32d) läßt sich auf das vorliegende Problem unmittelbar übertragen. — Spezielle Maximumaufgaben bei quadratischen Formen mit linearen Nebenbedingungen behandelt *T. Kubota*, Tôhoku Math. J. 18 (1920), p. 297—301; 19 (1921), p. 164—168.

den Orthogonalitätsbedingungen (6) und können also nach b) durch Hinzufügung von höchstens abzählbar unendlichvielen weiteren Linearformen

$$(11^*)\qquad \xi_\alpha^* = \sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p}^* x_p \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

zu einer orthogonalen Transformation ergänzt werden. Genau wie oben schließt man, daß dann

$$\mathfrak{K}(x, x) = \varrho_1 \xi_1^2 + \varrho_2 \xi_2^2 + \cdots + \mathfrak{K}^*(\xi^*, \xi^*)$$

wird, wo $\mathfrak{K}^*$ nur noch von den ξ_α^* abhängt.

Aus der Vollstetigkeit der für $\xi_\alpha^* = 0$ hieraus hervorgehenden Form $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \varrho_\alpha \xi_\alpha$ folgt nun (Nr. **16**a, (8))

$$(10\text{b})\qquad \lim_{\alpha=\infty} \varrho_\alpha = 0,$$

und da nach der Entstehung der ϱ_α die Werte von $|\mathfrak{K}|$ für $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$ unter der Bedingung (2) das Maximum $|\varrho_{n+1}|$ haben, ist auch

$$|\mathfrak{K}^*(\xi^*, \xi^*)| \leqq |\varrho_{n+1}| \sum_{\alpha=1}^{\infty} \xi_\alpha^{*2}$$

für jedes n und daher $\mathfrak{K}^*(\xi^*, \xi^*) \equiv 0$. *Jede vollstetige quadratische Form läßt sich also durch eine orthogonale Transformation* (11), (11*) *auf die kanonische Gestalt*[512])

$$(12)\qquad \mathfrak{K}(x, x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q = \varrho_1 \xi_1^2 + \varrho_2 \xi_2^2 + \cdots$$

bringen, wo die ϱ_α eindeutig bestimmte nicht verschwindende reelle Zahlen sind, die gegen 0 *konvergieren, falls unendlichviele vorhanden sind; gleichzeitig ist*

$$(12\text{a})\qquad \mathfrak{E}(x, x) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_1^{*2} + \xi_2^{*2} + \cdots.$$

Da umgekehrt, wie man leicht einsieht, jede quadratische Form (12) mit gegen 0 konvergierenden ϱ_α vollstetig ist, bilden *die vollstetigen Formen die allgemeinste Klasse quadratischer Formen, die auf diese kanonische Gestalt orthogonal transformierbar sind.*

Durch Einsetzen von (11) in (12) und unter Verwendung von (6) schließt man[512])

$$(13)\qquad \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} w_{\alpha q} - \varrho_\alpha w_{\alpha p} = 0 \qquad \begin{pmatrix} p = 1, 2, \ldots \\ \alpha = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

---

512) Im Matrizenkalkül besagt das [vgl. [506]), [507])], daß $\mathfrak{W}\mathfrak{K}\mathfrak{W}'$ gleich einer Diagonalform $\mathfrak{k}$ wird, in der außerhalb der Diagonale nur Nullen, in der Diagonale die Größen ϱ_α an den durch ξ_α^2 bzw. 0 an den durch ξ_α^{*2} bezeichneten Stellen stehen. Die Gleichungen (13), (13*) besagen, daß $\mathfrak{K}\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'\mathfrak{k}$ ist.

d. h. jede Koeffizientenreihe $w_{\alpha 1}, w_{\alpha 2}, \ldots$ löst das mit den Koeffizienten von $-\varrho_\alpha^{-1} \cdot \mathfrak{K}(x, x)$ gebildete homogene vollstetige Gleichungssystem Nr. **16**, (U_h) (p. 1415); analog der Terminologie aus der Theorie der Integralgleichungen (Nr. **30**a) kann man ϱ_α^{-1} als *Eigenwert*, $w_{\alpha p}$ als zugehörige *Eigenlösungen* bzw. die Linearform ξ_α als *Eigenform* von $\mathfrak{K}(x, x)$ bezeichnen. Weiterhin ergibt sich

$$(13^*) \qquad \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} w_{\alpha q}^* = 0 \qquad \binom{p = 1, 2, \ldots}{\alpha = 1, 2, \ldots},$$

d. h. die ξ_α^* sind als *zum Eigenwert* ∞ *gehörige Eigenformen* zu bezeichnen (Nr. **30**e). Sind keine solchen Eigenfunktionen, d. h. keine nicht verschwindenden Lösungen des Systems (13*) von konvergenter Quadratsumme vorhanden, so heißt $\mathfrak{K}(x, x)$ *abgeschlossen*; dann und nur dann ist ∞ kein Eigenwert, und die zu den endlichen Eigenwerten gehörigen Eigenformen (11) bilden bereits ein vollständiges System von linearen Orthogonalformen (Nr. **40**b)[512a]. —

Besondere Klassen vollstetiger quadratischer Formen kann man auch durch sinngemäße Übertragung der in der Theorie der symmetrischen Integralgleichungen ausgebildeten Methoden (vgl. insbes. Nr. **33**) behandeln; entsprechend hat *H. v. Koch*[513]) hier seine unendlichen Determinanten zur Anwendung gebracht.

e) Zusammenhang mit der Eigenwerttheorie der Integralgleichungen. Die Eigenwerttheorie gewinnt *D. Hilbert*[514]) nun durch Hinzunahme seines in Nr. **15** dargestellten Übergangsverfahrens von Integralgleichungen zu Gleichungen mit unendlichvielen Veränderlichen. Wendet man dieses nämlich auf die homogene Integralgleichung (i_h) von Nr. **30** mit dem symmetrischen stetigen Kern $k(s, t)$ an, so erhält man aus jeder zum Eigenwert λ gehörigen normierten Eigenfunktion $\varphi(s)$ durch deren Fourierkoeffizienten x_p in bezug auf das vollständige Orthogonalsystem der $\omega_p(s)$ (vgl. Nr. **15**, (5)) ein nicht

512 a) *D. Hilbert*[503]), p. 147. — In dieser Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen entfällt also die Sonderstellung des Eigenwertes ∞ und damit der Unterschied der Begriffe „abgeschlossen" und „allgemein", die in der Theorie der Integralgleichungen im Bereich der stetigen Funktionen wichtig sind (Nr. **30**e, **34**d), und die volle Analogie zur Algebra ist hergestellt (vgl. Nr. **7**, p. 1365, Nr. **8**, p. 1369).

513) *H. v. Koch*, Math. Ann. 69 (1910), p. 266—283 unter der Voraussetzung, daß $\sum |k_{pp}|$ und $\sum k_{pq}^2$ konvergiert, sowie unter etwas weiteren Voraussetzungen, vgl. [159]).

514) *D. Hilbert*, 5. Mitteil., Gött. Nachr. 1906, p. 452—462; s. „Grundzüge", Kap. XIV, p. 185—194.

verschwindendes Lösungssystem der unendlichvielen Gleichungen

$$(u_h) \qquad x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

von der Quadratsumme 1, wobei

$$(14) \qquad k_{pq} = \int_a^b \int_a^b k(s, t)\, \omega_p(s)\, \omega_q(t)\, ds\, dt = k_{qp}$$

die Koeffizienten einer vollstetigen, wegen der Symmetrie von $k(s, t)$ symmetrischen Bilinearform $\mathfrak{K}(x, y)$, also auch einer *vollstetigen quadratischen Form* $\mathfrak{K}(x, x)$ sind. Umgekehrt liefert jedes nicht verschwindende Lösungssystem x_p von (u_h) mit der Quadratsumme 1 durch (vgl. Nr. **15**, (10))

$$\varphi(s) = \lambda \sum_{q=1}^{\infty} x_q \int_a^b k(s, t)\, \omega_q(t)\, dt$$

eine Eigenfunktion von $k(s, t)$. Der Vergleich mit (13) zeigt daher, daß $\lambda_\alpha = \varrho_\alpha^{-1}$ *Eigenwerte und*

$$(15) \qquad \varphi_\alpha(s) = \frac{1}{\varrho_\alpha} \sum_{q=1}^{\infty} w_{\alpha q} \int_a^b k(s, t)\, \omega_q(t)\, dt$$

die zugehörigen Eigenfunktionen von $k(s, t)$ sind. Weiterhin ergibt sich durch zweimalige Anwendung der Vollständigkeitsrelation Nr. **15**, (2b) die Übereinstimmung der zu $k(s, t)$ gehörigen quadratischen Integralform und der mit den Fourierkoeffizienten der Argumentfunktion $x(s)$ gebildeten quadratischen Form $\mathfrak{K}(x, x)$:

$$(16) \quad \int_a^b \int_a^b k(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q, \quad \text{wo} \quad x_p = \int_a^b x(s)\, \omega_p(s)\, ds.$$

Die kanonische Darstellung (12) liefert daher wegen der ebenfalls aus der Vollständigkeitsrelation hervorgehenden Gleichungen

$$\xi_\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p} x_p = \sum_{p=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_\alpha(s)\, \omega_p(s)\, ds \int_a^b x(s)\, \omega_p(s)\, ds = \int_a^b x(s)\, \varphi_\alpha(s)\, ds$$

unmittelbar die Hilbertsche Fundamentalformel Nr. **32**, (14). Endlich ergibt die Transformationsformel (12a) der Einheitsform in der durch Übergang zur Polarform entstehenden äquivalenten Gestalt

$$\sum_{p=1}^{\infty} x_p y_p = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p} x_p \Big) \Big(\sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p} y_p \Big) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p}^* x_p \Big) \Big(\sum_{p=1}^{\infty} w_{\alpha p}^* y_p \Big)$$

den *Entwicklungssatz*: setzt man nämlich hierin

$$x_p = \int_a^b x(s)\, \omega_p(s)\, ds, \quad y_p = \int_a^b k(s, t)\, \omega_p(t)\, dt = y_p(s)$$

und berücksichtigt neben (15) die Tatsache, daß die sämtlichen Fourierkoeffizienten von $\sum w^*_{\alpha p} y_p(s)$

$$\int_a^b \omega_q(s)\Big(\sum_{p=1}^{\infty} w^*_{\alpha p}\int_a^b k(s,t)\,\omega_p(t)\,dt\Big)\,ds = \sum_{p=1}^{\infty} k_{pq} w^*_{\alpha q} = 0$$

wegen (13*) verschwinden[515]) und daß daher diese Funktionen sämtlich identisch verschwinden, so folgt durch mehrfache Anwendung der Vollständigkeitsrelation

$$\int_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varrho_\alpha \varphi_\alpha(s)\int_a^b x(t)\,\varphi_\alpha(t)\,dt$$

— d. i. genau der Entwicklungssatz (28) von Nr. **34**c; die Konvergenz der auftretenden Reihen folgt unmittelbar aus der Schwarzschen Summenungleichung und der Vollständigkeitsrelation Nr. **15**, (9a) und (2a). Analog folgen die anderen Tatsachen der Eigenwerttheorie.[514])

Für die Anwendbarkeit der Methode auf unstetige Kerne, die zu vollstetigen Formen führen, gelten dieselben Bemerkungen wie Nr. **15**c, Ende.[516])

41. Besondere vollstetige Bilinearformen, die sich wie quadratische Formen verhalten.

a) Alternierende, Hermitesche Formen usw. Unter einer *Hermiteschen Form* von unendlichvielen Veränderlichen versteht man eine Bilinearform $\mathfrak{H}(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$, bei der $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\beta\alpha}$ ist (unter Überstreichen ist der Übergang zum Konjugiert-Imaginären verstanden), und bei der speziell $y_\alpha = \bar{x}_\alpha$ gesetzt ist; die Matrix $\mathfrak{H}$ heißt dementsprechend eine Hermitesche Matrix, wenn $\mathfrak{H} = \bar{\mathfrak{H}}'$ ist (der Akzent bedeutet Übergang zur transponierten Matrix; vgl. Nr. **18**a, (2)). Wird $h_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} + i t_{\alpha\beta}$ in Real- und Imaginärteil zerlegt, so ist also

$$(1) \qquad s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}, \quad t_{\alpha\beta} = -t_{\beta\alpha}.$$

Im Falle reeller $h_{\alpha\beta}$ ist die Hermitesche Form eine reelle, symmetrische Bilinearform, in der $y_\alpha = x_\alpha$ gesetzt ist, also eine reelle quadratische Form; im Falle rein imaginärer $h_{\alpha\beta}$ ist sie das i-fache einer alternierenden Form.

---

515) Diese Tatsache setzt in Evidenz, daß es für Integralgleichungen bei Beschränkung auf stetige Funktionen nicht möglich ist, den Charakter des Eigenwertes ∞ näher zu bestimmen, während er für die vollstetige Form $\mathfrak{K}(x, x)$ durch die Gesamtheit der Eigenformen ξ^*_α festgelegt ist; vgl. dazu Nr. **7**.

516) *F. Riesz*[264]), § 14 hat den *Hilbert*schen Gedankengang von c), d) direkt auf beliebige „vollstetige" symmetrische Integralgleichungen angewandt, noch mit der Verallgemeinerung, daß statt der Integrale lineare Funktionaltransformationen im Sinne von Nr. **24**b auftreten.

D. Hilberts Theorie der vollstetigen reellen quadratischen Formen (Nr. **40**) überträgt sich unmittelbar auf *vollstetige* Hermitesche Formen (vgl. Nr. **16** a, p. 1400)[517]), wenn man den Begriff der „orthogonalen Transformation" (Nr. **40** b) durch den der „unitären Transformation" ersetzt, deren Koeffizienten w_{pq} bzw. Koeffizientenmatrix $\mathfrak{W}$ den folgenden Bedingungen genügt (vgl. Nr. **19** a, 3, Ende,[201])):

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} w_{p\alpha}\overline{w}_{q\alpha} = e_{pq} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{W}\overline{\mathfrak{W}}' = \mathfrak{E}, \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} \overline{w}_{\alpha p} w_{\alpha q} = e_{pq} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\mathfrak{W}}'\mathfrak{W} = \mathfrak{E}. \end{cases}$$

Das Ergebnis lautet hier: man kann jede vollstetige Hermitesche Form $\mathfrak{H}(x, \bar{x})$ durch eine unitäre Transformation der unendlichvielen Veränderlichen $x_p = \sum\limits_{\alpha} w_{\alpha p}\xi_\alpha$ auf die Gestalt

$$(3)\qquad \mathfrak{W}\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{W}}' = \mathfrak{h} = h_1\xi_1\bar{\xi}_1 + h_2\xi_2\bar{\xi}_2 + \cdots$$

bringen, wo die h_α reelle Größen mit dem Grenzwert 0 sind; die reziproken Werte der nichtverschwindenden unter ihnen heißen die *Eigenwerte* der Form.

Diese Theorie kann auf eine noch allgemeinere Klasse von Bilinearformen ausgedehnt werden, die außer den Hermiteschen Formen übrigens auch noch die unitären Formen selbst (d. h. die Bilinearformen, deren Matrix unitär ist) als Spezialfälle enthält und also u. a. auch für diese eine volle Theorie aufzustellen gestattet.[518]) Eine Bilinearform $\mathfrak{A}$ möge *normal* heißen, wenn die beiden Hermiteschen Formen $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}'$ und $\overline{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A}$ einander gleich sind. Jede Bilinearform läßt sich in der Gestalt

$$(4)\qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A} + \overline{\mathfrak{A}}'}{2} + i\frac{\mathfrak{A} - \overline{\mathfrak{A}}'}{2i} = \mathfrak{H} + i\mathfrak{K}$$

---

517) *D. Hilbert*, Grundzüge, Kap. XII, p. 162 ff., leitet die Gültigkeit seiner Theorie für Hermitesche Formen aus der für reelle quadratische Formen nicht durch Wiederholung der bei diesen angewendeten Schlüsse, sondern folgendermaßen ab:

$$\mathfrak{H}(x, \bar{x}) = \sum h_{\alpha\beta}(y_\alpha + iz_\alpha)(y_\beta - iz_\beta) = \sum (s_{\alpha\beta} + it_{\alpha\beta})(y_\alpha + iz_\alpha)(y_\beta - iz_\beta)$$
$$= \sum s_{\alpha\beta}(y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta) + \sum t_{\alpha\beta}(y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha)$$

kann als eine reelle quadratische Form der Veränderlichen y_α und z_α zusammen aufgefaßt werden; indem er auf diese das Theorem von Nr. **40** d anwendet, erhält er die analogen Sätze für allgemeine Hermitesche Formen.

518) Die entsprechende algebraische Theorie der reellen orthogonalen Matrizen bei *G. Frobenius*, J. f. Math. 84 (1877), p. 51—54, wo die Herleitung jedoch auf die Elementarteilertheorie gestützt wird.

als Summe einer Hermiteschen Form $\mathfrak{H}$ und einer mit i multiplizierten $\mathfrak{K}$ darstellen, und zwar, wie man sofort sieht, nur auf diese eine Weise; $\mathfrak{A}$ ist offenbar dann und nur dann normal, wenn $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ miteinander vertauschbar sind ($\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$). Wendet man nun auf die Form $\mathfrak{H}$ die Hilbertsche Theorie der Hermiteschen Formen an, so erhält man eine unitäre Transformation, die $\mathfrak{H}$ auf die Normalform $\mathfrak{h}$ bringt; dieselbe Transformation wird gleichzeitig $\mathfrak{K}$ in irgendeine andere Hermitesche Form $\mathfrak{K}^*$ transformieren, und die transformierten Formen $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{K}^*$ werden miteinander wiederum vertauschbar sein; es wird also $h_\alpha k^*_{\alpha\beta} = k^*_{\alpha\beta} h_\beta$ gelten, d. h. $k^*_{\alpha\beta} = 0$ für alle diejenigen Paare α, β, für die $h_\alpha \neq h_\beta$. Sind nun die Werte h_α, die Null zum Grenzwert haben, ihrer Größe nach geordnet, so daß etwaige gleiche unter ihnen immer nebeneinanderstehen, und ist etwa $h_1 = \cdots = h_n$, aber von allen folgenden verschieden, so kann man die Form $h_1 \xi_1 \bar{\xi}_1 + \cdots + h_n \xi_n \bar{\xi}_n = h_1(\xi_1 \bar{\xi}_1 + \cdots + \xi_n \bar{\xi}_n)$ noch einer beliebigen unitären Transformation in n Veränderlichen unterwerfen, die sie in sich überführt, und kann diese benutzen, um $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} k^*_{\alpha\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$ auf die kanonische Gestalt zu bringen. Indem man mit jedem System einander gleicher h_α ebenso verfährt, und indem man in dem Falle daß unter den h_α endlich- oder unendlichviele Nullen auftreten, entsprechend vorgeht, erreicht man für jeden Bestandteil von $\mathfrak{K}^*$, der noch nicht 0 war, die Normalform, und damit für das ganze $\mathfrak{K}^*$, ohne sie für $\mathfrak{h}$ zu zerstören: *Jede vollstetige normale Bilinearform* $\mathfrak{A}(x, y)$ *läßt sich durch eine unitäre Transformation* $x_p = \sum w_{\alpha p} \xi_\alpha$, $y_p = \sum \bar{w}_{\alpha p} \eta_\alpha$ *auf die Gestalt* $\mathfrak{W}\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{W}}' = \sum \varrho_\alpha \xi_\alpha \eta_\alpha$ *transformieren.*

Es ist das befriedigende an diesem Resultat, daß es sich umkehren läßt: jede Bilinearform, die sich unitär auf diese Normalform transformieren läßt, ist, wie man durch Kalkül unmittelbar sieht, normal.[519]) — Die entsprechenden Sätze über Integralgleichungen (Nr. **38** a) folgen hieraus unmittelbar durch das Übergangsverfahren von Nr. **15**.

b) Symmetrisierbare Formen.

1. Bevor die Theorie der symmetrisierbaren Formen und damit die der symmetrisierbaren Kerne ihre eigentliche, in Nr. **38** b angekündigte Erörterung findet, ist es zweckmäßig, das ihr zugrunde liegende algebraische Analogon zu schildern, und zwar in einer

519) Die Bemerkungen von *O. Toeplitz*[496]), betreffend den „Wertvorrat" einer Bilinearform von $2n$ Veränderlichen übertragen sich unmittelbar auf vollstetige normale Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

etwas genaueren Weise, als es in den einschlägigen Arbeiten zumeist hervortritt.

Die Erweiterung des Hauptachsentheorems, um die es sich hier handelt, liegt in der Richtung, daß eine reelle quadratische Form $\mathfrak{S} = \sum s_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ auf die Normalform $\mathfrak{f} = \sum \sigma_\alpha y_\alpha^2$ zu bringen ist durch eine lineare Transformation $x_\alpha = \mathfrak{U}(y_\beta) = \sum u_{\alpha\beta} y_\beta$, die, anstatt orthogonal zu sein, d. h. die Einheitsform $\mathfrak{E} = \sum x_\alpha^2$ in sich selbst zu transformieren, irgendeine andere gegebene positiv definite Form $\mathfrak{D} = \sum d_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ zugleich in die Normalform $\mathfrak{d} = \sum y_\alpha^2$ überführt; in Formeln[520]):

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{U}'\mathfrak{D}\mathfrak{U} = \mathfrak{d}; \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{V}'\mathfrak{f}\mathfrak{V}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{V}'\mathfrak{d}\mathfrak{V}; \\ \mathfrak{U}\mathfrak{V} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{V}\mathfrak{U} = \mathfrak{E}. \end{cases}$$

Diese Erweiterung des Hauptachsentheorems ist statthaft, wenn $\mathfrak{D}$ eine *eigentlich* positiv definite Form ist; sie kann leicht dahin modifiziert werden, daß $\mathfrak{d}$ nicht als die Einheitsform vorgegeben ist, sondern als irgendeine Diagonalform $\sum \delta_\alpha y_\alpha^2$, in der δ_α beliebig vorgeschriebene positive Größen sind.

Ist aber $\mathfrak{D}$ *uneigentlich* positiv definit, so kompliziert sich der Tatbestand wesentlich. Die Normalformen, die hier durch simultane Transformation von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$ erreicht werden können, falls zum Ersatz für $\mathfrak{D}$ wenigstens $\mathfrak{S}$ von nichtverschwindender Determinante ist, also $\mathfrak{S}^{-1}$ existiert, lauten[521])

$$(1\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{f} = \sigma_1 y_1^2 + \cdots + \sigma_\nu y_\nu^2 + 2 s_1 y_{\nu+1} y_{\nu+2} + \cdots + 2 s_\mu y_{\nu+2\mu-1} y_{\nu+2\mu} \\ \mathfrak{d} = \delta_1 y_1^2 + \cdots + \delta_\nu y_\nu^2 + \qquad d_1 y_{\nu+2}^2 + \cdots + \qquad d_\mu y_{\nu+2\mu}^2. \end{cases}$$

In Wahrheit liegt hier ein Satz der Elementarteilertheorie vor, und der Beweis pflegt auch deren allgemeinen Theoremen entnommen zu werden (alle Elementarteiler der Formenschar $\mathfrak{D} - \varrho\mathfrak{S}$, die zu von Null verschiedenen ϱ-Werten gehören, sind reell und einfach; aber die zu $\varrho = 0$, d. h. zum Eigenwert $\lambda = \frac{1}{\varrho} = \infty$ gehörigen Elementarteiler können *zwei*gliedrig sein und in beliebiger Anzahl $\mu \leqq \frac{n}{2}$ auftreten). Man rechnet an der Hand dieser Normalformen leicht aus, daß die

520) In der Algebra pflegt man nur die beiden ersten dieser 6 Formeln hinzuschreiben und hinzuzufügen, daß die Determinante von $\mathfrak{U}$ nicht verschwinden soll. In Rücksicht auf die nachherige Ausdehnung auf unendlichviele Veränderliche ist schon an dieser Stelle eine Schreibweise gewählt worden, die den Determinantenbegriff ausschaltet

521) Vgl. etwa *O Hesse,* Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl. 1876, p 515 (Zusätze von *S. Gundelfinger*) oder *E. Pascal,* Repertorium I, p. 127 f. (*A. Loewy*), genauer bei *A. Loewy,* J. f. Math. 122 (1900), p. 53—72, auch *P. Muth,* Theorie und Anw. d. Elementarteiler, Leipzig 1899, p. 122.

endlichen Eigenwerte dann und nur dann ganz fehlen, wenn die Form $\mathfrak{d}\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{d}$ identisch verschwindet. Und da andererseits $\mathfrak{D}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{D}$ eine Kovariante ist — denn $(\mathfrak{U}'\mathfrak{D}\mathfrak{U})(\mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U})^{-1}(\mathfrak{U}'\mathfrak{D}\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}'\mathfrak{D}\mathfrak{U}\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{U}'^{-1}\mathfrak{U}'\mathfrak{D}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'(\mathfrak{D}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{D})\mathfrak{U}$ — folgt, daß allgemein die Formenschar $\mathfrak{D} - \varrho\mathfrak{S}$ dann und nur dann ohne endlichen Eigenwert ist, d. h. daß $|\mathfrak{D} - \varrho\mathfrak{S}|$ nur für $\varrho = 0$ verschwindet, wenn die Form

$$\mathfrak{D}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{D} \equiv 0 \tag{2}$$

ist.

2. Damit ist aber noch nicht erschöpft, was hier über den algebraischen Sachverhalt gebraucht wird. Denn was bisher angegeben wurde, handelt von der simultanen invertierbaren Transformation eines Paares von reellen quadratischen Formen; die Theorie der symmetrisierbaren Kerne (Nr. 38b) aber handelt, auf unendlichviele Veränderliche überschrieben, von unsymmetrischen Bilinearformen $\mathfrak{K}$, zu denen man definite quadratische Formen $\mathfrak{D}_1$ bzw. $\mathfrak{D}_2$ so hinzubestimmen kann, daß $\mathfrak{D}_1\mathfrak{K} = \mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{K}\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{S}_2$ reell und symmetrisch ausfallen, und sie handelt von den Eigenwerten und der Entwicklung des Kernes $\mathfrak{K}$, d. h. von den Werten ϱ, für die das homogene Gleichungssystem mit der Matrix $\mathfrak{K} - \varrho\mathfrak{E}$ lösbar ist und von diesen Lösungen; man umschreibt diese Aufgabe kürzer und zugleich vollständiger, wenn man unter Benutzung des Matrizenkalküls nach zwei zueinander inversen Transformationen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ fragt, so daß

$$\mathfrak{K}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{K} = \mathfrak{k}\mathfrak{Q}; \quad \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E} \tag{3}$$

gilt (in der Elementarteilertheorie sagt man dann, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{k}$ seien „ähnlich" und schreibt kürzer $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{P} = \mathfrak{k}$, indem man durch die Schreibweise $\mathfrak{P}^{-1}$ zugleich die Existenz von $\mathfrak{P}^{-1}$ andeutet).

Der Zusammenhang des algebraischen Problems (3) mit dem algebraischen Problem (1) oder vielmehr allgemeiner mit dem der simultanen Transformation irgendeines Paares reeller quadratischer Formen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ in ein anderes $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$:

$$\mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{s}, \ \mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathfrak{t}; \ \mathfrak{S} = \mathfrak{V}'\mathfrak{s}\mathfrak{V}, \ \mathfrak{T} = \mathfrak{V}'\mathfrak{t}\mathfrak{V}; \ \mathfrak{U}\mathfrak{V} = \mathfrak{E}, \ \mathfrak{V}\mathfrak{U} = \mathfrak{E} \tag{4}$$

ist folgender: besteht (4) und sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{t}$ von nichtverschwindender Determinante, existieren also $\mathfrak{T}^{-1}$ und $\mathfrak{t}^{-1}$, so ist

$$(\mathfrak{S}\mathfrak{T}^{-1})\mathfrak{V}' = (\mathfrak{V}'\mathfrak{s}\mathfrak{V})(\mathfrak{V}^{-1}\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{V}'^{-1})\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}'(\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1}),$$
$$\mathfrak{U}'(\mathfrak{S}\mathfrak{T}^{-1}) = \mathfrak{U}'(\mathfrak{V}'\mathfrak{s}\mathfrak{V})(\mathfrak{V}^{-1}\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{V}'^{-1}) = (\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1})\mathfrak{U}',$$
$$\mathfrak{U}'\mathfrak{V}' = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{V}'\mathfrak{U}' = \mathfrak{E},$$

d. h. $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}\mathfrak{T}^{-1}$ und $\mathfrak{k} = \mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1}$ stehen in der Beziehung (3) mit $\mathfrak{P} = \mathfrak{V}'$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{U}'$.

Sind nun $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$ zwei reelle quadratische Formen, von denen $\mathfrak{D}$ eigentlich definit ist, und sind $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{d}$ die beiden Diagonalformen, in die man jene nach der durch (1) gegebenen Erweiterung des Hauptachsentheorems simultan überführen kann, so folgt aus dem eben Gesagten, daß $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}\mathfrak{D}^{-1}$ der Matrix $\mathfrak{k} = \mathfrak{s}\mathfrak{d}^{-1}$, also auch einer Diagonalmatrix, ähnlich ist, also genau das, was man in der Sprache der Integralgleichungen als den „Entwicklungssatz“ bezeichnet. Dabei ist $\mathfrak{K}\mathfrak{D} = \mathfrak{S}$, also $\mathfrak{K}$ eigentlich, d. h. mit einem *eigentlich* positiv definiten $\mathfrak{D}$, rechtssymmetrisierbar. Ist umgekehrt $\mathfrak{K}$ eigentlich rechtssymmetrisierbar, so ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}_2\mathfrak{D}_2^{-1}$, und alles Gesagte gilt für ein solches $\mathfrak{K}$, das dann übrigens von selbst auch linkssymmetrisierbar ist. Der Begriff eines eigentlich symmetrisierbaren $\mathfrak{K}$ und eines $\mathfrak{K}$, das Produkt einer symmetrischen und einer eigentlich definiten symmetrischen Form ist ($\mathfrak{K} = \mathfrak{S}\mathfrak{D}$, entsprechend dem Fall von *A. Pell*, Nr. **38** b, 2), ist also hier der gleiche.

So einfach liegen die Dinge, wenn $\mathfrak{D}$ *eigentlich* definit ist. Ist $\mathfrak{D}$ *semidefinit*, so treten, wie beim Problem (1) selbst, so auch für den Übergang vom Problem (1) zum Problem (3) schon im algebraischen Fall Schwierigkeiten ein.

3. Sind $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$ beschränkte quadratische Formen von unendlichvielen Veränderlichen (s. Nr. **43** a, 1), so treten an sich keine Schwierigkeiten auf, wenn $\mathfrak{D}$ in *dem* Sinne *eigentlich positiv definit* ist, daß die untere Grenze der Form $\mathfrak{D}(x, x)$ unter der Nebenbedingung $\sum x_\alpha^2 = 1$ (vgl. Nr. **18** b, 3) größer als 0 ist, und $\mathfrak{S}$ *vollstetig.* Man kann auf diesen Fall das Beweisverfahren von *D. Hilbert* (Nr. **40**) übertragen, indem man die Form $\mathfrak{S}(x, x)$ nicht unter der Nebenbedingung $\mathfrak{E}(x, x) = \sum x_\alpha^2 \leqq 1$, sondern unter der Nebenbedingung $\mathfrak{D}(x, x) \leqq 1$ zum Extremum macht.[522]) Man verfährt aber einfacher, wenn man zuerst eine Matrix $\mathfrak{B}$ so bestimmt, daß $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}'\mathfrak{B}$ ist — ob man dies durch die sog. Jacobische Transformation (vgl. Nr. **18** b, 3, [185]) und Nr. **19** b, 3) oder, was das nämliche ist, durch ein auf $\mathfrak{D}$ bezogenes Orthogonalisierungsverfahren (vgl. Nr. **41** b, 5) oder aber mittels eines der

522) *G. Fubini*[475]) (1910) tut das Entsprechende bei Integralgleichungen, ohne zu unendlichvielen Veränderlichen überzugehen, in Verallgemeinerung des Beweises von *E. Holmgren*[421]) für die Eigenwertexistenz, und zwar für $\mathfrak{E} + \mathfrak{K} - \lambda\mathfrak{G}$, wo $\mathfrak{K}$ positiv definit, $\mathfrak{G}$ symmetrisch ist, so daß die untere Grenze von $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{K}$ sicher > 0 ist. Er macht sodann, ebenfalls ohne ausgeführten Beweis, Andeutungen über den Fall von Nr. 38 b, 2 (die Arbeit von *A. Pell* liegt ihm noch nicht vor) sowie über den allgemeinen symmetrisierbaren Fall von *J. Marty* (Nr. **38** b, 4), ohne jedoch über den letzteren Fall mehr zu sagen, als daß er ein Grenzfall des erstgenannten Typs ist.

*E. Hilb*schen Entwicklung (vgl Nr. 18b, 3) nachgebildeten Verfahrens[522a]) vollzieht, ist nebensächlich. Diese Transformation $\mathfrak{B}$, die $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}'^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}^{-1}$ überführt, wird das vollstetige $\mathfrak{S}$ in eine andere vollstetige Form $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{B}'^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B}^{-1}$ überführen; bestimmt man jetzt gemäß Nr. 40 diejenige orthogonale Transformation $\mathfrak{L}$, die $\mathfrak{S}^*$ in die kanonische Gestalt $\mathfrak{f} = \mathfrak{L}\mathfrak{S}^*\mathfrak{L}'$ überführt, so führt diese zugleich, wegen der Orthogonalität, $\mathfrak{E}$ in sich selbst über, und mithin leistet $\mathfrak{L}\mathfrak{B}$ die simultane Transformation von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{E}$.[523])

Der für die Theorie der Integralgleichungen eigentlich interessante Fall aber handelt von solchen $\mathfrak{D}$, die vollstetig sind. Eine vollstetige, positiv definite quadratische Form hat stets 0 zur unteren Grenze, wie sich aus der Definition der Vollstetigkeit unmittelbar ergibt; sie hat nie eine beschränkte Reziproke $\mathfrak{D}^{-1}$. Trotzdem kann die Form *eigentlich* positiv definit sein in dem schwächeren Sinne, daß $\lambda = \infty$ nicht unter ihren Eigenwerten vorkommt, daß also ihre kanonische Gestalt $\sum \delta_\alpha x_\alpha^2$ lauter positive Diagonalkoeffizienten $\delta_\alpha > 0$ aufweist, von denen kein einziger verschwindet, die aber 0 zum Grenzwert haben. Dieser eigentlich wesentliche Fall nimmt also vom algebraischen Standpunkt aus eine Zwitterstellung ein; manche Eigenschaften teilt er mit dem eigentlich definiten Fall im engeren Sinne von 3., manche mit dem semidefiniten Fall, der schon algebraisch verwickelter ist. Und aus dieser Zwitterstellung entspringen die Schwierigkeiten, die in der Theorie der symmetrisierbaren Kerne verborgen sind.

4. Bei demjenigen Problem für unendlichviele Veränderliche, auf das *Hilbert* seine polare Integralgleichung zurückgeführt hat (vgl. Nr. 38b, 1), ist $\mathfrak{D}$ *vollstetig* und positiv definit, aber es bietet sich ein Ersatz für die mangelnde Existenz von $\mathfrak{D}^{-1}$ in dem Umstande, daß

522a) Man bestimme nach dem Muster des Hilbschen $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{E} - \sigma\mathfrak{S}$ hier $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{E} - \delta\mathfrak{D}$ so, daß seine obere Grenze unter 1 liegt, und setze dann $\mathfrak{D}^*$ in die für $|x| < 1$ konvergente binomische Reihe $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \cdots$ für x ein, so erhält man eine reelle symmetrische Matrix, deren Quadrat $= \mathfrak{E} - \mathfrak{D}^* = \delta\mathfrak{D}$ ist, und daraus unmittelbar eine reelle symmetrische Matrix $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, für die $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}'\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ ist. — Dieses Verfahren versagt bei vollstetigem $\mathfrak{D}$, während die Orthogonalisierung bezüglich $\mathfrak{D}$ in allen Fällen einheitlich ausführbar bleibt.

523) Für den Fall, daß $\mathfrak{S}$ beschränkt, aber nicht vollstetig ist, hat *A. J. Pell*, Amer. Math. Soc. Trans. 20 (1919), p. 23—39, die Hilbertsche Theorie der Streckenspektren (vgl. Nr. 43) vom Fall $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ auf ein beliebiges, im obigen Sinne eigentlich positiv definites $\mathfrak{D}$ übertragen. *J. Hyslop*, London Math. Soc. Proc. (2) 24 (1926), p. 264—304 behandelt den Fall, daß $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$ *beide* definit und beschränkt sind.

$\mathfrak{S}$ eine beschränkte, nicht vollstetige Form von der Gestalt

$$\mathfrak{S}(x, x) = \sum v_\alpha x_\alpha^2 \qquad (v_\alpha = \pm 1)$$

ist, die sich offenbar selbst zur Reziproken hat, $\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{S}$.

α) *Hilbert*[524]) beginnt mit der Darstellung von $\mathfrak{D}$ in der Gestalt $\mathfrak{V}'\mathfrak{V}$, die er wegen der hier vorausgesetzten Vollstetigkeit so vollziehen kann, daß er zunächst $\mathfrak{D}$ durch eine orthogonale Transformation $\mathfrak{W}$ auf die Diagonalgestalt $\mathfrak{d}$ überführt,

$$(4) \qquad \mathfrak{W}\mathfrak{D}\mathfrak{W}' = \mathfrak{d}, \quad \mathfrak{W}\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'\mathfrak{W} = \mathfrak{E}, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{d}(x, x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \delta_\alpha x_\alpha^2,$$

dann die vollstetige Form

$$(5) \qquad \sqrt{\mathfrak{d}}(x, x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sqrt{\delta_\alpha}\, x_\alpha^2$$

einführt — das Verschwinden einiger δ_α würde daran nicht hindern — und damit

$$(6) \qquad \mathfrak{D} = (\sqrt{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{W})'\,\mathfrak{E}\,(\sqrt{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{W}) = \mathfrak{V}'\mathfrak{V}, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{V} = \sqrt{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{W}$$

erreicht. Diese selbe Transformation $\mathfrak{V}$ verwandelt gleichzeitig $\mathfrak{S}$ in eine andere beschränkte quadratische Form

$$(7) \qquad \mathfrak{V}\mathfrak{S}\mathfrak{V}' = \mathfrak{Q},$$

und da mit $\sqrt{\mathfrak{d}}$ auch $\mathfrak{V}$ vollstetig ist[175]), wird auch $\mathfrak{Q}$ vollstetig ausfallen.[175]) Sei $\mathfrak{L}$ die orthogonale Transformation, die $\mathfrak{Q}$ in die Normalform überführt,

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathfrak{Q} = \mathfrak{L}'\mathfrak{q}\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'\mathfrak{L} = \mathfrak{E}, \\ \mathfrak{q}(x, x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} q_\alpha x_\alpha^2, \end{cases}$$

dann ist, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}\mathfrak{V}$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{L}\mathfrak{Q}\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}\mathfrak{V}\mathfrak{S}\mathfrak{V}'\mathfrak{L}' = (\mathfrak{L}\mathfrak{V})\mathfrak{S}(\mathfrak{L}\mathfrak{V})' = \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{B}',$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{V}'\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'\mathfrak{L}'\mathfrak{L}\mathfrak{V} = (\mathfrak{L}\mathfrak{V})'(\mathfrak{L}\mathfrak{V}) = \mathfrak{B}'\mathfrak{B}.$$

Damit ist eine vollstetige Transformation $\mathfrak{B}$ gefunden, für die

$$(9) \qquad \mathfrak{q} = \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{B}', \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{B}'\mathfrak{B}$$

wird, wobei $\mathfrak{q}$ vollstetig ist. Damit ist ein gewisser, teilweiser Ersatz für die algebraischen Formeln (1) gewonnen.

β) Soweit ist von $\mathfrak{S}$ nur benutzt worden, daß es beschränkt ist. Besitzt $\mathfrak{S}$ eine beschränkte Reziproke $\mathfrak{S}^{-1}$, so kann Hilbert folgendermaßen weiterschließen: Ist $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{D} \equiv 0$ und hat die Formen-

524) *D. Hilbert,* 4. Mitteil., Gött. Nachr. 1906, p. 209 ff. = Grundzüge, Kap. XII, p. 156—162. Durch die Verwendung des Kalküls ist es möglich geworden, den ganzen Hilbertschen Beweisgang hier kurz zusammengefaßt neu darzustellen.

schar $\mathfrak{S}^{-1} - \lambda\mathfrak{D}$ einen endlichen Eigenwert λ, d. h. hat das homogene Gleichungssystem $\mathfrak{S}^{-1}(x) = \lambda\mathfrak{D}(x)$[524a]) eine nicht triviale Lösung, so ist $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{S}^{-1}(x) = \lambda\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{D}(x) = 0$, also $\mathfrak{D}(x) = 0$ und somit auch $\mathfrak{S}^{-1}(x) = 0$, $\mathfrak{S}\mathfrak{S}^{-1}(x) = 0$ oder $\mathfrak{E}(x) = 0$, d. h. die Lösung wäre identisch Null. Ist also $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{D} \equiv 0$, so hat die Formenschar $\mathfrak{S}^{-1} - \lambda\mathfrak{D}$ keinen endlichen Eigenwert.

Hat andererseits die Formenschar $\mathfrak{S}^{-1} - \lambda\mathfrak{D}$ keinen endlichen Eigenwert, so ist $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{D} \equiv 0$. Denn zunächst folgt aus (9)

$$(10) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{B}'(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{q}) = \mathfrak{S}\mathfrak{B}' - \lambda\mathfrak{S}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{B}' = (\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{S}\mathfrak{D})(\mathfrak{S}\mathfrak{B}') = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}^{-1} - \lambda\mathfrak{D})(\mathfrak{S}\mathfrak{B}');$$

wäre nun $\mathfrak{q}$ nicht identisch Null, so hätte es einen endlichen Eigenwert, d. h. es gäbe ein λ, für das $\mathfrak{E}(x) - \lambda\mathfrak{q}(x) = 0$ lösbar wäre, und mithin wegen (10) auch $(\mathfrak{S}^{-1} - \lambda\mathfrak{D})(\mathfrak{S}\mathfrak{B}')(x) = 0$; da aber vorausgesetzt ist, daß die Formenschar $\mathfrak{S}^{-1} - \lambda\mathfrak{D}$ keinen endlichen Eigenwert hat, folgte $\mathfrak{S}\mathfrak{B}'(x) = 0$, also wegen (9) $\mathfrak{q}(x) = 0$ und schließlich wegen $\mathfrak{E}(x) - \lambda\mathfrak{q}(x) = 0$ auch $\mathfrak{E}(x) = 0$, also wäre die Lösung identisch Null. Also ist $\mathfrak{q} \equiv 0$ und daher auch

$$\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{D} = (\mathfrak{B}'\mathfrak{B})\mathfrak{S}(\mathfrak{B}'\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'(\mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{B}')\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'\mathfrak{q}\mathfrak{B} \equiv 0.$$

Ist nun überdies $\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{S}$, so ist die Formenschar $\mathfrak{S}^{-1} - \lambda\mathfrak{D}$ identisch mit $\mathfrak{S} - \lambda\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{D}$, der in Nr. **41** b, 1 behandelten Kovariante, und es wird klar, inwieweit das *Hilbert*sche Ergebnis ein Analogon der algebraischen Tatsachen darstellt.

γ) Unter der Annahme, daß $\mathfrak{D}$ *eigentlich* positiv definit ist ($\delta_\alpha > 0$) und unter Festhaltung der Annahme, daß $\mathfrak{S}$ eine beschränkte Reziproke $\mathfrak{S}^{-1}$ besitzt, gelingt es Hilbert, dieses Ergebnis wesentlich umzuformen und zu verschärfen. Zunächst zeigt er, daß mit $\mathfrak{D}$ auch $\mathfrak{q}$ abgeschlossen (s. Nr. **40** d, p. 1559) ist, daß also, wenn kein δ_α verschwindet, auch kein q_α verschwinden kann. Hätte nämlich das lineare Gleichungssystem $\mathfrak{q}(x) = 0$ eine Lösung, so wäre auch $\mathfrak{B}'\mathfrak{q}(x) = 0$, mithin wegen (9) auch $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{B}'(x) = 0$, also, da $\mathfrak{D}(u) = 0$ keine Lösung haben soll,

$$\mathfrak{S}\mathfrak{B}'(x) = 0, \quad \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B}'(x) = 0, \quad \mathfrak{B}'(x) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{B}'\mathfrak{L}'(x) = 0,$$
$$\mathfrak{W}'\sqrt{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{L}'(x) = 0, \quad \mathfrak{W}\mathfrak{W}'\sqrt{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{L}'(x) = 0, \quad \sqrt{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{L}'(x) = 0,$$

und da $\sqrt{\mathfrak{d}}$ eine Diagonalform mit lauter nichtverschwindenden Koeffizienten ist, wäre $\mathfrak{L}'(x) = 0$, $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'(x) = 0$, also $\mathfrak{E}(x) = 0$.

524a) Neben dem Symbol $\mathfrak{A}$ wird hier und im folgenden das Symbol $\mathfrak{A}(x)$ im Sinne von $\sum a_{pq}x_q$ $(p = 1, 2, \ldots)$ gebraucht.

Sodann setzt *Hilbert* $q_\alpha = w_\alpha |q_\alpha|$, so daß $w_\alpha = \pm 1$; sei endlich

$$\mathfrak{r}(x, x) = \sum |q_\alpha| x_\alpha^2, \quad \mathfrak{w}(x, x) = \sum w_\alpha x_\alpha, \quad \sqrt{\mathfrak{r}}(x, x) = \sum \sqrt{|q_\alpha|}\, x_\alpha^2$$

$$\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{r}}, \quad \mathfrak{C} = (\sqrt{\mathfrak{r}})^{-1}\mathfrak{B}, \tag{11}$$

so wird[525])

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{C}\mathfrak{S}\mathfrak{C}', \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{C}'\mathfrak{r}\mathfrak{C}. \tag{12}$$

Dieses Resultat, das ebenso wie (9) ein teilweises formales Analogon zu (1) darstellt[526]), ist insofern schärfer als (9), als an Stelle der vollstetigen Diagonalform $\mathfrak{q}$ die Vorzeichen-Diagonalform $\mathfrak{w}$ als kanonische Gestalt des sicher nicht vollstetigen $\mathfrak{S}$ erscheint, während das vollstetige $\mathfrak{D}$ diesmal nicht in die nicht-vollstetige Einheitsform, sondern in die vollstetige Diagonalform $\mathfrak{r}$ übergeht.

δ) Ist $\mathfrak{S}$ überdies selber die Vorzeichen-Diagonalform, als die *Hilbert* sie von vornherein voraussetzt, $\mathfrak{S}(x, x) = \sum v_\alpha x_\alpha^2$, so kann er eine dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen nachgebildete Aussage über die Gleichheit der Kardinalzahlen der Pluszeichen und der Minuszeichen in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{w}$ hinzufügen.

5. Setzt man die Untersuchung von *A. Pell*[473]), die direkt an Integralgleichungen operiert, in die Sprache der unendlichvielen Variabeln um, wodurch sie übersichtlicher und der Vergleich mit Hilberts Verfahren leichter wird, so besteht zunächst ein Unterschied, der in der Form ihrer Darstellung sehr in den Vordergrund tritt, darin, daß sie die Darstellbarkeit von $\mathfrak{D}$ als $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}$ mit dem bezüglich $\mathfrak{D}$ genommenen Orthogonalisierungsprozeß dartut, ohne Benutzung der Hauptachsentransformation von $\mathfrak{D}$, deren Hilbert sich (vgl. Nr. **41** b, 4 α) bedient.[526a]) Diese Variante, wesentlich für den Fall, daß $\mathfrak{D}$ nicht vollstetig ist[522a]), tritt im Falle eines vollstetigen $\mathfrak{D}$ zurück gegenüber den Umformungen des Entwicklungstheorems, mit denen sie über Hilbert hinausgeht. $\mathfrak{S}$ braucht dabei in Wahrheit lediglich beschränkt zu sein, so daß in der hier gegebenen Darstellung ihrer und Hilberts Theorie die gleichen Voraussetzungen zugrunde liegen.

Das Verfahren von *A. Pell* läuft darauf hinaus, daß sie wie in Nr. **41** b, 4 α schließt, aber dann, indem sie $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{S}$ setzt, die Formeln

---

525) *D. Hilbert,* Grundzüge, p. 156, Satz 38.

526) Diese formale Analogie tritt allerdings erst dann klar hervor, wenn man die Annahme $\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{S}$ in Erscheinung bringt. Unter dieser Annahme kann man nämlich (1) so umformen: $\mathfrak{f}^{-1} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{U}'^{-1} = \mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}'\mathfrak{d}\mathfrak{B}$, so daß wenigstens zwei der so umgeformten Relationen (1) mit (9) und (12) in genauer Analogie stehen

526a) *A. Pell*[473]) Amer. Trans., 1. Arbeit, Theorem 20_2; $\mathfrak{B}$ wird als eine Matrix angesetzt, die unterhalb der Diagonale nur Nullen hat und bestimmt sich durch die Forderung $\mathfrak{B}'\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$.

(9) in folgender Umsetzung erhält[527]):

(13) $\quad (\mathfrak{S}\mathfrak{D})\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{q},\quad \mathfrak{B}(\mathfrak{S}\mathfrak{D}) = \mathfrak{q}\mathfrak{B};\quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B} = (\mathfrak{S}\mathfrak{D}),\quad \mathfrak{B}\mathfrak{A}' = \mathfrak{q}.$

Damit ist der Übergang zum Ähnlichkeitsproblem (Nr. **41** b, 2) vollzogen, und die Formeln (13) stehen mit (3) in einer ähnlich bedingten formalen Analogie wie (9) und (12) mit (1); sie stellen bei *A. Pell* den *Entwicklungssatz für den Kern* $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}\mathfrak{D}$ dar.[528])

6. Um zwischen (13) und (3) eine volle Analogie herzustellen, müßte man in (3) die beiden letzten Relationen, die mit vollstetigen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ nicht erfüllbar sind, so abändern:

(3a) $\quad \mathfrak{K}\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{k},\quad \mathfrak{Q}_1\mathfrak{K} = \mathfrak{k}\mathfrak{Q}_1;\quad \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{K},\quad \mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{k}.$

Im algebraischen Fall, und wenn überdies $\mathfrak{K}$ abgeschlossen, d. h. hier von nichtverschwindender Determinante ist, ist (3a) mit (3) äquivalent; denn setzt man $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}\mathfrak{K}$, so geht (3) in (3a) über, und umgekehrt entsteht (3) aus (3a), wenn man $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1\mathfrak{K}^{-1}$ wählt. Diese Feststellung zeigt, bis zu welchem Grade der Entwicklungssatz von *A. Pell* einen Ersatz der algebraischen Tatsachen darstellt. (3a) erweist sich als eine geschickte Variante von (3), die es ermöglicht, im Bereich der *vollstetigen* Formen ein Analogon aufrechtzuerhalten.

7. Es sollen jetzt die Hindernisse dargelegt werden, die einer Ausdehnung des Entwicklungssatzes, sei es von der Form (3), sei es von der Form (3a), auf beliebige symmetrisierbare, vollstetige Formen entgegenstehen. Sei die Bilinearform

$$\mathfrak{K} = (\lambda_1 x_1 y_1 + \varrho_1 x_1 y_2 + \mu_1 x_2 y_2) + (\lambda_2 x_3 y_3 + \varrho_2 x_3 y_4 + \mu_2 x_4 y_4) + \cdots$$

vorgelegt; sie ist dann und nur dann vollstetig, wenn

(14) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} \varrho_n = 0$$

ist; die Zahlen $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots$ seien überdies alle voneinander verschieden und positiv. Ein solches vollstetiges $\mathfrak{K}$ ist stets symmetrisierbar,

527) Denn aus (9) folgt $\mathfrak{A}(\mathfrak{D}\mathfrak{S}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{S})(\mathfrak{D}\mathfrak{S}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{B}')(\mathfrak{B}\mathfrak{S}) = \mathfrak{q}\mathfrak{A}$ und daraus durch Transponieren die erste Formel (13); die letzte Formel (13) fehlt bei A. Pell zum vollen System.

528) *A. Pell* zerteilt in dem Falle, daß $\mathfrak{D}$ nicht abgeschlossen ist, $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_0$, wo sich $\mathfrak{L}_1$ aus den Eigenfunktionen endlicher Eigenwerte von $\mathfrak{Q}$ (vgl. (8)), $\mathfrak{L}_0$ aus denen des Eigenwerts ∞ zusammensetzt, so daß $\mathfrak{L}_1'\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_0'\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{L}_1'\mathfrak{L}_0 = 0$, $\mathfrak{L}_0\mathfrak{L}_1' = 0$ ist; entsprechend zerteilt sie $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_0$ und erhält so statt (13) das genauere System (die vierte und die drei letzten Formeln fehlen bei ihr):

$$(\mathfrak{S}\mathfrak{D})\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1'\mathfrak{q},\quad \mathfrak{B}_1(\mathfrak{S}\mathfrak{D}) = \mathfrak{q}\mathfrak{B}_1;\quad \mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_0'\mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{S}\mathfrak{D}),\quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{q};$$
$$(\mathfrak{S}\mathfrak{D})\mathfrak{A}_0' = 0,\qquad \mathfrak{B}_0(\mathfrak{S}\mathfrak{D}) = 0;\quad \mathfrak{B}_0\mathfrak{A}_0' = 0,\quad \mathfrak{B}_0\mathfrak{A}_1' = 0,\quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_0' = 0$$

d. h. es gibt vollstetige, reelle symmetrische $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$, von denen $\mathfrak{D}$ überdies eigentlich positiv definit ist, so daß $\mathfrak{K}\mathfrak{D} = \mathfrak{S}$ ist, und zwar genügt es, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$ selbst als Formen zu wählen, die sich ähnlich wie $\mathfrak{K}$ aus Formen von je zwei Variablen aufbauen:

$$\mathfrak{D} = (\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 x_2 + \gamma_1 x_2^2) + (\alpha_2 x_3^2 + 2\beta_2 x_3 x_4 + \gamma_2 x_4^2) + \cdots,$$
$$\mathfrak{S} = (a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2) + (a_2 x_3^2 + 2b_2 x_3 x_4 + c_2 x_4^2) + \cdots.$$

Aus zwei solchen Formen entsteht $\mathfrak{K}\mathfrak{D}$ in der Weise, daß sich die einzelnen zweireihigen Bestandteile für sich komponieren, in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix}\lambda_n & \varrho_n\\ 0 & \mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ \beta_n & \gamma_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n\\ b_n & c_n\end{pmatrix}; \tag{15}$$

darin sind also $\lambda_n, \mu_n, \varrho_n$ gegeben, die übrigen ebenfalls reellen Größen gesucht, und zwar so, daß $\alpha_n > 0$, $\gamma_n > 0$, $\alpha_n\gamma_n - \beta_n^2 > 0$ wird (Definitheit von $\mathfrak{D}$) und $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$, $\gamma_n \to 0$ (Vollstetigkeit von $\mathfrak{D}$). Zum ersten ist offenbar notwendig und hinreichend

$$\frac{\varrho_n}{\mu_n - \lambda_n} = \frac{\beta_n}{\gamma_n} < \frac{\alpha_n}{\beta_n}, \tag{16}$$

und dies ist erfüllt, wenn man etwa

$$\beta_n = \varrho_n \pi_n, \quad \gamma_n = (\mu_n - \lambda_n)\pi_n, \quad \alpha_n = 2\varrho_n \frac{\varrho_n}{\mu_n - \lambda_n}\pi_n \tag{17}$$

setzt; das letztere kann man stets erreichen, indem man die Proportionalitätsfaktoren π_n, die das Bestehen von (16) nicht berühren, hinreichend klein wählt. Mit $\mathfrak{D}$ wird auch $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}\mathfrak{D}$ vollstetig als Produkt zweier vollstetiger Formen.[175]) — Ebenso zeigt man, daß jedes solche $\mathfrak{K}$ mit einem eigentlich positiv definiten $\mathfrak{D}$ *links*symmetrisierbar ist.

Trotzdem nun $\mathfrak{K}$ unter den angegebenen Voraussetzungen in beiderlei Sinne symmetrisierbar ist, kann $\mathfrak{K}$ mit keiner Diagonalmatrix $\mathfrak{k}$ in eine Beziehung (3) treten, wo $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ beschränkt sind, noch in eine Beziehung (3a), wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$ vollstetig sind. Eine rein formale Ausrechnung der symbolischen Relation $\mathfrak{K}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{k}$ nämlich in Verbindung mit der Forderung, daß keine Zeile und keine Spalte von $\mathfrak{P}$ aus lauter Nullen bestehen darf — beides wäre mit (3) ebenso unverträglich wie mit (3a) —, ergibt zunächst, daß bei passender Anordnung (die noch verfügbar ist) die Größen in der Diagonale von $\mathfrak{k}$ genau dieselben $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots$ sind, die in der Diagonale von $\mathfrak{K}$ stehen, und zugleich, daß $\mathfrak{P}$ in der gleichen Weise in zweireihige Matrizen zerfallen muß, wie $\mathfrak{K}$ selbst. Die zweireihigen Bestandteile von $\mathfrak{P}$ erhalten die Gestalt

$$p_n x_{2n-1} y_{2n-1} + q_n \frac{\varrho_n}{\mu_n - \lambda_n} x_{2n-1} y_{2n} + q_n x_{2n} y_{2n}, \tag{18}$$

wo p_n, q_n noch frei bleiben, und entsprechend erhalten die von $\mathfrak{Q}$ unter der weiteren Annahme, daß das volle System (3) gelten soll, die Gestalt

(19) $$\frac{1}{p_n} x_{2n-1} y_{2n-1} - \frac{1}{p_n} \frac{\varrho_n}{\mu_n - \lambda_n} x_{2n-1} y_{2n} + \frac{1}{q_n} x_{2n} y_{2n};$$

soll (3a) bestehen, so folgt für die Bestandteile von $\mathfrak{Q}$ die Gestalt

(19a) $$\frac{\lambda_n}{p_n} x_{2n-1} y_{2n-1} - \frac{\lambda_n}{p_n} \frac{\varrho_n}{\mu_n - \lambda_n} x_{2n-1} y_{2n} + \frac{\mu_n}{q_n} x_{2n} y_{2n}.$$

Soviel rein formal.

Soll nun (3) mit beschränkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bestehen, so müssen p_n, q_n, $\frac{1}{p_n}$, $\frac{1}{q_n}$ beschränkt sein; ist nun aber λ_n, μ_n, ϱ_n so gewählt, was im Rahmen der Bedingungen (14) leicht zu erreichen ist, daß $\frac{\varrho_n}{\mu_n - \lambda_n}$ unbeschränkt ist, so können $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ nicht beschränkt ausfallen.

Soll ebenso (3a) bestehen, mit vollstetigen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, so müssen

$$p_n, \quad q_n, \quad q_n \frac{\varrho_n}{\mu_n - \lambda_n}, \quad \frac{\lambda_n}{p_n}, \quad \frac{\mu_n}{q_n}, \quad \frac{\lambda_n}{p_n} \frac{\varrho_n}{\mu_n - \lambda_n}$$

mit wachsendem n alle gegen 0 gehen; durch Multiplikation der 3. und 5. bzw. der 1. und 6. dieser sechs Bedingungen folgt

(20) $$\frac{\lambda_n \varrho_n}{\mu_n - \lambda_n} \to 0, \quad \frac{\mu_n \varrho_n}{\mu_n - \lambda_n} \to 0,$$

also zwei Bedingungen, die nur noch die gegebenen λ_n, μ_n, ϱ_n enthalten; es ist leicht zu sehen, daß man diese Zahlen im Rahmen der Bedingungen (14) so wählen kann, daß (20) nicht erfüllt ist.[529])

Ob man also den Entwicklungssatz (3) im Sinne beschränkter Transformation aufstellen will, oder ob man sich im Sinne vollstetiger Formen mit dem Entwicklungssatz (3a) behelfen will (wie Hilbert und Pell), man scheitert bereits im Bereiche der beiderseitig und eigentlich symmetrisierbaren Formen. Als einziger Ausweg würde ein Herausschreiten aus dem Bereich der beschränkten Transformationen übrigbleiben und damit ein Herausschreiten aus dem Hilbertschen Bereich der Veränderlichen von konvergenter Quadratsumme. Die Theorie der unsymmetrischen Formen erfordert den Übergang zu denjenigen anderen unendlichdimensionalen Bereichen, die in Nr. **20** geschildert worden sind; einer im Sinne (3) zu transformierenden vorgegebenen Form $\mathfrak{K}$ darf man keine feste Konvergenzbedingung, wie etwa die der

529) Dieses Beispiel hat *O. Toeplitz* aufgestellt, nachdem er von *E. Schmidt* in einem Gespräch (Pfingsten 1913) erfahren hatte, daß dieser einen unsymmetrischen Kern $K(s, t)$ aus zweigliedrigen Bestandteilen konstruiert habe, mit lauter einfachen Eigenwerten, bei dem nicht nur die Entwicklung von $K(s, t)$ selbst, sondern auch die von $\iint K(s, t)\, \varphi(s)\, \psi(t)\, ds\, dt$ nach dem biorthogonalen System der Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$, $\psi_n(t)$ divergiert.

konvergenten Quadratsumme auferlegen, sondern je nach der Beschaffenheit der vorgegebenen Form $\mathfrak{K}$ muß die Konvergenzbedingung gestaltet werden. Eine derartige Theorie ist bislang noch nirgends entwickelt worden.

42. Elementarteilertheorie der allgemeinen vollstetigen Bilinearformen. Die Untersuchungen von Nr. **39** übertragen sich — abgesehen von denjenigen von Nr. **39**c, die die Konvergenz von $\sum_{p,q} |a_{pq}|^2$ wesentlich voraussetzen — auf beliebige vollstetige Bilinearformen, obgleich sie unmittelbar in der Literatur in einer Form dargestellt sind, die mit dem Fredholmschen Formelapparat eine Reihe von einengenden Voraussetzungen stillschweigend involviert. Man muß dazu nur überlegen, daß aus den Auflösungstheorien von Nr. **16** (z. B. dem Abspaltungsverfahren Nr. **16**d, 3) der meromorphe Charakter der Resolvente gefolgert werden kann, woraus hervorgeht, daß es nur abzählbar viele Eigenwerte gibt, die sich nirgends im Endlichen häufen. Man muß hinzufügen, daß man nach dem Muster von Nr. **16**c[141]) wie auf die Endlichkeit der Anzahl der zu einem bestimmten Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen auch auf die der zu einem bestimmten Eigenwert gehörigen Hauptfunktionen schließen kann. Alsdann kann man die Partialbruchzerlegung der Resolvente vornehmen und die Abspaltung des zu λ_1 gehörigen Hauptbestandteils, unter Loslösung von dem üblichen Determinantenapparat, vollziehen (ausgeführt ist es explizite nirgends). Die Analogie mit der Weierstraßschen Normalform springt hier weit unmittelbarer in die Augen, als bei den Integralgleichungen; der einzelne abgespaltene Bestandteil hat genau die kanonische Gestalt von Weierstraß.

Schärfer aber, als bei den Integralgleichungen (Nr. **39**d) kann hier das Problem des Entwicklungssatzes oder, was dasselbe ist, der vollen Analogie mit der Weierstraßschen Theorie präzisiert werden. Es gilt, zwei beschränkte Transformationen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zu finden, so daß

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{K}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{K} = \mathfrak{k}\mathfrak{Q}; \quad \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$$

wird, wo $\mathfrak{k}$ die Weierstraßsche oder eine ähnliche Normalform für $\mathfrak{K}$ ist. In dieser Form enthält das Problem für reelles symmetrisches $\mathfrak{K}$ die gesamte Hauptachsentheorie (Nr. **40**d) als Spezialfall.

Aber es sind zwei Hindernisse, die sich der Lösung dieses Problems entgegenstellen:

1. Es gibt Bilinearformen ohne jedweden Eigenwert, die nicht identisch verschwinden. Die den Volterraschen Kernen entsprechenden Bilinearformen, wie z. B.

$$b_1 x_1 y_2 + b_2 x_2 y_3 + b_3 x_3 y_4 + \cdots \quad (b_n \to 0,\ b_n \neq 0),$$

sind Beispiele dafür. Allerdings ist in dem aufgeführten Beispiel ∞ noch Eigenwert in dem Sinne, daß die Gleichungen

$$b_1 x_2 = 0, \quad b_2 x_3 = 0, \quad b_3 x_4 = 0, \quad \ldots$$

die Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ... haben, während freilich die transponierten Gleichungen

$$b_1 y_1 = 0, \quad b_2 y_2 = 0, \quad b_3 y_3 = 0, \quad \ldots$$

unlösbar sind. Aber es ist nicht schwer, auch ein Beispiel einer vollstetigen Bilinearform anzugeben, wo auch ∞ in keinerlei Sinne Eigenwert ist. Die Form

$$\cdots + b_{-1} x_{-1} y_0 + b_0 x_0 y_1 + b_1 x_1 y_2 + b_2 x_2 y_3 + \cdots$$
$$(b_n \to 0,\ b_{-n} \to 0,\ b_n \neq 0,\ b_{-n} \neq 0)$$

hat offenbar diese Eigenschaft, und man kann die Veränderlichen so umnumerieren (vgl. [562]), daß sie statt von $-\infty$ bis $+\infty$ in der gewohnten Weise von 1 bis ∞ numeriert sind.[530])

Eine Aufstellung kanonischer Normalformen für Bilinearformen ohne Eigenwerte ist bisher nicht geleistet worden.

2 Selbst wenn unendlichviele Eigenwerte vorhanden sind und alle Eigenwerte einfach sind, so daß keinerlei Bedenken wegen der Wahl der Weierstraßschen oder einer anderen Normalform entstehen, kann (1) unlösbar sein. Dies ist unter der erschwerenden Bedingung der Symmetrisierbarkeit in Nr. **41** b, 7 dargetan worden und überträgt sich auf das hier vorliegende Problem mit allen Schlußfolgerungen über die Notwendigkeit des Verlassens der Hilbertschen Bedingung der Veränderlichen von konvergenter Quadratsumme.

D. Weitere Untersuchungen über quadratische und bilineare Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

43. Beschränkte quadratische Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *D. Hilbert*[531]) hat zugleich mit seiner Behandlung der vollstetigen quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen (s. Nr. **40**) für die umfassendere Klasse der beschränkten quadratischen Formen die Grundzüge einer Theorie der orthogonalen Trans-

530) Dieses Beispiel ist in der im Text gegebenen Form von *O. Toeplitz*, in einer anderen, die von vornherein die übliche Anordnung der Unbekannten wahrt, von *E. Schmidt* gebildet, aber nicht veröffentlicht worden.

531) *D. Hilbert*, 4. Mitteil., Gött. Nachr. 1906, insbes. p. 157—209; im folgenden zitiert nach dem Abdruck in „Grundzügen", Kap. XI, p. 109—156. — Über die Einordnung in die historische Entwicklung vgl. Nr. **8**, Ende; die die größere Klasse der unsymmetrischen beschränkten Bilinearformen behandelnden, aber viel weniger aussagenden Sätze s. in Nr. **18** b.

formation entwickelt, die gegenüber jener gewisse wesentliche Modifikationen aufweist, und die zu einer entsprechend modifizierten Eigenwerttheorie eigentlich singulärer Integralgleichungen (s. Nr. **44**) führt.

a) Die Hilbertsche Theorie.

1. Eine wie in Nr. **18** a, 1 zunächst formal definierte *quadratische Form der unendlichvielen Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots$

$$\mathfrak{K}(x, x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q, \quad \text{wo} \quad k_{pq} = k_{qp}, \tag{1}$$

heißt *beschränkt*[532]), wenn ihr n^{ter} Abschnitt für alle Wertsysteme, deren Quadratsumme 1 nicht übersteigt, absolut genommen unterhalb einer von n unabhängigen Schranke M bleibt:

$$|\mathfrak{K}_n(x, x)| = \left|\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q\right| \leqq M \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{n} x_p^2 \leqq 1 \tag{1a}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn für *beliebige* $x_1, x_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme

$$|\mathfrak{K}_n(x, x)| = \left|\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q\right| \leqq M \sum_{p=1}^{n} x_p^2. \tag{1b}$$

M heißt eine „Schranke der Form $\mathfrak{K}$". Die zu $\mathfrak{K}(x, x)$ gehörige *symmetrische Bilinearform* (*Polarform*)

$$\mathfrak{K}(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p y_q, \quad \text{wo} \quad k_{pq} = k_{qp}, \tag{2}$$

ist alsdann *beschränkt* im Sinne von Nr. **18** a, 1 und hat die gleiche Schranke M, wie unmittelbar aus der Identität Nr. **40**, (4a) folgt. Daher übertragen sich alle Aussagen von Nr. **18** a ohne weiteres sinngemäß auf die hier definierten beschränkten quadratischen Formen.

Als *positiv definite Formen* werden wie in der Algebra (vgl. Nr. **41** b, 1) in der Folge solche bezeichnet, für die

$$\mathfrak{K}(x, x) \geqq 0. \tag{3}$$

2. Das Ziel der Hilbertschen Theorie ist die Aufstellung von *Normalformen*, in die sich jede beschränkte quadratische Form durch orthogonale Transformation der unendlichvielen Veränderlichen überführen läßt. Nicht jede solche Form läßt sich wie eine vollstetige Form (Nr. **40** d) orthogonal in eine Quadratsumme vom Typus Nr. **40**, (12) transformieren[533]); es ist *D. Hilbert* jedoch gelungen, das folgende

532) *D. Hilbert*[531]), p. 125 ff.; *Hellinger-Toeplitz*[164]), § 4, p. 303 f.

533) Die ersten einfachen Beispiele dafür, die *D. Hilbert*[531]), p. 155 f. gibt, sind J-Formen (s. Nr. **43** c), das einfachste $\sum x_p x_{p+1}$; hier kann man elementar ausrechnen, daß die homogenen Gleichungen (8) für keinen Parameterwert Lösungen von konvergenter Quadratsumme besitzen, wie sie im Falle der Quadratsummendarstellung existieren müßten [vgl. *E. Hellinger*[543]), § 3].

allgemeine Theorem aufzustellen, das zu den Quadratsummen ein gewissen charakteristischen Bedingungen genügendes *Integral* treten läßt[534]):

Eine beschränkte quadratische Form $\mathfrak{K}(x, x)$ läßt sich durch orthogonale Transformation der $x_1, x_2, \ldots$ in die neuen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_1', \xi_2', \ldots$ in die Gestalt bringen

$$(4) \qquad \mathfrak{K}(x, x) = \sum_{(\alpha)} \varrho_\alpha \xi_\alpha^2 + \int_{-M}^{+M} \varrho \, d\mathfrak{S}(\varrho; \xi', \xi'),$$

während gleichzeitig

$$(4a) \qquad \mathfrak{E}(x, x) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = \sum_{(\alpha)} \xi_\alpha^2 + \int_{-M}^{+M} d\mathfrak{S}(\varrho; \xi' \xi').$$

Hier sind die ϱ_α höchstens abzählbar unendlichviele absolut unterhalb M liegende reelle Zahlen, von denen endlich- oder unendlichviele verschwinden können. Ferner bedeutet

$$(5) \qquad \mathfrak{S}(\varrho; \xi', \xi') = \sum_{p,q=1}^{\infty} s_{pq}(\varrho) \xi_p' \xi_q', \quad s_{pq}(\varrho) = s_{qp}(\varrho),$$

eine von dem im Intervall $(-M, +M)$ variierenden Parameter ϱ abhängige definite beschränkte quadratische Form (*Spektralform*), deren Werte für jedes feste Wertsystem der ξ_p' mit wachsendem ϱ von

$$(5a) \qquad \mathfrak{S}(-M; \xi', \xi') \equiv 0 \quad \text{bis} \quad \mathfrak{S}(M; \xi', \xi') = \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p'^2$$

monoton und stetig wachsen oder auch streckenweise konstant bleiben,

534) *D. Hilbert*[531]), insbes. Satz 32, p. 137 f., Satz 33, p. 145 f. Ein analoges, weniger weitgehendes Resultat, im wesentlichen die Existenz und die (6) entsprechende Darstellung *einer* (nicht notwendig eindeutig bestimmten) Resolvente, hat er gleichzeitig [ibid. Satz 31, p. 124 f., vgl. dazu Nr. 19[212])] für solche nicht beschränkte Formen abgeleitet, bei denen die charakteristischen Werte $\varrho_\alpha^{(n)}$ der Abschnitte $\mathfrak{K}_n$ [vgl. (7)] mindestens eine reelle Zahl nicht zum Häufungspunkt haben (ist ∞ diese Zahl, so ist $\mathfrak{K}$ beschränkt). Übrigens werden bei Hilbert stets in der aus der Theorie der Integralgleichungen üblichen Bezeichnungsweise an Stelle der im Text benutzten Parameterwerte v, ϱ_α, ϱ ihre reziproken Werte, an Stelle der Formenschar $\mathfrak{K} - v\mathfrak{E}$ also die $\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{K}$ verwendet; daher bestehen die bei ihm als Punkt- und Streckenspektrum bezeichneten Mengen aus den reziproken Werten der Zahlen der im Text entsprechend bezeichneten Mengen. — Das Auftreten kontinuierlich verteilter Ausnahmewerte statt abzählbar unendlichvieler Eigenwerte war bei gewissen durch trigonometrische Funktionen lösbaren Randwertaufgaben von alters her bekannt: Darstellung der Lösungen durch Fouriersche *Integrale* statt durch Fouriersche *Reihen.* Auf die Möglichkeit allgemeinerer Typen solcher „Bandenspektren", bestehend aus unendlichvielen getrennten Strecken, bei geeigneten Randwertaufgaben hat bereits *W. Wirtinger,* Math. Ann. 48 (1897), p. 365—389, § 9 hingewiesen.

und deren Zuwächse

$$\text{(5b)}\qquad \varDelta\mathfrak{S}(\varrho;\xi',\xi') = \mathfrak{S}(\varrho';\xi',\xi') - \mathfrak{S}(\varrho;\xi',\xi') = \sum_{p,q=1}^{\infty} \varDelta s_{pq}(\varrho)\,\xi_p'\xi_q'$$

in beliebigen Intervallen $\varDelta$, $\varDelta_1$ den Faltungsgleichungen genügen

$$\text{(5c)}\qquad \begin{cases} \varDelta\mathfrak{S}\cdot\varDelta_1\mathfrak{S} = 0, \quad \text{d. h.} \ \sum\limits_{r=1}^{\infty} \varDelta s_{pr}\varDelta_1 s_{rq} = 0, \\ \qquad\qquad \text{wenn } \varDelta, \varDelta_1 \text{ keine Punkte gemein haben,} \\ \varDelta\mathfrak{S}\cdot\varDelta\mathfrak{S} = \varDelta\mathfrak{S}, \quad \text{d. h.} \ \sum\limits_{r=1}^{\infty} \varDelta s_{pr}\varDelta s_{rq} = \varDelta s_{pq}; \end{cases}$$

(5c) kann mit Hilfe einer willkürlichen stetigen Funktion $u(\varrho)$ auch in die Faltungsgleichung zusammengefaßt werden:

$$\text{(5d)}\qquad \begin{cases} \int\limits_{-M}^{+M} u(\varrho)\,d\mathfrak{S}(\varrho)\cdot\int\limits_{-M}^{+M} u(\varrho)\,d\mathfrak{S}(\varrho) = \int\limits_{-M}^{+M} u(\varrho)^2\,d\mathfrak{S}(\varrho), \quad \text{d. h.} \\ \sum\limits_{r=1}^{\infty}\int\limits_{-M}^{+M} u(\varrho)\,ds_{pr}(\varrho)\int\limits_{-M}^{+M} u(\varrho)\,ds_{rq}(\varrho) = \int\limits_{-M}^{+M} u(\varrho)^2\,ds_{pq}(\varrho). \end{cases}$$

Die Integrale in (4), (5) sind im *Stieltjes*schen Sinne (s. Encykl. II C 9b, Nr. **35d**, *Montel-Rosenthal*) verstanden. Die abzählbare Menge der ϱ_p heißt *Punktspektrum* (*diskontinuierliches Spektrum*), die perfekte Menge der Stellen ϱ ($|\varrho| \leqq M$), in deren Umgebung $\mathfrak{S}(\varrho;\xi',\xi')$ nicht für alle ξ_p' konstant in ϱ ist, *Streckenspektrum* (*kontinuierliches Spektrum*), die Vereinigungsmenge beider nebst den Häufungsstellen des Punktspektrums *Spektrum* von $\mathfrak{K}$; jede dieser Mengen ist gegenüber orthogonalen Transformationen von $\mathfrak{K}$ invariant. Gehört ν dem Spektrum von $\mathfrak{K}$ nicht an, so besitzt $\mathfrak{K}(x,x) - \nu\mathfrak{E}(x,x)$ eine beschränkte Reziproke (vgl. Nr. **18**b, 2), die analog zu (4) dargestellt wird durch

$$\text{(6)}\qquad \mathsf{K}(\nu;x,x) = \sum_{(\alpha)} \frac{\xi_\alpha^2}{\varrho_\alpha - \nu} + \int\limits_{-M}^{+M} \frac{d\mathfrak{S}(\varrho;\xi',\xi')}{\varrho - \nu}.$$

Hilberts Beweis dieses Theorems beruht auf der Durchführung des Grenzüberganges $n \to \infty$ in der Formel der orthogonalen Transformation des Abschnittes[535])

$$\text{(7)}\qquad \mathfrak{K}_n(x,x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \varrho_\alpha^{(n)}\Big(\sum_{p=1}^{n} w_{\alpha p}^{(n)} x_p\Big)^2, \quad \varrho_1^{(n)} \leqq \varrho_2^{(n)} \leqq \cdots \leqq \varrho_n^{(n)};$$

---

535) Einen ganz analogen Grenzprozeß bei einem sachlich verwandten, aber einfachere Verhältnisse darbietenden Problem der Kettenbruchtheorie hatte bereits *T. J. Stieltjes*[259]) durchgeführt; wegen des sachlichen Verhältnisses seiner Theorie zu den beschränkten quadratischen Formen vgl. Nr. **43**c. Man vergleiche

die $\varrho_\alpha^{(n)}$ sind die Nullstellen der Determinante von $\mathfrak{K}_n - \varrho\mathfrak{E}_n$ (vgl. Nr. **1** b) und liegen sämtlich absolut unterhalb der Schranke M von $\mathfrak{K}$. Er betrachtet für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ die Folge derjenigen streckenweise konstanten Funktionen von ϱ, deren n^{te} für $\varrho \leqq \varrho_1^{(n)}$ Null ist und an jeder Stelle $\varrho = \varrho_\alpha^{(n)}$ einen Sprung gleich $(\sum w_{\alpha p}^{(n)} x_p)^2$ (bzw. wenn mehrere $\varrho_\alpha^{(n)}$ übereinstimmen, gleich der Summe der entsprechenden Quadrate) besitzt; durch Anwendung eines Auswahlverfahrens (vgl. Nr. **16** b) und Heranziehung der Integrale nach ϱ gewinnt er sodann als Grenzfunktion einer Teilfolge dieser Funktionen eine mit wachsendem ϱ nicht abnehmende Funktion $\mathfrak{T}(\varrho; x, x)$, die bei festem ϱ eine definite beschränkte quadratische Form der x_p ist: Ihre Sprungstellen in der Veränderlichen ϱ liefern das Punktspektrum, die Beträge ihrer Sprünge die neuen Variablen ξ_α als Linearformen der x_p; ihr von den Sprüngen befreiter *stetiger* monoton wachsender Bestandteil ist die Spektralform $\mathfrak{S}(\varrho; x, x)$; das gesamte Spektrum ist in der Menge der Häufungsstellen der $\varrho_\alpha^{(n)}$ enthalten.[535a])

3. An unmittelbaren Folgerungen des Hilbertschen Theorems sei erwähnt, daß bei *vollstetigen* Formen die Spektralform $\mathfrak{S}(\varrho; x, x) \equiv 0$ und $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \varrho_\alpha = 0$ wird[536]) — übereinstimmend mit Nr. **40**, (12) — und daß bei positiv *definiten* Formen und nur bei solchen das gesamte Spektrum nicht negativ ist.

Die verschiedenen Arten von Spektralpunkten ϱ können durch das Verhalten der zur quadratischen Form $\mathfrak{K}(x, x) - \varrho\mathfrak{E}(x, x)$ gehörigen unendlichvielen linearen Gleichungen in folgender Weise charakterisiert werden: Einmal existiert für *sämtliche* Stellen ϱ des *Spektrums keine* beschränkte Reziproke zu $\mathfrak{K} - \varrho\mathfrak{E}$.[537]) Zweitens besitzen

auch die kurze Andeutung von *Stieltjes* über den Zusammenhang seiner Untersuchungen mit *Poincarés* Arbeit[27]) über die Eigenwerte der Potentialgleichung (s. Nr. **5**, p. 1352 f. und Nr. **33** c) in Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, t. II (Paris 1905), p. 411. — Die etwas allgemeinere Annäherung einer beschränkten Form durch passende *vollstetige* Formen (statt speziell durch die Abschnitte) bildet den Grundgedanken einer Methode von *E. Hilb*, s. Nr. **44** a, [585]).

535a) Daß es mit ihr nicht identisch ist, zeigt das Beispiel der Form $2x_1x_2 + 2x_3x_4 + \cdots$, wo das Spektrum aus den Stellen $\varrho = \pm 1$ besteht, während unter den $\varrho_\alpha^{(n)}$ unendlichoft 0 vorkommt (vgl. *O. Toeplitz*[184]), § 5).

536) *H. Weyl*, Palermo Rend. 27 (1909), p. 373—392, 402 hat untersucht, wie das Spektrum allgemein durch *Addition* einer vollstetigen Form $\mathfrak{B}(x, x)$ zu $\mathfrak{K}(x, x)$ beeinflußt wird; er fand, daß das gesamte Spektrum hierbei ungeändert bleibt, daß aber zu jedem $\mathfrak{K}(x, x)$ ein $\mathfrak{B}(x, x)$ so bestimmt werden kann, daß $\mathfrak{K} + \mathfrak{B}$ *kein Streckenspektrum* mehr hat. Der erste Teil dieser Aussage folgt übrigens auch direkt aus der Schlußbemerkung von Nr. **18** b, 4.

537) *E. Hellinger*[548]), § 3.

für die Stellen ϱ_α des *Punktspektrums* — und nur für sie — genau entsprechend den Verhältnissen bei vollstetigen Formen (s. Nr. **40**c, (13)) die homogenen Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} w_q - \varrho_\alpha w_p = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

Lösungen von konvergenter Quadratsumme, die durch die den entsprechenden Variablen ξ_α zugehörigen Koeffizienten der orthogonalen Transformation geliefert werden.[538]) Endlich gehört ein reelles Intervall Δ dann und nur dann dem *Streckenspektrum* an, wenn es abzählbar unendlichviele stetige in jenem Intervall und jedem seiner Teilintervalle nicht sämtlich konstante Funktionen $\sigma_p(\varrho)$ gibt, die für alle ϱ des Intervalls Δ den Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} \sigma_q(\varrho) - \int_{-M}^{\varrho} \varrho \, d\sigma_p(\varrho) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

genügen — das Integral wiederum im Stieltjesschen Sinne verstanden — und deren Quadratsumme obendrein gegen eine stetige Funktion $\sigma_0(\varrho)$ konvergiert:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sigma_p(\varrho)^2 = \sigma_0(\varrho); \tag{9a}$$

solche Lösungen $\sigma_p(\varrho)$ sind die Koeffizienten $s_{pq}(\varrho)$ jeder q^{ten} Zeile der Spektralform, und sämtliche Lösungen können durch bestimmte Rekursionsverfahren aus ihnen erzeugt werden.[539]) Haben die $\sigma_p(\varrho)$ speziell stetige Ableitungen $\varphi_p(\varrho)$ nach ϱ, so gilt gleichzeitig

$$\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} \varphi_q(\varrho) - \varrho \varphi_p(\varrho) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots), \tag{9'}$$

falls die eingehenden Reihen gleichmäßig in ϱ konvergieren; alsdann sind also diese gewöhnlichen homogenen Gleichungen mit dem Koeffizientensystem $\mathfrak{K} - \varrho \mathfrak{E}$ lösbar durch stetige Funktionen von ϱ, die keine konvergente Quadratsumme, wohl aber *Integrale nach ϱ mit konvergenter Quadratsumme* haben.[540]) Für jedes Lösungssystem von (9) gelten notwendig die folgenden, den Orthogonalitätseigenschaften der

---

538) *D. Hilbert*[531]), Satz 34, p. 147. — Über die Stelle 0 des Punktspektrums (Eigenwert ∞) und den Begriff der *Abgeschlossenheit* gilt das in Nr. **40**d, p. 1559 und [512a]) für vollstetige Formen gesagte.

539) Nach dem Muster der Gleichungen, die für *Hilbert* bei der Konstruktion seiner Beispiele[533]) maßgebend waren, hat *E. Hellinger*[548]), § 3 diese Definition gegeben; nähere Durchführung bei *E. Hellinger*[543]), § 5. Wegen der Konstruktion sämtlicher Lösungen s. [550]).

540) *E. Hellinger*[543]), § 3. — Vgl. auch [542]).

Eigenfunktionen einer Integralgleichung (Nr. 30c, (3)) entsprechenden Orthogonalitätsrelationen für die Zuwächse $\Delta\sigma_p(\varrho) = \sigma_p(\varrho') - \sigma_p(\varrho)$ in beliebigen Teilintervallen[541]):

$$(10)\qquad \begin{cases} \sum_{p=1}^{\infty} \Delta\sigma_p(\varrho)\Delta_1\sigma_p(\varrho) = 0, \\ \qquad\qquad \text{wenn } \Delta, \Delta_1 \text{ keinen Punkt gemein haben,} \\ \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta\sigma_p(\varrho))^2 = \Delta\sigma_0(\varrho). \end{cases}$$

Aus ihnen folgt, daß $\sigma_0(\varrho)$ stets eine nicht abnehmende, $\sigma_p(\varrho)$ eine Funktion beschränkter Schwankung ist. Daher besitzt $\sigma_p(\varrho)$ mit Ausnahme einer Nullmenge eine Ableitung nach ϱ und ebenso eine $\varphi_p(\sigma_0)$ nach $\sigma_0 = \sigma_0(\varrho)$, und $\sigma_p(\varrho)$ ist ferner als unbestimmtes Integral (im Lebesgueschen Sinne) von $\varphi_p(\sigma_0)$ nach σ_0 darstellbar; man kann daher das Streckenspektrum durch die als „Äquivalenzen" aufzufassenden Gleichungen (9') für die $\varphi_p(\sigma_0)$ charakterisieren.[542]) — Unabhängig von dem Übergang zu Differentialquotienten kann man den Sachverhalt symbolisch auch so ausdrücken[539]), daß das System der „Differentiale" $d\sigma_p(\varrho)$ die (8) analogen Gleichungen an den Stellen des Streckenspektrums

$$(9\text{b})\qquad \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}\, d\sigma_q(\varrho) - \varrho\, d\sigma_p(\varrho) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

als *„Differentiallösungen"* erfüllt, während $\sum (d\sigma_p(\varrho))^2$ gegen das Differential einer stetigen monotonen Funktion $\sigma_0(\varrho)$ konvergiert; (10) kann dann als *Orthogonalität dieser Differentiallösungen* gedeutet werden.

4. Die *Hilbert*schen Resultate sind auch auf anderen Wegen hergeleitet worden. *E. Hellinger*[543]) erbringt den Existenzbeweis des durch die Lösbarkeit der Gleichungen (8) bzw. (9) im soeben angegebenen Sinne charakterisierten Spektrums in folgender Weise: Nach dem

541) *E. Hellinger*[543]), § 5; der Beweis ist die sinngemäße Übertragung des einfachen Schlußverfahrens bei Integralgleichungen[386]) auf die hier obwaltenden schwierigeren Verhältnisse; vgl. dazu auch *H. Weyl*[567]), p. 296ff., wo dasselbe Schlußverfahren bei singulären Integralgleichungen angewandt wird.

542) Die zur Durchführung des Überganges zu den $\varphi_p(\sigma_0)$ notwendige Heranziehung der Lebesgueschen Integrationstheorie bei *H. Hahn*[552]), insbes. § 2, 4; vgl. auch *E. Hellinger*[543]), § 8. — Sind nur endlichviele k_{pq} in jeder Zeile $\neq 0$ („finite Formen"), und kann man die Gleichungen (9') rekursiv auflösen, so kommen als Lösungen φ_p nur *Polynome in* ϱ in Betracht; *O. Toeplitz*[555]), Nr. 1 hat gezeigt, daß man jede beschränkte Form $\mathfrak{K}(x, x)$ durch orthogonale Transformation der Veränderlichen in eine Form jener besonderen Art überführen kann (vgl. auch die weitergehende Zerspaltung Nr. 43c, 2).

543) *E. Hellinger,* J. f. Math. 136 (1909), p. 210—271 = Habilit.-Schrift Marburg 1909, insbes. Kap. III.

*Toeplitz*schen Kriterium (Nr. 18b, 3) in seiner Übertragung auf komplexe Formen (vgl. Nr. 18b, 6) besitzt die Form $\mathfrak{K} - \nu\mathfrak{E}$ für jedes nichtreelle $\nu = \varrho + i\mu$ $(\mu \neq 0)$ eine beschränkte Reziproke $\mathsf{K}(\nu; x, x)$, da $(\mathfrak{K} - \nu\mathfrak{E})(\mathfrak{K} - \bar{\nu}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{K} - \varrho\mathfrak{E})(\mathfrak{K} - \varrho\mathfrak{E}) + \mu^2\mathfrak{E}$ für $\sum x_p^2 = 1$ oberhalb μ^2 bleibt; die *Hilb*sche Reihe Nr. 18, (16) in entsprechender Modifikation für komplexe Formen stellt K dar, und ihre Majorisierung gibt die Schranke

$$(11) \qquad |\mathsf{K}(\nu; x, x)| = \left|\sum_{p,q=1}^{\infty} \varkappa_{pq}(\nu)\, x_p x_q\right| \leqq \frac{1}{|\mu|} \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2.$$

Weiterhin ergibt sich, etwa mit Hilfe der Entwicklung nach Iterierten, daß $\mathsf{K}(\nu; x, x)$ für alle nicht dem reellen Intervall $(-M, +M)$ angehörigen Werte ν eine reguläre analytische Funktion von ν ist, deren Residuum bei $\nu = \infty$ den Wert $\mathfrak{E}(x, x)$ hat; daher kann die Existenz des Spektrums durch sinngemäße Fortbildung derjenigen *funktionentheoretischen Methoden* gefolgert werden, die nach dem Vorbild von *H. Poincaré* auf Randwertprobleme von Differentialgleichungen sowie gelegentlich auch auf Integralgleichungen angewendet worden sind[544]) (vgl. Nr. 6[34]), 33c, 34c, Ende). Durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf ein das reelle Segment $(-M, M)$ einschließendes Rechteck erhält man nämlich

$$(12) \qquad \lim_{\mu=0} \frac{1}{i} \int_{-M}^{+M} \{\mathsf{K}(\varrho + i\mu; x, x) - \mathsf{K}(\varrho - i\mu; x, x)\}\, d\varrho = 2\pi\, \mathfrak{E}(x, x);$$

ferner ist, da K an konjugiert imaginären Stellen konjugierte Werte hat, der Integrand reell und, wie aus der Hilbschen Reihe zu entnehmen, eine positiv definite quadratische Form der x_p. Daraus kann geschlossen werden, daß das bis ϱ erstreckte Integral gegen eine mit ϱ monoton von 0 bis $2\pi\mathfrak{E}(x, x)$ wachsende definite beschränkte quadratische Form $2\pi\,\mathfrak{T}(\varrho; x, x)$ konvergiert. Integriert man nun den imaginären Teil der Gleichungen

$$\sum_{r=1}^{\infty} k_{pr}\varkappa_{rq}(\varrho + i\mu) - (\varrho + i\mu)\varkappa_{pq}(\varrho + i\mu) = e_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots),$$

die die Reziprokeneigenschaft von $\mathsf{K}(\nu; x, x)$ ausdrücken, nach ϱ bei festem μ und läßt alsdann μ gegen 0 gehen, so findet man, daß *einmal* an den Sprungstellen ϱ_α von $\mathfrak{T}$ die Gleichungen (8) durch die

544) *E. Hellinger*[543]), § 9. Die Konvergenzabschätzungen beruhen auf (11) und kommen der Sache nach auf die Übertragung der bekannten elementaren Abschätzungen des log- und arc tg-Integrales in den Matrizenkalkül (Integration von Real- und Imaginärteil der „geometrischen Reihe“ des Matrizenkalküls) hinaus.

Koeffizienten jeder Zeile von $\mathfrak{T}(\varrho_\alpha + 0) - \mathfrak{T}(\varrho_\alpha - 0)$, also durch Größen konvergenter Quadratsumme, *andererseits* für Intervalle stetigen Wachstums von $\mathfrak{T}(\varrho)$ die Gleichungen (9) durch die Koeffizienten des von den Sprungstellen befreiten stetigen Bestandteils $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{T}$ erfüllt sind — und da $\mathfrak{T}$ nicht konstant ist, ist damit die Existenz des Spektrums gewährleistet und zugleich ein Verfahren zur prinzipiellen Konstruktion des Spektrums und der zugehörigen Lösungen gegeben; auch die Darstellungen (4), (6) können analog (12) gewonnen werden.

Eine wesentlich andere Methode zur Gewinnung der Hilbertschen Resultate hat *F. Riesz*[545]) angegeben. Er geht von der Bemerkung aus, daß man aus (6) durch Potenzentwicklung nach ν^{-1} die folgende Darstellung der iterierten Formen von $\mathfrak{K}$ erhält, wobei Summen- und Integralbestandteile mittels der unstetigen quadratischen Form $\mathfrak{T}(\varrho; x, x)$ zu einem *Stieltjes*schen Integral zusammengefaßt sind:

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}(x,x) = \int_{-M}^{+M} d\mathfrak{T}(\varrho; x, x) \\ \mathfrak{K}^{(n)}(x,x) = \int_{-M}^{+M} \varrho^n d\mathfrak{T}(\varrho; x, x) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Das sind aber gerade die Gleichungen des verallgemeinerten Momentenproblems der Gestalt (7) von Nr. 22, das *F. Riesz*[265]) selbst behandelt hatte — nur daß die gegebenen Größen von unendlichvielen Parametern $x_1, x_2, \ldots$ quadratisch abhängen; er zeigt, daß seine Lösbarkeitsbedingungen hier erfüllt sind und daß die Lösung $\mathfrak{T}$ eine beschränkte quadratische Form jener Parameter x_p wird.[546])

b) Das Orthogonalinvarianten-System. Während in (4) hinsichtlich des Punktspektrums bereits eine Normalform erreicht ist, die, falls kein Streckenspektrum vorhanden ist, in der Gesamtheit der ϱ_α das vollständige System der Orthogonalinvarianten einer quadratischen Form erkennen läßt, ist in (4) hinsichtlich des Streckenspektrums eine solche Normalform noch nicht enthalten. Jedoch hat

545) *F. Riesz*, Gött. Nachr. 1910, p. 190—195. Vgl. auch die Gesamtdarstellung der Theorie in *F. Riesz*, Literatur A 8, Chap. V.

546) In seinem Buch (Literatur A 8, Chap. V) gibt *F. Riesz* eine durch den Matrizenkalkül zusammengefaßte sehr durchsichtige Darstellung dieses Beweises; er kommt der Sache nach auf eine Übertragung der Approximation durch Polynome in den Matrizenkalkül hinaus. — Die Darstellung dieser Methode kann auch so ausgestaltet werden, daß $K(\nu; x, x)$ als analytische Funktion von ν durch ihre Potenzentwicklung nach ν^{-1} gegeben angesehen wird und für sie die Stieltjessche Integraldarstellung der Kettenbruchtheorie (vgl. Nr. 43 c) mittels der Lösung des Momentenproblems gegeben wird.

D. Hilbert[547]) bereits darauf hingewiesen, daß man entsprechend den bekannten Beispielen der Kettenbruchtheorie (s. Nr. **43** c) das einfachste Beispiel einer Spektralform durch den Ansatz für ihre Abschnitte

$$\mathfrak{S}_n(\varrho; x, x) = \int_m^\varrho \Big(\sum_{p=1}^n \omega_p(\varrho) x_p\Big)^2 d\varrho \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

erhält, wo die $\omega_p(\varrho)$ ein vollständiges und orthogonales Funktionensystem (Nr. **15** a) für das Intervall (m, M) bedeuten; die zugehörige quadratische Form ist gegeben durch

$$k_{pq} = \int_m^M \varrho\, \omega_p(\varrho) \omega_q(\varrho)\, d\varrho, \quad \mathfrak{K}_n(x, x) = \int_m^M \varrho \Big(\sum_{p=1}^n \omega_p(\varrho) x_p\Big)^2 d\varrho, \tag{14a}$$

hat das Intervall (m, M) zum „einfachen Spektrum", und alle mit verschiedenen Funktionensystemen so darstellbaren Formen mit demselben Spektrum sind orthogonal ineinander transformierbar.

Im Anschluß hieran hat *E. Hellinger*[548]) gezeigt, wie man jede Spektralform durch eine orthogonale Transformation in eine Summe abzählbar unendlichvieler einfacher Bestandteile zerspalten kann, die dem Typus nach analog (14) gebildete Integrale von Quadraten von Linearformen sind. Um diese Betrachtungen im Bereich der Funktionen beschränkter Schwankung durchführen zu können, stellt er eine Erweiterung des Stieltjesschen Integralbegriffes auf, in die Produkte und Quotienten von Differentialen eingehen[549]); mit Hilfe dieser Integrale kann durch orthogonale Transformation der Veränderlichen *jede beschränkte Form* $\mathfrak{K}(x, x)$, *die nur ein Streckenspektrum besitzt, in höchstens abzählbar unendlichviele Formen verschiedener Variablenreihen zerfällt werden,* von denen jede durch ein (14a) verallgemeinerndes Integral eines quadratischen Differentials darstellbar ist:

$$\mathfrak{K}(x, x) = \sum_{(\alpha)} \int_{-M}^{+M} \varrho \frac{\Big(d \sum_{p=1}^{\infty} \sigma_p^{(\alpha)}(\varrho)\, x_p^{(\alpha)}\Big)^2}{d\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)}; \tag{15}$$

---

547) *D. Hilbert*[531]), p. 153 ff.

548) *E. Hellinger,* Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variabelen. Dissertation, Göttingen 1907, 84 S. — Das Zerspaltungsverfahren insbes. in § 9, Satz III, das Kriterium für orthogonale Äquivalenz in § 11, Satz VIII, p. 80, in einem Spezialfall § 10, Satz VII, p. 74.

549) *E. Hellinger*[548]), Kap. II. Die Definitionen findet man in Encykl. II C 9 b (*Montel-Rosenthal*), Nr. **35** e. Wegen des Zusammenhangs mit Lebesgueschen Integralen vgl. *E. Hellinger*[548]), p. 7, 29; *H. Hahn*[552]), § 2; *E. W. Hobson,* London Math. Soc. Proc. (2) 18 (1920), p. 249—265. *H. Hahn*[552]) hat übrigens die Theorie der Orthogonalinvarianten unter Ersetzung der Hellingerschen Integrale durch Lebesguesche mit Benutzung der Theorie der Lebesgueschen Integrale erneut dargestellt.

die entsprechende Zerlegung gilt für die Spektralform. Dabei bedeuten für jeden Index α die $\sigma_p^{(\alpha)}(\varrho)$ Funktionen beschränkter Schwankung, die mit $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ den Orthogonalitätsrelationen (10) und obendrein der „Vollständigkeitsrelation“

$$\int_{-M}^{+M} \frac{\left(d\sum_{p=1}^{\infty}\sigma_p^{(\alpha)}(\varrho)\, x_p^{(\alpha)}\right)^2}{d\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)} = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^{(\alpha)2} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots) \tag{15a}$$

genügen; die Linearformen $\sum_{p=1}^{\infty}\sigma_p^{(\alpha)}(\varrho)\, x_p^{(\alpha)}$ heißen demgemäß ein *orthogonales und vollständiges System von Differentialformen mit der Basisfunktion* $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$.[550]) Jeder Summand von (15) besitzt die perfekte Menge der Punkte, in deren Umgebung $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ nicht konstant ist, zum *„einfachen Spektrum“*, und zwei Formen mit einfachem Spektrum sind *gewiß* dann orthogonal ineinander transformierbar, wenn ihre Basisfunktionen identisch sind.[551])

Auch (15) ist noch keine Normalform, insofern einerseits Formen mit verschiedenen Basisfunktionen und demselben einfachen Spektrum orthogonal äquivalent sein können, andererseits Teilintegrale der Summanden von (15) in Integrale der gleichen Gestalt transformiert und ebenso die Summanden unter Umständen anders zusammengefaßt werden können. Trotzdem läßt sich auf ihr, wie *E. Hellinger*[548]) gezeigt hat, ein *allgemeines notwendiges und hinreichendes Kriterium für die orthogonale Äquivalenz* zweier quadratischer Formen aufbauen. Es nimmt eine wesentlich einfachere Form an, wenn man mit *H. Hahn*[552]) den folgenden von diesem eingeführten Begriff heranzieht: Das *System der Basisfunktionen* $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ heißt *geordnet*, wenn für $\beta > \alpha$ in jedem Konstanzintervall von $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ auch $\sigma_0^{(\beta)}(\varrho)$ konstant ist, und wenn durch die Abbildung $\sigma^{(\alpha)} = \sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$, $\sigma^{(\beta)} = \sigma_0^{(\beta)}(\varrho)$ jeder Nullmenge der Variablen $\sigma^{(\alpha)}$ eine Nullmenge von $\sigma^{(\beta)}$ zugeordnet ist; jede Darstellung

550) Aus den $\sigma_p^{(\alpha)}(\varrho)$ entstehen durch die orthogonale Transformation, die die $x_p^{(\alpha)}$ in die x_p überführt, Lösungen der Gleichungen (9) und durch passende Kombination mit willkürlichen Funktionen von ϱ entstehen sämtliche Lösungen; vgl. *E. Hellinger*[548]), § 7, p. 256f. — Von der Definition der orthogonalen Differentialformen als Lösungen von (9) ausgehend, hat *E. Hellinger*[548]), Kap. II eine direkte von der Hilbertschen Theorie und der vorherigen Kenntnis der Spektralform $\mathfrak{S}$ unabhängige Herleitung der Zerspaltungsformel (15) gegeben. — Verallgemeinerungen dieses Theorems auf *symmetrisierbare* Formen bzw. auf Scharen symmetrischer Formen haben *A. J. Pell*[523]) und *J. Hyslop*[523]) gegeben (s. Nr. **41** b, 3).

551) *E. Hellinger*[548]), § 9, Satz IV.

552) *H. Hahn,* Monatsh. Math. Phys. 23 (1912), p. 161—224. Insbes. Nr. 35, p. 206ff. (geordnete Systeme), sowie Nr. 42, p. 216ff. (das Kriterium).

(15) kann man durch orthogonale Transformation in eine mit geordneten Basisfunktionen überführen, d. h. kurz gesagt, man kann in jeden Summanden von (15) möglichst viele Bestandteile auf Kosten der folgenden hineinziehen. *Zwei in der Gestalt* (15) *mit den geordneten Basisfunktionen* $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ *bzw.* $\tau_0^{(\alpha)}(\varrho)$ *dargestellte quadratische Formen sind nun dann und nur dann ineinander orthogonal transformierbar, wenn für jeden Index* α *in jedem Konstanzintervall von* $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ *auch* $\tau_0^{(\alpha)}(\varrho)$, *in jedem von* $\tau_0^{(\alpha)}(\varrho)$ *auch* $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ *konstant ist, und wenn weiterhin durch die Abbildung* $\sigma^{(\alpha)} = \sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$, $\tau^{(\alpha)} = \tau_0^{(\alpha)}(\varrho)$ *jeder Nullmenge in* $\sigma^{(\alpha)}$ *eine in* $\tau^{(\alpha)}$ *sowie jeder in* $\tau^{(\alpha)}$ *eine in* $\sigma^{(\alpha)}$ *zugeordnet wird*[553]) Haben die Formen außerdem noch ein Punktspektrum, so tritt weiterhin noch die Bedingung der Übereinstimmung der nach ihrer Vielfachheit (d. i. nach der Anzahl der in (4) mit ihnen multiplizierten Quadrate) gezählten Stellen des Punktspektrums hinzu.

c) Zusammenhang mit der Stieltjesschen Kettenbruchtheorie. Neben dem schon berührten[535])[546]) methodischen Zusammenhang der Theorie der quadratischen Formen mit der Theorie der Kettenbrüche, wie sie *T. J. Stieltjes*[259]) entwickelt hat, bleibt nun noch der sachliche Zusammenhang zur Geltung zu bringen. Er beruht auf der formalen Tatsache, daß die aus einer sog. *J-Form* (*Jacobischen Form*)

$$\mathfrak{J}(x, x) = \sum_{p=1}^{\infty} (a_p x_p^2 - 2 b_p x_p x_{p+1}) \qquad (b_p \neq 0) \tag{16}$$

mit dem Koeffizientensystem $\mathfrak{J} - \nu \mathfrak{E}$ gebildeten Gleichungssysteme durch Näherungsnenner und -zähler des Kettenbruches

$$u(\nu) = \frac{1 \mid}{\mid a_1 - \nu} - \frac{b_1^2 \mid}{\mid a_2 - \nu} - \frac{b_2^2 \mid}{\mid a_3 - \nu} - \cdots \tag{17}$$

befriedigt werden, sowie darauf, daß man für eine J-Form von endlichvielen Veränderlichen aus den Näherungsnennern des entsprechenden endlichen Kettenbruches die orthogonale Transformation auf eine Summe von Quadraten erhält.[553a]) Schon *E. Heine*[554]) hat im Anschluß

553) In den Anwendungen treten vorzugsweise solche Formen auf, bei denen jede Basisfunktion $\sigma_0^{(\alpha)} = \sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ jeder Nullmenge der ϱ-Achse eine Nullmenge in $\sigma_0^{(\alpha)}$ zuordnet (darunter speziell diejenigen, bei denen die $\sigma_0^{(\alpha)}(\varrho)$ stetig differenzierbar sind oder wenigstens einen beschränkten Differenzenquotienten haben); bei ihnen kann man stets zu Basisfunktionen übergehen, die Maßfunktionen meßbarer Mengen der ϱ-Achse sind, und die Äquivalenzbedingung reduziert sich auf die Übereinstimmung gewisser bis auf Nullmengen bestimmter meßbarer Mengen der ϱ-Achse (s. *E. Hellinger*[548]), § 10).

553a) *C. G. J. Jacobi,* Monatsber. Akad. Berlin 1848, p. 414—417 = J. f. Math. 39 (1848), p. 290—292 = Ges. Werke VI, p. 318—321; *L. Kronecker,* Monatsber. Akad. Berlin 1878, p. 95—121 = Werke II, p. 37—70; *E. Heine*[554]), p. 480 ff.

554) *E. Heine,* Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. I, 2. Aufl. (Berlin 1878), p. 420—432.

daran darauf hingewiesen, daß für gewisse unendliche J-Formen der unendliche Kettenbruch (17) formal ebenfalls die orthogonale Transformation auf eine Quadratsumme liefert.

1. Für eine *beschränkte J-Form*, die durch die Bedingungen $|a_p| \leqq M$, $|b_p| \leqq M$ charakterisiert ist, gelten folgende Tatsachen[555]: Die Bildung der Reziproken $\mathsf{K}(\nu; x, x)$ von $\mathfrak{J}(x, x) - \nu\mathfrak{E}(x, x)$ analog bekannten Formeln der Kettenbruchtheorie liefert als ersten Koeffizienten $\varkappa_{11}(\nu)$ gerade den Kettenbruch $u(\nu)$, während alle $\varkappa_{pq}(\nu)$ ganze lineare Funktionen von $u(\nu)$ mit Polynomen in ν als Koeffizienten sind. $\mathfrak{J}(x, x)$ hat ein *einfaches Streckenspektrum* und ein *einfaches Punktspektrum*, dessen Stellen möglicherweise in das Streckenspektrum fallen können; die Lösungen der homogenen Gleichungen (8) für das Punkt- und (9′) für das Streckenspektrum (vgl. [542]) werden durch die Kettenbruchnenner $\pi_p(\nu)$ geliefert, die Polynome $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades in ν sind. Das Verfahren von Nr. **43** a, 4 zur Gewinnung des Spektrums für diese spezielle Form $\mathfrak{J}(x, x)$ liefert in seiner Anwendung auf $\varkappa_{11}(\nu) = u(\nu)$ eine nicht abnehmende Funktion $\sigma(\varrho)$ und durch sie die *Stieltjessche Integraldarstellung für den Kettenbruch* (17):

$$(18) \qquad u(\nu) = \int_{-M}^{+M} \frac{d\sigma(\varrho)}{\varrho - \nu};$$

ferner gelten die Beziehungen

$$(19\text{a}) \qquad \int_{-M}^{+M} \pi_p(\varrho)\,\pi_q(\varrho)\,d\sigma(\varrho) = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q), \end{cases}$$

$$(19\text{b}) \qquad \int_{-M}^{+M} \varrho\,\pi_p(\varrho)\,\pi_q(\varrho)\,d\sigma(\varrho) = \begin{cases} 0 & (|p-q| > 1) \\ -b_p & (|p-q| = 1) \\ a_p & (p = q). \end{cases}$$

Die Sprungstellen von $\sigma(\varrho)$ geben das Punktspektrum, der von den Sprüngen befreite stetige Bestandteil Streckenspektrum und Basisfunktion.

2. Die Beziehung der J-Formen und damit der Kettenbrüche zur Theorie *beliebiger* beschränkter Formen wird durch den Satz von *O. Toeplitz*[556]) hergestellt, daß jede beschränkte quadratische Form durch eine orthogonale Transformation in eine *Summe höchstens abzählbar unendlichvieler J-Formen verschiedener Variablenreihen* übergeführt werden kann. Diese Zerspaltung ist aber mit der in Nr. **43** b

555) *O. Toeplitz*, Gött. Nachr. 1910, p. 489—506, Nr. 3; *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, J. f. Math. 144 (1914), p. 212—238, 318, § 1.

556) *O. Toeplitz*[555]), Nr. 2; der Beweis benutzt die Spektrumstheorien von Nr. **43** a), b) nicht.

gegebenen im wesentlichen identisch; denn, wie *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*[557]) bewiesen haben, kann jede beschränkte quadratische Form $\mathfrak{K}$ *mit einfachem Streckenspektrum und einfachem möglicherweise auch das Streckenspektrum überlagerndem Punktspektrum orthogonal in eine J-Form transformiert* werden; und zwar gibt es unendlichviele solche J-Formen, die allen möglichen an den Stellen des Punktspektrums passend ergänzten Basisfunktionen von $\mathfrak{K}$ eineindeutig zugeordnet sind.

3. Die Anwendung der *Hilbert*schen Theorie auf die J-Formen liefert insofern nicht genau die *Stieltjes*sche Theorie der Kettenbrüche, als diese der Sache nach sich nicht auf *beschränkte* Formen $\mathfrak{J}(x, x)$ bezieht, sondern auf solche — beschränkte oder unbeschränkte —, deren Abschnitte $\mathfrak{J}_n(x, x)$ sämtlich *definit* sind[558]); sie führt daher auf Integraldarstellungen der Gestalt (18), die über die positive ϱ-Halbachse erstreckt sind ($0 \leqq \varrho < +\infty$). Im Grunde sind beide Fälle nicht wesentlich voneinander verschieden; bei beiden existiert der Kettenbruch bzw. die Reziproke von $\mathfrak{J} - \nu\mathfrak{E}$ nicht nur als analytische Funktion von ν in der oberen und unteren Halbebene für sich, sondern die beiden Zweige sind längs eines unmittelbar angebbaren Teiles der reellen Achse — nämlich außerhalb des Integrationsintervalles von (18) — analytisch ineinander fortsetzbar. Diesen Zusammenhang hat von Seiten der Kettenbruchtheorie *J. Grommer*[559]) näher untersucht.

Darüber hinaus aber hat *J. Grommer*[559]) mit seiner Methode, einer Anwendung des Hilbertschen Auswahlverfahrens, als erster Resultate auch für den *allgemeinen Fall beliebiger reeller Koeffizienten* a_p, b_p von (16), (17) gewonnen, in dem die Nullstellen $\varrho_\alpha^{(n)}$ der Determinanten von $\mathfrak{J}_n - \varrho\mathfrak{E}_n$ (vgl. die Bemerkung zu (7)) möglicherweise kein Intervall der reellen ϱ-Achse mehr frei lassen und also die Zweige von

557) *Hellinger-Toeplitz*[555]), § 2, 3. Der Beweis beruht auf der Konstruktion eines (19 a) genügenden Polynomsystems durch Orthogonalisieren der Potenzen ϱ^p und Verwendung des Systems von Differentialformen $\int_{-M}^{\varrho} \pi_p(\varrho)\, d\sigma(\varrho)$ mit der Basis $\sigma(\varrho)$.

558) Bei *Stieltjes*[259]) selbst sind diese Bedingungen etwas anders ausgesprochen, da er in der Hauptsache die Kettenbruchform $\frac{1|}{|c_1\nu} + \frac{1|}{|c_2} + \frac{1|}{|c_3\nu} + \cdots$ behandelt; hier lauten sie einfach $c_n > 0$.

559) *J. Grommer*, J. f. Math. 144 (1914), p. 114—166 = Dissert. Göttingen; er studiert anläßlich der Behandlung eines funktionentheoretischen Problemes J-Formen, von denen im Lauf der Untersuchung zu zeigen ist, daß sie beiden Bedingungen genügen.

$u(\nu)$ bzw. $\mathsf{K}(\nu; x, x)$ in der oberen und unteren Halbebene nicht mehr notwendig analytisch ineinander fortsetzbar sind; er erhält so Darstellungen durch *über die ganze reelle Achse erstreckte Integrale* (18). Gelegentlich seiner Untersuchungen über das verallgemeinerte Stieltjessche Momentenproblem (Nr. 22 d) hat *H. Hamburger*[560]) diese Grommerschen Resultate wesentlich ausgebaut, und er hat insbesondere für den Fall, daß das Momentenproblem eine im wesentlichen *eindeutig* bestimmte Lösung besitzt, eine *eindeutig bestimmte von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *erstreckte Integraldarstellung* (18) *für den Kettenbruch* gegeben; er hat ferner gezeigt, daß dieser Fall gerade dann eintritt, wenn der Kettenbruch *„vollständig konvergiert“*, d. h. wenn die mit einem nichtreellen ν gebildeten modifizierten Näherungsbrüche

$$(20) \qquad \frac{1}{|a_1-\nu} - \frac{b_1^2}{|a_2-\nu} - \cdots - \frac{b_{n-1}^2}{|a_n-\nu-hb_n}$$

für alle reellen Zahlen h einen und denselben Grenzwert haben; damit ist zugleich eine Aussage über die *Spektraldarstellung der nichtbeschränkten J-Formen* gewonnen.[560a]) *E. Hellinger*[561]) hat dieses Problem, ausgehend von der Untersuchung der zu $\mathfrak{J}-\nu\mathfrak{E}$ gehörigen Gleichungen, analog seiner in Nr. 43 a, 4 geschilderten Methode behandelt; an Stelle der Konstruktion der Reziproken durch die Hilbsche Reihe tritt dabei die Untersuchung der durch eine „Randbedingung“ ergänzten inhomogenen Gleichungen

$$(20\text{a}) \qquad \begin{cases} (a_1-\nu)x_1 - b_1x_2 = 1 \\ -b_{p-1}x_{p-1} + (a_p-\nu)x_p - b_px_{p+1} = 0 \qquad (p=2,\ldots,n) \\ x_{p+1} - hx_p = 0, \end{cases}$$

deren Lösnng x_1 durch (20) gegeben wird, in ihrer Abhängigkeit von h und n bei nichtreellem ν. Vollständige Konvergenz liegt vor, wenn die zu $\mathfrak{J}-\nu\mathfrak{E}$ gehörigen homogenen Gleichungen für ein (und damit

560) *H. Hamburger*[260]), insbes. Math. Ann. 81, Satz XIV, p. 292. Vgl. auch die anderen in Nr. 22 d dazu zitierten Arbeiten.

560a) Gewisse umfassendere Klassen nichtbeschränkter quadratischer Formen sind von *T. Carleman*[575]), insbes. p. 185—188 im Rahmen seiner Untersuchungen über nichtbeschränkte Integralgleichungen (Nr. 44 c) zugleich mit behandelt worden. Man vgl. hierzu auch die Darstellung der Kettenbruchtheorie und des Momentenproblems bei *T. Carleman*[575]), p. 189—220.

561) *E. Hellinger,* Math. Ann. 86 (1922), p. 18—29. — Die Behandlung der Gleichungen (20a) ist analog der Behandlung von Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordn. für ein unendliches Intervall als Grenzfall einer Randwertaufgabe für wachsendes endliches Intervall; vgl. dazu *H. Weyl,* Math. Ann. 68 (1910), p. 220—269, insbes. p. 225 ff. und *E. Hilb,* ibid. 76 (1915), p. 333—339.

für jedes) nichtreelle ν keine nicht identisch verschwindende Lösung von absolut konvergenter Quadratsumme besitzen.

d) Besondere quadratische und bilineare Formen.

O. Toeplitz[562]) hat unter der Bezeichnung *reguläre L-Formen* bilineare oder quadratische Formen des Typus

$$\mathfrak{L}(x, y) = \sum_{p, q = -\infty}^{\infty} c_{q-p} x_p y_q \tag{21}$$

untersucht, wo die c_{q-p} die (reellen oder komplexen) Koeffizienten einer *Laurent*schen Reihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n \tag{21 a}$$

sind, deren Konvergenzring den Einheitskreis $|z| = 1$ enthält. Eine reguläre L-Form ist stets beschränkt; Summe und Produkt im Sinne des Matrizenkalküls (Nr. **18** a, 5) sind wieder reguläre L-Formen, die zur Summe bzw. dem Produkt der entsprechenden Laurentschen Reihen gehören. $\mathfrak{L}(x, y)$ hat dann und nur dann eine beschränkte Reziproke, wenn $f(z) \neq 0$ für $|z| = 1$, und die Reziproke ist die zu $(f(z))^{-1}$ gehörige L-Form. Die zu $f(z) - \nu$ gehörige L-Form $\mathfrak{L}(x, y) - \nu \mathfrak{E}(x, y)$ hat also eine beschränkte Reziproke, wenn $f(z) \neq \nu$ für $|z| = 1$; die Gesamtheit der Werte ν, die $f(z)$ für $|z| = 1$ annimmt, ist daher in sinngemäßer Übertragung der Definitionen von Nr. **43** a als *Spektrum von* $\mathfrak{L}$ zu bezeichnen.

Ist $c_n = c_{-n}$ und sind alle c_n reell, also $\mathfrak{L}(x, x)$ *eine reelle quadratische Form,* so ist $f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^n + z^{-n})$ für $|z| = 1$ reell und das *Spektrum von* $\mathfrak{L}(x, x)$ *genau im Sinne von* Nr. **43** a *ist durch die Gesamtheit der reellen Werte* von

$$\varrho = f(e^{i\sigma}) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\sigma \qquad (0 \leqq \sigma \leqq 2\pi) \tag{22}$$

gegeben. Die Cauchysche Integraldarstellung der Koeffizienten von (21 a) bzw. die Fouriersche derer von (22) gibt unmittelbar nicht nur die Hilbertsche Integraldarstellung von $\mathfrak{L}(x, x)$, sondern auch die *Zerspaltung des Spcktrums in einfach zählende Bestandteile;* denn sie liefert

$$c_{q-p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(e^{i\sigma}) \{\cos p\sigma \cos q\sigma + \sin p\sigma \sin q\sigma\} d\sigma \tag{22 a}$$

562) *O. Toeplitz,* Gött. Nachr. 1907, p. 110—115 und Math. Ann. 70 (1911), p. 351—376. — Daß hier der Index der Variablen von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, kommt gegenüber den vorher gegebenen Erklärungen nur auf eine unwesentliche Umordnung der Variablen hinaus; vgl. Math. Ann. 70, p. 354, Fußn.

und der Vergleich mit (15) nach Einführung von $\varrho = f(e^{i\sigma})$ als Integrationsveränderlicher ergibt: *Das Spektrum von* $\mathfrak{L}(x, x)$ *besteht aus den Intervallen der reellen* ϱ*-Achse, auf die* (22) *den Einheitskreis abbildet, jedes Teilintervall mit der Vielfachheit gerechnet, in der es durch die Abbildung geliefert wird;* die Basisfunktionen sind die Inversen $\sigma(\varrho)$ der Funktionen (22) in ihren Monotonitätsintervallen, die zugehörigen orthogonalen Differentialformen haben die Koeffizienten $\cos p\sigma(\varrho)\,d\sigma(\varrho)$ und $\sin p\sigma(\varrho)\,d\sigma(\varrho)$.

Nach (22), (22a) kann man auch zu jeder nur als Funktion der reellen Veränderlichen σ im Intervall $(0, \pi)$ gegebenen stetigen oder abteilungsweise stetigen Funktion $\varphi(\sigma)$ eine L-Form bilden. *O. Toeplitz* hat gezeigt, daß auch diese beschränkt ist, wenn $\varphi(\sigma)$ beschränkt ist und daß ihr Spektrum aus dem Wertvorrat von $\varphi(\sigma)$ besteht.[563])

Für nichtsymmetrische L-Formen hat *O. Toeplitz*[562]) das Problem der *Ähnlichkeit* in Angriff genommen (vgl. Nr. **41**, (3)), d. h. die Frage, wann es zu $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Matrix $\mathfrak{U}$ mit beschränkter Reziproken gibt, so daß $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{L}\mathfrak{U} = \mathfrak{M}$ ist; notwendige Bedingung ist die Übereinstimmung der Spektren.

Verallgemeinerungen der L-Formen haben *M. Born* und *Th. v. Kármán*[564]) gelegentlich physikalischer Anwendungen verwendet; sie entstehen, wenn man als Veränderliche n Reihen von mit je n Indizes versehenen Größen annimmt und eine quadratische Form von ihnen bildet, deren Koeffizienten nur von den Differenzen entsprechender Indizes der auftretenden Veränderlichen abhängen — für $n = 2$ also

$$\sum_{p,q,\alpha,\beta=-\infty}^{+\infty} \{c^{(1)}_{p-\alpha,q-\beta} x_{pq} x_{\alpha\beta} + c^{(2)}_{p-\alpha,q-\beta} x_{pq} y_{\alpha\beta} + c^{(3)}_{p-\alpha,q-\beta} y_{pq} y_{\alpha\beta}\}.$$

44. Eigentlich singuläre Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern. Wird der reelle symmetrische Kern einer Integralgleichung 2. Art so stark singulär, daß die Sätze der Eigenwert-

563) *O. Toeplitz*[555]), Nr. 4; diese (nichtregulären) L-Formen können also auch ein aus Punkten oder getrennten Stücken bestehendes Spektrum haben. Weiterhin stellt *Toeplitz* [[555]), Nr. 5; Math. Ann. 70[562]), § 3, 5] Determinantenkriterien dafür auf, daß $\varphi(\sigma)$ durchweg nicht negativ ist, sowie allgemeiner solche für die Gesamtlänge der Intervalle, in denen $\varphi(\sigma) \geq 0$. Wegen der Beziehungen dieser Sätze zu *C. Carathéodorys* Untersuchungen über Potenzreihen mit positivem reellen Teil vgl. *O. Toeplitz,* Palermo Rend. 32 (1911), p. 191—192 sowie *F. Riesz,* Literatur A 8, p. 178 ff.

564) *M. Born* und *Th. v. Kármán*, Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 297—309; 14 (1913), p. 15—19, 65—71; *M. Born,* Ann. d. Phys. (4) 44 (1914), p. 605—642. — Über die weitere Literatur und die zahlreichen in der Theorie der Kristallgitter betrachteten Formen dieser und verwandter Arten vgl. Encykl. V 25, *M. Born,* insbes. Nr. **18, 19**.

theorie (Nr. 30—35) nicht mehr gelten, so heiße sie im Gegensatz zu den in Nr. **36**a behandelten uneigentlich singulären Integralgleichungen *eigentlich singulär* (vgl. Nr. 21 für die Auflösungstheorie); alsdann kann unter passenden Voraussetzungen durch Übertragung der Resultate von Nr. **43** eine modifizierte Eigenwerttheorie hergeleitet werden, die neben die diskontinuierlich verteilten Eigenwerte ein *Kontinuum von Ausnahmestellen,* neben die Reihenentwicklungen *Integraldarstellungen* treten läßt (vgl. [531]), Ende).

a) Beschränkte Kerne. Nachdem *E. Hilb*[565]) und etwa gleichzeitig *H. Weyl*[566]) im Anschluß an *D. Hilberts* 4. Mitteil.[531]) gewisse besondere Klassen eigentlich singulärer Integralgleichungen nach verschiedenen, auch allgemeinerer Anwendung fähigen Methoden behandelt hatten, hat *H. Weyl*[567]) die vollständige Übertragung der *Hilbert*schen und *Hellinger*schen Sätze (Nr. **43**a, b) auf Integralgleichungen im einzelnen durchgeführt. Er bezeichnet als *symmetrische beschränkte Kerne* $k(s, t)$, solche, die im Definitionsquadrat $a \leqq s,\ t \leqq b$ mit Ausnahme endlichvieler Punkte und endlichvieler monotoner stetiger Kurvenstücke stetig sind, für die ferner $\int_a^b k(s, t)^2 dt = (k(s))^2$ mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlichvieler, höchstens eine Häufungsstelle besitzender Stellen existiert und eine sonst überall stetige Funktion darstellt, und für die endlich das Doppelintegral

$$(1) \qquad \left| \int_a^b \int_a^b k(s, t)\, u(s)\, u(t)\, ds\, dt \right| \leqq M$$

ist für alle Funktionen $u(s)$, für welche

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad \int_a^b u(s)^2 ds \leqq 1 \quad \text{und} \quad \int_a^b |k(s)\, u(s)|\, ds$$

konvergiert. *Weyl* führt nun das Hilbertsche Übergangsverfahren von

565) *E. Hilb,* Math. Ann. 66 (1908), p. 1—66 = Habil.-Schrift Erlangen; die von ihm behandelten Integralgleichungen gehören zu Randwertaufgaben von Differentialgleichungen 2. Ordn. für an singuläre Stellen heranreichende Intervalle und werden durch Grenzübergang aus den bekannten Sätzen über approximierende reguläre Intervalle behandelt.

566) *H. Weyl*, Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems, Dissertation Göttingen 1908, 86 S., insbes. 2. Abschn.; behandelt werden Kerne, die den Hilbertschen Beispielen Nr. **43**, (14a) für Formen mit einfachem Spektrum entsprechen.

567) *H. Weyl,* Math. Ann. 66 (1908), p. 273—324. In der Form weicht die Darstellung des Textes insofern unwesentlich von Weyl ab, als ein endliches Integrationsintervall (a, b) statt des unendlichen $(0, \infty)$ verwendet wird.

Integralgleichungen zu Formen unendlichvieler Veränderlichen (s. Nr. **15** und **40** e) für den vorliegenden Fall durch, indem er ein „passendes" vollständiges Orthogonalsystem konstruiert, bei dessen Anwendung die beim Übergang durchzuführenden Integrations- und Summationsprozesse konvergieren. Die quadratische Integralform (1) wird dann in eine *beschränkte* quadratische Form der Fourierkoeffizienten von $u(s)$ transformiert, und die Sätze von Nr. **43** a, b ergeben insbesondere folgende Resultate:

1. Die homogene Integralgleichung

$$\varphi_\alpha(s) - \lambda_\alpha \int_a^b k(s,t)\,\varphi_\alpha(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

hat für höchstens abzählbar unendlichviele (aber möglicherweise auch im Endlichen sich häufende) reelle Stellen λ_α, die Stellen des *Punktspektrums*[568]) von $k(s,t)$, eine samt ihrem Quadrat integrierbare Lösung.

2. Charakteristisch dafür, daß ein reelles λ-Intervall Δ dem *Streckenspektrum*[568]) von $k(s,t)$ angehört, ist die Existens einer Funktion $\Phi(s,\lambda)$, die als Funktion von λ in keinem Teilintervall von Δ identisch für alle s $(a \leqq s \leqq b)$ konstant ist, die ferner für alle λ in Δ die Gleichung

$$\Phi(s,\lambda) - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda\, d_\lambda \int_a^b k(s,t)\,\Phi(t,\lambda)\,dt = 0 \tag{3}$$

erfüllt, und die endlich ein konvergentes und in λ stetiges Quadratintegral

$$\int_a^b (\Phi(s,\lambda))^2\,ds = \sigma_0(\lambda) \tag{3a}$$

besitzt; die Differentiale $d_\lambda \Phi(s,\lambda)$ können symbolisch als „Differentiallösungen" der Gleichungen (2) bezeichnet werden. Man kann ein vollständiges System höchstens abzählbar vieler solcher Lösungen $\Phi^{(\alpha)}(s,\lambda)$ mit den durch (3a) zugeordneten „Basisfunktionen" $\sigma_0^{(\alpha)}(\lambda)$ angeben, die das gesamte Streckenspektrum charakterisieren.[569])

3. Jeder nicht identisch verschwindende reelle symmetrische Kern besitzt mindestens Punkt- oder Streckenspektrum. Ist für eine beliebige quadratisch integrierbare Funktion $g(t)$

$$f(s) = \int_a^b k(s,t)\,g(t)\,dt, \tag{4a}$$

568) Die Zahlenwerte des Punkt- und Streckenspektrums sind hier die reziproken der bei der quadratischen Form entsprechend bezeichneten — gemäß der in der Theorie der Integralgleichungen üblichen Bezeichnungsweise [vgl. [534])].

569) *P. Nalli*, Palermo Rend. 46 (1922), p. 49—90 hat dies von Integralen auf allgemeine lineare symmetrische Funktionaloperationen übertragen.

so ist mit Hilfe des vollständigen Systems der Lösungen von (2) und (3) die Entwicklung möglich,

$$(4)\quad f(s) = \sum_{(\alpha)} \left\{ \varphi_\alpha(s) \int_a^b f(t)\varphi_\alpha(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\lambda \Phi^{(\alpha)}(s,\lambda)\, d_\lambda \int_a^b \Phi^{(\alpha)}(t,\lambda) f(t)\,dt}{d\sigma_0^{(\alpha)}(\lambda)} \right\}.$$

In dieser Formel liegt eine weitgehende Verallgemeinerung der Form des Fourierschen Integraltheorems vor. Hat speziell $k(s,t)$ nur ein einfaches Streckenspektrum $\mathfrak{M}$, ist ferner $|\sigma_0(\lambda)|$ gleich dem linearen Inhalt des zwischen 0 und λ gelegenen Spektrums, und hat endlich $\Phi(s,\lambda)$ die stetige Ableitung $\varphi(s,\lambda)$ nach λ, so vereinfacht sich (4) in

$$(4')\quad f(s) = \int_{(\mathfrak{M})} \varphi(s,\lambda) \int_a^b \varphi(t,\lambda) f(t)\,dt\,d\lambda,$$

wofern das innere Integral gleichmäßig in der Umgebung jeder Stelle λ des Spektrums $\mathfrak{M}$ konvergiert.[570])

An Stelle des Hilbertschen Verfahrens kann auch hier der *Fischer-Riesz*sche Satz wie in Nr. 15d den Übergang zu den beschränkten quadratischen Formen vermitteln.[571])

Endlich sei bemerkt, daß die gleichen Erscheinungen des Streckenspektrums auch bei den von *P. Nalli*[572]) mehrfach behandelten Integralgleichungen der Form

$$\varphi(s) - \lambda \left\{ k(s)\varphi(s) + \int_a^b k(s,t)\varphi(t)\,dt \right\} = 0$$

mit *stetigem* $k(s)$ und $k(s,t)$ auftreten, da hier das Integral zwar einer vollstetigen, der ganze Faktor von λ aber einer durch Addition einer Diagonalform daraus entstehenden beschränkten quadratischen Form entspricht.

b) Besondere beschränkte Kerne sind in erster Linie bei Anwendungen auf singuläre Randwertaufgaben mehrfach behandelt

570) *H. Weyl*[567]), p. 300f. sowie [566]). Weiteres über diesen Sonderfall bei *M. Plancherel,* Palermo Rend. 30 (1910), p. 289—335; *J. Hyslop*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 22 (1924), p. 169—185 behandelt ihn entsprechend der Darstellung von *H. Hahn*[549]) mit Lebesgueschen Integralen.

571) *M. Plancherel,* Riv. fis. mat. 10 (1909), p. 37—53 [insbes. für den Fall von [570])] sowie Math. Ann. 67 (1909), p. 515—518 [auch für nicht beschränkte Kerne wie in [212])].

572) *P. Nalli*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 27_2 (1918), p. 118—123, 159—163, 192—196, 260—263, 316—322; 28_1 (1919), p. 200—204; Ann. di Mat. (3) 28 (1919), p. 235—261; Palermo Rend. 43 (1919), p. 105—124.

worden.[573]) Weiterhin haben verschiedene Autoren Integralgleichungen für ein unendliches Intervall mit Kernen, die sich aus Exponentialfunktionen zusammensetzen, in ihrem Zusammenhang mit Fourierschen und anderen Reihen- und Integraldarstellungen untersucht.[574])

c) Nichtbeschränkte Kerne hat in systematischer Weise *T. Carleman*[575]) nach Methoden behandelt, die den in Nr. **43** c, 3 besprochenen prinzipiell parallel laufen; seine Voraussetzungen über die zugelassenen Kerne kommen im wesentlichen darauf hinaus, daß für jedes $\delta > 0$ aus (a, b) endlichviele Intervalle der Länge δ so herausgehoben werden können, daß das wie in a) definierte $k(s)$ in dem Rest quadratisch integrierbar ist. Er approximiert $k(s, t)$ durch einen regulären Kern und erhält durch ein Auswahlverfahren eine (im allgemeinen nicht eindeutig bestimmte) Spektraldarstellung durch Integrale. In besonderen Fällen (entsprechend dem Fall der Bestimmtheit beim Momentenproblem) ergibt sich auch eine eindeutig bestimmte Integraldarstellung; insbesondere ist das dann der Fall, wenn die homogene Integralgleichung für ein (und damit für jedes) nichtreelle λ keine nicht identisch verschwindende Lösung mit absolut integrierbarem Quadrat besitzt.

45. Der allgemeine Standpunkt der Funktionaloperationen.

a) Die Algebra der Funktionaloperationen zeigt ihre stärkste Wirkung in der Elementarteilertheorie. Die Darstellung und Gruppierung von Nr. 39 (vgl. insbes. [491])) ist entsprechend der von *S. Pincherle* ausgehenden Ideenrichtung so angelegt, daß der allgemeine formale Gedanke, insbesondere die Betonung der invarianten Systeme, unmittelbar hervortritt.

b) Der formal-abstrakte Standpunkt (general analysis). Das in Nr. **24** c über *E. H. Moore* und seine Schüler Gesagte überträgt sich unmittelbar auf die Eigenwerttheorie. Die Gesamtheit $\mathfrak{M}$

---

573) Von diesen Untersuchungen seien hier nur die selbständige Methoden enthaltenden Arbeiten erwähnt: *E. Hilb*[565]) sowie Erlanger Ber. 43 (1911), p. 68—71; Math. Ann. 76 (1915), p. 333—339 und *H. Weyl,* Gött. Nachr. 1909, p. 37—63; 1910, p. 442—467; Math. Ann. 68 (1910), p. 220—269.

574) *H. Weyl*[566]), Abschn. 3; [567]), Teil 2; *G. H. Hardy*, London Math. Soc. Proc. (2) 7 (1909), p. 445—472; *E. Picard*, Paris C. R. 151 (1910), p. 606—610; 152 (1911), p. 61—63; Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 313—324; *J. Droste,* Amsterd. Akad. Wet. Versl. 20_1 (1911), p. 396—399; *F. S. Zarlatti,* Paris C. R. 157 (1913), p. 198—201; Battagl. Giorn. 52 (1914), p. 187—203; *E. Goursat,* Paris C. R. 157 (1913), p. 843—846; *J. Hyslop*[570]).

575) *T. Carleman,* Paris C. R. 171 (1920), p. 383—386; Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala univers. årsskrift, 1923, 228 S.

der betrachteten Stellen (Funktionen) $x(s)$ muß hier außer den Eigenschaften L, C, D, D_0 noch die Realitätseigenschaft R haben, die Operation J außer L, M noch die Eigenschaften P, P_0, H, die alle schon in Nr. **24** c formuliert waren; alsdann gelten die Schlüsse von *E. Schmidt*s Eigenwerttheorie[41]) (vgl. Nr. **30**—**34**).

Der bedingte Nutzen dieses Ergebnisses ist hier noch klarer festzustellen als in Nr. **24** c. Denn hier bei den reellen symmetrischen Kernen und den reellen quadratischen Formen liegen die axiomatischen Verhältnisse weit einfacher als in der Auflösungstheorie. Wenn in $\sum k_{pq} x_p y_q$ die $y_p = x_p$ gesetzt werden, so daß eine quadratische Form daraus wird, fallen die Möglichkeiten allgemeinerer Konvergenzbedingungen (vgl. Nr. **20** d) fort: die beiden zueinander dualen Aichkörper D und $\varDelta$ können nämlich offenbar nur dann miteinander identisch sein, wenn sie beide in die Einheitskugel übergehen; der Hilbertsche Raum ist also der einzige, der für die Eigenwerttheorie reeller, symmetrischer Formen in Betracht kommt. Und hier ist nun der Unterschied von Tatsachen und Methoden evident: die äußersten *Tatsachen*, die hier gelten, sind die in Nr. **40** geschilderten der vollstetigen quadratischen Formen; die Vollstetigkeit erscheint als das notwendige und hinreichende Axiom für die Gültigkeit dieser Tatsachen. Die *Methode* von Nr. **33** a dagegen ist an das Vorhandensein der Spuren

$$\int_a^b k^{(n)}(s,s)\,ds$$ wenigstens von einer bestimmten an gebunden, ohne diese gar nicht ansetzbar und kann also nie die Tatsachen in ihrem vollen Wirkungsbereich liefern. Keine „Generalisation" dieser Methode, die an ihrem Grundgerüst festhält, kann also daran etwas ändern.

Anders ist der Sachverhalt in der Elementarteilertheorie. Hier sind in Wahrheit weder Methode noch Tatsache vorhanden, die einen ähnlichen Anspruch wie die der Eigenwerttheorie erheben könnten. Für die Schule von *E. H. Moore* fehlte darum hier jeder Ansatzpunkt. Für den Standpunkt von Nr. **20** d, der nach Aufhebung der Symmetrieforderung wieder in sein volles Recht tritt, bleibt wenigstens der Ansatzpunkt offen, wie er am Ende von Nr. **41** und von Nr. **42** näher gekennzeichnet worden ist.

c) Die methodische Auswirkung der Theorie. Die Grenzen, die den in der Integralgleichungslehre enthaltenen Methoden gezogen sind, sind soeben und am Ende von Nr. **24** c genau aufgewiesen worden; zugleich hat sich ergeben, daß die Bereitschaft, den Funktionenraum je nach den vorliegenden Problemen abzustecken, wesentlich ist, um die vorhandenen Methoden fruchtbar zu erhalten. Eine

Reihe von neueren Untersuchungen scheint die Richtung anzudeuten, in der eine solche Fortwirkung der Theorie zu erhoffen ist.

Die Arbeiten von *W. Ritz*[576]) mit ihrem ausgesprochenen numerischen Erfolge zeigen das Muster eines Operierens mit dem algebraischen Gehalt der Integralgleichungstheorie ohne das Substrat derselben, d. h. ohne daß die Differentialgleichungen, die zu lösen sind, erst in Integralgleichungen umgeformt werden. Einige Arbeiten von *L. Lichtenstein*[577]) haben diesen Weg mit etwas veränderten Mitteln und mehr theoretischer Zielsetzung fortgesetzt; hier wird direkt vom Randwertproblem ohne den klassischen Umweg über die Integralgleichungen zu einem Problem der unendlichvielen Veränderlichen übergegangen, wobei das Koordinatensystem (d. h. das Orthogonalsystem, nach dem entwickelt wird) dem Problem angepaßt wird. *R. Courant*[578]) hat gezeigt, wie man seine Weiterbildung der *Hilbert*schen Methode des Dirichletschen Prinzips (vgl. Nr. **32** d) und das an den Integralgleichungen erprobte Operieren mit Funktionenfolgen (vgl. etwa Nr. **33** d, Ende) nicht nur zu Existenzbeweisen, sondern auch zu einer vollständigen Durchführung von Randwertaufgaben der verschiedensten Art anwenden kann, ohne den Übergang zu einem der Aufgabe fremden Gebiet (Integralgleichungen oder unendlichviele Unbekannte) zwischenzuschalten.

---

576) *W. Ritz*[123]), vgl. *M. Plancherel,* Paris C. R. 169 (1919), p. 1152—1155; Darb. Bull. (2) 47 (1923), p. 376—383, 397—412; (2) 48 (1924), p. 12—48, 58—80, 93—109.

577) *L. Lichtenstein*[124]) sowie Paris C. R. 157 (1913), p. 629—632, 1508—1511; J. f. Math. 145 (1914), p. 24—85; Prace mat.-fis. 26 (1914), p. 219—262; [363]); Acta math. 40 (1915), p. 1—34; Math. Ztschr. 3 (1919), p. 127—160; Rospr. Wydz. mat.-fis., Polst. Akad. Umsej 59 A (1919), p. 79—89; *H. Geiringer,* Math. Ztschr. 12 (1922), p. 1—17.

578) *R. Courant*[363])[375a])[403])[422])[423a])[444]), Gött. Nachr. 1923, p. 81—84 sowie *Courant-Hilbert,* Literatur A 11, Kap. VI.

Namenverzeichnis.

A

Abel, N. H. 1350. 1465
Adhémar, R. d' 1338. 1339. 1421. 1462. 1483
Amaldi, U. 1466. 1548
Amoroso, L. 1357. 1456. 1457. 1458. 1478
Andrae, A. 1361. 1386
Andreoli, G. 1390. 1453. 1464. 1491. 1493. 1494. 1495. 1532
Anghelutza, Th. 1535. 1542
Appell, P. 1414. 1479
Arone, G. d' 1549
Autonne, L. 1438. 1562

B

Baeri, L. 1495
Ballif, L. 1501
Banach, S. 1469
Barnett, I. A. 1468. 1478. 1500
Bateman, H. 1338. 1339. 1380. 1389. 1453. 1454. 1456. 1465. 1492. 1501. 1510. 1511. 1529. 1539
Beer, A. 1345. 1349. 1354
Beltrami, E. 1351
Bendixson, I. 1550
Bennet, A. A. 1500
Bernoulli, D. 1343. 1360. 1513. 1514
Bernoulli, Joh. 1343
Bernstein, F. 1490
Bertrand, J. 1398
Berwald, F. R. 1479
Besselsche Ungleichung 1366. 1392. 1436. 1505. 1510. 1525. 1555
Birkhoff, G. D. 1500
Blaschke, W. 1357
Block, H. 1483. 1529. 1552
Blondel, A. 1528. 1550. 1552
Blumenfeld, J. 1540
Bóbr, St. 1421. 1446
Bôcher, M. 1338. 1382. 1442. 1458. 1498
Bockwinkel, H. B. A. 1468
Boggio, T. 1357. 1525. 1537
Bohr, H. 1448. 1499
Bois-Reymond, P. du 1346
Bolza, O. 1471
Bompiani, E. 1490
Borel, E. 1383. 1443
Born, M. 1591
Botasso, M. 1390. 1515
Bouniakowsky 1366
Bounitzky, E. 1495. 1534
Bourlet, C. 1479
Brand, L. 1442. 1458
Bratu, G. 1483. 1486. 1495
Broggi, U. 1339
Browne, P. J. 1464. 1465
Buchanan, M. 1534
Bucht, G. 1486
Burgatti, P. 1460. 1494
Burkhardt, H. 1344. 1358. 1362

C

Cailler, C. 1391. 1456. 1465
Cairns, W. 1512
Calegari, A. 1423
Caqué, J. 1350
Carleman, T. 1384. 1387. 1456. 1458. 1531. 1550. 1551. 1589. 1595
Carmichael, R. D. 1443
Cauchy, A. 1348. 1357. 1366. 1395. 1402. 1452. 1505
Cazzaniga, T. 1415. 1418. 1423
Chicca, A. 1517
Chittenden, E. W. 1469. 1475
Collet, A. 1483
Cotton, E. 1483
Courant, R. 1338. 1377. 1382. 1407. 1495. 1500. 1503. 1512. 1519. 1520. 1528. 1557. 1597
Crijns, L. 1456. 1482
Crudeli, U. 1495

D

Daniele, E. 1493. 1497. 1500
Daniell, P. J. 1456
Davis, E. W. 1357.
Dines, L. L. 1468
Dini, U. 1339. 1351. 1522. 1524
Dirichletsches Prinzip 1518. 1538. 1566
Dixon, A. C. 1368. 1377. 1388. 1391. 1412. 1415. 1428. 1443. 1444. 1447. 1453. 1476. 1545
Doetsch, G. 1465. 1490. 1497. 1499
Droste, J. 1595

E

Egerváry, E. v. 1391. 1453
Egli, M. 1442
Enskog, D. 1381. 1383. 1399. 1502. 1535. 1550
Evans, G. C. 1391. 1462. 1487. 1489. 1491. 1497. 1498. 1499. 1500

F

Falckenberg, H. 1486
Fejér, L. 1426
Fick, A. 1346
Fischer, Ch. A. 1470. 1471
Fischer, E. 1357. 1365. 1397. 1434. 1470. 1512. 1527
Flamant, P. 1477
Fock, V. 1465
Fourier, J. J. 1350. 1414
Frank, Ph. 1511. 1534
Fréchet, M. 1338. 1434. 1499. 1500 und Nr. **24** b
Freda, E. 1500
Fredholm, J. 1339. 1501. 1551, sowie insbes. Nr. **5, 9—14, 24** c.
Frobenius, G. 1550. 1562

Fubini, G. 1451. 1482. 1483. 1494. 1495. 1538. 1541. 1566
Fürstenau, E. 1414
Fujiwara, M. 1418

G

Galajikian, H. 1483
Garbe, E. 1375. 1387. 1531. 1538. 1542f. 1551
Gâteaux, R. 1499
Gauß, C. F. 1502
Geiringer, H. 1597
Gerling, Ch. L. 1502
Gevrey, M. 1495
Giorgi, G. 1491. 1497
Goldschmidt, E. 1413. 1432. 1502
Goursat, E. 1339. 1375. 1377. 1381. 1382. 1384. 1385. 1465. 1518. 1537. 1541. 1545. 1547. 1595
Gram, J. P. 1436
Gramegna, M. 1478
Greggi, G. 1390
Grommer, J. 1588
Gronwall, T. H. 1463
Gundelfinger, S. 1564

H

Haar, A. 1396
Hadamard, J. 1371. 1468. 1500, sowie Anm. [31])
Hahn, H. 1339. 1447. 1469. 1581. 1584. 1585. 1594
Hamburger, H. 1458. 1589
Hammerstein, A. 1518. 1523. 1530
Hankel, H. 1454
Hardy, G. H. 1426. 1453. 1454. 1455. 1495
Hart, W. L. 1413. 1422. 1432. 1477. 1483
Hayashi, T. 1357. 1465
Hecke, E. 1383. 1392. 1535
Heine, E. 1586
Hellinger, E. 1402. 1433. 1438. 1439. 1445. 1450 und Nr. **18**, **43**.
Helly, E. 1446f. 1456. 1459. 1470
Herglotz, G. 1466
Hermitesche Kerne Nr. **38** a. — Formen Nr. **41** a
Hertz, P. 1466
Heywood, H. B. 1338. 1545. 1547
Hjemslev, J. 1439
Hilb, E. 1430. 1431. 1442. 1445. 1478. 1479. 1480. 1481. 1503. 1579. 1582. 1589 und Nr. **44**
Hilbert, D. 1338 und passim, besonders Nr. **5**—**8**, **10** b, 2, **12** b, **13** a, **15**, **16**, **18**, **19**, **21** b, **22** a, **28**, **30**—**34**, **36**, **38** b, 1, **40**, **41**, **43**
Hildebrandt, T. H. 1468. 1469. 1475. 1478 1495
Hill, G. W. 1347. 1414. 1417. 1503. 1551
Hirakawa, N. 1465
Hirsch, A. 1550
Hitchcock, F. L. 1399
Hoborski, A. 1374. 1549
Hobson, E. W. 1386. 1387. 1388. 1524. 1531
Hölder, O. 1445
Hoheisel, G. 1481
Holmgren, E. 1461. 1465. 1518ff. 1538. 1566
Horn, J. 1338. 1461. 1462. 1466. 1483. 1490. 1495
Hostinsky, B. 1512. 1550
Humbert, P. 1453. 1456
Hurwitz, A. 1369. 1375
Hurwitz, W. A. 1374. 1389. 1532
Hyslop, J. 1430. 1567. 1585. 1594. 1595

J

Jacobi, C. G. J. 1357. 1503. 1586
Jaroschek, W. 1495
Jensen, J. L. W. V. 1445
Jentzsch, R. 1550
Jordan, C. 1339
Julia, G. 1451. 1500

K

Kakeya, S. 1458. 1459
Kapteyn, W. 1375. 1456. 1465
Kármán, Th. v. 1591
Kaucky, J. 1465. 1550. 1552
Kellogg, O. 1361. 1375. 1386. 1387. 1390. 1452. 1454. 1455. 1500. 1508. 1515. 1531
Kienast, A. 1465
Klein, F. 1362
Kneser, A. 1338. 1361. 1389. 1390. 1472. 1495. 1508. 1516f. 1524. 1526. 1532. 1534. 1542
Koch, H. v. 1339. 1347. 1356. 1371f. 1373. 1387. 1388. 1443. 1444. 1445. 1466. 1477. 1480. 1482. 1484. 1499. 1559 und Nr. **17**
Kötteritzsch, Th. 1414. 1443
Korn, A. 1338. 1517 und Nr. **38** b
Koschmieder, L. 1495
Kowalewski, G. 1338. 1357. 1468
Kronecker, L. 1586
Kryloff, N. 1550
Kubota, T. 1357. 1557
Kummer, E. 1508

L

Lagrange, J. 1366. 1395f.
Laguerresche Theorie 1550
Lalesco, T. 1338. 1339. 1349. 1385. 1451. 1461. 1463. 1464. 1465. 1479. 1483. 1494. 1518. 1528. 1535. 1542. 1544. 1545. 1547. 1550. 1552
Landau, E. 1433. 1445
Landsberg, G. 1545
Laudien, H. 1495
Laura, E. 1550
Lauricella, G. 1339. 1455. 1456. 1493. 1495
Lebesgue, H. 1375. 1381. 1382. 1387. 1470. 1492
Lennes, N. J. 1419
Levi, E. E. 1388
Lévy, P. 1466. 1486. 1499. 1500
Liapounoff, A. 1496
Lichtenstein, L. 1388. 1398. 1495. 1496. 1535. 1597
Liouville, J. 1345. 1348. 1351
Littlewood, J. E. 1453
Loewy, A. 1564
Lorentz, H. A. 1528. 1530
Love, C. E. 1388. 1462
Lovitt, W. V. 1338

M

Mandelstam, L. 1534
Marty, J. 1375. 1539. 1541. 1542 1543. 1550. 1566
Mason, M. 1361. 1463
Maurer, L. 1375
Mayer, W. 1540
Mazurkiewicz, S. 1552
Mercer, J. 1510. 1524. 1526. 1531f. 1539. 1542f. 1545. 1551
Michal, A. D. 1468

Minkowski, H. 1357. 1447
Mises, R. v. 1339. 1495
Mittag-Leffler, G. 1417
Mohorovičić, St. 1453. 1465. 1486. 1494
Mollerup, J. 1375. 1456. 1515. 1533
Moore, E. H. 1499, sowie Nr. **24c** und **45b**
Moulton, F. R. 1477.
Müntz, Ch. 1398. 1457. 1458. 1515
Muir, Th. 1357
Muth, P. 1564
Myller, A. 1389. 1464

N

Nabholz, P. 1434. 1435. 1437. 1442
Nalli, P. 1463. 1464. 1488. 1593. 1594
Nanni, M. 1483
Nanson, E. J. 1357
Neumann, C. 1345. 1346. 1349. 1351. 1358. 1382
Neumann, E. R. 1535
Nevanlinna, R. 1458
Nörlund, N. E. 1480
Noether, F. 1452

O

Ogura, K. 1434. 1443
Orlando, L. 1377. 1461. 1483. 1486
Ostrowski, A. 1388

P

Palmqvist, R. 1419
Pascal, E. 1357. 1417
Pell, A. J. 1442. 1470. 1512. 1534. 1585, sowie Nr. **38b** und **41b**
Pellet, A. 1444. 1483
Pérès, J. 1390. 1487. 1488. 1489. 1490. 1491. 1497
Perhavc, R. 1535
Perron, O. 1445. 1466. 1477. 1480. 1550
Picard, É. 1349. 1352. 1362. 1451. 1455. 1460. 1464. 1465. 1493. 1533. 1595
Pick, G. 1550
Picone, M. 1386. 1464. 1483
Pincherle, S. 1350. 1423. 1454. 1456. 1468. 1479. 1493. 1495. 1548, sowie Nr. **24a** und **45a**
Pisati, L. 1454
Pitcher, A. D. 1475
Plancherel, M. 1339. 1441. 1454. 1594. 1597
Plas, H. M. 1375
Platrier, Ch. 1374. 1391. 1451. 1457. 1495. 1549
Plemelj, J. 1370. 1374. 1384. 1545
Plessner, A. 1454.
Poincaré, H. 1339. 1347. 1349. 1385. 1387. 1389. 1414. 1417. 1455. 1512. 1516. 1517. 1551. 1579. 1582, sowie Nr. **5—7**
Poisson, S. D. 1350. 1505. 1506
Poli, C. 1482
Polossuchin, G. 1480
Polya, G. 1482
Pompeju, D. 1391
Popoff, K. 1456
Popovici, N. 1464
Praporgesco, N. 1494. 1495
Precchia, M. 1493
Proszynski, A. 1525
Puiseuxsche Sätze 1484
Puzyna, J. 1391

R

Radon, J. 1470. 1471
Rayleigh, Lord 1343
Riemann, B. 1344
Riesz, F. 1338. 1365. 1397. 1398. 1428. 1434. 1456. 1458. 1459. 1467. 1469. 1470. 1471. 1518. 1561. 1583
Riesz, M. 1458
Ritt, J. F. 1479
Ritz, W. 1398. 1503. 1597
Rogers, J. 1445
Rouse, L. J. 1390
Roux, J. Le 1349. 1459. 1499
Runge, C. 1456. 1482
Rutgers, J. G. 1465

S

Sanielevici, S. 1380
Sannia, G. 1383. 1415. 1423. 1522
Saßmannshausen, A. 1478
Saurel, P. 1371.
Sbrana, F. 1465
Scarpis, U. 1357
Schachenmeier, R. 1432
Schlesinger, L. 1478
Schmidt, E. insbes. Nr. **7**, **8**, **10a**, **10b**, **1**, **12c**, **13**, **19**, **24c**, **24d**, **4**, **25b**, **29**, **30—34**, **36**, **45**, sowie 1573. 1575
Schoenflies, A. 1338
Schreier, O. 1548
Schürer, F. 1466. 1479. 1481
Schur, J. 1357. 1385. 1387. 1423. 1425. 1426. 1428. 1438. 1508. 1510. 1515. 1524. 1533. 1534. 1535. 1553. 1562, sowie Nr **39**
Schwarz, H. A. 1352. 1354. 1513; —sche Ungleichung 1366. 1396. 1434
Seely, C. E. 1550
Seidel, Ph. L. 1502
Severini, C. 1456. 1483. 1493
Sharpe, F. R. 1357
Silla, L. 1456. 1457
Simon, W. G. 1477
Sinigallia, L. 1390. 1492. 1494. 1495. 1497
Sommerfeld, A. 1528. 1530. 1534
Soula, J. 1493
Stäckel, P. 1445
Steinhaus, H. 1469
Steinitz, E. 1433
Stekloff, W. 1361. 1458. 1516
Sternberg, W. 1477. 1494
Stieltjes, T. J. 1370. 1457, sowie Nr. **43**, insbes. **43c**
Stourgeon, E. le 1500
Sturm, Ch. 1343
Sylvester, J. J. 1356
Szász, O. 1357. 1421. 1423. 1522
Szegö, G. 1442

T

Tah Hu, M. 1478
Takenaka, S. 1458
Tedone, O. 1465
Thomsen, W. 1346
Tino, O. 1542. 1551
Titchmarch, E. C. 1453
Tocchi, L. 1374
Toeplitz, O. 1339. 1391. 1402. 1404. 1433. 1438f. 1441. 1445. 1450. 1499. 1523. 1524. 1550. 1563. 1573. 1575, sowie Nr. **18**, **20e**, **43**
Tonelli, L. 1357. 1500
Tricomi, F. 1456. 1501f.

U

Usai, G. 1456

V

Valcovici, V. 1464
Vallée-Poussin, Ch. J. de la 1368. 1388
Vergerio, A. 1383. 1456. 1478. 1483. 1493. 1495. 1515. 1533
Vessiot, E. 1468. 1490
Villat, H. 1452. 1455
Viterbi, A. 1460. 1483
Vivanti, G. 1338. 1375. 1418. 1542
Volterra, V. 1338. 1339. 1344. 1349. 1350. 1389. 1390. 1483. 1478, sowie Nr. **23**, **26—28**

W

Walsh, J. L. 1444
Walther, A. 1480
Watanabe, M. 1461
Watson, G. N. 1339
Weatherburn, C. E. 1390. 1457
Weber, H. 1518
Weierstraß, K. 1544. 1556
Weitzenböck, R. 1536
Wells, M. E. 1475
Westfall, W. D. A. 1499
Weyl, H. 1425. 1426. 1450. 1454. 1512. 1534f. 1548. 1552. 1579. 1581. 1589, sowie Nr. **35** und **44**
Weyr, E. 1548
Whittacker, E. T. 1339. 1465. 1502
Wiarda, G. 1456
Wiener, F. 1426
Wiener, N. 1399
Wintner, A. 1444f. 1477. 1482
Wirtinger, W. 1357. 1577

Y

Young, W. H. 1462. 1510. 1531

Z

Zaremba, S. 1361. 1516
Zarlatti, F. S. 1595
Zeilon, N. 1497

(Abgeschlossen im Juni 1927.)

Nachwort der Redaktion.

Die vorliegende zweite Hälfte des dritten Teils vom zweiten, der Analysis gewidmeten Bande der Encyklopädie bringt diesen Band zum Abschluß. Dieser dritte Teil sollte neben Ergänzungen der beiden ersten Teile insbesondere die Fortentwicklung der Analysis bis zur neusten Zeit bringen. Ein solches Unternehmen hätte nur dann auf ein vollständiges Gelingen rechnen können, wenn es innerhalb weniger Jahre hätte durchgeführt werden können. Leider war dies infolge des Krieges und der Nachkriegsjahre nicht möglich, und so mußte sich die Redaktion zu mancherlei Kompromissen entschließen. Zunächst war es unmöglich, an der ursprünglich geplanten Anordnung der einzelnen Artikel festzuhalten; war es doch ohnehin schwierig genug, wenigstens eine einigermaßen zusammenhängende Anordnung zu erreichen. Als ferner während der Inflationszeit der Abschluß des Bandes überhaupt in Frage gestellt war, entschloß sich die Redaktion, wenn auch schweren Herzens, einen geplanten Ergänzungsartikel über partielle Differentialgleichungen des hyperbolischen und parabolischen Typus ganz fallen zu lassen, da bei den übrigen noch ausstehenden Artikeln eine schnellere Beendigung erhofft werden konnte. Möchte der nun vollendete Band II der Encyklopädie, wenn er auch nicht ganz so erschöpfend ausgefallen ist, wie es eigentlich in der Absicht der Redaktion lag, befruchtend auf die Verbreitung und Weiterentwicklung der Analysis einwirken.

Mit Wehmut gedenken wir unseres so früh dahingeschiedenen Mitarbeiters *H. Burkhardt*, der von 1896 bis zu seinem Tode im Jahre 1914 seine reiche Erfahrung in den Dienst der Redaktion gestellt hatte. Herzlichen Dank statten wir auch an dieser Stelle *W. Wirtinger* ab, der trotz seiner starken amtlichen Inanspruchnahme von 1905 bis 1912 in mühevoller Tätigkeit die Redaktion des zweiten Teiles geführt hat. Den schwersten Verlust aber erlitt die Redaktion durch den Heimgang *Felix Klein*s. Durften wir *Klein* in seiner oft bewunderten Vielseitigkeit überhaupt als die Seele der ganzen Encyklopädie verehren, so dankt ihm insbesondere auch unser Band ein nie ermüdendes Interesse und eine stets fördernde Anteilnahme, und wir empfinden es schmerzlich, daß er die Vollendung dieses Bandes nicht mehr erleben durfte.

Register zu Band II, 3. Teil.[1])

Die Stichworte des Registers sind durch gesperrten Druck hervorgehoben, die Wiederholung der Stichworte ist durch einen Bindestrich angedeutet. Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten des Bandes, die größeren auf den Text, die kleineren auf die Fußnoten. Die alphabetische Anordnung ist in bezug auf Haupt- und Eigenschaftsworte soweit als möglich eingehalten. Worte aus fremden Sprachen werden im allgemeinen nur dann aufgeführt, wenn nicht die wörtliche Übersetzung in deutscher Sprache an sich vorkommt.

A

$\mathfrak{a}$, Mächtigkeit einer abzählbar unendlichen Menge 875.

Abbildung, Erweiterung einer gegebenen — 959; — Jordanscher Kurven, Erweiterung 958, 959; —, Klasse 959; konforme — 177, 217, s. auch konform; meßbare — 982; quasikonforme — 261; 366; reguläre — 982; Schlichtheit einer — 276, 388; stetige — der Strecke auf das Quadrat 943; streckentreue — 217.

Abbildungsgrad 956, 959; Invarianz 957.

Abelsche Differentiale 575/76; — Funktionen 641; —r Grenzwertsatz 475; — Integrale, algebraische Relationen 616; — Integrale, Aronholdsche Form 595; — Integrale, Existenzbeweis auf geschlossenen Riemannschen Flächen 268; — Integrale, Fundamentalaufgabe 577, — Integrale, Umkehrproblem 640; zu einem Körper $K(y, x)$ gehörige — Integrale 574; — Integralgleichung 1350, 1464 f.; —r Kern 1456; — Summationsmethode 477, 758; —s Theorem, als Additionsprinzip der Integrale 635; —s Theorem, allgemeinstes 637; —s Theorem, die daraus folgenden Reduktionsprobleme 638; — Transformation 1222.

Abgeschlossene Hülle 865; —r Kern 1507, 1513, 1524/25, 1527; — Menge s. d.; — orthogonale Funktionensysteme 1237, 1260, $\cos nx$, $\sin nx$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) als —s orthogonales Funktionensystem 1194, 1215; — vollstetige quadratische Form 1559.

Abgeschlossenheit eines orthogonalen Funktionensystems 1237.

Ableitung 1086/7; allgemeine — 1115; approximative — 1114/5; asymptotische — 1114; Bestimmung einer Funktion mit Hilfe ihrer — 1101, 1104; Eigenschaften 1089; exakte — 1115; Existenz der —en 1091; —en von Funktionen mehrerer Veränderlicher 1115; Integrierbarkeit 1098; linke (hintere) — 1087; — einer Mengenfunktion 1133; nicht integrable — 1099; nicht summierbare — 1100; partielle — 1123; partielle —en, Vertauschbarkeit der zweiten partiellen —en 1127; primitive Funktion einer gegebenen — s. Funktion; unbestimmtes Integral einer — 1105; — des unbestimmten Integrals 1096; — des unbestimmten Integrals einer Funktion von zwei Veränderlichen 1131; unendliche — 1094/5; vordere (rechte) — 1086.

Ableitung einer Menge 860/1; — n^{ter} Ordnung 862; 0te — 865; — transfiniter Ordnung 867.

Abschnitte einer Bilinearform 1400. 1424.

1) Zusammengestellt unter Mitwirkung der Verfasser der einzelnen Berichte von *G. Foerster* und *E. Hilb*.

Abschnittsmethode bei der Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten 1414, 1432.
Absolut additive Mengenfunktion s. d.
Absolut stetige Funktion 1007; — — Mengenfunktion 1009; gleichgradig absolut stetig 1083; s. auch total stetig.
Absolutes Fundamentalsystem 562.
Absolute Konvergenz s. Konvergenz.
Abspaltungsverfahren in der Theorie der unendlichen Determinanten 1421.
Abspaltungsverfahren zur Lösung von Funktionalgleichungen 1467; — beschränkter Gleichungssysteme 1432, 1502, — zur Lösung der Dixonschen Gleichungssysteme 1443, — vollstetiger Gleichungssysteme 1412/3, 1447 f., 1448, 1502; — von Integralgleichungen 1377, 1388, 1501.
Abstand zweier Punkte 877, 1018; — eines Punktes von einer Menge 878; — zweier Mengen 878.
Abstrakte Mengen 856.
Abszissen, Bestimmung bei numerischer Quadratur 58; mittlere — 113.
Abteilungsweise stetige Funktionen 190.
Abzählbar 868, 875.
Abzählbarkeitsaxiome 1021.
Additionsregeln von konvergenten Reihen 13.
Additionstheorem der Binomialkoeffizienten 22; —e der trigonometrischen Funktionen 34.
Additive bzw. absolut— Mengenfunktionen s. d.; — Zahlentheorie 829.
Adhärenz einer Menge 872.
Adjungierte Kurve 591, 596; — Eigenfunktionen eines unsymmetrischen Kernes 1493, 1533, 1544.
Ähnliche Bilinearformen, Problem der Ähnlichkeit 1565, 1571, 1591.
Äquivalent für die Stelle 𝔭 537.
Äquivalente Basissysteme 625; — Divisoren 541, 569; — Divisoren in bezug auf M 569; — Elemente 546, 646; — Funktionen 1027; — Systeme 563; — Wege 621.
Äquivalenzbegriff für Fourierreihen 1369; — für vollständige Orthogonalsysteme 1393 ff.
Äquivalenzen, als — aufzufassende Gleichungen 1581.
Äußere und innere Punkte einer Menge 880, — Punkte von s 620; — Grenzmenge 891.
Affine Transformation im Raume von unendlichvielen Veränderlichen 1438.
Aggregate, completed 866; — connected 897.
Aichkörper, konvexer 1446.
Aire extérieure, intérieure 965.
Algebraische Analysis 1; — Divisoren 552; — Funktionen, arithmetische Theorie 533; — Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher, arithmetische Theorie 651: — Gebilde 581, 605; — Gleichung zwischen zwei eindeutigen analytischen Funktionen 415; — Kurven im Raume von s Dimensionen 598; — Kurven, die zum Körper $K(y, x)$ gehören 581; — Normierung der Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung 616; — Raumkurven, Theorie 602; — Relationen zwischen Abelschen Integralen 616; — Systeme und ihre Elementarteiler 562; — Zahlen, arithmetische Theorie 642; — Zahlkörper 842; — Zahlkörper und die ihnen isomorphen rationalen Kongruenzkörper 643.
Allgemeiner Kern 1513, 1525, 1527.
Alternativsatz bei Integralgleichungen 1376, 1409; — bei vollstetigen Gleichungssystemen 1409, 1410.
Alternierende Form 1561; —r Kern 1535.
Alternierendes Verfahren (von Schwarz) 171, 256, 268/69; —, Hilfssatz von Schwarz 222, 244, 257/58; —, Hilfssatz von Schwarz, Analogon im Raum 258.
Analysis situs 949; Anwendungen der Mengenlehre auf — 1012.
Analytisch darstellbare Funktionen 1177.
Analytische Abbildungen 529; Hauptproblem 531.
Analytische Fortsetzung 6, 445; — vermittels Integraldarstellungen 453; — vermittels konformer Abbildung 447; erste Mittag-Lefflersche Methode 445, zweite Mittag-Lefflersche Methode 448, Modifikation durch Painlevé 450, weitere Mittag-Lefflersche Methoden 458/59; — durch Zurück-

führung auf die Summation der geometrischen Reihe 451.

Analytische Funktionen 6, 216, 382; — arithmetische Eigenschaften 514; — Begriff 389; — Cauchy-Riemannsche Definition 214, 382; — Cauchy-Riemannsche Definition, Erweiterungen 216, 387; — Existenzbereich s. d.; — eindeutige Parameterdarstellung 396, s. auch Uniformisierung; Reihen von analytischen Funktionen 491; — Weierstraß-Mérayscho Definition 6, 382; — von zwei Veränderlichen, Definition 517, analytischer Charakter ihrer Singularitätenmannigfaltigkeit 524, Existenzbereich 525, Fehlen isolierter singulärer Stellen 523, Nullmannigfaltigkeiten 528, singuläre Stellen 522; — von unendlichvielen Veränderlichen 1482, 1484, 1499.

Analytisches Gebilde 389.

Analytische Zahlentheorie 722.

Angenäherte Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen für große Parameterwerte 1256/57.

Annäherungen, Methode der sukzessiven — 680, s. auch Approximation, sukzessive.

Anziehung, Körper größter — 210.

Apantachisch 864.

Approximation, beste 1153, 1157; beste — mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate 1161, 1209; beste — bei komplexen Veränderlichen 499, 1159; diophantische — 739, 833; diophantische —, Satz von Kronecker 740; — von Eigenfunktionen und Eigenwerten 1519, 1520; Grad der — 1162, 1224; — bei komplexen Veränderlichen 499, 1228, 1267, 1276; — der Kugelfunktionen durch Besselsche 1257; — im Mittel 1527, 1538; — nichtstetiger Funktionen 1149, 1167, 1183; — partieller Differentialgleichungen in endlichen Stücken bei strenger Erfüllung aller Randbedingungen 168; — partieller Differentialgleichungen in endlichen Stücken bei teilweise strenger Erfüllung der Randbedingungen 165; — partieller Differentialgleichungen im Infinitesimalen 169; — stetiger Funktionen durch Polynome bzw. durch endliche trigonometrische Summen 1146, 1186, 1224, 1241; sukzessive —, graphische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 152, sukzessive —, graphische Integration von Systemen linearer Differentialgleichungen 153/54, sukzessive —, numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 154; sukzessive — bei partiellen Differentialgleichungen im Infinitesimalen 169, sukzessive — bei Differentialgleichungen vom elliptischen Typus für die erste Randwertaufgabe 1280. 1297, sukzessive — bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen 1321/2; sukzessive — bei linearen Integralgleichungen und linearen Gleichungssystemen 238, 1348, 1461, sonst durchweg bezeichnet als Entwicklung nach Iterierten, s. Iterierte; sukzessive — bei nichtlinearen Integralgleichungen 1483; sukzessive — bei nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen 1496.

Approximative Ableitung 1114/5; — Funktionalgleichung der Zetafunktion 771.

Approximierende Nebensterne 448, 455; — Polygone der Begrenzung eines Gebietes 926.

Arcs simples 912.

Argument und Parameter, Vertauschung 618.

Arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen 514; — Mittel der Partialsummen 477, 1192, 1204; —s Mittel, Methode des —n Mittels 171, 231, 1346; —r Raum von n Dimensionen 856; — Theorie der algebraischen Funktionen 533; — Theorie der algebraischen Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen 651; — Theorie der algebraischen Zahlen 642.

Aronholdsche Form der Abelschen Integrale 595.

Ascoli, Konvergenzsatz 331.

Assoziierte Kerne 1383, 1508; — Konvergenzradien 9, 520.

Asymptotische Darstellung der Lösungen von Differenzengleichungen 680; — Dimensionenzahl 1520; — Integration von Differentialgleichungen 151; —s Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen 1506, 1529, 1530, 1550, 1552; —s Verhalten der Fourierkoeffizienten 1194; — Werte der

Lösungen von Differenzengleichungen 696.
Auflösbarkeit, algebraische, jeder Gleichung $F(x) = 0$ in jedem p-adischen Zahlkörper $K(p)$ 650.
Auflösung der Singularitäten einer Kurve 587.
August, Formeln 77.
Ausbiegung 923.
Außenrand eines Gebietes 920.
Außerwesentlicher Diskriminantenteiler 587.
Ausstrahlungsbedingung 1303.
Auswahlaxiom 330, 888.
Auswahlverfahren von Hilbert 1405ff., 1418, 1519, 1579, 1588.
Automorphe Funktionen bei Änderung des Fundamentalbereichs 377; — Funktionen vom Grenzkreistypus 1331; — Funktionen mit Hauptkreis 1332; — Potentialfunktionen 268.

B

Bahnkurve 907/08.
Bairesche Funktionen 1169; —, Beziehungen zu den Borelschen Mengen 1171/72; — auf einer Menge $\mathfrak{M}$, Erweiterung 1176; — der nullten, ersten, α^{ten} Klasse 1168, 1169; unvollständige — 1176.
Bairesche Funktionenklassen 1168; — Beziehungen zu den meßbaren Funktionen 1182.
Bairesche Klassifikation 1168; — Modifikationen 1171.
Bandenspektrum 1577.
Basis einer Divisorenschar 571; — einer beliebigen Exponentenfolge bei allgemeinen Dirichletschen Reihen 743; — für die Gesamtheit der in $[a, b]$ stetigen Funktionen 1152; — eines invarianten Funktionensystems 1546; — des Körpers $K(u, z)$ 543; — eines linearen Vektorgebildes 1437; — eines Moduls 563; — von Periodenwegen 624; — eines Problems 1025; Transformation in eine reguläre — 571.
Basisfunktion 1010; — einer Differentiallösung 1593; — eines orthogonalen Systems von Differentialformen 1585; geordnetes System von —en 1585.
Basissysteme, äquivalente 625.
Begrenzung eines Gebietes 182, 916; — eines Gebietes, Struktur 925/26; — eines n-dimensionalen Gebietes 929; — einer Menge 880.
Begrenzungspunkt 880.
Belastete Integralgleichung 1474, 1532.
Belegung, natürliche 241; — von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ 1009.
Belegungsfunktion 1009.
Beltramischer Differentialparameter, zweiter 1311, 1331.
Bereich 182, 899, 1279; einfach zusammenhängender — 947; — der Hauptpunkte 417.
Bernoullische Polynome 713, 1275; — Methode angewandt auf Eigenwertbestimmung 1513, 1514; — Zahlen 42, 42, 44. 92.
Beschränkt 182, 859, 861; —e Bilinearformen s. d.; —e Kerne 1592; Funktionen —er Schwankung oder Variation s. Funktionen.
Besselsche Funktionen 1257, 1274; — Identität 1436; — Ungleichung für Funktionen 1209, 1235, 1366, 1505; — Ungleichung für Vektoren im Hilbertschen Raum 1436, 1555; — Ungleichung, Verallgemeinerung 1212.
Bewegungskurven 909.
Bezoutsche Regel 101.
Bieberbachscher Drehungssatz 512; — Flächensatz 510/11.
Bilineare Integralform, die zu einem symmetrischen Kern gehört 1510.
Bilinearform, beschränkte, von unendlich vielen Veränderlichen 1403, 1423, 1424, 1435; Abschnitt einer — 1400; notwendige, bzw. hinreichende Bedingung für Beschränktheit einer — 1426, besondere — —en 1426, 1590; Faltung zweier —r —en 1427, Faltungssätze von Hilbert für — —en 1427, 1428; komplexe — —en 1428, 1433; Konvergenz der —n —en 1424, 1438; nicht absolut konvergente — —en 1425; L-Formen s. unter Formen; Resolvente einer — 1428/9, 1429; Reziproke einer —n — s. Reziproke; Schranke einer —n — 1424; stetige —en statt vollstetige —en 1400; Stetigkeit einer —n — 1425; symmetrische —, die zu einer quadratischen Form gehört 1576; symmetrisierbare — —en mit Streckenspektren 1567; Hellingers

Zerspaltungsformel für beschränkte quadratische Formen übertragen auf symmetrisierbare — —en 1585; Transponierte einer —n — 1424.

Bilinearform, vollstetige, von unendlichvielen Veränderlichen 1400 ff.; alternierende — — 1561; vollstetige —en sind beschränkt 1403, besondere — —en, die sich wie quadratische Formen verhalten 1561 ff.; Definition der Vollstetigkeit bei —en 1400, Definition der Vollstetigkeit nach Hilbert 1401, nach F. Riesz 1405, Definition der Vollstetigkeit unter Zugrundelegung eines beliebigen konvexen Aichkörpers 1448, Koeffizientenbedingung für Vollstetigkeit 1402; Eigenfunktionen, Eigenwerte, Hauptfunktionen einer —n — 1574; — —en ohne Eigenwert 1574; Elementarteilertheorie der —n —en 1574 f.; Entwicklungssatz (Analogon zur Weierstraßschen oder einer ähnlichen Normalform) bei —n —en 1574; Faltung —r —en 1403 f., 1405, 1427; Hermitesche — — 1561; normale — —en 1562, unitäre Transformation normaler —r —en auf die kanonische Gestalt 1563, Wertevorrat normaler —r —en 1563; notwendige, bzw. hinreichende Bedingungen für die Vollstetigkeit von —en 1402; Rang, endlicher einer —n — 1412; Resolvente einer —n — 1410, 1432, 1574; symmetrische —, die zu einer vollstetigen quadratischen Form gehört 1553; symmetrisierbare — —en 1563 ff., algebraisches Analogon zu den symmetrisierbaren —en 1564 ff., Ähnlichkeitsproblem für symmetrisierbare — —en 1571, Analogie zu den Integralgleichungen mit symmetrisierbarem Kerne 1566, 1567, 1570, analoges Problem zum Entwicklungssatz bei Integralgleichungen 1566, 1571, Hindernisse für die Ausdehnung des Entwicklungssatzes auf beliebige symmetrisierbare — —en 1571 ff., eigentlich links (rechts) symmetrisierbare —en 1566, symmetrisierbare —en, welche den Hilbertschen polaren Integralgleichungen entsprechen 1567 ff., symmetrisierbare —en, welche den Pellschen symmetrisierbaren Kernen entsprechen 1570 f.

Binomialkoeffizienten 20; —, Additionstheorem 22.

Binomialreihe 21; — mit einer komplexen Veränderlichen 23.

Binomischer Satz, allgemeiner 20; — bei komplexem Exponent 24.

Biorthogonales Funktionensystem 1232, 1239; — System von Hauptfunktionen 1542, 1547, volles — System der Hauptfunktionen 1549.

Birationale Transformation 668.

Bogen einer geschlossenen Kurve 925; s. auch Kurvenbogen.

Bogenlänge einer Kurve 127.

Du Bois-Reymondsche Singularität 1201.

Bolzano-Weierstraßscher Satz 862.

Boolesche Formel 109.

Bordasche Regel 101.

Borel, —sches Integral 1060, 1064; — -Laplacesches Integral 456; —sches Maß 969; —sche Mengen 889, 891, 971, 1220; —sche Mengen, Invarianz 956; —sche Mengen, Klassifikation 893, 1172; —sche Mengen, ihre Beziehungen zu den Baireschen Funktionen 1171, 1172; —sche Mengen, Verallgemeinerung 893; nach — meßbare Funktionen 1044; nach — meßbare Mengen 890, 970; nach — nicht meßbare Mengen 976; —scher Stern 454; —sche Summation 481, 685, 758; —sches Theorem 882; —scher Überdeckungssatz 882, 1023.

Breite einer Menge 878, 878.

Borne supérieure, inférieure 859.

Bruchsequenzen und Elementarteiler 563.

Brückenintervall 915.

Bugajevsche Formel 135.

C

c, Mächtigkeit des linearen Kontinuums 875.

C, Closure property 1473.

(*C*, *k*) 479.

Cantor-Bendixsonscher Satz 866, 868, 902; —, Eindeutigkeitssatz bei trigonometrischen Reihen 1192, 1220, 1259; —, Inhaltsdefinition 962, 964; —, verallgemeinerte Inhaltsdefinition (Denjoy) 976; —sche Linie 907.

Carathéodory, Koeffizientenproblem 229, 412, 501; —, lineares Maß 998;

—, m-dimensionales Maß im n-dimensionalen Raum 999; —, Meßbarkeitstheorie 990; —, Meßbarkeitstheorie, Zusammenhang mit der Lebesgueschen 993.
Castigliano, Satz 174.
Catalansche Formel 108.
Cauchy, Differenzenmethode 148; —-Dirichletsches Verfahren bei uneigentlichen Integralen 1051, 1055; —scher Doppelreihensatz 6, 14; —scher Grenzwertsatz 477; —sches Integral 1032; —scher Integralsatz 384, 519; —scher Integralsatz für reelle Funktionen 1125; —sche Integralformel 386, 519; —scher Koeffizientensatz 12; —sches Randwertproblem 1323; —scher Residuensatz, Anwendung auf Entwicklungstheoreme 1256, 1258, 1261, 1315; —-Riemannsche Definition einer analytischen Funktion 214, 382, Erweiterungen 216, 387.
Cesàrosche Mittel, Summation 477, 684; — k^{ter} Ordnung, Summation (C, k) 478, 753, 1206.
Chapmansche Formel 130.
Charakter, rationaler, einer analytischen Funktion 539.
Charaktere modulo k 796.
Charakteristik zweier Wege 620.
Charakteristikenform für eine Basis von Periodenwegen 625.
Charakteristische Gleichung einer Volterraschen Integralgleichung 1461, — einer linearen Differenzengleichung 677, 695.
Christoffel, Verallgemeinerung der Gaußschen Formel 78.
Closure property 1473.
Constante characteristique 1504.
Content 969; —, inner, outer 973; linear — I 995; linear — J 996.
Continu de condensation 913; — indécomposable 913.
Convergence quasiuniforme 1166.
Convergenza uniforme (oder in egual grado) a tratti 1166.
Cotessche Formel 55, 91.
Cousin, Satz 406.
Czuber, Methode 141.

D

D, D_0, erste bzw. zweite Dominanteneigenschaften 1474.
$\mathfrak{D}_\alpha$ 1174.
D^+, D_+, D^-, D_- 1086.
$\mathfrak{D}(P, Q)$ 866.
δ-System 893.
Dachziegelartige Überdeckung 186, 259.
Darbouxsches Integral, oberes, unteres 1037, 1061, 1063; — Integral, geometrische Definition 1048/49.
Darstellbarkeit durch eine Dirichletsche Reihe 743; — durch eine Newtonsche Reihe 690; — von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{P}_1(x))$ und $\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)}$ in der Form $\mathfrak{P}(x)$ 14.
Darstellung, asymptotische, von Lösungen einer Differenzengleichung 680; reduzierte oder nicht reduzierte — eines Divisors q 540; — der Kurven durch homogene Koordinaten 591.
Dedekindsche Zetafunktion 842.
Defekt eines Kernes 1373, 1373, 1376, 1378; — eines vollstetigen Gleichungssystems 1411.
Deformation eines Bereiches in sich 960; stetige — 958.
Denjoysches Integral 1060, 1065, 1101, 1108, 1110, 1111, 1112, 1115; allgemeines — 1065, 1112; —, andere Integraldefinitionen von Denjoy 1070/71; —, Differentiierbarkeit 1096; —, Erweiterung 1222; spezielles — 1065, 1069, 1092; unbestimmtes — 1111; —, Verallgemeinerungen 1069, 1070; —, Zusammenhang mit dem Begriff der approximativen Ableitung 1115; —, Zusammenhang mit Differentiation 1069, 1096, 1101, 1108, 1110.
Dérivé, nombre — 1086.
Dérivée 1086; —s sur un réseau 1133; —s symétriques 1133
Derivierte 6, 1086, 1086, 1109; —, Bedingung für die Summierbarkeit 1100; Bestimmung einer Funktion mit Hilfe einer ihrer —n 1101, 1104; Beziehungen zwischen den vier —n 1096; — von Funktionen beschränkter Schwankung 1134; —, Integrierbarkeit 1098; mittlere — 1133; obere, untere — 1086; obere (untere) linke (hintere) — 1086; obere (untere) rechte (vordere) — 1086; primitive Funktionen einer gegebenen —n 1104; unbestimmtes Integral einer —n 1105; unendliche — 1094; die vier —n 1086.

Determinante, Fredholmsche — 1370, Minoren der Fredholmschen — 1370f., 1372, 1374, Mutiplikationstheorem für Fredholmsche —n 1374, Fredholmsche — als ganze transzendente Funktion 1376, 1385, 1551, Geschlecht der Fredholmschen — 1518, 1551f., Fredholmsche — der Summe orthogonaler Kerne 1547, Fredholmsche — der Summe beliebiger Kerne 1547, Sylvesterscher Determinantensatz für die Fredholmsche — 1374; Hadamardscher Determinantensatz 1356ff., 1366, 1371, 1421; determinantenfreie Sätze bei Integralgleichungen und linearen Gleichungssystemen 1376, 1412/3, 1444, 1448/9; unendliche —n 1347, 1356, 1417, 1423, 1477, absolut konvergente unendliche —n 1419, unendliche —n bei der Eigenwerttheorie besonderer Klassen vollstetiger quadratischer Formen 1559. genre von unendlichen —n 1418/9, kubische und mehrdimensionale unendliche —n 1423, Minoren absolut konvergenter —n 1420, Minoren von Normaldeterminanten 1418, Normaldeterminanten 1415, 1417, 1423, 1449, 1482, Hadamardscher und Sylvesterscher Satz für Normaldeterminanten 1423, Reziproke einer Normaldeterminante 1415, normaloide — 1418, summable — 1422.

Determinierende Gleichung 1461.

Diagonalform, beschränkte 1426; — als Normalform vollstetiger quadratischer Formen 1558.

Diagonalverfahren 330, 874.

Diagramm zu einer Stelle $\mathfrak{p}$ 551.

Dicht, in sich —, nirgends —, überall —, s. Menge.

Dichte einer Punktmenge (mittlere) im [oder in bezug auf das] Intervall 988; äußere — 988; homogen von der Dichte d 988; obere — 988; — in einem Punkte 988; — rechts (links) von einem Punkte 988; untere — 988.

Differential, totales oder vollständiges 1123; totales —, Bedingungen 1125.

Differentiale der Elemente des Körpers K und die zugehörigen Divisoren 575; Abelsche — 576.

Differential-Differenzengleichungen 716, 1480f.

Differentialformen s. quadratische Formen.

Differentialgleichungen, funktionale 1480f., 1500.

Differentialgleichungen, gewöhnliche, adjungierte 1246; angenäherte Darstellung ihrer Integrale für große Parameterwerte 1256; Eigenfunktionen 1247, s. auch Entwicklungstheoreme und Integraldarstellungen; Eigenwerte 1247; — vom Fuchsschen Typus 1461; Greensche Funktion s. d.; Integrationsmethoden, graphische 141, Czubers 141, der Krümmungsradien 144, der Kurven gleicher Neigung 144, der Linienkoordinaten 146, der sukzessiven Approximationen 152, der sukzessiven Approximationen für Systeme linearer Differentialgleichungen 153/54, für spezielle Differentialgleichungen 146; Integrationsmethoden, rechnerische, asymptotische Integration 151, Cauchys Differenzenmethode 148, der Differenzenrechnung 150, der Himmelsmechanik 157, Runge-Kuttasche Formeln 148, Runge-Kuttasche Formeln für Systeme simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung 150, sukzessive Approximationen 154, Variation der Konstanten 156; —, Randbedingungen 1246/47; —, Randwertaufgaben 1246, sich selbst adjungierte 1247; — unendlich hoher Ordnung 1478ff., Systeme unendlichvieler linearer und nichtlinearer — 1477.

Differentialgleichungen, partielle vom elliptischen Typus, lineare — 1280, adjungierte — 1289, sich selbst adjungierte — 1254, 1310, allgemeine Eigenschaften der Lösungen 1308, Eigenfunktionen 1249, 1254, 1313, Eigenwerte s. d., s. auch Entwicklungstheoreme, Greensche Funktion s. d., Grundlösung 1288, 1295, 1296, 1307, Normalform 1280, Zurückführung der allgemeinen — auf die Normalform 1294/5, 1296, Randwertaufgaben s. d.; nicht lineare — vom elliptischen Typus 1320, analytischer Charakter der Lösungen 1320, Hauptsatz 1323, Randwertaufgaben s. d.; —, hyperbolische 161; —, hyperbolisch-elliptischer Typus 1244, Integration 1134/35; —, Integrationsmethoden, experimen-

telle 176; Integrationsmethoden, graphische bei imaginären Charakteristiken, Approximation, s. d., Maxwellsche Superpositionsmethoden 164; Integrationsmethoden, graphische und numerische bei reellen Charakteristiken 159—163; Integrationsmethoden, numerische, Ersatz durch Differenzengleichungen 173, Rayleigh-Ritzsche 173, 1597, Rungesche Formeln 172; —, parabolische 161; —, parabolisch-elliptischer Typus 1244.

Differentialklasse 574, — W 577.

Differentialkurve 111.

Differentiallösungen bei eigentlich singulären Integralgleichungen zweiter Art 1593, — bei quadratischen Formen 1581.

Differentialquotient 1087.

Differentialteiler 575, 580; —, zu $d\omega$ gehörig 576; — einer Divisorenschar und ihre Anwendung in der Geometrie 597; — einer Funktionenschar 601.

Differentiation 1031; — der absolut additiven Mengenfunktionen 1134; graphische — 139; — unter dem Integralzeichen 1059; — als inverse Operation der Integration bei Mengenfunktionen 1133; — im durch kotierte Projektion dargestellten Felde eines Skalars oder eines Vektorfeldes 141; — nicht ganzzahliger Ordnung 488; numerische — 138; Umkehrung der — 1068, 1096, 1100, 1109/10; — der unbestimmten Integrale der Funktionen von mehreren Veränderlichen 1130; — unendlicher Reihen 1084.

Differentiationsinvarianten 598.

Differentiierbar im Punkte x 1087; — an einer Stelle (x, y) 1124; Menge der nicht —en Stellen 1095; nirgends —e, stetige Funktionen 1091, 1091/92.

Differentiierbarkeit des Denjoyschen Integrals 1096; — der Funktionen von beschränkter Schwankung 1093; — eines unbestimmten Integrals 1096, 1133; vollständige — 216, 1123/24.

Differenz zweier Mengen 865.

Differenzengleichungen, durch hypergeometrische Funktionen oder Gammafunktionen auflösbare — 717; Laplacesche — 720; —, lineare homogene, allgemeine Lösungen 692, charakteristische Gleichung 677, 695, Fundamentalsysteme 692, asymptotische Werte für Fundamentalsysteme 696, 1480, Relationen zwischen zwei Fundamentalsystemen 697, Integrationen durch Fakultätenreihen 692, durch Kettenbrüche 702, 702, durch Laplacesche Transformation 699, 700, durch Newtonsche Reihen 697, Satz von Poincaré 471, 676; —, lineare inhomogene, Hauptlösungen 711, 715, ganze Lösungen 712, meromorphe Lösungen 713, periodische Lösungen 714, Zurückführung auf lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung, Integralgleichungen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen 716; —, Systeme 698, von Guichard 712, Hauptmatrixlösung 699, Matrixgleichung 698, Matrixlösung 698, Übertragung des Riemannschen Problems 696; — nichtlineare, meromorphe Lösungen 706, Übertragung des Satzes von Poincaré 707.

Differenzenrechnung 83; —, Quadraturformeln 96.

Dimension einer Klasse 573.

Dimensionbegriff, Verallgemeinerungen 952, 1000.

Dimensionenzahl, asymptotische — einer Funktionenfolge 1520.

Dimensionsgrad, allgemeiner 952.

Dimensionstypus 952.

Dimensionszahl, Invarianz bei umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen 948, 950; — einer Mannigfaltigkeit 951.

Dinische Bedingung 207/8, 1283; —s Integral 1052; —, Konvergenzkriterium bei Fourierreihen 1195; Lipschitz-—, Konvergenzkriterium bei Fourierreihen 1197.

Diophantische Approximationen 739, 833.

Dirichletsche Bedingungen 1196, 1262; — Funktion $\chi(x)$ 1036; —r Funktionsbegriff 382, 518, 1009; —s Integral 226, 234, 297, 327, 329, 371, 1293; —s Prinzip 329, 1518, 1556, 1597; — Reihen 724, 1267, allgemeine 724, Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Dirichletsche Reihe 743, Eindeutigkeitssatz 728, gewöhnliche 725, Größenordnung 737,

Koeffizientendarstellungsformel 729, Konvergenzabszisse 726, Konvergenzabszisse, absolute 725, Konvergenzabszisse, gleichmäßige 726, auf der Konvergenzgerade 730, Konvergenzproblem 734, Mittelwertsatz 745, Multiplikation 750, Nullstellen 746, Summabilität 753, Summabilitätsabszissen 753, Summabilitätsabszissenfunktion 756, Summabilitätsgrenzabszisse 757, summatorische Funktion 727, Zusammenhang verschiedener Dirichletscher Reihen 748.

Diskontinuierliches Spektrum 1578.

Diskrepant 989.

Diskrepanz 974.

Diskrepanzmenge 989.

Diskrepanzpunkt 989.

Diskrete Menge 963.

Diskriminante der Fundamentalgleichung für $\mathfrak{P}^r$ 557; — von U 543; — des Systems $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)})$ 543.

Diskriminantenteiler, wesentlicher, außerwesentlicher 587.

Distance 1019.

Distanzwert 1018.

Distributive Operation 1466.

Divergenz, beständige 5; eigentliche — 11.

Divisoren 538, 665; äquivalente — 665; algebraische 552; — der Doppelpunkte 583; — der Doppelpunkte im projektiven Sinne 594; —, Einteilung in Klassen 541, 568, 665; — erster und zweiter Art 665; ganze — 540, 552, 665; gebrochene — 540, 552; komplementäre — 566; — der mehrfachen Kurven von G 667; — der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$ 665; —, Ordnung 540, 552; rationale — 539; — der stationären oder Rückkehrpunkte 603; — der stationären Tangenten 603; —, Stufe 665; — der Wendeberührungsebenen 603; —, das einem Divisor entsprechende Wertsystem 638; —, Zahl der Schnittpunkte 667.

Divisorenklassen 665; —, Geschlecht 668; —, Grad 667.

Divisorenscharen 570/71.

Domaine 899, 900.

Dominanteneigenschaften 1474.

Doppelintegrale 1115; — Transformation 1121.

Doppelpunkte, scheinbare 603.

Doppelreihen 520, 520; rekurrente — 18.

Doppelreihensatz von Cauchy 6, 14; — von Weierstraß 14, 491.

Drehung, Funktionen beschränkter — 1007.

Drehungssatz 512.

Drei-Acht-Regel 109.

Dreiecksfunktion 413, 496.

Dreiecksstetig 424.

Dreikreisesatz 508.

Du Bois-Reymondsche Singularität bei Fourierschen Reihen 1201.

Dupainsche Formel 103.

Durchlaufungszeit 908.

Durchmesser einer Menge 878; m-dimensionaler — 999.

Durchschnitt 866, 866; — von abzählbar vielen offenen Mengen 890.

Dynamik, allgemeines Problem 157.

E

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_m$ 181, 1279

Ebene Gebiete der Klassen A, B, B' 185; — der Klassen Ah, Bh 185; — der Klasse C 186; — der Klasse D (L oder M) 186; — der Klasse E (N oder Q) 186.

Écart 877, 1018, 1019, 1469; à — fini 489; — uniformément régulier 1019.

Échelle de relation 17.

Ecke 1093, 1097.

Eckpunktsbedingung 361.

Egoroff, Satz 1180.

Eigenformen vollstetiger quadratischer Formen 1559.

Eigenfunktionen bei Randwertaufgaben von Differentialgleichungen 1245, 1250, 1255, 1258, s. auch Entwicklungstheoreme.

Eigenfunktionen symmetrischer Kerne s. Eigenwerttheorie.

Eigenlösungen vollstetiger quadratischer Formen 1559.

Eigenwerte bei Randwertaufgaben von Differentialgleichungen 1245/47, 1308, 1352; Abhängigkeit der — vom Gebiete und den Randbedingungen 1315/16; asymptotisches Verhalten der — 1258, 1317, 1530; Existenzbeweis mittels linearer Integralgleichungen 1312, durch Lösung einer Maximum-Minimumaufgabe bzw. einer Minimumauf-

gabe 1313, mittels suksessiver Approximationen 1312; independente Definition des n^{ten} —s 1258, 1318; Minimaleigenschaft des kleinsten positiven —s von $\Delta u + \lambda u$ beim Kreise 1319.

Eigenwerte einer Integralgleichung s. Eigenwerttheorie; — einer quadratischen Form s. d.

Eigenwerttheorie (Eigenfunktionen und Eigenwerte) bei Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen, algebraischer Grundgedanke 1341/2; Darstellung der — 1504 ff.; Entstehung der — 1358 ff.; Abhängigkeit der Eigenwerte vom Integrationsbereich 1528; Abhängigkeit der Eigenwerte vom Kerne 1529; Analogie der — zum Hauptachsenproblem 1342, 1353, 1359, 1509, 1511/14, 1521, 1524, 1527; die für die Durchführung der Analogie notwendige Umgrenzung des Funktionenbereiches für die Eigenfunktionen 1364; Approximation (numerische) von Eigenfunktionen und Eigenwerten 1503, 1519, 1520; Axiome für den Aufbau der — 1390, 1472; Eigenwerte und Eigenfunktionen symmetrischer Kerne 1504 ff., der assoziierten Kerne 1508, der iterierten Kerne 1508; asymptotisches Verhalten der Eigenfunktionen und Eigenwerte 1506, 1529, 1530; — für belastete Integralgleichungen 1532; — für besondere Kerne 1534, 1535; Existenzsatz für die Eigenwerte von Hilbert 1513, Beweise des Existenzsatzes mittels des Dirichletschen Prinzips 1518 ff., funktionentheoretische Beweise des Existenzsatzes 1516 ff., Beweis des Existenzsatzes durch Hilbert 1516, durch Schmidt 1513 ff., Modifikation des Schmidtschen Verfahrens 1515; Existenz von höchstens abzählbar unendlichvielen Eigenwerten 1506; Existenz endlichvieler Eigenwerte bei Kernen endlichen Ranges 1513; Existenz unendlichvieler Eigenwerte bei abgeschlossenen und allgemeinen Kernen 1513; Grenzwertausdruck für den ersten Eigenwert und die dazugehörigen Eigenfunktionen 1514, Grenzwertausdruck für die höheren Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenfunktionen 1515; Entwicklungstheoreme nach Eigenfunktionen s. Entwicklungstheoreme; Extremumseigenschaften der Eigenwerte 1509 ff., Charakterisierung des kleinsten positiven Eigenwertes und der dazugehörigen Eigenfunktion durch Maximaleigenschaften der zum Kern gehörigen quadratischen Integralform 1510 f., rekursive Charakterisierung der höheren Eigenwerte und Eigenfunktionen durch Maximaleigenschaften der quadratischen Integralform 1511, independente Charakterisierung der höheren Eigenwerte durch ein Maximum-Minimumproblem 1512, 1528, 1557; — für gemischte Integralgleichungen mit Symmetriebedingungen 1532; — für Integralgleichungen mit mehrfachen Integralen 1532; Orthogonalität der Eigenfunktionen 1506; Oszillationseigenschaften der Eigenfunktionen 1509; — für polare Integralgleichungen 1537; Realität der Eigenwerte 1505; — für Systeme von Integralgleichungen 1532; — bei uneigentlich singulären symmetrischen Integralgleichungen 1531, 1561; — bei eigentlich singulären symmetrischen Integralgleichungen s. unter Integralgleichungen, lineare; unendlich als Eigenwert, die zu unendlich gehörigen Eigenfunktionen 1365, 1507; Vielfachheit eines Eigenwertes 1505; vollständiges normiertes System von Eigenfunktionen 1506; vollständiges Eigenfunktionensystem eines assoziierten Kernes 1508; Vollständigkeit des Eigenfunktionssystem, Allgemeinheit des Kernes als notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Vollständigkeit 1527; — vollstetiger Integralgleichungen 1561; Zusammenhang der — mit der Theorie der vollstetigen quadratischen Formen 1559 ff.

Eigenwerttheorie (Eigenwerte und Eigenfunktionen) bei Integralgleichungen mit unsymmetrischen Kernen 1543, 1544; adjungierte Eigenfunktionen 1493, 1533, 1544, Zurückführung auf eine symmetrische Integralgleichung mit doppeltem Integrationsintervall 1534; — für alternierende Kerne 1535 f.; asymptotisches Verhalten der Eigenwerte 1546, 1550, bei

stetig differenzierbaren Kernen 1552; Beziehungen zwischen Eigenfunktionen und Eigenwerten vertauschbarer Kerne 1493; Eigenfunktionen unsymmetrischer Kerne 1544; Eigenwerte eines assoziierten Kernes 1550; eigenwertlose Kerne 1552; Lage der Eigenwerte 1550; Elementarteilertheorie der allgemeinen unsymmetrischen Kerne 1543 ff.; Entwicklungssätze nach Hauptfunktionen unsymmetrischer Kerne, Schwierigkeiten bei ihrer Gewinnung 1552; invariante Funktionensysteme 1545, Basis eines invarianten Funktionensystems 1546; Hauptfunktionen 1542, 1543 ff., 1545; biorthogonale Normierung der Hauptfunktionen 1547, Höchstzahl der zu einem Eigenwert gehörigen Hauptfunktionen 1547, vollständiges System der zu einem Eigenwert gehörigen Hauptfunktionen 1546, volles System der Eigenwerte und Hauptfunktionen 1549, volles (kanonisches) biorthogonales System der Hauptfunktionen von $k(s,t)$ und $k(t,s)$ 1549; Methode der Partialbruchzerlegung der Resolvente 1548; — für Hermitesche Kerne 1535 f.; — für normale Kerne 1536, 1563; Übertragung der Sätze über Matrizen mit lauter positiven Elementen auf Integralgleichungen 1550; Zerlegung eines Kernes in Summanden mit je einem Eigenwert 1547 f.

Eindeutige, isolierte Singularitäten 404.

Eindeutigkeitssatz bei Dirichletschen Reihen 728; — bei Sturm-Liouvilleschen Reihen 1259; — bei trigonometrischen Reihen 1192, 1220.

Einfache Kurve 183, 909; — Summen 711.

Einheit, Definition für ein Element 546, 646; —, mod p 642; — für die Stelle $\mathfrak{p}$ 537.

Einheitsfunktion für die Stelle $\mathfrak{p}$ 537; transzendente — 632.

Einheitsklasse 541, 568.

Einheitsmatrix, unendliche 1428.

Einheitswurzeln 643.

Einschnitt einer Funktion 417; —, Häufungsbereich 417; Wertebereich 417.

Einteilung aller Wege auf einer Riemannschen Fläche in Klassen 621.

Eisensteinscher Satz 515.

Elastische Schwingungen 1249.

Elektrische Bilder, Thomsons Methode der —n — 1346.

Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung 579, 580.

Elementarkoordinate einer singulären Stelle 402.

Elementarteiler algebraischer Systeme 562.

Elementarteilerexponent 1548, 1549.

Elementarteilertheorie, algebraische 1548, 1564; — und Algebra der Funktionaloperationen 1548, 1595; — allgemeiner unsymmetrischer Kerne 1492, 1543 ff.; — vollstetiger Bilinearformen 1574.

Elemente, algebraische ganze oder gebrochene 545, 646.

Elementenfremd 866.

Elliptische Gebilde 611; — Modulfunktionen 303, 304, 308, 410—412, 496.

Enclosable property 1017.

Ensemble d'accumulation 939; — biconnexe 938; — bien enchâîné 896; — clairsemé 872; — clos 863; — condensé 863; — connexe 938; — dense, dense en lui-même, en soi, partout 863; — discontinu, partout 900/01; — dispersé 900; — fermé 863; — complètement fermé 912; — gerbé 886; — inexhaustible 886; — limite 939; — limite complet 939; — limite restreint 939; — mesurable 966; — mesurable (J) 966; — mesurable B 970; — mince 989; — parfait (absolument, relative ment) 863; — punctiforme 901; — résiduel 886; — saturé 911; — d'un seul tenant 896.

Entfernung zweier Elemente eines Raumes 1018, 1022, 1434, 1469.

Entwicklung nach Iterierten s. Iterierte.

Entwicklungssätze bei Bilinearformen s. d.

Entwicklungstheoreme s. auch Reihentwicklungen.

Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen, historischer Überblick 1260; —, Analogie mit dem algebraischen Hauptachsenproblem 1359; — gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen vermittels des Cauchyschen Residuensatzes 1258, 1261, nach

der Poincaré-Steckloffschen Methode 1262, vermittels der Theorie der Integralgleichungen 1252, 1526, vermittels Übergang zu einer Bilinearform 1253, vermittels Variationsrechnung 1253; — partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, vermittels der Poincaré-Steckloffschen Methode 1262, 1315, vermittels der Theorie der Integralgleichungen 1254, 1313, vermittels Übergang zu einer Bilinearform 1254, 1314.

Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen linearer Integralgleichungen 1242/3, 1364, 1521 ff.; — nach adjungierten Eigenfunktionen eines stetigen unsymmetrischen Kernes 1533, — bei allgemeinem symmetrischem Kern 1525; — für definite symmetrische Kerne 1524; — mit funktionentheoretischen Methoden bewiesen 1526; — vermittels der Hauptachsentheorie vollstetiger quadratischer Formen bewiesen 1560; — für die Iterierten stetiger symmetrischer Kerne 1522; — für einen symmetrischen Kern 1521, 1523, 1560f., — für die zum symmetrischen Kern gehörige quadratische Integralform 1362, 1509, 1525, 1560; —, Mercerscher Satz 1524, 1526, 1531, 1531, 1532, 1539; — nach den Eigenfunktionen polarer Integralgleichungen 1537, 1538; — für quellenmäßig darstellbare Funktionen 1364, 1525; — für die Resolvente 1523; — für die Spuren 1523, 1524; — bei uneigentlich singulären symmetrischen Integralgleichungen 1531, 1532, 1561; — bei Integralgleichungen mit symmetrisierbaren Kernen im Hilbertschen Falle 1538, im Kornschen Falle 1540, im Pellschen Falle 1539, 1571, Fehlen der — bei allgemeinen symmetrisierbaren und unsymmetrischen Kernen 1542/3, 1552, Zusammenhang der — bei symmetrisierbarem Kerne mit den Entwicklungstheoremen bei symmetrisierbaren Bilinearformen 1566, 1571; Verschärfungen der — 1242.

Entwicklungstheoreme nach den Fundamentalfunktionen (Eigenfunktionen) der Potentialtheorie 235, 235, 239/40; Sturm-Liouvillesche — 1238, 1259, 1260—1264.

Épais, — en p, en lui-même, épaisseur pleine 989.

Équation, — aux dérivées fonctionelles 1500; — génératrice 18; — aux variations 1325.

Ergänzungsfunktion 915.

Ergänzungsklasse 577, 666.

Erreichbare Punkte 367, 369, 370/71, 920, 928/29. 930; allseitig — 921; endlich — 921; geradlinig — 921.

Erreichbarkeit, allseitige, Invarianz 955.

Erzeugende Figur 448, 456; — des Borelschen Sterns 455.

Erzeugende Funktion 17.

Estensione minima 973.

Étendue 969; — extérieure, intérieure 966.

Eulersche Formel 91; —, Restglied 93, Jacobische Form 94, Kroneckersche Formen 95, Poissonsche Form 93.

Eulersche Identität 759; — Summationsmethode 477; — Transformation 447, 462; — Zahlen 44.

Euler-Maclaurinsche Summenformel 711.

Existenzbereich einer analytischen Funktion 406; —, Grenzpunkte 407; —, Randmenge 408.

Exponent einer Hölderschen Bedingung 191.

Exponentialmethode 685.

Exponentialreihe 25.

Extremale Menge 1016.

Extremumseigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen s. Eigenwerttheorie und quadratische Formen.

F

$\mathfrak{f}$, Mächtigkeit der Menge aller reellen Funktionen 875.

Fabersche Polynome 448, 499.

Faktoriellenreihen 1267; —, absolute Konvergenz 1270; —, Beziehung zu Dirichletschen Reihen 1271; —, Darstellbarkeitsbedingungen 1272; —, erster, zweiter Art 1267; —, gleichmäßige Konvergenz 1270; —, Konvergenzbereich 1268; —, Summabilität 1271; Verhalten auf der Konvergenzgeraden 1269.

Fakultätenreihen 682, 711, 1268; —, Gebiet der absoluten Konvergenz 682; —, Grenzkonvergenzabszisse 685;

—, Konvergenzabszisse 682; —, Konvergenzbereich 682; —, Konvergenzgerade 682; —, Konvergenzproblem 684; —, Summation 684; —, Transformationen 684; —, Verallgemeinerungen 691; —, Zusammenhang mit dem Laplaceschen Integral 683.
Faltung s. Bilinearformen und quadratische Formen.
Famille regulière d'ensembles 987.
Faßregel 55, 129.
Fast alle 939; — überall 974, 1179.
Fatou, Sätze über das Poissonsche Integral 223; —scher Satz 225, 424/25.
Fehlerabschätzung bei der Gaußschen Quadraturformel 66; — bei graphischer Quadratur 120.
Fehlerfunktion, erzeugende 54, 69.
Fejér, Sätze über die Summation Fourierscher Reihen 1205.
Felder, Riemannsche 391/92.
Fernwirkung, Probleme der — 1493.
Fischer-Rieszscher Satz s. u. Riesz.
Fixpunktsätze 961/62.
Fläche, einfache 900; geschlossene — 188/89, 930; Riemannsche Fläche 390, 392.
Flächen der Klassen A, Ah, B, Bh, C, D, Lh 186/87.
Flächenmaß 999.
Flächensatz von Bieberbach 357, 510/11.
Flächenstücke, durch Randsubstitutionen verbundene 190.
Fluktuierende Funktionen 1243.
Fonction, — fondamentale 1504; — de lignes 1498, 1500; maximum de la fonction f au point A 1003; — mesurable B 1044; —, minimum de f au point A 1003; — résoluble 1111; — simple 1063; — sommable 1042, 1047, 1057; — à variation bornée 1006; — à variation résoluble 1111.
Formelpolygonflächen 352.
Formen von unendlichvielen Veränderlichen, alternierende — 1561; bilineare — s. Bilinearform; Hermitesche — 1561, Eigenwerte vollstetiger Hermitescher — 1562, unitäre Transformation vollstetiger Hermitescher — in die kanonische Gestalt 1562; J-— (Jacobische) 1586, beschränkte J-— haben einfaches Punktspektrum und Streckenspektrum 1587, Transformation einer beschränkten quadratischen Form in eine Summe höchstens abzählbar vieler beschränkter J-— 1587, Zusammenhang der beschränkten J-— mit der Kettenbruchtheorie 1586/7, nichtbeschränkte J-— 1588/9, Spektraldarstellung der nichtbeschränkten J-— 1589, Zusammenhang der nichtbeschränkten J-— mit der Kettenbruchtheorie 1588/9, mit dem Momentenproblem 1589; zu J-Form gehörige Gleichungssysteme 1586, 1589; L-— 1426, 1590/1, Ähnlichkeitsproblem für nichtsymmetrische L-— 1591, reelle quadratische L-— 1590, Spektrum der L-— 1591, reguläre L-— 1590; Verallgemeinerungen der L-— 1591; quadratische — s. d.
Fortsetzung, analytische s. analytisch.
Fourierkoeffizienten 1161, 1189, 1192, 1234, 1393; —, asymptotisches Verhalten 1194; —, Minimumseigenschaft 1209, 1234.
Fourierreihe 73, 1189, 1192; abgeleitete — einer Funktion beschränkter Schwankung 1207/08, 1213, 1216; —, Besselsche Ungleichung 1209/10; —, Differentiation 1215; —, Faktorenfolgen 1215; fast überall divergente — 1203; fast überall konvergente 1216, 1236; —, Fejérs Sätze 1205; —, Gibbssche Erscheinung 1203/04; —, Integration 1214; konjugierte — 1198; —, Konvergenz 1194, absolute 1194, 1200, fast überall 1201, gleichmäßige 1200; —, Konvergenz- und Divergenzerscheinungen 1201; —, Konvergenzkriterien nach Dini 1195, nach Jordan 1196, nach Lebesgue 1197, nach Lipschitz 1196, nach Lipschitz-Dini 1197, nach de la Vallée Poussin 1196, nach Young 1196, anderer Art 1198, Vergleich der Kriterien 1197; —, Lebesguesche Konstanten 1202; mehrfache — 1223; —, Multiplikation 1214; —, Parsevalscher Satz 1209; —, Riemann-Lebesguesches Fundamentallemma 1192; —, Riesz-Fischerscher Satz s. d.; —, Singularität, du Bois-Reymondsche 1201, Lebesguesche 1201; —, Summation s. d.; trigonometrische Reihen als — 1192, 1221.

Fouriersches Integraltheorem 1243; — in seiner Bedeutung für Integralgleichungen 1. Art 1350, 1454; —, Verallgemeinerung 1243, 1243. 1594.

Fredholmsche Auflösungstheorie s. u. Integralgleichungen, lineare; — Determinante s. Determinanten; — Methode zur Lösung der Randwertaufgaben der Potentialtheorie 238.

Frobenius, Satz von — als Verallgemeinerung des Abelschen Grenzwertsatzes 10, 476.

Frontière 880.

Fubini, Satz 1118.

Fundamentalaufgabe in der Theorie der Abelschen Integrale 577.

Fundamentalbereich 189, 189.

Fundamentaldiskriminante 837.

Fundamentalfolge 1019.

Fundamentalform für den Divisor $\mathfrak{P}^r$ 557.

Fundamentalfunktionen 198, 235, 239/40; —, Reihenentwicklungen s. Entwicklungstheoreme.

Fundamentalgleichung für $\mathfrak{P}^r$ 557; —, Diskriminante 557.

Fundamentalpolygon 189.

Fundamentalprimteiler für eine Transformation 668.

Fundamentalpunkte einer inneren Grenzmenge 891.

Fundamentalsystem, absolutes 562; — für den Divisor $\mathfrak{P}^r$ 557; — für ein Ideal 560; — für ein Ideal $I(\mathfrak{Q})$ 566; — für die allgemeinen Integrale zweiter Gattung 617/18; — des Kongruenzkörpers $K(x,p)$ 647; — von Lösungen einer Differenzengleichung 692; — von Periodenwegen für eine Riemannsche Fläche 624, 629; — in bezug auf den Primteiler $x - a$ 562; — für $\mathfrak{R}$ 627; — für die Vielfachen eines Divisors 670.

Funktionen, Abelsche 641; absolut stetige — 1007; abteilungsweise stetige — 190; äquivalente — 1027; algebraische — 553, zweier unabhängiger Veränderlichen 651; analytische — s. analytisch; analytisch darstellbare — 1177; analytisch nicht darstellbare 1178; —, Approximation s. d.; approximativ stetige — 1114; Bairesche — s. d.; —, die keiner Baireschen Klasse angehören 1170; beschränkte, in ihrer Gesamtheit gleichmäßig beschränkte — 1078; — beschränkter Drehung 1007; — beschränkter Schwankung 1006/07, additive Intervallfunktionen von beschränkter Schwankung 1134, Differentiation von — beschränkter Schwankung 1093, Fourierkoeffizienten von — beschränkter Schwankung 1193, Fourierreihe von — beschränkter Schwankung 1196, formal abgeleitete Fourierreihe von — beschränkter Schwankung 1207/08, 1216, Zerlegung von — beschränkter Schwankung in ihre drei Bestandteile 1009, 1011, — beschränkter Schwankung von zwei oder n Veränderlichen 1007, — verallgemeinerter beschränkter Schwankung 1007, 1092, 1111; — beschränkter Spannung 489; — beschränkter Variation 1006; Besselsche — 1257, 1274; nach Borel meßbare — 1044; —, differentiierbare im Punkte x 1087, an einer Stelle (x, y) 1124, nirgends differentiierbare, stetige — 1091, 1091/92; — Einschnitt 417; — des elliptischen Zylinders 1274; endlichwertige — 1046; erzeugende — 17; fluktuierende — 1243; — von Funktionen 1498, 1500; —, ganze für die Stelle $\mathfrak{p}$ 537; —, ganze transzendente 425, asymptotisches Verhalten auf der reellen Achse 432, Beziehungen zwischen dem Maximalbetrag und dem Betrag des größten Gliedes ihrer Potenzreihe 442, Geschlecht 425, Geschlecht von Ableitung und Summe 441, Bestimmung des Geschlechtes aus den Koeffizienten 441, Größenordnung der Koeffizienten bei gegebenem Geschlecht 429, Grad 429, Grenzexponent 429, Verallgemeinerung des Grenzexponenten 430, Grenzexponent als Divergenz- oder Konvergenzexponent 430, Hadamardsche Sätze 429, 431, 433, 435, Höhe 429, Laguerresche Sätze 425, Lindelöf-Boutrouxsche Ordnungstypen 432, ganze — vom Maximaltypus 431, vom Minimaltypus 431, 467, vom Normaltypus 431, Ordnung, ordre apparent 430, Ordnung und Grenzexponent 433, 437, Ordnung und Koeffizienten 431, Ordnung Null 442, ganze — der Ordnung Null genügen keiner algebraischen Differentialgleichung erster

Ordnung 444, Ordnung unendlich 442, Poincarésche Sätze 429, 433, primitive ganze — 427, 434, ihre Abschätzung nach unten 435, Rang 429, ganze — von regelmäßigem Wachstum 431, Weierstraßsche Produktdarstellung 425, Wurzelrealität 426, 428; ganzwertige — 691; gebrochene — für die Stelle $\mathfrak{p}$ 537; Greensche — s. d.; —, Grenze, obere (untere) in einem Punkt 1003; Grenze, obere (untere) bei Vernachlässigung der Mengen einer bestimmten Gattung 1088; —, Grenzwerte, rechts- und linksseitige 1005; —, halbstetige, aufwärts, abwärts, nach oben, unten 1003/04; harmonische — 198; Hermitesche Funktionen 1233; integrierbare — nach Denjoy 1065, 1191, nach Harnack-Lebesgue 1191, nach Lebesgue 1047, 1191, nach Riemann 1033, 1064, 1191; integrierbare und beschränkte — 1191; — mit integrierbarer k^{ter} Potenz 1112, 1191; Jacobische — 1233; — 0ter, 1ter, α^{ter} Klasse 1168/9; — der Klasse α nach Gevrey 1322; — komplexer Variablen 379, 1011; — von konstanter λ-Variation 1008; —, Konvergenzwert 417; — von Kurven 1498, 1500; —, Limes, oberer bzw. unterer im Punkte A 1003; — Limesfunktion, obere bzw. untere 1003; — von Linien 217, 1015, 1028; — $M(r)$, $\mu(r)$, $\mathfrak{M}(r)$ 508; meßbare — 1042, meßbare — bezüglich einer absolut additiven Mengenfunktion φ [φ-meßbare —] 1045, Äquivalenz der meßbaren — zu Funktionen höchstens zweiter Klasse 1182, approximative Stetigkeit der meßbaren — 1184, meßbare — nach Borel 1044, nach Lebesgue 1042, nach Lebesgue für mehrere Veränderliche 1115/6, Quasistetigkeit meßbarer — 1184, Verallgemeinerungen der meßbaren — 1045; monotone — in einem Bereich 336, 1293; —, nicht beschränkte, meßbare, aber nicht summierbare 1057; nicht meßbare — 1044; — erster, α^{ter} Ordnung 1171; — aus $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}$ 1009; — $\varphi(a_0)$ 412; φ-meßbare — 1045; primitive — 1086, bei ganzen transzendenten Funktionen s. d., primitive — einer gegebenen Ableitung oder Derivierten 1104, primitive — bei zwei Veränderlichen 1125, unstetige primitive — 1104, primitive — eines Körpers 543; punktweise unstetige — 1005; punktweise unstetige — in bezug auf eine perfekte Punktmenge 1167; quasiunendliche — 496; quellenmäßig darstellbare — 1242, 1364; — reeller Veränderlichen 851, Anwendung der Mengenlehre 1002; — unendlich vieler reeller Veränderlicher 1499; —, Schrankenfunktion obere bzw. untere 1003; —, Schwankung in einem Punkte 1003, k-fach iterierte Schwankung 1003, mittlere Schwankung 1034, 1038; stetige — 1003/4, 1024, stetige — in bezug auf eine beliebige Menge 1004, stetige — in bezug auf eine perfekte Menge 1004, 1167, Erweiterung einer stetigen — 1176, im Element a stetige — 1024, stetige — mit nicht überall konvergenter Fourierreihe 1192, 1201, nirgends differentiierbare stetige — 1091, 1095, oberhalb bzw. unterhalb stetige — 1003; streckentreue — 388; streckenweise konstante, stetige — 1053; summierbare (sommable) — 1047, 1057, summierbare — mehrerer Veränderlichen 1115; — α^{ter} Stufe 1172; totalisable — 1065, 1066; total stetige — 1007, 1110, nach oben (unten) total stetige — 1111, in einer perfekten Punktmenge total stetige — 1115; total unstetige — 1005; trigonometrische — s. d.; in eine trigonometrische, aber nicht in eine Fourierreihe entwickelbare — 1221; —, die unbestimmte Integrale sind 1110; —, vollstetige von unendlichvielen Veränderlichen 1405, 1556; vielwertige —, unterscheidende Zeichen 28; —, Variation s. d.; winkeltreue — 388; zahlentheoretische — s. d.; zyklometrische — 37.

Funktionale, Theorie der — 556.

Funktionalgleichung $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$ 22, 26.

Funktionalgleichungen, Existenztheorem für nichtlineare — 1500; lineare — 1467, besondere lineare — 1476 ff., Behandlung linearer — nach dem Muster der Integralgleichungstheorie 1470; — für orthogonale Polynome 1234.

Funktionaloperationen, lineare 1015, 1466, 1498; Algebra der — 1466,

1548, 1595; — — im R_∞ 1470; Darstellung linearer —: nach Hadamard, Fréchet und F. Riesz 1469/70, Produkt zweier linearer — 1467; Verallgemeinerung der Theorie der eigentlich singulären Integralgleichungen mit symmetrischem Kern auf symmetrische — 1593.

Funktionaloperationen, nichtlineare 1498ff.; Approximatien —r — durch Polynome 1499; Übertragung der Grundbegriffe der Analysis auf — — 1500.

Funktionalraum 1026, 1468, 1469f.

Funktionalrechnung 1015.

Funktionaltransformationen 1466; lineare — 1466, Invertierung linearer — 1470f.; Umkehrung von allgemeinen — 1500; vollstetige — 1471, 1476.

Funktionenelemente von Z, die zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehören 539.

Funktionenfamilien, beschränkte 500; konvexe — 513; normale — 496; quasinormale — 496; schlichte — 510; schlichte und beschränkte — 512.

Funktionenfolgen 1136; — einer Veränderlichen 1137; — mehrerer Veränderlichen 1185; kompakte — 496; —, Konvergenz s. d.; monotone — 1171; normale — 496; oberhalb bzw. unterhalb gleichmäßig oszillierende — 1142; —, Schwankung 1142; — vom Typus Ω 1169.

Funktionenklassen, Bairesche 1168.

Funktionenmengen, gleichgradig stetige 1144, gleichgradig absolutstetige (gleichgradig totalstetige) 1083, kompakte — 1145.

Funktionenraum 1025, 1026, 1468, 1596; Transformationsgruppen und ihre infinitesimalen Transformationen in der Geometrie des —s 1468.

Funktionensystem, abgeschlossenes 1194, 1215, 1237; adjungiertes — 1232; adjungiertes —, Existenz 1234; biorthogonales — s. d.; invariantes — eines unsymmetrischen Kernes 1545/6; orthogonales — s. d.; polares — s. d.; unitäres — 1536.

Funktionentheorie, reelle, in allgemeinen Räumen 1023/4.

Funktionsbegriff, allgemeinster 1009.

Funktionselement 389, 522; —, Beziehung zwischen seinen Koeffizienten und den Singularitäten der durch dasselbe definierten Funktion 460; —, Umgebung 391.

Funktionselemente für die algebraische Funktion U, die zur Stelle $\mathfrak{P}$ gehören 548.

G

G_α, g_α 1171.

Galoisscher π-adischer Zahlkörper, der zu einer Gleichung $F(x) = 0$ gehört 649.

Gammafunktion 677; —, bei Auflösung von Differenzengleichungen 717; —, Hölderscher Satz 703, Verallgemeinerung des Hölderschen Satzes 719.

Ganz, algebraisch 545, 646; —er Divisor einer Funktion 540, 552; —e Elemente des Kongruenzkörpers $K(x, p)$ 647; —e Funktion für die Stelle $\mathfrak{p}$ 537; —e transzendente Funktionen, s. unter Funktionen; —e Zahl in bezug auf p 642.

Ganzwertige Funktionen 691.

Gaußsche Interpolationsformel 73; — Interpolationsreihe 687; — Quadraturformel 58, Bestimmung der Abszissen 58, Koeffizientenberechnung 64, spezielle Fälle 71, verallgemeinerte 77, Verallgemeinerung von August 77, Verallgemeinerung von Christoffel 78; —scher Satz 1120.

Gebiet 181, 898, 899, 899, 1279; abgeschlossenes — 899; —, Außenrand 920; —, Begrenzung 182, 907, 916, 923, Begrenzung eines n-dimensionalen —es 929, Struktur der Begrenzung 925; beschränktes — 182; ebenes — der Klasse A, B oder B' 185, Ah oder Bh 185, C 186, D (L oder M) 186, E (N oder Q) 186; — über einseitigen Flächen 188; — bei Hausdorff 899; ideal geschlossenes — 188; ineinander geschachtelte —e 193; Jordansches — 183; konvexes — in bezug auf einen seiner Punkte 235; offenes — 899; p-fach zusammenhängendes — 183, 195, 906; —, Rand 182; räumliches — der Klasse A (B, B', Ah oder Bh) 187, der Klasse C, D, Lh 187; schlichtartiges — 183, 194, kanonische Darstellung eines schlichtartigen —es 194, unendlich vielblättriges schlichtartiges — 193; —, Zerlegungssätze 918; zusammenhängendes — 899.

Gebietsstetig 954.
Gebilde, algebraisches 581, 605; analytisches — 389.
Gebrochen, algebraisch 545, 646; —er Divisor einer Funktion 540, 552; —e Funktion für die Stelle $\mathfrak{p}$ 537; —e Zahl in bezug auf p 642.
Gemeinschaftsgrenze, obere bzw. untere 940.
Genau teilbar durch $\mathfrak{p}^{\varrho}$ 538, durch $\mathfrak{P}^{\sigma}$ 574, durch $\mathfrak{P}_i^{\varrho_i}$ 549, durch log $\mathfrak{P}$ 574.
Genauigkeitsgrad von Quadraturformeln 51, 90.
General Analysis 1024, 1471 ff., 1595 f.; Kritik der — 1476, 1596.
Genre bei unendlichen Determinanten 1418/9; Punkte vom 1. oder 2. — 948.
Geradenmengen 1014.
Geschlecht eines algebraischen Körpers 573, 577; — der Fredholmschen Determinante 1518, 1551 f.; — einer Divisorenklasse 668; — ganzer transzendenter Funktionen s. Funktionen; numerisches oder arithmetisches — 673; virtuelles — 668.
Geschränkt 859.
Gewicht der Weierstraßpunkte 606.
Gewöhnlicher singulärer Punkt 586.
Gewöhnliche Differentialgleichungen s. Differentialgleichungen.
Gibbssche Erscheinung 1203/04 — bei Sturm-Liouvilleschen Reihen 1260.
Gitterpunkte in allgemeinen Bereichen 826; — im Ellipsoid 824; in der Hyperbel 816; — im Kreise 823.
Gleich für den Bereich von $\mathfrak{p}$ 538, von $\mathfrak{P}$ 546, 648, von p 642, 643; — für die Stelle $\mathfrak{P}$ 546.
Gleichgewicht, elektrisches, für zwei leitende Kugeln 290.
Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten 1327, 1496, 1535.
Gleichgradig stetige Funktionenmengen 1144; — absolutstetig (— totalstetig) 1083.
Gleichungssysteme, lineare mit unendlichvielen Unbekannten; Abschnittsmethode 1414; — mit absolut konvergenter Zeilensumme der Koeffizienten und beschränkter Zeilenbetragsumme bei beschränkten Unbekannten 1444; allgemeine Auflösungsmethoden in historischer Übersicht 1414 ff.; allgemeinste — für Unbekannte von beschränkter Quadratsumme 1433, analytisch geometrische Grundlagen 1434, Schmidtsche Auflösungsformeln 1439/41, Existenz einer beschränkten Reziproken 1442; beschränkte — für Unbekannte von beschränkter Quadratsumme 1416, 1423 1429, Abspaltungsverfahren 1413, 1432, Abschnittsmethode 1432, Lösbarkeitskriterien, notwendige und hinreichende 1430, 1582, Lösung durch die Hilbsche Reihe 1431, 1582, Lösung vermittels der Jacobischen Transformation 1431, 1503; Dixons — für beschränkte Unbekannte bei konvergenter Kolonnenschrankensumme 1443/4, determinantenfreie Sätze 1444, Lösung von Dixon durch Abspaltung und Entwicklung nach Iterierten 1443/4, Dixons — bei absolut konvergenter Zeilensumme und konvergenter Zeilenbetragssumme 1444, Dixons — bei Konvergenzbedingung für die Unbekannten unter Zugrundelegung eines konvexen Aichkörpers 1447; general analysis und die Auflösung von —n 1025, 1472 ff.; H. v. Kochs Lösung von —n bei beschränkten Unbekannten durch unendliche Determinanten 1418 ff., andere Konvergenzbedingungen bei H. v. Kochs —n 1443; Konvergenzbedingungen für die Unbekannten x_n von —n: beschränkte Quadratsumme der Unbekannten s. allgemeinste —, beschränkte — und vollstetige —; beschränkte Unbekannte bzw. Konvergenz der Summe der absoluten Beträge der Unbekannten 1415, s. auch Dixons — und Kochs —, $|x_n| < M\varrho^n$ 1445, $\sum |x_n|^p$ konvergent 1421, 1445, Konvergenzbedingung unter Zugrundelegung eines konvexen Aichkörpers als umfassendste Konvergenzbedingung 1446 ff., s. auch Dixons — und vollstetige —; Methode der unendlichen Determinanten 1347, 1414, 1417 ff., Kritik der Methode der unendlichen Determinanten 1421/2, s. auch unter Determinanten; numerische Auflösungsmethoden bei —n 1502, Seidels Verfahren zur numerischen Auflösung von —n —n 1502 f.; vollstetige — für Unbekannte von beschränkter Quadrat-

summe 1369, 1399, 1429, Abspaltungsverfahren nach Dixon 1412, 1502, Alternativsatz 1409, determinantenfreie Sätze 1410ff., Hilberts Lösungsmethode vermittels des Auswahlverfahrens 1407ff., Vermeidung der Auswahl 1421, 1433, Lösung durch Abspaltung und Entwicklung nach Iterierten 1413, Lösung durch Zerspaltung der entsprechenden Bilinearform in eine symmetrische und eine schiefsymmetrische Form 1412; vollstetige — bei Konvergenzbedingung für die Unbekannten unter Zugrundelegung eines konvexen Aichkörpers, Abspaltungsverfahren und Entwicklung nach Iterierten, determinantenfreie Sätze 1447f.; zeilenfinite — 1448f.; Zusammenhang der linearen — mit Integralgleichungen 1367, 1394ff.

Gleichungssysteme, nichtlineare mit unendlichvielen Unbekannten 1481ff.; Existenzsatz von Koch für die Lösungen von —n —n 1482, Erweiterung auf allgemeinere Gleichungssysteme 1483/4; Lösbarkeit von —n im Kleinen 1482ff., Übertragung der Puiseuxschen Sätze durch Schmidt 1484; Verzweigungsgleichung 1485.

Goldbachscher Satz 809.

Grad einer algebraischen Funktion 554; — einer Divisorenklasse 667; — einer ganzen transzendenten Funktion 429; — einer Kurve 603; — einer Primzahl 646; — der ungleichmäßigen Konvergenz 1142.

Greensche Formel 210, 246, 1248, 1289.

Greensche Funktion bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 1250, adjungierte — 1251, erweiterte — 1251; bei partiellen linearen Differentialgleichungen vom ellipischen Typus, — (erster Art, am Rande verschwindende) 1287, — bei adjungierten Differentialgleichungen 1289, bei sich selbst adjungierten Differentialgleichungen 1254, asymptotisches Verhalten am Rand 1290, Ungleichheiten 1289, — dritter Art 1305, erweiterte 1305. zweiter Art 1304, — bei gemischten Randbedingungen 1305; — in der Potentialtheorie 218, 246, asymptotisches Verhalten am Rand 248, Ungleichheiten 247/8, beim dritten Randwertproblem 280, für einfach zusammenhängende schlichte Gebiete 303, erweiterte 252, 280; — für spezielle Gebiete 246, 250, 289; —, graphische Konstruktion 170; — als Kern einer Integralgleichung 1362, 1526; —, positiv definite 1252; — zweiter Art 250, asymptotisches Verhalten in der Nachbarschaft des Randes 252.

Greenscher Satz 211, 1120; — — für Integrodifferentialgleichungen 1497; — Tensor bei Systemen partieller Differentialgleichungen 1254.

Grenze, obere bzw. untere 859, — einer Funktion in einem Punkt 1003, einer Funktion bei Vernachlässigung der Mengen einer bestimmten Gattung 1088; — einer Menge 880; — zwischen A und B 881.

Grenzelement einer unendlichen Folge von Elementen 1015; —, Rieszsche Definition 1016.

Grenzexponent 429.

Grenzfunktion, Integrierbarkeit 1076; —, obere bzw. untere 1003; — stetiger Funktionen 1167; — einer stetigen Funktionenfolge, Bedingung für ihre Stetigkeit 1163.

Grenzkonvergenzabszisse bei Fakultätenreihen 685.

Grenzkreis 307.

Grenzkreisfall 1264.

Grenzkreistheorem 348.

Grenzmenge, äußere, 890; engere — 939; innere — 890/91, 890; vollständige — 939.

Grenzpolygone 348.

Grenzpunkt 860, 860, 861, 880, 926; — einer Mengenfolge 939; — für fast alle Mengen einer Folge 939.

Grenzpunktfall 1264.

Grenzschar von Funktionenfolgen 1521.

Grenzsekantenwinkel 1087.

Grenzstück 902.

Grenzvektor im R_∞ 1437.

Grenzwertausdrücke für Eigenwerte und Eigenfunktionen 1513, 1515.

Grenzwerte (rechtsseitige und linksseitige) 1005.

Grenzwertsatz, Abelscher 475.

Größter gemeinsamer Teiler $\mathfrak{d}$ 540, $\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_\nu)$ 553; — Divisor 866.

Groß, Satz 418; —, weitere Sätze 420/1.
Grundlösung 1288, 1295, 1296, 1307; — einer Integrodifferentialgleichung 1497.
Grundrestbelegungen 245.
Gürtelförmige Verschmelzung 258.

H

H, Hermite-Eigenschaft 1474.
Hadamard, Determinantensatz 1356 ff., 1366, 1371, 1421, 1423; Multiplikationssatz 464; —-Fabryscher Lückensatz 461, 735; —sche Sätze über die Lage der Pole 473.
H-Bedingung 191.
Häufungsbereich eines Einschnittes 417; — einer singulären Stelle 417, 421.
Häufungselement 1015.
Häufungskomponente 195.
Häufungskontinuum 913.
Häufungspunkt 860, 860, 861, 870; —, linksseitiger, rechtsseitiger bzw. beiderseitiger 863; — von nicht abzählbarer Ordnung 870; — im Hilbertschen Raum 1434.
Häufungsstelle 12.
Häufungsvektor im R_∞ 1437.
Halbintegral, oberes bzw. unteres 1111.
Halbstetig, abwärts, aufwärts, nach oben, nach unten 1003/04; —e Oszillation 1142.
Hamiltons Integraldarstellungen 1243.
Harmonische Funktionen 198.
Harnacksche Sätze 230, 1285, 1287, 1308; —s Verfahren bei uneigentlichen Integralen 1053, 1055.
Harnack-Lebesguesches Integral 1057, 1191.
Hauptachsenproblem, Analogie bei Integralgleichungen zum — s. d. sowie bei Eigenwerttheorie; Erweiterung des —s auf Scharen quadratischer Formen 1564.
Hauptachsentheorie vollstetiger quadratischer Formen 1553 ff.; s. auch quadratische Formen.
Hauptcharakter 796.
Hauptderivierte, vier 1086.
Hauptfunktionen s. Eigenwerttheorie bei unsymmetrischem Kerne.
Hauptgebiet 918, 925.
Hauptgleichung (für eine Funktion eines Körpers) 544.
Hauptklasse (Divisoren) 541, 568, 666; — (Klasse der Nullwege) 621.
Hauptkurve eines Körpers 605.
Hauptlösungen einer linearen, inhomogenen Differenzengleichung 711, Bestimmung durch gewisse Grenzbedingungen 715; — eines Systems von Differenzengleichungen 700.
Hauptmatrixlösungen 699.
Hauptpunkte, Bereich der Hauptpunkte 417; — eines Primendes 928.
Hauptstern s. Stern.
Hauptwerte 97.
Hauptwert von a^m 23; — von $\arcsin x$ 39; — eines Integrals 1051; — des Logarithmus 28; — der Potenz a^x 29.
Heckesche Zetafunktion 847.
Heine-Borelsches Theorem 882.
Hellingersche Integrale 1060, 1073, 1584.
Henselsche Reihenentwicklungen 654.
Hereditäre Mechanik 1493.
Hermite-Eigenschaft 1474; —sche Form 502; —sche Formen von unendlichvielen Veränderlichen s. Formen; —sche Funktion 1233; —sche Interpolationsformel 67; —sche Kerne 1535; —sche Matrix 1561; —sche Polynome 76, 1274.
Hessesche Determinante einer Kurve 597.
Hilbert, —sches Auswahlverfahren s. d.; —scher Raum 1026, 1434.
Himmelsmechanik, Integrationsmethoden 157.
Höhe einer ganzen transzendenten Funktion 429.
Höldersche Bedingung 191, 1279, Exponent 191, 1279, für Lipschitzsche Bedingung 191; —s Mittel 477; —r Satz über die Gammafunktion 703; — Ungleichung 1445; —s Verfahren bei uneigentlichen Integralen 1052, 1055.
Hohlraumstrahlung 1528.
Homöie 952.
Homöomorph 932.
Homogene Bestandteile, Zerlegung der in sich dichten Mengen in — Bestandteile 873; — Menge von der Dichte d 988; — Menge im Sinne der Analysis situs 989.
Horizontalstreifen, Lebesguesche Zerlegung in — 1040, 1044, 1045.

Hülle, abgeschlossene, einer Menge 865; maßgleiche — 975.
Hyperbolische Funktionen 37.
Hyperbolisch-elliptische Differentialgleichungen 1244.
Hyperelliptische Gebilde 611.
Hypergeometrische Funktionen zur Auflösung von Differenzengleichungen 717; — Reihe 45.

I

J, Funktionaloperation 1474.
Ideal geschlossene Gebiete 188.
Ideal in z 555.
Idealtheoretische Funktionen 849.
Identität von Potenzreihen 13.
Implizite Funktionen 528, 1179.
Independenter Ausdruck der Binominalkoeffizienten 20.
Inhärenz, totale 872; —, ν^{te} oder ν^{ter} Ordnung 873.
Inhalt 962, 965; äußerer bzw. innerer — 965; —, Definition, Cantorsche 962, 964, Denjoys Verallgemeinerung der Cantorschen Definition 975, Jordanscher — 965, äußerer bzw. innerer Jordanscher — 965, Stolz-Harnacksche Definition 962, 966; linearer —, Linearinhalt 995, nach Minkowski 995, nach Young 996; m-dimensionaler — im n-dimensionalen Raum 995, nach Minkowski 996; zweidimensionaler — nach Minkowski 995; — und Maß, Beziehungen 975, Unterschied 969; — spezielle Sätze 982.
Inhaltsfunktion 993.
Inhaltsproblem, Lebesguesches 972; —, Mengen, für die es nicht lösbar ist 978; verallgemeinertes 979.
Innere *und äußere* Punkte 880; — Punkte von s 620; — Grenzmenge 890/1, 890.
Integrabel s. integrierbar.
Integrabilität s. Integrierbarkeit.
Integral, ausgezeichnetes einer Differenzengleichung 678; —, bestimmtes, beschränkter Funktionen einer Veränderlichen 1032, nicht beschränkter Funktionen 1050; — nach Borel 1060, 1064; — nach Cauchy 1032; — nach Darboux, oberes und unteres 1037, 1061, 1063, geometrische Definition 1048/49; — nach Denjoy 1060, 1065, 1112, allgemeines 1065, 1112, 1115, Differentiierbarkeit 1096, spezielles 1065, 1069, 1092, unbestimmtes 1111, Verallgemeinerung 1069, 1070, weitere Integraldefinitionen 1071, Zusammenhang mit Differentiation 1069, 1096, 1101, 1108, 1110, 1115; — nach Dini 1052; — einer Funktion mehrerer Veränderlichen 1115, unbestimmtes — einer Funktion mehrerer Veränderlichen 1130, Charakterisierung 1132, Differentiierbarkeit 1133; —, Gattung, erster 579, erster und zweiter 616, erster und zweiter, Periodenrelationen 628, dritter 618; gleichgradig absolutstetige —e 1083; gleichgradig totalstetige —e 1083; — nach Harnack-Lebesgue 1057; —, Hauptwert 1051; — nach Hellinger 1060, 1073, 1584; inneres — 207; iterierte —e, Vertauschbarkeit der Integrationsfolge 1120; —, Konvergenz, absolute (unbedingte) bzw. nicht absolute (bedingte) 1055, 1122/23; Laplacesches — 683, 688; — nach Lebesgue 1039, 1049, 1191, 1231, deskriptive Definition 1040, Eigenschaften 1058, geometrische Definition 1049, konstruktive Definition 1045, Majoranten, Minoranten 1075, mehrfaches 1115, auf oder über einer Menge 1046, für nicht beschränkte Funktionen 1056, oberes, unteres 1047, 1049, unbestimmtes 1110, 1113, 1132; mehrfaches — 1115, numerische Integration 82, 99, partielle Integration 1122, Transformation 1121, uneigentliches 1122, Zurückführung auf wiederholte einfache Integration 1117; — nach Perron 1060, 1074; — nach Pierpont 1059, 1061; Poissonsches — 198, 220—225, 1207; — nach Radon 1072; — mit rationalem Integranden 581; — nach Riemann 1033, 1061, 1063, 1064, 1191, geometrische Definition 1048, unbestimmtes 1111; — nach Riesz 1060, 1063; singuläres — 1205, 1225, 1239, Kern eines singulären —es 1239; — nach Stieltjes 1060, 1071, erweitertes 1211, Verallgemeinerung 1071/3; unbestimmtes — einer Ableitung oder Derivierten 1105, unbestimmtes —, allgemeinere Auffassung 1113, 1132, charakteristische Eigenschaften 1110, 1132, Differentiierbarkeit 1096, 1133, als Mengenfunktion 1113, 1132; uneigentliches —

1050, mehrfaches uneigentliches — 1122, uneigentliches — nach dem Verfahren von Cauchy-Dirichlet 1051, von Harnack 1053, von Hölder 1052, von Pierpont 1054, von de la Vallée Poussin 1054, Vergleich der verschiedenen Verfahren 1055; — nach Young, 1. Definition 1059, 1060, 2. Definition 1060, 1062, Youngs Verallgemeinerung des Denjoyschen —s 1070.

Integralbegriff, Verallgemeinerung 1059.

Integraldarstellungen 1243; — analytischer Funktionen 453; — in Anschluß an eigentlich singuläre Integralgleichungen zweiter Art 1594; — bei Auftreten singulärer Stellen der Differentialgleichungen 1264; — bei Dirichletschen Reihen 749; — von Kettenbrüchen durch Stieltjes 1578, 1583, 1587/9; Parsevalsche — 465; — bei symmetrisierbaren Kernen 1243, 1567.

Integralform; bilineare — s. Polarform; — quadratische, die zu einem symmetrischen Kern gehört 1362, 1509 ff., 1518 ff., 1525, 1560, 1592.

Integralformel von Cauchy 386, 519.

Integralgleichungen, lineare, Abelsche — 1350, 1464 f.; algebraischer Grundgedanke 1340 f.; allgemeine algebraische Analogie 1343; Analogie zum Hauptachsenproblem 1342, 1352, 1353, 1359, 1504 ff., 1513 ff., 1521, 1527; Alternativsatz bei — 1376 f., 1409; Art, — dritter Art 1450 f., 1537, — erster Art 241, 1344, 1453 ff., besondere — erster Art 1456, Lösbarkeitskriterien bei — erster Art 1455, — erster Art mit stark singulären Kernen 1454, Hilberts Reziprozitätsformeln und verwandte Formeln für — erster Art 1454, Zurückführung von — erster Art auf das Momentenproblem 1457; — zweiter Art in ihrer besonderen Bedeutung 1344, 1449; Auflösungstheorie bei — zweiter Art, Grundgedanke 1340, Courants Auflösungstheorie durch Übertragung des Hilbertschen Auswahlverfahrens bei vollstetigen Gleichungssystemen 1382, 1407; Dixons Auflösungstheorie 1368, 1377; Enskogs Auflösungsmethode 1383, 1399, 1502; Fredholms Auflösungstheorie 1351, 1356, 1370 ff., Auflösung durch Entwicklung nach Iterierten 1347, 1351, 1353, 1382 f., 1413; Hilberts Auflösungstheorie durch Grenzübergang 1375, durch Übergang zu unendlichvielen Variabeln 1367, 1382, 1392; Entwicklung nach Iterierten (Neumannsche Methode) 1347, 1383 f., vgl. auch Iterierte; Schmidtsche Auflösungstheorie durch Abspaltung und Entwicklung nach Iterierten 1377, 1388, 1472, 1501, im Anschluß an seine Eigenwerttheorie 1381, Schmidts Auflösungs symmetrischer Integralgleichungen vermittels des Entwicklungssatzes nach Eigenfunktionen 1525; Auflösungstheorie uneigentlich singulärer — durch Übergang zu iterierten Kernen 1386, durch Modifikation der Fredholmschen Formeln 1386, durch das Schmidtsche Abspaltungsverfahren 1388; belastete — 1243, 1389, 1474, 1532; determinantenfreie Sätze bei — 1376; Eigenfunktionen, Eigenwerte s. Eigenwerttheorie; Entwicklungstheoreme nach Eigenfunktionen s. Entwicklungstheoreme; —, Fredholmsche Formeln 1370, Hilberts Ableitung der Fredholmschen Formeln bei symmetrischem Kern durch Grenzübergang 1375, Modifikation der Fredholmschen Formeln bei uneigentlich singulären — 1386, Verifikation der Fredholmschen Formeln 1375, Unifizierung der Fredholmschen Theorie 1474; eigentlich singuläre —n s. unter singuläre —; generalisierte — in der general analysis 1475; gemischte — 1389, 1532; Hauptfunktionen bei — mit unsymmetrischem Kerne s. Eigenwerttheorie bei unsymmetrischem Kern; Integrationsbereiche, allgemeinere für — 1388, Abhängigkeit der Lösungen vom Integrationsbereich 1391, — bei komplexen Integrationswegen 1389, 1451; Kern von — s. Kern; — mit symmetrisierbaren Kernen s. bei Kern; numerische Behandlung von — 1399, 1501 ff.; polare — 1399, 1536 ff., Hilberts Behandlung polarer — durch Übergang zu unendlichvielen Veränderlichen 1537, 1567; Pseudoresolvente von — 1374, 1377; — bei Randwertaufgaben von Differentialgleichungen s. Randwertaufgaben; Resolvente (lösender Kern) von —

1351, 1373, Darstellung der Resolvente durch iterierte Kerne 1351, 1383, Entwicklung der Resolvente nach Eigenfunktionen 1523, Partialbruchzerlegung der Resolvente 1548; reziproke Funktion bei — 1351; singuläre — zweiter Art, uneigentlich singuläre symmetrische — 1531, s. auch unter Auflösungstheorie und Eigenwerttheorie; eigentlich singuläre — 1265, 1302, 1303, 1450 ff., 1591; eigentlich singuläre — mit ctg-Kernen 1452, mit unendlichen Grenzen 1452; eigentlich singuläre — zweiter Art mit beschränktem symmetrischen Kern 1592, Differentiallösungen (symbolisch) eigentlich singulärer homogener — 1593, Basisfunktion einer Differentiallösung 1593, vollständiges System von Differentiallösungen 1593, Entwicklung quellenmäßig darstellbarer Funktionen nach Eigenfunktionen und Differentiallösungen eigentlich singulärer — in Verallgemeinerung des Fourierschen Integraltheorems 1594, Spektrum eigentlich singulärer — 1593; eigentlich singuläre — zweiter Art mit nichtbeschränktem Kern 1595; sukzessive Approximationen bei — 238, 1348, 1461; Systeme von — 1390, 1532; Systeme von — mit Symmetriebedingungen 1532; Umwandlung von — in lineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten 1367, 1395 f., Umwandlung mittels des Riesz-Fischerschen Satzes 1397, Umwandlung bei unstetigen Kernen 1397, Umwandlung bei Wahl spezieller Orthogonalsysteme 1398, Umwandlung von polaren — 1399, 1538, Umwandlung von eigentlich singulären — in lineare Gleichungssysteme 1593, Umwandlung von linearen Gleichungssystemen mit unendlichvielen Unbekannten in — 1396; — mit unendlichen Integrationsintervall 1388, 1452; Volterrasche — 1459 ff., Volterrasche — erster Art 1350, 1459, Volterrasche — erster Art für Funktionen von zwei Veränderlichen 1463, Volterrasche — zweiter Art 1349, 1460, Lösung Volterrascher — zweiter Art durch Entwicklung nach iterierten Kernen 1351, 1460, Verhalten der Lösungen in der Umgebung von $s = 0$ 1460 f., Volterrasche — zweiter Art mit nicht absolut integrierbaren Kernen 1462, besondere Volterrasche — 1464 ff., funktionale Volterrasche — zweiter Art 1463 f., singuläre Volterrasche — 1461, 1463, Systeme Volterrascher — 701, 1462, Transformationsgruppen aus Volterraschen — 1468, Verallgemeinerte Volterrasche — 1462 ff.

Integralgleichungen, nichtlineare 1481 ff.; Lösbarkeit von — im Kleinen 1481, Lösung durch sukzessive Approximationen 1483; spezielle — 1481, 1486, 1490; Übertragung der Puiseuxschen Sätze durch Schmidt auf — 1327, 1484 ff.; Verallgemeinerung der Lösung von — 1500; — mit vertauschbaren Kernen 1492; Verzweigungsgleichung bei — 1485 f.; Volterrasche — 710, 1483, 1489, Volterrasche — mit vertauschbaren Kernen 1489; Volterrasche — mit vertauschbaren Kernen $K_\nu(s-t)$ 1489.

Integralkurve 111; —, Einzeichnung 120; —, Konstruktion der Krümmungsradien 121.

Integralpotenzreihen 1484, 1488, 1491, reguläre Konvergenz von — 1484.

Integralrechnung, Fundamentalsatz 1101.

Integralsatz von Cauchy 384, 519, Beweis von Goursat 385; — für reelle Funktionen 1125.

Integraltheorem, Fouriersches s. bei Fourier.

Integrant von Parabeln 84.

Integration 1031; — von Differentialgleichungen s. Differentialgleichungen; — durch Differentiation unter dem Integralzeichen 1059; — von Differenzengleichungen 692; —, inverser Prozeß der Differentiation 1100; — nicht ganzzahliger Ordnung 488; partielle — 1059, von mehrfachen Integralen 1122; — von Reihen 1076, gliedweise — 1077, vollständig (gliedweise) integrierbare Reihe 1083; — durch Substitution 1059.

Integrationsbasis 83, 111, 112; —, Änderung 122.

Integrationskonstanten bei graphischer Quadratur 125.

Integrationsmethoden der Differen-

zenrechnung 150; — der Himmelsmechanik 157.
Integrationspol 83.
Integrationsproblem nach Lebesgue 1041.
Integrator, Pascalscher 142.
Integrierbar nach Denjoy 1065, 1191; — nach Harnack-Lebesgue 1191; — nach Lebesgue 1047, 1191, 1231; — nach Riemann 1033, 1191; —e Menge 963; —es Punktsystem 1034.
Integrierbarkeit der Ableitung und der vier Derivierten 1098, 1099.
Integrierbarkeitsbedingung beim Riemannschen Integral 1034; — für $pdx + qdy$ 1125.
Integritätsbereich der Klasse Q 572.
Integrodifferentialgleichungen, lineare 1478, 1493f.; — 2. Ordnung vom elliptischen Typus mit variabeln Integrationsgrenzen, Grundlösung, 1. und 2. Randwertaufgabe 1496/7, — höherer Ordnung 1497, — von hyperbolischem und parabolischem Typus 1497; elliptische — mit konstanten Integrationsgrenzen 1498; Randwertaufgaben für — — 2. Ordnung 1495, 1497; besondere — — 1495; Verallgemeinerungen der — 1500.
Integrodifferentialgleichungen, nichtlineare 1327, 1493ff., 1495f; — vom Bôcherschen Typus 1498; — — mit funktionalen Ableitungen 1500; —, welche die Gestalt der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten bestimmen 1327, 1496; — mit von 1. Art vertauschbaren Kernen 1496, mit von 2. Art vertauschbaren Kernen 1498; Verallgemeinerung des Problems der — — 1500.
Intérieur au sens large (étroit) 860.
Interpolation 1153.
Interpolationsformel, stets konvergente 1154; — von Gauß 73; — von Hermite 67; — von Lagrange 53, 497, 1154/56, erweiterte 60, 133; — von Newton s. Newton; — von Stirilng 686.
Interpolationproblem 497, 1241.
Interpolationsreihe 686; — von Gauß 687; von Newton 687, 697, 717, 718; — von Stirling 686, 717; —, Verallgemeinerung 691.
Intervalle 860; n-dimensionale — 861; punktfreie — 879.
Intervalles contigus à l'ensemble 879.
Intervallfunktion 993; additive — von beschränkter Schwankung 1134.
Invariante Funktionensysteme eines unsymmetrischen Kernes 1545.
Invarianten von Divisorenscharen 570; — für die lineare Transformation 598; — bei stetigen Transformationen 948, 953.
Invarianz des Abbildungsgrades 957; — der allseitigen Erreichbarkeit 955; — der Borelschen Mengen und ihrer Klassifikation 956; — des Gebietes 350, 954; — des n-dimensionalen Gebietes 954; — der geschlossenen Kurve 955; — der Zusammenhangszahl 955; — der Zweiseitigkeit bzw. Einseitigkeit von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten 956.
Inzidenzbasis 578.
Irrationalität von e^x bei algebraischem x 27; — von π 39.
Irreduzibles Kontinuum zwischen zwei Punkten 910, 918; — Menge bezüglich einer gegebenen Eigenschaft 910; — lückenlos zusammenhängende Menge 911, 912, 914.
Irreguläre Punkte des Konvergenzgebietes einer Reihe analytischer Funktionen 493.
Isogonen 144.
Isoklinen 144.
Isolierte Menge 863; — Punkte 863, — Stücke 902.
Iteration rationaler Funktionen 711.
Iterierendes Verfahren von Koebe 319.
Iterierte, Entwicklung nach —n 1347; 1351, 1353f., 1383, 1413, 1421, 1431, 1467, 1489.
Iterierte Kerne 239, 1383, 1508, 1522.

J

Jacobische Differentialgleichung 1324, 1327; — Form, J-Form s. Form; — Form des Restgliedes der Eulerschen Formel 94; — Funktion 1233; — Transformation 1431, 1441, 1566; —s Umkehrproblem 641.
Jensen, Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas 506.
Jentzschscher Satz 493/94.
Jordan: —sche Fläche, geschlossene 930, einfach zusammenhängende 930; —sches Gebiet 183; —scher Inhalt

965, 966; lignes de — 909; —sches Konvergenzkriterium für eine Fouriersche Reihe 1196, 1200; —sche Kurve 183, 909, 910, Erweiterung der Abbildung einer —schen Kurve 958, 959, geschlossene —sche Kurve 914, Charakterisierung einer geschlossenen —schen Kurve 914, 921/22, 922, 924, 929, eine geschlossene —sche Kurve darstellende Funktionenpaare 915, Verallgemeinerung der geschlossenen —schen Kurven 919, —sche Kurven von positivem Flächenmaß 967, quadrierbare —sche Kurven 969, nicht quadrierbare 957, nicht quadrierbares, von Jordanschen Kurven begrenztes Gebiet 968, rektifizierbare —sche Kurven 969; —scher Kurvenbogen 402, 417, 910, Charakterisierung 923; —scher Kurvensatz 916, Umkehrung 921, 922, 923, 924, 929, Verallgemeinerung 917, 918, 919, 955; —sche Mannigfaltigkeit 930, einfach zusammenhängende 930; nach — meßbar 965; —scher Satz im n-dimensionalen Raum 930, Umkehrung im dreidimensionalen Raum 931.

K

Kanonische ganze transzendente Funktionen 427; — Gestalt einer vollstetigen Hermiteschen Form 1562, — Gestalt einer vollstetigen quadratischen Form 1558, — Gestalt einer vollstetigen normalen Bilinearform 1563; — Klasse 666; — Zerspaltung eines Kernes 1548.

Kategorie, Mengen erster, zweiter und dritter — 886, 886; Mengen erster bzw. zweiter — in oder in bezug auf Q 889.

Kern einer Gebietsfolge 353.

Kern einer Integralgleichung 1340; Abelscher — 1456; abgeschlossener — 1507, 1513, 1524f., 1527; allgemeiner — 1513, 1525, 1527; alternierender — 1535; assoziierte —e 1385, assoziierte —e eines symmetrischen —es 1508; ausgearteter — 1378, s. auch — endlichen Ranges; beschränkte, symmetrische —e bei eigentlich singulären Integralgleichungen 1592, besondere beschränkte —e 1594, nicht beschränkte —e 1595; besondere stetige und uneigentlich singuläre —e 1391, besondere eigentlich singuläre —e 1452f.; besondere symmetrische —e 1534; bilineare Integralform, die zu einem symmetrischen —e gehört 1510; ctg — 1452, 1454; Defekt eines —es 1373, 1373, 1376, 1378; Eigenfunktionen und Eigenwerte eines symmetrischen bzw. unsymmetrischen —es s. Eigenwerttheorie; eigenwertlose unsymmetrische —e 1551f.; Elementarteilertheorie der allgemeinen unsymmetrischen —e 1543; Fredholmsche Determinante eines —es 1370; Entwicklung von —en nach Eigenfunktionen s. Entwicklungstheoreme; Hauptfunktionen eines unsymmetrischen —es s. Eigenwerttheorie bei unsymmetrischen —en; Hermitescher — 1435; Invariante Funktionensysteme eines unsymmetrischen —es 1545; iterierte —e 239, 1383, iterierte —e eines symmetrischen —es 1508, Entwicklung der iterierten —e nach Eigenfunktionen 1522; kanonische Zerspaltung eines —es als Analogon der Weierstraßschen Normalform in der Elementarteilertheorie 1548; Kalkül mit —en 1487; kleine — 1379; lösender — (Resolvente) 1350, 1373, Darstellung des lösenden —es durch iterierte —e 1351, 1383, Zusammenhang des lösenden —es mit dem lösenden —e eines iterierten —es 1384; lösender — der Summe orthogonaler —e 1547; nicht beschränkte symmetrische —e bei eigentlich singulären Integralgleichungen 1595; orthogonale —e 1547; vollständig normiertes Orthogonalsystem eines symmetrischen —es 1506; Polarform, die zu einem symmetrischen —e gehört 1510; positiv definite symmetrische —e 1510, eigentlich positiv definite symmetrische —e 1510, Entwicklung positiv definiter symmetrischer —e nach Eigenfunktionen 1524, symmetrische —e von positivem Typus 1510, 1537; positivierende symmetrische —e 1537; — bei der potentialtheoretischen Randwertaufgabe von Fredholm 1540; Produkt zweier —e 1487; quadratische Integralform, die zu einem symmetrischen —e gehört 1362, 1509ff., 1518ff., 1525, 1560, 1592; Rang eines —es 1373, 1378, —e endlichen Ranges 1377ff., 1377, 1513; reziproke —e bezüglich eines

—es 1540, im verallgemeinerten Sinne reziprok 1540/41; singuläre —e bei Integralgleichungen erster Art 1453, stark singuläre —e bei Integralgleichungen erster Art 1454, singuläre —e bei Integralgleichungen zweiter Art, vgl. singuläre Integralgleichungen; Spuren des —es 1384; Spuren symmetrischer —e 1508, 1523, 1524; symmetrischer — 1341, 1504, symmetrischer — von zwei Reihen von Veränderlichen 1532, symmetrische —e mit endlichvielen Eigenwerten 1507, s. auch unter Eigenwerttheorie; symmetrisierbare —e 239, 1243, 1255, 1536 ff., Eigenwerte und Eigenfunktionen bei allgemein symmetrisierbaren —en 1541, symmetrisierbare —e im allgemeinen Falle 1541, die dem allgemeinen Falle symmetrisierbarer —e entsprechende Fragestellung bei symmetrisierbaren Formen und ihr Zusammenhang mit der simultanen Transformation zweier quadratischen Formen in Diagonalformen 1565, 1566, Fehlen der eigentlichen Entwicklungssätze bei allgemeinen symmetrisierbaren —en 1542, beiderseits, linksseitig, rechtsseitig symmetrisierbare —e 1541/2, linksseitiger, rechtsseitiger Symmetrisator 1542/3; spezielle Fälle symmetrisierbarer —e: der Hilbertsche Fall (Integralgleichungen dritter Art, polare Integralgleichungen) 1536, entsprechender Fall bei unendlichvielen Veränderlichen 1567, Entwicklungssatz im Hilbertschen Falle 1538, Erweiterung des Hilbertschen Falles durch Garbe 1538, Existenz unendlichvieler positiver und negativer Eigenwerte im Hilbertschen Falle 1538, der Kornsche Fall 1540, Entwicklungssätze im Kornschen Falle 1541, der Pellsche Fall 1539, entsprechender Fall bei unendlichvielen Veränderlichen 1570, Entwicklungssatz im Pellschen Falle 1539, 1571, Existenz von Eigenwerten 1539, 1540; vollständig symmetrisierbare —e 1542, vollständig linkssymmetrisierbarer — 1542, Einordnung der Ergebnisse von Hilbert, Garbe, Pell in den Fall eines vollständig symmetrisierbaren —es 1543; vertauschbare —e 1487 ff., Vertauschbarkeit erster Art 1487 f., Vertauschbarkeit zweiter Art 1491; Bestimmung aller mit $K(s,t)$ vertauschbaren —e erster Art 1490 f., Bestimmung aller mit $K(s,t)$ vertauschbaren —e zweiter Art 1492, Beziehungen zwischen den Eigenfunktionen bzw. Hauptfunktionen vertauschbarer —e 1493, Darstellung der mit $K(s,t)$ vertauschbaren —e durch konvergente Reihen 1493; Volterrasche —e 1487, s. auch Integralgleichuvgen, Volterrasche; zusammengesetzter — 1487, Zusammensetzung erster Art 1487, Zusammensetzung zweiter Art 1491.

Kern eines Primendes 928; — einer Menge s. Menge; — eines singulären Integrals 1239.

Kette, Ende 927; — von Querschnitten 927; — regulärer Elemente 401; — von Teilgebieten 927.

Kettenbrüche als Lösungen einer Differenzengleichung 702, 702; Reihenentwicklungen nach den Näherungsnennern von — s. Reihenentwicklungen, Stieltjessche Integraldarstellung für — 1578, 1583, 1587/9, Integraldarstellung bei beschränkter J-Form 1587, Integraldarstellung für vollständig konvergente — 1589; Zusammenhang der — mit den J-Formen (Jacobischen Formen) 1586; Zusammenhang der — mit dem Momentenproblem 1457/8, 1589.

Kettenbruchentwicklungen bei der numerischen Quadratur 61, 73, 79, 89.

Kinetische Gastheorie, Untersuchungen über die Eigenwerttheorie dreidimensionaler Integraldarstellungen in der —n — 1535.

Klassen algebraischer Gebilde 605, 609; — von Elementen 1016; — von Elementen (D) 1019, (E) 1018, 1019 1019, 1020, (E_r) 1019, (L) 1016, (L), in denen die Ableitung jeder Menge abgeschlossen ist 1017, $(\mathfrak{R})$ 1016, (S) 1017, $(\mathfrak{V})$ 1016, (V) 1019, 1019, 1020, (V), perfekt 1023, (V), separabel 1019, 1023, normale Klasse (V) [bzw. (E)] 1019; — einer Kurve 603; — vom Teiler $\mathfrak{D}$ 573.

Klassenanzahl quadratischer Formen 836.

Klasseneinteilung der Divisoren 541, 568, 665.

Klassenzahl 842.
Kleinsche Fundamentaltheoreme der Uniformisierungstheorie 323, 348, 349, 351; — Kontinuitätsmethode 348, 399.
Koebes Schmiegungsverfahren 355, 399; — Verzerrungssatz 311, 321, 349, 510, 513.
Koeffizientenkörper 649.
Koeffizientensatz, Cauchyscher 12.
Körper der algebraischen Funktionen einer Variablen 542, zweier Veränderlichen 653, Darstellung der Funktionen des —s in der Umgebung einer Stelle 654; — vom Geschlecht drei und vier 609; — von Mengen 893; — der rationalen Funktionen 536; — $K(1)$ der rationalen Zahlen und Körper $K(p)$ der p-adischen Zahlen 642; — $\overline{K}(\mathfrak{p})$ aller zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen Potenzreihen 539.
Körperdiskriminante 587.
Kohärenz 872.
Kollineare Transformationen im R_∞ 1439.
Kolonnenreihe 521.
Kombinationszahl m_ν 21.
Kombinatorische Methoden zur Lösung der Randwertaufgaben der Potentialtheorie 256, 272.
Kommutatives Gesetz bei vertauschbaren Kernen 1487 ff.
Kompakte Funktionenfolgen 496; — Funktionenmengen 1145; — Mengen s. Mengen.
Komplementärer Divisor 566; —s System 565.
Komplementärmenge 865; — einer ebenen punkthaften Menge 925, 937; — eines Kontinuums 925.
Komponente einer Menge 904; 0-— 904; — des Randes eines p-fach zusammenhängenden Gebietes 183; — des Randes, isolierte 195.
Komponenten einer Potenzreihe auf dem Einheitskreis 1199, 1202.
Kondensationspunkte 860, 870.
Kondensierte Kurven in einem Punkte, in eine Ebene 671.
Konfigurationskonstante 232.
Konforme Abbildung 177, 217, 958; —, Annäherungsverfahren 293; — einfach zusammenhängender Gebiete allgemeinster Natur 307, Hauptsatz 310; — einfach zusammenhängender Gebiete der Klasse B in $\mathfrak{E}$ auf ein Kreisgebiet 253, — einfach zusammenhängender schlichter Gebiete auf ein Kreisgebiet 303, explizite Formeln für die — spezieller einfach zusammenhängenden Gebiete 291; —, funktionentheoretische Richtung 352; — von Gebieten der Klasse D in $\mathfrak{E}$ 255, der Klasse E und M in $\mathfrak{E}$ 260; —, iterierendes Verfahren 319; — nichtanalytischer Flächenstücke auf ebene Gebiete 264, 1297; — einer körperlichen Ecke 316, 339, 360; —, Kontinuitätsmethode 346, 399; — von Kreispolygonflächen 273; — und Krümmung 217; — von Polyedern 273; — von Polygongebieten 351, —, Quadratwurzelverfahren 293, 353; — eines p-fach zusammenhängenden Gebietes auf ein Vollkreisgebiet 324; — des Randes besonderer Klassen schlichter Gebiete 365; — des Randes, allgemeine Theorie 366, 424; — auf ein Schlitzgebiet 268, 318, 338, 343; —, Schmiegungsverfahren 355; — und Strömungspotential 251, 266, 268, 316, 338; —, Unitätsbeweise 278, 321; —, Variationsmethoden 327; — veränderlicher Gebiete 373; — zweidimensionaler Flächengebiete im Raume 263; — zweidimensionaler schlichtartiger Gebiete allgemeinster Natur 315.
Kongruent modulo $\mathfrak{p}^\varrho$ 538; — modulo $\mathfrak{P}^r$ 546; — modulo $\mathfrak{P}^\varrho$ 546, 648; — modulo p^ϱ 642; — modulo π^ϱ 648.
Kongruenzkörper 544, 643, 644, 645.
Kongruenzring 644.
Konjugierte Reihe 1198, 1213; —, Poissonscher Grenzwert 1208; — Wurzeln 548.
Kontinuierliches Spektrum 1578; vgl. auch Streckenspektrum.
Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung 346, 399.
Kontinuum 896, 899, 913; flächenhaftes — 900, 904; —, Hauptgebiete 918, 925; irreduzibles — zwischen den Punkten a und b 910, 918; isolierbares — 901; —, Komplementärmenge 925; kurvenhaftes — 900; linienhaftes — 900, 907; Mächtigkeit des linearen — 875, des n-dimensionalen 941, des abzählbar unendlich-dimensionalen — 942/43; —, Nebengebiete 925; nicht abge-

schlossenes — 898; —, Nichtabzählbarkeit 874; raumhaftes — 900, 904; unzerlegbares — (d. h. das nicht als Vereinigungsmenge zweier echter Teilkontinuen darstellbar ist) 913; —, Zerlegung in zwei punkthafte Mengen 936; —, Zerlegung in abzählbar viele Teilkontinua 896/7.

Kontinuumproblem 875.

Konvergenz, absolute 5; ausnahmslose, dennoch nur bedingte — 9, 486; Bereich der absoluten — 520; beständige — 5; — der Dirichletschen Reihen s. d.; — der Faktoriellenreihen s. d.; — der Fakultätenreihen s. d.; — von Folgen, gleichmäßige — 1472, relativ gleichmäßige — 1473, schwache — 1435, starke — 1434 f., 1437, 1473; — der Fourierreihen s. d.; — von Funktionenfolgen, asymptotische 1180, einfach gleichmäßige in einem Intervall 1163, in einem Punkte 1164, einfachst gleichmäßige in einem Punkte 1165, gleichmäßige 1138, gleichmäßige im Intervall 1140, gleichmäßige, an [oder in] einer Stelle, in der Umgebung einer Stelle 1140, Konvergenzmenge 1143, — en mesure 1180, im Mittel 1181, pseudogleichmäßige, in einem Punkte 1164, quasigleichmäßige 1076, 1076, 1163, 1166, quasigleichmäßige, im allgemeinen 1076, quasi-uniforme 1166, 1166, 1168; relativ-gleichmäßige [in bezug auf die scale-function (Maßfunktion)] 1140, 1473, stetige 1140/41, streckenweise gleichmäßige 1076, 1166, streckenweise gleichmäßige im allgemeinen 1076, ungleichmäßige, Grad 1142, Ungleichmäßigkeitsgrad 1142, uniforme in einem Punkt 1165, Verteilung der Konvergenz- und Divergenzstellen 1143, 1176, Verteilung der Stellen gleichmäßiger und ungleichmäßiger Konvergenz 1143, wesentlich-gleichmäßige 1181, 1236; reguläre — von Integralpotenzreihen 1484; — einer Reihe analytischer Funktionen, gleichmäßige 491, 494, gleichmäßige, in jedem einzelnen Punkte 492, 492, Teilgebiete gleichmäßiger Konvergenz 492, Punkte reguläre, irreguläre 493, Satz von Runge 494, Satz von Stieltjes 494, Satz von Vitali 495; vollständige — von Kettenbrüchen 1589.

Konvergenzabszissen 682, 687, 725/26.

Konvergenzbereich 4, 682, 1268; — einer singulären Stelle 417.

Konvergenzcharakter von Folgen meßbarer Funktionen 1179.

Konvergenzerzeugende Faktoren 1243, 1245.

Konvergenzgerade 682, 687, 730.

Konvergenzgrenze, Potenzreihen an der — 475; —, Wachstum der Funktion bei Annäherung 487.

Konvergenzkreis 4; Ordnung auf dem — 488; —, Regularität auf einem Bogen 463; —, Singularitäten 460; Verhalten von Potenzreihen auf dem — 9, 475.

Konvergenzkriterium, Bertrandsches 430; Cauchysches — 460.

Konvergenzmenge 1143.

Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen 734; — der Newtonschen Reihe 689.

Konvergenzradius einer Potenzreihe 460; —, untere Grenze der Konvergenzradien der aus einer Potenzreihe abteilbaren Reihen 7; — bei Potenzreihen zweier Veränderlicher, assoziierte Radien 9, 520, eines Elementes 522, Radius gleichmäßiger Konvergenz 521, Regularitätsradius 524, wahrer 8.

Konvergenzstern s. Stern.

Konvergenzwerte einer Funktion 417, 420.

Konvexe Mengen 999.

Korresidual 596.

Kreispolygonflächen, konforme Abbildung 273.

Kroneckersche Form des Restgliedes der Eulerschen Formel 95; —r Satz über diophantische Approximationen 740.

Krümmungsradien, graphische Methode der — 144.

Kubatur durch einfache Quadratur 129, graphische — 132.

Kubaturformeln von Bugajev 135; — von de Chapman 130; —, Lambertsche Faßregel 129; — von Mascheroni 131; — von Mansion 135; Prismoidalformel 129; — von Sarrus 131; — für das Tangentenprisma 135; — von Wooley, erste 135, zweite 136.

Kubische unendliche Determinanten 1423.

Kugelfunktionen 1233, 1257, 1274.
Kugelkörper 182.
Kurven, algebraische, zum Körper $K(y, x)$ gehörig 581; algebraische, im Raum von s Dimensionen 598; einfache — 183, 909; einfach geschlossene — 921, 922; geschlossene — 919, 922, 924, Invarianz 955, zusammenhängend im kleinen 922; — gleicher Neigung 144; Jordansche — 183, 909, s. auch Jordan; — der Klasse A 184, Ah 185, B, Bh 185; stetige — 908, 924, Charakterisierung 946/48, ohne vielfache Punkte 909, verallgemeinerte 908.
Kurvenbogen, eigentlicher, uneigentlicher 925; Jordanscher — s. Jordan; regulärer — 185/86.
Kurvengeschlecht 668.
Kurvenmengen 1015.
Kurvenprimteiler 663.
Kurvenpunkt, k-facher 582.
Kurvensatz s. Jordan.

L

L, Linearität in der general analysis 1474.
L-Funktionen 795.
λ-Variation 1008.
Längeninhalt 995.
Lagrange-Cauchysche Ungleichung 1395, Verallgemeinerung der Ungleichung durch Hölder 1445; —sche Differentialgleichung eines regulären analytischen Variationsproblems 1323/4; Interpolationsformel 53, 497, 1154, 1156, erweiterte 60, 133; —sche Methode der Variation der Konstanten 156, 700; —sche Polynome 1276.
Laguerresche Polynome 1274; — Sätze über ganze transzendente Funktionen 426, 428.
Lambertsche Faßregel 129; — Reihen 1275; — Tangentenkonstruktionen 140.
Landausche Funktion $\varphi(a_0)$ 412; — Polynome 1149, 1149, 1183, 1187; —r Satz 411, Verallgemeinerungen 413, 415, 416.
Landensche Transformation 448.
Laplacesche Differenzengleichung 720; — Differentialgleichung 197; —s Integral 431, 455, 683, 688; — Transformation 694, 700, 1456, 1462, 1490; — Transformierte 710.
Leauscher Satz 465.
Lebesgue, Hilfssatz 336, 336, 1293; Integral, integrierbar s. d.; —sche Konstante 1202; —s Konvergenzkriterium für eine Fourierreihe 1197; —sches Maß 969, 972; — meßbar bei Mengen 972; — meßbar bei Funktionen 1042; Mengen, die nicht nach — meßbar sind 977; —sche Singularität bei Fourierschen Reihen 1201.
Leibnizsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$ 38.
Legendresche Polynome 63, 471, 500, 1162; — Relation 629.
Le Roysche Eigenfunktionen 1250.
Levischer Hilfssatz 334.
Limes einer Funktion in einem Punkte, oberer, unterer — 1003; — einer Menge, oberer 861; — einer Mengenfolge, $\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, E_n$, oberer, limes superior, $\underset{n}{\mathrm{Lim}} \sup E_n$, unterer, limes inferior, $\underset{n}{\mathrm{Lim}} \inf E_n$ 940; — einer Mengenfolge, abgeschlossener, $\overline{\mathrm{Lim}}\, E_n$, oberer abgeschlossener, $\overline{\mathrm{Lim}} \sup E_n$, unterer abgeschlossener, $\overline{\mathrm{Lim}} \inf E_n$ 940; — einer Mengenfolge, offener, $\underline{\mathrm{Lim}}\, E_n$, oberer bzw. unterer offener —, $\underline{\mathrm{Lim}} \sup E_n$, $\underline{\mathrm{Lim}} \inf E_n$ 940.
Limesfunktion, obere bzw. untere 1003.
Limesgebiet, oberes, unteres 940.
Lindelöf, —sches Prinzip 500; —sche Sätze 404, 467; —scher Überdeckungssatz 886.
Lineare Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten s. Gleichungssysteme; — Mengen 859; — Mittelbildungen 445, 480; — Transformation der Perioden 630; —s Vektorgebilde 1437.
Linearformen, vollstetige 1401, 1426; beschränkte — 1425f.; orthogonale — 1554, Ergänzung orthogonaler — zu einem vollständigen System 1555; vollstetige — 1401; beschränkte — sind vollstetig 1426.
Linearinhalt 995, s. auch Inhalt.
Linearitätsbedingung in der general analysis 1474.
Linie 907; s. auch Kurven.
Linienelement, Methode des —s von H. A. Schwarz 399.

Linienkoordinaten, graphische Integration 146.
LiouvillescherApproximationssatz über algebraische Zahlen 444/45.
Lipschitz, —sche Bedingung 1088, 1193, 1196, 1215, 1225; —sche und Höldersche Bedingung 191; —sches Konvergenzkriterium für eine Fourierreihe 1196; —-Dinisches Konvergenzkriterium für eine Fourierreihe 1197.
Lösender Kern s. unter Kern.
Lösungen von Differenzengleichungen s. d.
Logarithmisches Potential 197; — Potential einer ebenen Flächenbelegung 206; — Singularität 405; — Stellen 574.
Logarithmus, Berechnung 32; — für den Bereich von p 643; —, Hauptwert 28; natürlicher — 27; —, Reihe 29.
Lokale Uniformisierung 529; —r, uniformisierender Parameter 392.
Lot von einem Vektor auf einen andern 1435; — auf ein lineares Vektorgebilde 1437, 1555.
Lückenintervalle 879.
Lückenlos zusammenhängende Menge 897.
Lückensatz 461; — für Dirichletsche Reihen 735; — von Weierstraß 606.

M

M, Modulareigenschaft in der general analysis 1474.
$M(r)$, $\mu(r)$, $\mathfrak{M}(r)$ 508.
Mac-Laurinsche Formeln 57, 101; zweite — Formel 108.
Mächtigkeit einer abgeschlossenen Menge 875/6; — einer abzählbar unendlichen Menge 875; — einer Borelschen Menge 892; — der inneren Grenzmengen 892; — des linearen Kontinuums 875; — des n-dimensionalen Kontinuums 941; — des abzählbar unendlich-dimensionalen Kontinuums 942/3; — der Mengen (A) 894; — der Menge der abgeschlossenen Mengen 943, der abzählbaren Mengen 943, aller Borelschen Mengen 943, aller reellen Funktionen 875; — einer Menge in der Umgebung eines ihrer Punkte 870; — von Punktmengen 874, — einer perfekten Menge 876, 879.
Mächtigkeitsgrad 870.
Mannigfaltigkeit 930, 930; Jordansche — 930, einfach zusammenhängende 930; Riemannsche — 190, 359, 390, 393; —, Triangulierung 392.
Mansionsche Formel 105; — Kubaturformel 135.
Mascheronische Formel 131.
Massausche graphische Integrationsmethode 83.
Maß 969, 969, 991; äußeres —, nach Lebesgue 972, nach Carathéodory 990, reguläres 990, 991; Borelsches — 969, 969; — und Inhalt, Beziehungen 975; inneres — nach Lebesgue 972, nach Carathéodory 991; Lebesguesches — 969, 969, 972; lineares — 995; m-dimensionales — im n-dimensionalen Raum 994; — bei Mengenfolgen 983/85; — und Meßbarkeit, keine Invarianten der Analysis situs 981; — bei nicht beschränkten Mengen 980; —, spezielle Sätze 982; Zusammenhang des Carathéodoryschen und Lebesgueschen —es 993.
Maßfremde Mengen 989.
Maßfunktion 990, 1140; gewöhnliche — 990; reguläre — 991.
Maßhaltige Menge 989.
Maßpunkt 989.
Maßmenge 989.
Massenverteilung von der Anziehung Null 209.
Matrixgleichung 698.
Matrixlösung 698, 699.
Matrizen, unendliche beschränkte 1423; affine Transformation, die zu einer beschränkten Matrix gehört 1438; Einheitsmatrix 1428; Hermitesche — 1433, 1561; Matrizenkalkül 1428, 1443; reelle orthogonale — 1562; Reziproke einer Matrix s. Reziproke; unitäre Matrizen 1562; Vollständigkeitseigenschaft der — 1439; s. auch unter Bilinearform.
Matrizen mit absolut konvergenten Zeilensummen und beschränkten Zeilenbetragssummen 1444.
Maximaleigenschaften der quadratischen Integralform zur Charakterisierung der Eigenwerte und Eigenfunktionen 1510/12, 1518 ff.
Maximaltypus 431.
Maximum de la fonction f au point A 1003; — einer vollstetigen quadra-

tischen Form 1556, — vollstetiger Funktionen 1556, spezielle Maximumaufgaben bei quadratischen Formen 1557.
Maximum-Minimumproblem zur Charakterisierung der höheren Eigenwerte 1512, 1521, 1528, 1551.
Maxwellsche Superpositionsmethode 164.
Measure 969.
Mehlersche Formeln 72.
Mehrdeutige isolierte Singularitäten 405.
Mehrdimensionale unendliche Determinanten 1423.
Mehrfache Summen 716.
Membran, schwingende 1351, 1358, 1361.
Menge (A) 894, 956, 977; abgeschlossene — 863, 877, in (oder in bezug auf) Q abgeschlossene — 864, linksseitig abgeschlossene — 864, Mächtigkeit einer abgeschlossenen — 875/6, relativ abgeschlossene — 864, Struktur einer abgeschlossenen — 868, 879, 880, 882, 895, Struktur des perfekten Bestandteils einer abgeschlossenen — 901, Zerlegung einer abgeschlossenen — in abzählbaren und perfekten Bestandteil 869; —, Ableitung 860, 861, 0te 865, n^{ter} Ordnung 862, transfiniter Ordnung 867; Abstand eines Punktes von einer — 878, Abstand zweier —n 878; abstrakte — 856; abzählbare — 868; abzählbar unendliche — 875; —, äußere Punkte 880; aneinander grenzende —n 881; apantachische — 864; —, Begrenzung 880; —, Begrenzungspunkte 880; beschränkte — 182, 859, 861; biconnexe — 938; Borelsche — s. Borel; —, Breite 878; —, Breite in Richtung a 878; —, clairsemé 872; —, connected 897; —, connexe 897; —, Dichte 988, 988; dichte —, in Q dichte — 865, 865, zu Q dichte — 865; in sich dichte — 863, beiderseitig in sich dichte — 864, Struktur des in sich dichten Bestandteils einer — 903, nirgends dichte — 864, in Q nirgends dichte — 865, nirgends dichte — von positivem Inhalt 964; überall dichte — 864, in (oder in bezug auf) Q überall dichte — 865; —, Differenz 865; diskrepante — 989; —, Diskrepanzpunkt 989; diskrete — 963; —, Durchmesser 878, m-dimensionaler Durchmesser 999; —n, Durchschnitt 866, 866; einfach geordnete — 1030; elementenfremde —n 866; extremale — 1016; — F der Klasse α 1173; —, Folgen, auf- bzw. absteigende 890; —, Gattung, erster und zweiter 866, —, Gattung erster, n^{ter} Art 866; Geraden—n 1014; —, ensemble gerbé 886; gesättigte — bezüglich einer Eigenschaft 911; geschlossene — erster Kategorie 886; geschränkte — 859; getrennte —n 881; —, Grenze 880; —, Grenze zwischen A und B 881; —, Grenze, obere, untere 859; —, Grenzelement 1015, 1016; Grenz— s. d.; —, Grenzpunkt 860, 860, 861, 880, 926; —n, größter gemeinsamer Divisor 866; —, Häufungselement 1015; —, Haupttheorem 868; in sich heterogene — 989; homöomorphe —n 932; homogene — 873, 989, von der Dichte d 988, im Sinne der Analysis situs oder topologisch homogene — 989; —, Hülle, abgeschlossene 865, maßgleiche 975; — ensemble inexhaustible 886; —, Inhalt s. d.; —, innere Punkte 880; integrierbare — 963; irreduzible — bezüglich einer gegebenen Eigenschaft 910, irreduzible lückenlos zusammenhängende — 911, 912, 914; isolierte — 863, 871; —, Kategorie, erster, zweiter und dritter Kateg. 886, 886, erster bzw. zweiter Kateg. in oder in bezug auf Q 889; —, Kern 873, in sich dichter 873, nach Hausdorff 873, maßgleicher 975, nicht abzählbarer 873, perfekter 869; —, Klasse von Elementen s. Klasse; —, kleinstes gemeinsames Multiplum 867; —, Körper 893; —, σ-Körper 893; kompakte — 1016; $\mathfrak{a}$-kompakte — 1017; $\mathfrak{b}$-kompakte — 1017; —, in sich kompakte 1016; —, vollständig kompakte 1017; —, Kondensationspunkt 860, 870; konkrete — 856; konvexe — 999; —, Limes oberer 861; lineare — 859; lückenlose — 1016, —, ohne lückenlosen Zusammenhang 900, lückenlos zusammenhängende — 897; —, Mächtigkeit s. d.; —, Maß s. d.; maßfremde —n 989; maßhaltige — 989; —, Maßpunkt 989; —, meßbare nach Borel, im Borelschen Sinne meßbar, ensemble mesurables B 970, in E 979, nach Jordan 965/6, im Lebesgueschen Sinne, nach Lebesgue

meßbar, meßbare 973, charakteristische Eigenschaften der nach Lebesgue meßbaren —n 973, 975, 979; —, Meßbarkeit s. d.; nicht abzählbare — ohne perfekten Bestandteil 874; nirgends dichte — 864, in Q nirgends dichte — 865, nirgends dichte —, von positivem Inhalt 964; —, Nucleus 873; —, Nullmenge 974, 975; — O der Klasse α 1173; offene — 877, 881, 881, 899, auf E, relativ zu E offene — 881, offene —n als Komplementärmengen der abgeschlossenen 881; — α^{ter} Ordnung 1174; pantachische — 864; von einem Parameter abhängende — 938; perfekte — 863, 876, perfekte — vom 1. Typus 901, Nichtabzählbarkeit der perfekten —n 876, nirgends dichte perfekte — 876, perfekte — von Stücken 902; —, point frontière 880, 880; punkthafte — 900, 925, 931, punkthafte abgeschlossene — 931, Beispiel einer punkthaften abgeschlossenen Menge, die von jeder Geraden der Ebene getroffen wird 934, Beispiel einer punkthaften Menge, die zwei Punkte in der Ebene trennt 935, Windung einer punkthaften — 937, zugleich punkthafte und lückenlos zusammenhängende — 938; quadrierbare — 966, nach außen, nach innen quadrierbare — 966, 976; —, Rand 881; —, Randmenge 881; — Randpunkte 881; reduktible — 869; reduzible — 869, 869; reguläre — 987, 1132; —, Relativgebiet 900; relativ offene — 900; relativ vollständige — 1022; —, ensemble résiduel 886; —, Rest, Residuum 872; —, Ring 893; —, σ-Ring 893; —, separabel 1019, 1022; —, separabel und verdichtet, Zusammenhang 1016/7; separierte — 872; —, set s. d.; stetige — 897; Struktur des in sich dichten Bestandteils einer — 903; —n, Summe 866; —, System, δ-System, σ-System, $(\sigma\delta)$-System 893; total imperfekte — 874; total undichte — 865; —, Umfang 407; unausgedehnte — 963; —, Unbestimmtheitsgrenze, obere 861; undichte — 865; Verallgemeinerungen von Punkt—n 1014; verdichtete — 1016, 1017; —, Verdichtungselement 1016; —, Verdichtungspunkt 860, 870, der n^{ten} Ordnung 863; —n, Vereinigungsmenge 866; Vereinigungsmenge von abzählbar unendlichvielen abgeschlossenen —n 890, —, Vergleichbarkeit 888; verstreute — 901, 931; —, Wohlordenbarkeit 888; zerhackte — 900; zerlegbare —, Beispiel einer in zwei mit ihr kongruente Teilmengen zerlegbaren — 936; Zerlegung der Ebene in zwei punkthafte —n 936; zusammenhängende — 896, 897, lückenlos zusammenhängende — 897, 0-zusammenhängende, ϱ-zusammenhängende — 897; —, zusammenhängend im kleinen 922, 947, 956; zusammenhanglose — 901, durchweg zusammenhanglose — 900/01.

Mengenfamilie, reguläre 1132.

Mengenfolgen 939; —, Gemeinschaftsgrenze, obere bzw. untere 940; —, Grenzmenge s. d.; —, Grenzpunkt 939; —, Limes s. d.; —, Maß und Inhalt 983/5; —, Näherungsgrenze (obere, untere) 940; —, Näherungspunkt, äußerer bzw. innerer 940.

Mengenfunktionen 1009; abschließbare — 999; absolut additive — 1010, 1470, ihre Differentiation 1134, Zerlegung in ihre drei Bestandteile 1011, Zusammenhang mit den Punktfunktionen beschränkter Schwankung 1010; additive — (im engeren Sinne) 1010, im weiteren Sinne 1010; stetige, absolut stetige, total stetige — 1009; total stetige additive — 1010, 1132.

Mengenlehre, Anwendungen 1001, auf Geometrie, insbesondere Analysis situs 1012, auf mathematische Physik 858, auf die Theorie der Funktionen komplexer Veränderlichen 1011, auf die Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen 1002.

Méray, Definition der analytischen Funktionen 6, 382.

Mercer, Satz von — 1524, 1526, 1531, 1531, 1532, 1539.

Meromorphe Funktionen, Umkehrungsfunktion 310, 418, Übertragung der Theorie der ganzen Funktionen 445, zweier Veränderlicher 526, zweier Veränderlicher als Quotient zweier ganzer 527; — Lösungen nicht-linearer Differenzengleichungen 706/7, 713; — Lösung eines Systems von Differenzengleichungen 713.

Meßbar s. Abbildung, Funktionen und Mengen.
Meßbarkeit, relative 979; Zusammenhang zwischen flächenhafter und linearer — 986, 1117.
Meßbarkeitstheorie von Carathéodory 990.
Mesure 969.
Méthode de balayage 300.
Metrischer Raum 1019, 1022; normaler — 1022; separabler — 1022; vollständiger — 1022.
Minima estensione 973.
Minimalbasis 561.
Minimalflächen 214, 1324; Differentialgleichung der — 1326, 1326, 1333.
Minimalfolge 328.
Minimaltypus 431; — der Ordnung eins 467.
Minimum de f au point A 1003.
Minkowskischer Linearinhalt 995; — m-dimensionaler Inhalt 996.
Minoren s. Determinanten.
Mittag-Lefflers $E_\alpha(z)$-Funktion 421, 457; —scher Stern 934.
Mittel, Methode des arithmetischen —s 171, 231, 1383; arithmetische — 477, 1192, 1204, 1240, 1383; Borelsche — 481, 1383, 1488; Cesàrosche — 477; Höldersche — 477; logarithmische — 755; typische — 755.
Mittelbildungen, lineare 445, 480, 480.
Mittelwertsatz der Differentialrechnung 1089; — für Dirichletsche Reihen 745; erster und zweiter — der Integralrechnung 1058; — von Gauß 213, 215, 221; — von Neumann 171.
Modul 563; Basis des —s 563; —n der algebraischen Körper 609; —n der allgemeinen Körper vom Geschlecht p 613.
Modulareigenschaft in der general analysis 1474.
Möbiussches Band 188.
Moivrescher Satz 34.
Moment einer ebenen Fläche 126; — einer Kurve 127.
Momentenproblem, allgemeines — für ein Intervall a, b 1457, 1458 f., 1583, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung des —s unter verschiedenen Bedingungen 1459; notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer monotonen Lösung des Stieltjesschen —s für das Intervall 0, ∞ 1457, für das Intervall $-\infty$, $+\infty$ 1458; Zusammenhang des Stieltjesschen —s mit der Theorie der Kettenbrüche 1457/8, 1589, mit den beschränkten quadratischen Formen 1583, 1583, mit den J-Formen 1589.
Monodromiesatz 405, 410.
Monoton 336.
Montelscher Konvergenzsatz 316.
Multiplikationssatz von Hadamard 464.

N

Nachwirkung, Probleme der 1493.
Näherungsbrüche (Nenner) der Kettenbruchentwicklung 61, 1233.
Näherungsgrenze (obere, untere) 940.
Näherungspunkt, äußerer bzw. innerer 940.
Näherungswerte p-adischer Zahlen 643; — von Potenzreihen 546.
Natürliche Grenze 462; —r Logarithmus 27.
Nebengebiet 918, 925.
Nebenpunkte eines Primendes 928.
Nebensterne, approximierende 448, 451, 455.
Nenner eines Divisors q 540.
Netz (de la Vallée Poussin) 1133.
Neumann, Methode von — 1347, 1353, 1361, vgl. auch Entwicklung nach Iterierten; —scher Mittelwertsatz 171; —sche Reihen 232; Summationsverfahren für die —schen Reihen 1383; —sches Problem 232; —-Poincarésches Problem 233.
Newton-Cotes, Formeln 55; —sche Interpolationsformel, Interpolationsreihe 687, 688, 697, 717, 718; —sche Reihe, Bedingungen für die Darstellbarkeit durch eine Newtonsche Reihe 690, Konvergenzabszisse 687, Konvergenzgerade 687, Konvergenzproblem 689, Nullentwicklungen 688, Transformationen 689, Zusammenhang mit dem Laplaceschen Integral 688; —sches Polynom 1276; —sches Potential 197, —sches Potential einer einfachen Linienbelegung 210; —-Puiseuxscher Polygonzug 679.

Nichtabzählbarkeit des linearen Kontinuums 874; — der perfekten Mengen 876.
Nicht fortsetzbare Potenzreihen 461/2, 517.
Nicht reduzierte Darstellung eines Divisors q 540.
Norm von 𝔓 553; — von U 542.
Normalableitung 192/3.
Normalbasis 564.
Normaldeterminanten, normaloide Determinanten s. unendliche Determinanten.
Normale Bilinearform 1562.
Normale Funktionenfolgen 496; — Klasse (V) bzw. (E) 1019; —r metrischer Raum 1022.
Normales System in bezug auf die Stelle 𝔭 564.
Normalgleichungen der algebraischen Körper 609; — der allgemeinen Körper vom Geschlecht p 613.
Normalreihen, Thomésche 680.
Normaltypus 431.
Normiertes orthogonales Funktionensystem 1234.
Nucleus 873.
Nullentwicklungen bei Newtons Interpolationsformel 688.
Nullmenge 974, 975.
Nullraum 1029.
Nullstellen einer Dirichletschen Reihe 746; — einer Körperfunktion 537; — der Zetafunktion s. d.
Nullvariation 1008.
Nullweg 620.
Numerische Behandlung der Eigenwerttheorie 1503, 1519, 1520; — von Integralgleichungen 1399, 1501; — von unendlichvielen linearen Gleichungen 1502.

O

O, o 472.
Oberflächeninhalt 995.
Oberfunktion 1075.
Offene Menge s. Menge.
Operation ($T_{2,s}$) 1070.
Ordinärer Körper 607; — vom Geschlecht $p \geq 3$ 613.
Ordinate, mittlere 113.
Ordnung (nach Dedekind) 590; — eines Divisors 540, 552; — einer ganzen transzendenten Funktion 421, 430; — einer Funktion in einem Winkelraum 423; — einer Klasse 569; — auf dem Konvergenzkreis 488; Menge α^{ter} — 1174.
Ordnungszahl eines Elements 546, 646; — der Primzahl π 647; — einer rationalen Funktion für die Stelle 𝔭 537; — einer rationalen Zahl 642.
Ordre apparent 430; — réelle 429.
Orthogonale Äquivalenz zweier quadratischer Formen 1585; —s Funktionensystem 1232/34, Abgeschlossenheit eines —n Funktionensystems 1237, Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes als —s Funktionensystem 1506, — Funktionensysteme von Haar 1396, —s vollständiges Funktionensystem 1392, Beispiele für — vollständige Funktionensysteme 1393 f.; — Kerne 1547; normierte — Linearformen 1554, Ergänzung normierter —r Linearformen zu einem vollständigem System 1555; — Transformation im Raume von unendlichvielen Veränderlichen 1554, unitär— Transformation 1562, — Transformation beschränkter quadratischer Formen s. d., — Transformationen vollstetiger quadratischer Formen 1555, — Transformation einer vollstetigen quadratischen Form in die kanonische Gestalt 1558, — Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von J-Formen 1587; —s vollständiges System von Differentialformen 1585, vgl. auch unter Vektor.
Orthogonalinvariantensystem beschränkter quadratischer Formen 1583 ff.
Orthogonalisierung eines Funktionensystems 1233, 1394; — von Vektoren 1437.
Orthogonalität der Differentiallösungen 1580/1; — der Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes 1359, 1506; unitäre — 1438, 1536.
Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen 1359.
Orthogonalsystem, vollständig normiertes — eines symmetrischen Kernes 1506.
Ortsfunktionen 190.
Ortsparameter 392.
Oscillation uniform of the first bzw. second kind 1142.

Oscillatorii, estremi superiori e inferiori destro e sinistro 1086.
Oszillation, gleichmäßige 1142, 1142, 1144; halbstetige — 1142; sekundär-gleichmäßige — 1142; ungleichmäßige — 1144.
Oszillationstheorem 1248, 1255, 1257, 1509.

P

P, Positivität in der general analysis 1474.
P_0, eigentliche Positivität in der general analysis 1474.
p-adische Zahlen, Körper $K(p)$ 642; — Kongruenzkörper 644; — Kongruenzkörper und die ihnen isomorphen Körper $K(\mathfrak{P})$ der π-adischen algebraischen Zahlen 645.
π-adische Entwicklung eines Elementes 648; —r Zahlkörper, Galoisscher 649.
Pantachie, vollständige 895.
Pantachische Menge 864.
Parabolisch-elliptische Differentialgleichungen 1244.
Parallelschlitztheorem 269; —, Verallgemeinerung 351.
Parameter und Argument, Vertauschung 618; lokal uniformisierender — 392.
Parameterdarstellung 390, 392.
Parameterkurve 907, 908.
Parameterwerte, ausgezeichnete 1359, vgl. auch Eigenwerte.
Parametrixmethode 1296.
Parmentiersche Formel 104.
Parsevalsche Gleichung (Satz) 1209, 1237, 1239, 1243, 1368, Erweiterung 1211, für ein aus Polynomen gebildetes Orthogonalsystem bei unendlich großem Intervall 1238; — Integraldarstellung 465.
Partialbrüche 19.
Partialbruchreihen für tg x, cot x, cosec x, sec x 42.
Partialbruchdarstellung der Resolvente einer Integralgleichung 1523, 1548.
Partitionen 833.
Pascalscher Integrator 142.
Peanokurven 941, 943.
Perfekt s. Menge.
Perioden der Integrale zweiter und dritter Gattung als Funktionen ihrer Unstetigkeitspunkte 630; zyklische —, des Elementarintegrals dritter Gattung 631.
Periodenrelationen der Integrale erster und zweiter Gattung 628.
Periodenwege, Anzahl der unabhängigen 622; —, Basis 624; —, Fundamentalsysteme 624; —, Beziehungen zwischen den verschiedenen Fundamentalsystemen 629.
Periodische Lösungen von Differenzengleichungen 714.
Periodizität von e^x 27.
Periodizitätstheoreme der trigonometrischen Funktionen 34.
Perpendikelvektor 1437.
Perronsches Integral 1060, 1074.
Pfeiffersche Methode 817, 826.
Phragmén, Satz 404.
Physik, mathematische, Auftreten von Reihenentwicklungen 1244.
Picardscher Satz 405, 409, 439, Beweis von Picard, Grundgedanke 409, elementare Beweise 410; großer — 409, Beweis vermittels des Landauschen Satzes 412, Erweiterung 415; kleiner — 409.
Picard-Landauscher Satz 311.
Pierpontsche Integraldefinition 1059, 1061; —s Verfahren bei uneigentlichen Integralen 1054, 1055.
Piobert-Parmentiersche Formel 102/3.
Plückersche Formeln 597. für Raumkurven 603, Verallgemeinerung für beliebige Singularitäten 602; — Linienkoordinaten der Tangente 597.
Poincaré, —sche Eigenfunktionen 1250, 1255; —sche Fundamentalfunktionen 235, 235; —, Lösungsmethode des Neumannschen und des Robinschen Problems 233, 235, 1353 ff.; —, Méthode de balayage 300; —sches Prinzip 238; —, Satz über Differenzengleichungen 471, 676, Erweiterung für nichtlineare Differenzengleichungen 707; —, Sätze über ganze transzendente Funktionen 429, 433; —, Ableitung der Entwicklungstheoreme nach den Eigenfunktionen von Differentialgleichungen 1261, 1262, 1352 f., 1361, 1517.
Point frontière 880, 880; — limite pour tous les E_n 939; — of more than countable degree 870.

Poissonsche Differentialgleichung 197, 286; — Form des Restgliedes der Eulerschen Formel 93; —r Grenzwert 1208; —s Integral 198, 220—225, 1207, aus den allgemeinen Fredholmschen Auflösungsformeln 221; — Regel 105; — Summation 1207.

Polare Integralgleichungen 1399, 1536ff., 1567.

Polares Funktionensystem 1232, 1537, 1538; vollständiges — 1538.

Polarform, die zu einem symmetrischen Kerne gehört 1510; — einer quadratischen Form 1553, 1576.

Pole 240, 404; — einer Körperfunktion 537; —, Lage 472.

Polyeder, konforme Abbildung 273.

Polygon (symbolisches Potenzprodukt) 556; approximierende —e 926; — der Doppelpunkte 583; geschlossenes, einfaches — 917.

Polygonquotienten 553.

Polygonscharen 56:).

Polygonzug, Newton-Puiseux 679.

Polynome, Approximationen s. d.; Bernoullische — 713, 1275; Fabersche — 448, 499; Hermitische — 76, 1274; Lagrangesche — 1276; Laguerresche — 1274; Landausche — 1149, 1149, 1183, 1186; Legendresche — 63, 471, 500, 1162; orthogonale — 1233/4, 1238; Tschebyscheffsche — 1158.

Polynomfolgen 1276.

Polynomreihen für analytische Funktionen 491, 496, 1274/5, Zusammenhang mit dem Interpolationsproblem 497; — für reelle Funktionen 1233.

Polynomsatz von Weierstraß 1146, Verallgemeinerung 1152, 1186; Analogon des —es für stetige Funktionaloperationen 1499.

Ponceletsche Formel 102.

Positiv definit, eigentlich —, s. Kern und quadratische Form.

Positiver Typus 1510, 1537.

Positivierend 1537.

Positivität in der general analysis 1474, eigentliche — 1474.

Potential einer Doppelbelegung 204, Ableitungen höherer Ordnung einer Doppelbelegung 206, Normalableitung 204; — einer Doppelschicht 204; — einer dreifachen Flächenbelegung 206; — einer einfachen Belegung in der Ebene 199, Bedingungen für die Existenz der Ableitungen einer einfachen Belegung 200—203, Normalableitungen 201, Verhalten auf der belegten Kurve und in deren Nachbarschaft 200; — einer einfachen Flächenbelegung im Raum 199; — einer einfachen Schicht 199; logarithmisches — 197, einer ebenen Flächenbelegung 206, Ableitungen 207, analytische Fortsetzung 209; Newtonsches — 197, einer einfachen Linienbelegung 210, eines Gebietes auf sich selbst 210, einer Volumladung 206; — für spezielle Gebiete 287; verallgemeinertes — einer einfachen Linien- oder Flächenbelegung 203, 236; verallgemeinertes — einer auf einer Fläche oder Kurve ausgebreiteten Doppelschicht 206, 236.

Potentialfunktionen, allgemeine 198, Eigenschaften 210, analytische Fortsetzung durch das Komplexe 217; —, Darstellung von Whittaker 214; —, Definition 197; dreidimensionale —, Reduktion auf Funktionen zweier Veränderlicher 214; konjugierte — 215, 220, Verallgemeinerung für den Raum 217; — von Le Roy 284; mehrdeutige — 214, 220; periodische — 263; positive —, Satz von Carathéodory 229, 412, 501; als Produkte von Funktionen je einer Variabeln darstellbare — 292, 1255/56; reguläre — 197, 215, reguläre — in einer Kreisfläche, Entwicklungssatz 225, in einer Kreisringfläche, Entwicklungssatz 227; —, Sätze von Harnack 230; —, Verhalten im Unendlichen 213/14.

Potentialtheorie, neuere Entwicklung 177; —, Randwertaufgaben s. d.

Potenz, allgemeine 27.

Potenzprodukte 1488.

Potenzreihen 4, 11; — Abelscher Grenzwertsatz 475, seine Verallgemeinerung durch Stolz 475; beschränkte — 504; —, Identität 13; nicht fortsetzbare — 461, 462, 517; — mit positivem Realteil 501; —, Umkehrbarkeit 15; —, Verhalten auf dem Konvergenzkreis 9, 475; — unendlich vieler Veränderlicher 741, 1482, vgl. auch analytische Funktionen unendlichvieler Veränderlicher und Integralpotenzreihen; — zweier Veränderlicher

519, assoziierte Radien 9, 520, Bereich absoluter Konvergenz 520, Kolonnenreihen 521, Konvergenzradius eines Elements 522, Radius gleichmäßiger Konvergenz 521, Rationalitätsradius 525, Regularitätsradius 524, Stellen bedingter Konvergenz 520, Zeilenreihen 521.

Primende 367, 924, 927, 929, 958; — 1., 2., 3., 4. Art 929; —, Hauptpunkte 928; —, Nebenpunkte 928.

Primfunktion 632; — bei Funktionen zweier Veränderlicher 527; — für einen Körper 546; — für die Stelle 𝔭 537.

Primideale 555; — einer Idealklasse 848.

Primidealsatz 847.

Primitive Funktion, ganze transzendente 427, 434; — einer gegebenen Ableitung oder Derivierten 1086, 1104, s. a. Funktion; — eines Körpers 543.

Primteile 912, 913.

Primteiler 538; — erster Art 660; — zweiter Art 663, Eichfunktion 664, Ordnung 664; —, ausgezeichnete für eine Transformation 668; — erster Stufe 658; — zweiter Stufe 664.

Primzahlen einer arithmetischen Reihe 801; — in einem Körper 646; —, Grad 646; — in quadratischen Formen 840; —, Verteilung 782, Primzahlsatz 782, Riemannsche Primzahlformel 792.

Primzahlprobleme 805.

Prismoidalformel 129.

Problème du cycle fermé 1490.

Produkte, unendliche, für $\sin x$ und $\cos x$ 40.

Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen 425.

Prymsche Funktionen 268, 346.

Pseudoresolvente 1374, 1377.

Puiseuxsche Sätze, Übertragung auf nichtlineare Integralgleichungen und Gleichungssysteme 1482, 1484 ff.

Punkte der Begrenzung, einfache, mehrfache 929; — einer Menge, innere 181, 880, äußere 880.

Punktfunktionen 1009.

Punkthaft s. Menge.

Punktmengen 855, s. auch Menge; —, Verallgemeinerungen 1014.

Punktprimteiler 633.

Punktspektrum bei Integralgleichungen 1593; — bei beschränkten quadratischen Formen 1577, 1578, 1580.

Punktsystem, integrierbares 1034.

Q

Quadratfreie Zahlen 828.

Quadratische Formen und Körper 836.

Quadratische Form von unendlichvielen Veränderlichen, beschränkte 1370, 1575 ff.; Bandenspektrum 1577; besondere — —en 1586, 1590; Bilinearform, symmetrische, die zu einer —n — gehört 1576; Differentialformen 1585, orthogonales und vollständiges System von Differentialformen 1585, Basisfunktion eines orthogonalen Systems von Differentialformen 1585, geordnetes System von Basisfunktionen 1585, Vollständigkeitsrelation für Differentialformen 1585; Differentiallösungen des zu der —n — gehörigen homogenen Gleichungssystems 1581, Orthogonalität der Differentiallösungen 1581; diskontinuierliches Spektrum einer —n — 1578; kontinuierliches Spektrum einer —n — 1578; J-Formen, L-Formen s. unter Formen; lineares Gleichungssystem mit unendlichvielen Unbekannten, das zu der —n — gehört, Lösung des homogenen Gleichungssystems in einem Punkte des Punktspektrums 1580, in einem Intervall des Streckenspektrums 1581; Normalform einer beschränkten —n — 1577, 1584, Übertragung auf Scharen —r —en 1585; orthogonale Äquivalenz zweier —n —en, notwendiges und hinreichendes Kriterium 1585 f.; Orthogonalinvariantensystem 1583 ff.; orthogonale Transformation einer —n —n — auf Quadratsummen und Integrale, Hilbertsches Theorem 1577 f., Ableitung dieses Theorems durch Hellinger 1581, durch Hilbert 1578, durch Riesz 1583, 1583; orthogonale Transformation einer —n — in eine Summe höchstens abzählbar unendlichvieler J-Formen verschiedener Variabelnreihen 1587; Polarform einer —n — 1576; positiv definite — 1576, 1579; eigentlich positiv definite —en 1566; Punktspektrum 1577, 1578, 1580; Reziproke einer —n — 1578/9; Schranke

einer —n — 1576; Spektralform 1577, einfachstes Beispiel einer Spektralform 1584, Faltungssätze für die Zuwächse der Spektralform 1578, orthogonale Transformation der Spektralform in eine Summe von Integralen der Quadrate von Linearformen verschiedener Variabelnreihen nach Hellinger 1584f., 1585; Spektrum einer —n — 1578, Spektrum und Häufungsstellen der Abschnittseigenwerte 1579, 1579, Änderung des Spektrums bei Addition einer vollstetigen —n — 1579, einfaches Spektrum 1585; Zerspaltung des Spektrums in einfache Spektren 1585; Streckenspektrum 1577, 1578, 1580; Zusammenhang der Theorie der —n —en mit der Stieltjesschen Kettenbruchtheorie 1586ff.

Quadratische Formen von unendlichvielen Veränderlichen, nichtbeschränkte 1577, 1588f.

Quadratische Form von unendlichvielen Veränderlichen, vollstetige 1365, 1369, 1553ff.; abgeschlossene — 1559; Bilinearform, symmetrische, die zu einer —n —n — gehört 1553; definite — —en 1567, 1569; Eigenformen einer —n —n — 1559; Eigenlösung als Lösung des zu der —n —n — gehörigen linearen Gleichungssystems 1559; Eigenwerte einer —n —n — 1559; Faltung —r —r —en 1555; Hauptachsentheorie —r —r — 1553; Hauptachsentransformation —r —r —en 1556ff.; kanonische Transformation von Scharen —r —r —en 1566ff.; Maximum einer —n —n — 1556, spezielle Maximumsaufgaben bei —n —n —en 1557; orthogonale Transformation —r —r —en 1555, orthogonale Transformation einer —n —n — in die kanonische Gestalt 1558; Polarform einer —n —n — 5153; Spuren einer —n —n — 1555; Zusammenhang der Theorie der —n —n —en mit der Eigenwerttheorie der Integralgleichungen 1559ff.

Quadratische Integralform, die zu einem symmetrischen Kerne gehört 1362, 1509ff., 1518ff., 1525, 1560, 1592.

Quadratur, graphische 83, 111, bei komplexen Variabeln 125, in Polarkoordinaten 125, nach Massau 83; numerische — 50, Bestimmung der Abszissen 58.

Quadraturformeln, Boolesche 109; —, Borda- oder Bezoutsche Regel 101; Catalansche — 108; — der Differenzenrechnung 96, für mehrfache Integrale 99; —, Drei-Acht-Regel 109; Dupainsche — 103; Eulersche — s. Euler; —, Faßregel 55; Gaußsche — s. Gauß; —, Genauigkeitsgrad 51, 90; Kombination von — 90; Mac-Laurinsche — 57, 101, 108; Mansionsche — 105; Mehlersche — 72; Newton-Cotessche — 55, 91; Parmentiersche — 104; Piobert-Parmentiersche — 102/3; —, Poissonsche Regel 105; Ponceletsche — 102; —, Simpsonsche Regel 91, 105, 116; Tschebyscheffsche — 86; —, Trapezregel 101, 115, verbesserte 104; Weddlesche — 91, 109, 118; Woolseysche — 91.

Quadratwurzelverfahren 293, 353.

Quadrierbar 966; — nach außen, nach innen 966, 976.

Quasianalytische Funktionen 1323.

Quasikomponente 904.

Quasikonforme Abbildung 261, 366.

Quasilineare Differentialgleichung 1323.

Quasi-Stetigkeit 1184.

Quasiunendlich 496.

Quasiuniforme, convergence 1166; — Konvergenz 1166.

Quellenmäßig darstellbare Funktion 1242.

Querschnitt eines Gebietes 195, 926.

R

R, Realitätseigenschaft in der general analysis 1474.

Radien, assoziierte 9, 520.

Radius der gleichmäßigen Konvergenz 521.

Radonsche Integraldefinitionen 1072.

Rand 182, 194, 881; —, Abbildung, konforme bei besonderen Klassen schlichter Gebiete 365, allgemeine Theorie 366, 424, 958; —, Komponenten 183, isolierte Randkomponenten 195; uneigentlicher — 194, 365; — s. auch Begrenzung.

Randbedingungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1246, 1247, adjungierte — 1247, sich selbst adjun-

gierte — 1247/48; — bei partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus 1249, mit Parameter 1249; — bei elastischen Schwingungen 1249.

Randelement 927, 928, 958.

Randfunktion 11.

Randmenge 881.

Randpunkt 881, 926.

Randwertaufgabe bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1246.

Randwertaufgabe bei Integrodifferentialgleichungen s. d.

Randwertaufgabe bei linearen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, erste — für Differentialgleichungen in der Normalform 1280, Äquivalenz mit einer linearen Integralgleichung 1282, alternierendes Verfahren 1281, erste — bei nur abteilungsweise stetigen Koeffizienten 1286, erste — für beschränkte ebene Gebiete 1280, für beschränkte ebene Gebiete allgemeiner Natur in 𝔈 1291/4, für beschränkte ebene Gebiete der Klasse B oder D in 𝔈 1281, 1287, für ein Kreisgebiet 1284/5, für Gebiete in $\mathfrak{E}_m$ 1299, für hinreichend kleine Gebiete 1280, 1283, für unendliche Gebiete 1299, erste — im Raum 1300/2, erste —, sukzessive Approximationen 1280, erste —, Unitätssätze 1297, erste —, Variationsmethoden 1302; erste — ohne Zurückführung der Differentialgleichung auf die Normalform 1295; höhere —n 1303; zweite — 1303, Zurückführung auf eine Integralgleichung 1304.

Randwertaufgabe bei nicht linearen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus 1324, Lösungen in der Nachbarschaft einer gegebenen Lösung 1324, Verzweigung der Lösung 1327, Zurückführung auf eine nicht lineare Integro-Differentialgleichung 1327, Lösungen ohne einschränkende Voraussetzungen 1327.

Randwertaufgabe der Potentialtheorie 218; — Abhängigkeit der Lösungen von der Begrenzung 294, 374; —, alternierendes Verfahren s. d., Schwarzscher Hilfssatz 221, 257; Bedeutung der — für die Entwicklung der Integralgleichungen 1345 ff.; dritte — 279; erste und zweite — 218, allgemeine Methoden zur Erledigung der ersten — 297, 306, 335, 355, Eindeutigkeit der Lösung 218/9, explizite Lösung für Kreisfläche und Kugelkörper 220, explizite Lösung durch Reihenentwicklung 292, 1244, 1255, Lösung als Potential einer Doppelbelegung 231, 1346, Lösung als Potential einer einfachen Belegung 244, 1345, Verhalten der Lösungen am Rande 242; —, gemischte Randbedingungen 269; —, gürtelförmige Verschmelzung 258; Integralgleichungen bei —n 238, 238, 272, 280 ff., 353; —, Methode des arithmetischen Mittels 231, 1383; —, Methoden, kombinatorische 256, 272; —, Methode der konformen Abbildung 260, 265, 361; —, Methoden der Variationsrechnung 327; —, Méthode de balayage 300; —, Problem von Neumann und Robin 232/3; —, Problem von Neumann-Poincaré und Robin-Poincaré 233, Fredholmsche Lösung vermittels Integralgleichungen 239, Poincarés Lösung 234, 1353 ff., Weiterführung 235; weitere — 282; zweite — 219, 260.

Randwerte 190—193.

Rang einer ganzen transzendenten Funktion 429; — eines Kernes 1373, 1378, endlicher — eines Kernes 1377 ff., 1377, 1513; — einer Kurve 603; — einer vollstetigen Bilinearform, endlicher 1412.

Rationaler Charakter einer analytischen Funktion 539.

Rationale Divisoren 539; — elliptische und hyperbolische Gebilde 611; — Kongruenzkörper 643/4; — Zahlen, Körper $K(1)$ 642.

Rationalitätsradius 525.

Räume, allgemeine 1015; Funktionen— 1025/6, 1468; Hilbertsche — 1026, 1434; metrische — 1019, 1022, normale 1022, separable 1022, vollständige 1022, 1029; nulldimensionale — 1029; spezielle — 1025; topologische — 1020; — von unendlich vielen Dimensionen 1025, 1434, 1554, elliptische — von unendlichvielen Dimensionen 1434.

Räumliche Gebiete der Klasse A (B, B', Ah oder Bh) 187; — der Klasse C, D, Lh 187.
Raumkurven, algebraische 602.
Raumverzweigungen 182.
Rayleigh-Ritz, Methode zur numerischen Integration von partiellen Differentialgleichungen 173, 333, vgl. auch Ritz.
Reduktionsprobleme, die aus dem Abelschen Theorem folgen 638.
Reduzible Menge 869, 869.
Reduzierte Darstellung eines Divisors 540.
Region 899, 900; —, closed 900; —, complete 900; —, completely open 900.
Reguläre Abbildung 982; —s äußeres Maß 990, 991; — Kurve 587; — Maßfunktion 991; — Menge 987, 1132; — Mengenfamilie 987, 1132; — Potentialfunktion 197; — Punkte einer reellen Funktion 1191; — Punkte des Konvergenzgebietes einer Reihe analytischer Funktionen 493; — Punkte der Kurve C 582.
Regularität eines Abelschen Integrals an der Stelle $\mathfrak{P}$ 574/5.
Regularitätsparameter 1132.
Regularitätsradius 524.
Reihe, abgeleitete, aus einer Potenzreihe 6; absolut konvergente — stetiger Funktionen 1172; — analytischer Funktionen 491, gleichmäßige Konvergenz 492, 494/5, gleichmäßige Beschränktheit 494/5, Teilgebiete gleichmäßiger Konvergenz 492; binomische — 21; —, Differentiation, gliedweise 1084; Dirichletsche —n s. d.; Exponential— 25; Faktoriellen—n s. d.; Fakultäten—n s. d.; —n und Folgen von Funktionen einer Veränderlichen 1137, von Funktionen mehrerer Veränderlichen 1185; gleichmäßig konvergente — von stetigen Funktionen 1137, von Polynomen zur Darstellung analytischer Funktionen in einem einfach zusammenhängenden Gebiet 491, 496, 1274/5; hypergeometrische — 45; —, Integration s. d.; —, Interpolationsreihen s. d.; Leibnizsche — für $\frac{\pi}{4}$ 38; logarithmische — 29; —, Potenzreihen s. d.; rekurrente (rekurrierende) — 16, 470, 473, erzeugende Funktion 17, Summation 17; semikonvergente — 159; trigonometrische — s. d.; — für die trigonometrischen Funktionen 34, 44; unendliche —n, lineare Transformation 1241.
Reihenentwicklungen, allgemeine 1229, s. auch Entwicklungstheoreme, Fourierreihen; — bei komplexen unabhängigen Veränderlichen 1266, Konvergenzbereich 1266, nach Integralen linearer Differentialgleichungen 1267, 1274, nach Näherungsnennern eines Kettenbruches 1267, 1273, sonstige — 1267, 1274, Summabilitätsbereich 1266; — in der mathematischen Physik 1244, konvergenzerzeugende Faktoren 1245; — bei reellen unabhängigen Veränderlichen 1231, Bedingungen für die Möglichkeit der Reihenentwicklungen von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften 1239, — nach Näherungsnennern eines Kettenbruches 1233, nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen 1244, 1313, nach orthogonalen, polaren und biorthogonalen Funktionensystemen 1232.
Rektifikation von Raumkurven 128.
Rekurrente (rekurrierende) Reihen s. Reihen; — Doppelreihen 18.
Relationes inter functiones contiguas [718.
Relativgebiet 900.
Residualklasse 596.
Residuum des Differentiales $d\omega$ für die Stelle $\mathfrak{P}$ 574; — einer Menge 872.
Resolvente s. Bilinearformen, Integralgleichungen und Kern, lösender.
Rest bei Divisoren 596; — einer Menge 872.
Reziprok bezüglich einem Kerne 1540; — bezüglich eines Kernes im verallgemeinerten Sinne 1540/41.
Reziproke bei Bilinearformen und Matrizen, hintere —, vordere — 1428f., Formalsätze für — 1429f., Möglichkeit unendlichvieler hinterer —n 1429; notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer hinteren —n 1430; Hilbsche Reihe für die — 1431; — einer quadratischen Form 1578; beschränkte — einer nichtbeschränkten Matrix 1442.
Reziproke Funktion bei Integralgleichungen 1351, s. auch lösender Kern sowie Resolvente.

Reziprozitätsformeln für Integralgleichungen erster Art 1452, 1454.
Richtlinienbüschel 113; —, Transformation 123.
Richtungsschwankung 1087.
Riemann, Arbeit über allgemeine trigonometrische Reihen 1217, Übertragung auf Sturm-Liouvillesche Reihen 1259; —sche Definition einer analytischen Funktion 214, 382; —sche Felder 391/2; —sche Flächen 390, 392, absolute, Punkt 554, Einteilung aller Wege in Klassen 621, Existenzsätze 267, als frei im Raum gelegene geschlossene Flächen 189, 391; —sche Form der Bilinearrelationen zwischen den Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung 629; —-Hadamardsche Produktentwicklung für die Zetafunktion 763; —sches Integral 1033, 1061, 1063, 1064, geometrische Definition 1048, unbestimmtes 1111; integrierbar nach — 1191; —sche Kugelfläche $\mathfrak{K}$, die dem Körper $K(u, z)$ zugeordnet ist 550; —sche Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ 568; —-Lebesguesches Fundamentallemma bei Fourierreihen 1192; —-v. Mangoldtsche Formel für die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ 765; —sche Mannigfaltigkeiten 190, 359, 390, 393; —sche Parallelogrammfigur 189, 350; —sche Primzahlformel 792; —sches Problem 284, —sches Problem für lineare Differenzengleichungen 699; —-Rochscher Satz 578; —scher Satz über die Konvergenz einer trigonometrischen Reihe in einem Punkt 1195, 1219; —sches Summationsverfahren 1206; —s Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion 764, Folgerungen 775; —sche Zetafunktion s. d.
Riesz, Definition des Grenzelements 1016; —-Fischerscher Satz und verwandte Sätze 1212, 1235, 1239, 1365, 1397; —, Integraldefinition 1060, 1063; —, Summationsverfahren 480, 755, 1206.
Ring (nach Hilbert) 590; — von Mengen 893.
Ritzsche Methode 173, 333, 1329, 1398, 1597.
Robin, —sches Problem 233; —-Poincarésches Problem 233; —sche Reihe 234.
Rollesches Theorem 63, 81.
Rückkehrfalten 188.
Rückkehrschnittheorem 349.
Rundungsschranke 276.
Runge, —sche Formeln für partielle Differentialgleichungen 172; —-Kuttasche Formeln 148; —sche Sätze über die Darstellung analytischer Funktionen durch Polynomreihen 491, 496, 1274.

S

S 182, 1279.
$\mathfrak{S}(P, Q, R, \ldots)$ 866.
σ-Körper, -Ring, -System 893; $(\sigma\delta)$-System 893.
Säkulargleichung 1342.
Saite, schwingende, als Grenzfall 1343, 1358.
Sarrussche Formel 131.
Scheinbare Doppelpunkte 603.
Schlichtartig 183, 194.
Schlichte Familien 510.
Schlichtheit einer Abbildung 276.
Schlitzgebiete 268, 318, 338; einfach zusammenhängende —, charakteristische Eigenschaft 318; minimale — 344.
Schmiegungsebene 597.
Schmiegungsverfahren 355, 399.
Schottkyscher Satz 414.
Schranke einer beschränkten Bilinearform 1424; — einer beschränkten quadratischen Form 1576.
Schrankenfunktion, obere bzw. untere 1003.
Schwankung s. Funktion; — einer Funktion am Rande 509.
Schwarz, —sches alternierendes Verfahren 171, 256, 268/69, Hilfssatz 222, 244, 257/58; —sche Derivierte 273; —sches Lemma 299, 410, 500; —, Methode des Linienelements 399; —-Poincaréscher Ansatz für Uniformisierung 396; —sche Summenungleichung 1396, 1434; —sche Ungleichung 1059, 1366.
Schwerpunkt, Bestimmung 127; —, Konstruktion 127.
Schwingungen, elastische 1249, 1254.
Segnersche Transformation 85.
Sehnenpolygon 113.
Sekantenkoeffizienten 44.
Selbstadjungierte Probleme 1248, 1250.
Semikonvergente Reihen 159.
Semikontinuum 898.

Separable Menge 1016/17, 1019, 1022.
Separierte Menge 872.
Set, generalised inner (outer) limiting 890; — ordinary inner (outer) limiting 890.
Simpsonsche Formel 105, 116, zweite 109, verallgemeinerte 136.
Singuläre Integrale 1205, 1225, 1239; — Integralgleichungen s. d.; — Kerne s. d.; — Kette 404; —r Punkt, gewöhnlicher 586, der Kurve $\mathfrak{C}$ 582; — Reihe 831; — Stelle 6, 401, 522, 1051, definierende Kette 401/02, 417, einer Differentialgleichung 1264, eindeutige 404, Elementarkoordinate 402, geradlinige Annäherung 418, Häufungsbereich 417, isolierte 404, Konvergenzbereich 417, mehrdeutige 404, Umgebung 403, Unbestimmtheitsbereich 405, 417, Wertebereich 417.
Singularitäten, außerwesentliche 405; eindeutig isolierte — 404; $\varkappa$-zweigige — einer Kurve 582; — der Komponenten stetiger Potenzreihen 1202; — auf dem Konvergenzkreis 460, Zusammenhang mit dem asymptotischen Verhalten der Koeffizienten 471; — einer Kurve, ihre Auflösung 587; logarithmische — 405; mehrdeutige isolierte — 405; sämtliche — auf einer Strecke 470; —, Verhalten in ihrer Nähe 417; —, Verteilung bei eindeutigen Funktionen 406.
Singularitätsfunktion 1011.
Sinuosité 937.
Skala einer rekurrenten Reihe 17; ungleichmäßige — bei graphischer Quadratur 123.
Sommable (fonction) 1042, 1047, 1057.
Spannung, beschränkte 489.
Spektralform einer quadratischen Form s. d.
Spektrum 1578, 1579, einfaches — 1585, diskontinuierliches — 1578, kontinuierliches — 1578; s. auch unter quadratische Form und Integralgleichungen.
Spitze 1093, 1097.
Spur $s(\zeta)$ 544.
Spuren einer quadratischen Form s. diese, — eines Kernes s. diesen.
Steigung 1087.
Steigungszahlen 1087.
Steckloffsche Eigenfunktionen 1250.
Stelle 536; — des Körpers $K(x, y, z)$ 656; singuläre — s. d.
Stern 446; Borelscher — 454, erzeugende Figur 455, als Konvergenzstern 455, Verallgemeinerungen 456/57; —, Hauptstern 446—460, 489, Bestimmung 465, als Konvergenzstern 451, Konvergenz am Rande des Hauptsternes 459; Konvergenzstern 450/51, 457; Kurven— 459; Mittag-Lefflerscher — 934, 1383; —, Meromorphiestern 459; —, Nebensterne, den Hauptstern approximierende 448, 451, 455, erzeugende Figur 448, als Konvergenzsterne 450; — der Umkehrungsfunktion einer meromorphen Funktion 418.
Stetigkeit s. Funktion, Funktionenmenge, Menge; Mengenfunktionen.
Stetigkeitsmaß 1191.
Stetigkeitspunkte einer Funktion, Verteilung 1006.
Stieltjes, —sches Integral 1060, 1071, Verallgemeinerungen 1071/73, 1211; —sche Integraldarstellung für Kettenbrüche 1578, 1583, 1587/9; —-Landausche Polynome 1149, 1225; —sches Momentenproblem s. dieses; —scher Satz 493/4.
Stirlingsche Formel 42; — Interpolationsformel 686, 717.
Stolz-Harnacksche Inhaltsdefinition 962, 966.
Strahlpunkt 141.
Strahlungstheorie, Begründung der — durch Hilbert vermittels Integralgleichungen 1535.
Streckenspektrum 1577, 1578 ff., 1593/4, s. auch quadratische Formen, beschränkte.
Streckentreue Abbildung 217; — Funktionen 388.
Strömungspotential 251, 266, 268, 316, 338.
Struktur der Begrenzung eines Gebietes 925, 926; — der abgeschlossenen Mengen 868, 879, 880, 895; — des in sich dichten Bestandteils einer Menge 903; — des perfekten Bestandteils einer abgeschlossenen Menge 901.
Stück einer abgeschlossenen Menge 902.
Stützebenen 505, —funktion 1446.
Stützgerade 503.
Sturm-Liouvillesche Reihen 1238, 1259, 1260, 1264.

Sukzessive Annäherungen bei Differenzengleichungen 680; — Approximationen s. d.; — Uniformisierung 400.
Summabilitätsabszissen 753.
Summabilitätsabszissenfunktion 756.
Summabilitätsgerade 479.
Summabilitätsgrenzabszisse 757.
Summation 1192, 1204; Abelsche — 477, 758; —, arithmetische Mittel 477, 1204, 1383; Borelsche — 481, 685, 758, 1383, 1488; Cesàrosche — 477, 684; Cesàrosche Mittel δ^{ter} Ordnung 478, 753, 1206; Eulersche — 477, — bei Fourierreihen, arithmetische Mittel 1204, Sätze von Fejér 1205, Cesàrosche Mittel δ^{ter} Ordnung 1206, durch formale Integration 1208, Poissonsche 1207, Riemannscher Prozeß 1208/9, 1218, Rieszsche 1206, De la Vallée Poussins Verfahren 1209; Höldersche — 477; Rieszsche — 480, 755, 1206; — nach typischen Mitteln 755.
Summationsmethoden, Beziehungen zwischen den verschiedenen 481.
Summatorische Funktion 727.
Summe konvergenter Reihen von analytischen Funktionen 491, analytisch 492, stetig 492.
Summen, einfache 711; mehrfache — 716; trigonometrische — s. d.
Summenformeln 468.
Summengleichungen 709; Volterrasche — 709, 1466.
Summierbarkeit s. Summation.
Superpositionsmethode von Maxwell 164.
Sylvesterscher Determinantensatz für Fredholmsche Determinanten 1374; — — für unendliche normale Determinanten 1423.
Symmetriebedingung für gemischte Integralgleichungen 1532.
Symmetrisator, linksseitiger, rechtsseitiger 1542.
Symmetrisierbar bei Kernen und vollstetigen Bilinearformen s. unter Kern und Bilinearform
Systeme, algebraische, und ihre Elementarteiler 562.
System, komplementäres 565; normales — in bezug auf die Stelle $\mathfrak{p}$ 564; — von unendlich vielen linearen Gleichungen 716; δ-, σ-, $(\sigma\delta)$-— 893.

T

T, $T+S$ 182, 1279.
(T_{2s}), Operation 1070.
Tangente eines Kurvenzweiges 583.
Tangenten der rektifizierbaren Kurven 1095.
Tangentenkonstruktion, Lambertsche 140.
Tangentenpolygon 113.
Tangentenprisma, Formel 135.
Tangentialkoordinaten l^{ter} Ordnung einer s-dimensionalen Raumkurve 601.
Taylorsche Entwicklung 6.
Teilbar durch $\mathfrak{p}^{\varrho}$ 538; — durch p^{ϱ} 642; —, genau, durch $\mathfrak{p}^{\varrho}$ 538, durch $\mathfrak{P}^{\sigma}$ 574, durch $\mathfrak{P}_i^{\varrho_i}$ 549, durch log $\mathfrak{P}$ 574; — für die Stelle $\mathfrak{p}$ 537.
Teilbarkeit eines Elementes durch ein anderes 546, 646 — der Funktionen durch einen beliebigen Divisor 557.
Teilerproblem von Dirichlet 818; — von Piltz 821.
Teilfolgen, Bedingung für die Existenz gleichmäßig konvergenter 1145.
Teilkontinua, echte 913.
Thetafunktionen von p Variablen 642.
Thetanullfunktionen, elliptische, quadratische Integralgleichung für — 1490.
Thomésche Normalreihen 680.
Thomsonsche Transformation 213, 1346.
Topologisch homogene Menge 989; —er Raum 1020.
Totale 1066.
Total imperfekte Mengen 874.
Totalisation (totalisable) 1065; — complète (complètement totalisable) 1066; — symmétrique à deux degrés 1070.
Totalstetige Funktion 1007, 1110, als unbestimmtes Integral 1110, 1132, in einer perfekten Punktmenge — Funktion 1115, nach oben (unten) — Funktion 1111; gleichgradig — Funktionenmenge 1083; — Mengenfunktion 1009, — additive Mengenfunktion 1010, 1132.
Trägheitsmoment, Konstruktion 127, 138.
Transformation, Abelsche 1222; affine —en im Raume von unendlichvielen Veränderlichen 1438; einseitig eindeutige und stetige — 948; — der Fakultätenreihen 684; — eines Gebildes

in sich 607; —, Gruppe, engere, weitere 948; kollineare —en im R_∞ 1439; — des Körpers $K(u, z)$ in den ihm gleichen $K(y, x)$ 567; — von Laplace 694, 700, 1456, 1462, 1490; lineare — unendlicher Reihen 1241; — der Newtonschen Reihe 689; lineare — der Perioden 630, n^{ter} Ordnung 630; orthogonale — s. orthogonal; stetige — von Gebieten in sich 958, 960, 961/2; umkehrbar eindeutige und stetige — 948, 957, 1020; unitäre — 1562, unitäre — vollstetiger normaler Bilinearformen auf die kanonische Gestalt 1563.

Transformationsgruppen im Funktionenraum 1468, kontinuierliche 214.

Transformierte, Laplacesche 710.

Transponierte einer beschränkten Bilinearform 1424.

Transzendente Einheitsfunktionen 632.

Transzendenz von e^x bei algebraischem x 27; — von π 39.

Trapezformel 101, 115; verbesserte — 104.

Trennbarkeitsaxiome 1021.

Treppenfunktionen, einfache 1063.

Trigonometrische Funktionen 33, 44; — Additions- und Periodizitätstheoreme 34.

Trigonometrische Reihen 1189; allgemeine — 1217; —, Bedingung, notwendige und hinreichende, daß eine gegebene trigonometrische Reihe die Fourierreihe einer Funktion der Klasse L^{1+p} ist 1213; —, Eindeutigkeitssatz 1192, 1220; — als Fourierreihen 1192, 1221; —, Hauptfragen 1219; —, Konvergenz- und Divergenzerscheinungen 1222; Konvergenz, absolute 1222; mehrfache — 1223; —, Theorie von Riemann 1217, Übertragung auf Sturm-Liouvillesche Entwicklungen 1259, Weiterentwicklung 1219; überall divergente — mit nach Null gehenden Koeffizienten 1222; —, Unbestimmtheitsgrenzen obere, untere 1221.

Trigonometrische Summen, endliche 1146, 1160, zur Approximation stetiger Funktionen s. Approximation; — n^{ter} Ordnung 1146.

Tschebyscheffsche beste Approximation 1157, 1224; — Polynome 1158; — Quadraturformel 86.

U

Überdeckungssatz von Borel 882, 1023; — von Lindelöf 886; — von Vitali 986.

Überlagerungsfläche 302, 396/7.

Umfang einer Menge 407.

Umgebung 861, 1020; — eines Funktionselements 391; — einer singulären Stelle 403.

Umgebungsaxiome 1020.

Umgebungsbegriff 1020.

Umgebungssysteme, gleichwertige 1021.

Umgebungstheorie 1020.

Umkehrbarkeit einer Potenzreihe 15.

Umkehrproblem für die Abelschen Integrale 640; Jacobisches — 641.

Umkehrungsfunktion einer meromorphen Funktion 310, 418.

Unabhängige Wege 621.

Unabhängigkeit, lineare, von Divisoren 570/1.

Unabhängigkeitsmaß einer Funktionenschar 1520.

Unbestimmte Koeffizienten, Methode 13.

Unbestimmtheitsbereich einer singulären Stelle 405, 417.

Unbestimmtheitsgrenze, obere 861.

Unbewalltheit 923, 930; allseitige — 923.

Undichte Menge 865; total— Menge 865.

Unendlich, —e Produkte für $\sin x$ und $\cos x$ 40; Hilberts Methode der — vielen Veränderlichen 1367, 1392.

Ungleichmäßige Skala 123.

Ungleichmäßigkeitsgrad 1142; Punkte von unendlichem — 1080.

Ungleichung, Besselsche — s. unter Bessel, Höldersche — s. unter Hölder, Lagrange-Cauchysche — s. unter Lagrange, Schwarzsche — s. unter Schwarz.

Unikursalkurven 584.

Unifizieren in der general analysis 1471 ff.

Uniformisierende Kraft 401.

Uniformisierung 302, 396; — algebraischer Funktionen, Fundamentaltheoreme 347, 349; — analytischer Funktionen 307, 309, 363, 400; —, Kontinuitätsmethode 347, 399; lokale —

529; —, Methode des Dirichletschen Prinzips 400, des Linienelements 399, 1330/3, der konformen Abbildung der Überlagerungsfläche 302, 307, 309, 396, des Schmiegungsverfahrens 399; Methode der sukzessiven — 400.

Unitäre Form, — Matrix 1562; — Orthogonalität 1438, 1536; — Transformation 1562; — Transformation vollstetiger normaler Bilinearformen auf die kanonische Gestalt 1563.

Unstetig, punktweise (punktiert), total 1005.

Unstetigkeiten, hebbare 387.

Unstetigkeitsfunktion 1011.

Unterfunktion 1075.

Unterkörper $K(\mathfrak{p})$ der zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen konvergenten Potenzreihen 539.

Unterschied zweier Punkte 877.

V

$\mathfrak{B}_\alpha$ 1174.

de la Vallée Poussin, Ableitung r^{te} verallgemeinerte 1215; —sches Konvergenzkriterium für eine Fourierreihe 1196; —sches Summationsverfahren 1209; —sches Verfahren bei uneigentlichen Integralen 1054/5.

Valori eccezionali 1504, s. auch Eigenwert.

Variation, Funktionen von beschränkter (endlicher) — 1006; — einer Funktion auf einer meßbaren Menge 1107; — der Konstanten 156, 700; Funktionen von konstanter λ-— 1008; totale — 1007, 1100.

Variationsmethoden 327; —, Auflösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie 333/4, einer elliptischen Differentialgleichung 1302; —, Beweis der Riemannschen Existenzsätze 331, 345/46; —, Existenzbeweis für Prymsche Funktionen 346; —, Hilberts erste Arbeiten 330; —, konforme Abbildung auf ein Schlitzgebiet 318, 338; —, Levischer Hilfssatz 334, —, Ritzsche Methode 173, 333, 1329, 1331; —, Strömungspotential 338.

Variationsprobleme, reguläre analytische 1324.

Variété 930.

Vektor im R_∞ 1435; Basis eines linearen —gebildes 1437; komplexe —en 1438; (Achsen-)Komponenten eines —s 1435; Länge eines —s 1435; linear abhängige —en 1436; normierter — 1435; orthogonale —en 1435, Orthogonalisierungsprozeß für —en 1437; Richtung eines —s 1435.

Verdichtete Menge 1016/17.

Verdichtungselement 1016.

Verdichtungspunkt 860, 870; — der n^{ten} Ordnung 863.

Verdichtungsstelle 1016.

Vereinigungsmenge 866; — von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Mengen 890.

Vergleichbarkeit von Mengen 888.

Vernachlässigung der Mengen einer gewissen Mengengesamtheit 1005.

Verstreute Menge 901, 931.

Vertauschbare Kerne s. Kern.

Verzerrungssatz von Koebe 311, 321, 349, 510, 513.

Verzweigungsdivisor 666.

Verzweigungsgleichung bei nichtlinearen Integralgleichungen und nichtlinearen Gleichungssystemen 1485.

Verzweigungskurve 654.

Verzweigungsordnung 550, 654; — des Verzweigungsteilers 561.

Verzweigungsteiler einer Divisorenschar 571, 572; — von $K(u, z)$ in bezug auf die unabhängige Variable z 561; — $\mathfrak{Z}_x$, der zur unabhängigen Variablen x gehört 568.

Vielwertige Funktionen, unterscheidende Zeichen 28.

Vitalischer Satz 494; — Überdeckungssatz 986.

Vivanti-Dienesscher Satz 461, Verallgemeinerung für Dirichletsche Reihen 736.

Voisinage 1019/20.

Volles System der Eigenwerte und Hauptfunktionen eines unsymmetrischen Kernes 1549; — (kanonisches) biorthogonales System der Hauptfunktionen 1549; s. auch Eigenwerttheorie.

Vollständiger metrischer Raum 1022, 1029.

Vollständiges Eigenfunktionensystem eines assoziierten Kernes 1508; — normiertes System von Eigenfunktionen

eines symmetrischen vollstetigen Kernes 1508; — System der zu einem Eigenwert gehörigen Hauptfunktionen 1546; — System orthogonaler Funktionen 1392; — System orthogonaler Linearformen 1555; s. auch Eigenwerttheorie.
Vollständigkeit des Eigenfunktionensystems 1527.
Vollständigkeitseigenschaft der beschränkten Matrizen 1439.
Vollständigkeitsrelation 1392, 1527; — bei Differentialformen 1585.
Vollstetige Bilinearformen, Gleichungssysteme, Linearformen, quadratische Formen, Funktionen s. d.
Vollstetigkeit 1369, s. auch bei vollstetigen Bilinearformen; — für beliebige Funktionen von unendlichvielen Veränderlichen 1405.
Volterrasche Integralgleichungen s. Integralgleichungen; — Kerne s. Kerne, — Summengleichung 709, 1466.
Vorbereitungssatz von Weierstraß 16, 528/9, 661.

W

Wachstum einer Funktion in einem Winkelraum 423, bei Annäherung an die Konvergenzgrenze 487.
Wahrer Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x,y)$ 8.
Wallissche Formel für $\frac{\pi}{2}$ 41.
Waringsches Problem 829.
Weddlesche Formel 91, 109, 118.
Weg 920; —e auf einer Riemannschen Fläche, Einteilung in Klassen 621; einfacher Weg 194, 920.
Wegdistanz 923.
Weierstraß, Definition der analytischen Funktionen 6, 382; —scher Doppelreihensatz 14, 491; —sche Form der Bilinearrelationen zwischen den Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung 629; —sches Integral 1225; —scher Lückensatz 606; —scher Polynomsatz 1146, Verallgemeinerung 1152, für mehrere Veränderliche 1186; —sche Produktdarstellung ganzer transzendenter Funktionen 425; —scher Vorbereitungssatz 16, 528/9, 661.
Weierstraßpunkte 605/6.
Wendeberührungsebenen 598, 603.
Wendepunkt 597.
Wertebereich eines Einschnittes 417; — einer singulären Stelle 417.
Werteverteilung in Winkelräumen 421.
Wertevorrat einer Bilinearform 503; — vollstetiger normaler Formen von unendlichvielen Veränderlichen 1563; — einer Potenzreihe 503; — einer singulären Stelle 405.
Wertmenge einer Dirichletschen Reihe auf einer vertikalen Gerade 741, von $\zeta(s)$ 766.
Wertsystem, das einem Divisor $\mathfrak{D}$ entsprechende 638.
Wesentlicher Diskriminantenteiler 587.
Wesentlich singuläre Stelle 404.
Wigertscher Satz 467.
Windung einer punkthaften Menge 937.
Winkeltreue Funktionen 388.
Wohlordenbarkeit der Mengen 888.
Woolleysche Formel 135, zweite 136.
Woolseysche Formel 91.
Wurzel, Berechnung der numerisch kleinsten nach D. Bernoulli 15; konjugierte —n 548.
Wurzelzykeln, die zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehören 551.

Y

Young, 1. Integraldefinition 1059, 1060; —, 2. Integraldefinition 1060, 1062; —, Verallgemeinerung des Denjoyschen Integralbegriffs 1070; —sches Konvergenzkriterium für eine Fourierreihe 1196; —, linearer Inhalt 996.

Z

Zähler eines Divisors $\mathfrak{q}$ 540.
Zahlenkontinuum 895.
Zahlentheorie, additive 829; analytische —, neuere Entwicklung 722, Zusammenhangssätze 814.
Zahlentheoretische Funktionen 780, 810, explizite Formeln 825.
Zarembascher Hilfssatz 236/7.
Zeilenfinite Gleichungssysteme 1448; — Systeme von Kongruenzen nach dem Modul eins 1448.
Zeilenreihen 521.
Zentraldifferenzen 110.
Zerlegung der Funktionen des Körpers in Primfunktionen 632.

Zerlegung in Horizontalstreifen 1040, 1044, 1045; — von Gebieten 918; — der Ebene (eines Kontinuums) in zwei punkthafte Mengen 936; — von Kontinuen in abzählbar viele Teilkontinua 896/7.

Zermelosches Auswahlaxiom 330, 888.

Zerspaltungsformel einer beschränkten quadratischen Form 1585; Verallgemeinerung der — auf symmetrisierbare Formen bzw. auf Scharen symmetrischer Formen 1585.

Zetafunktion, Dedekindsche 842; Heckesche — 847; Riemannsche — 759, Funktionalgleichung 759, 760, approximative Funktionalgleichung 771, Größenordnung auf vertikalen Geraden 768, Nullstellen im kritischen Streifen 771, triviale und nichttriviale Nullstellen 762, Riemann-Hadamardsche Produktentwicklung 763, Riemann-v. Mangoldtsche Formel für die Anzahl der Nullstellen 765, Riemannsche Vermutung 764, Folgerungen aus der Riemannschen Vermutung 775, Wertemenge auf einer vertikalen Gerade 766; verallgemeinerte —en 777

Zeuthen-Segresche Invariante 672.

Zirkulanten 1391.

Zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ 661.

Zuordnung der Stelle $\mathfrak{p}$ und der Stellen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu$ 549.

Zusammenhängend (n-blättrige Kugelfläche $\mathfrak{K}$) 551; — im kleinen 922, 947, 956; —, Mengen s. d.; p-fach — 183, 195, 906.

Zusammenhanglose Menge 901, durchweg — 900/01.

Zusammenhangszahl 195, 196, 906; —, Invarianz 955.

Zusammensetzung von Kernen, erster Art 1487; — zweiter Art 1491; s. auch unter Kern.

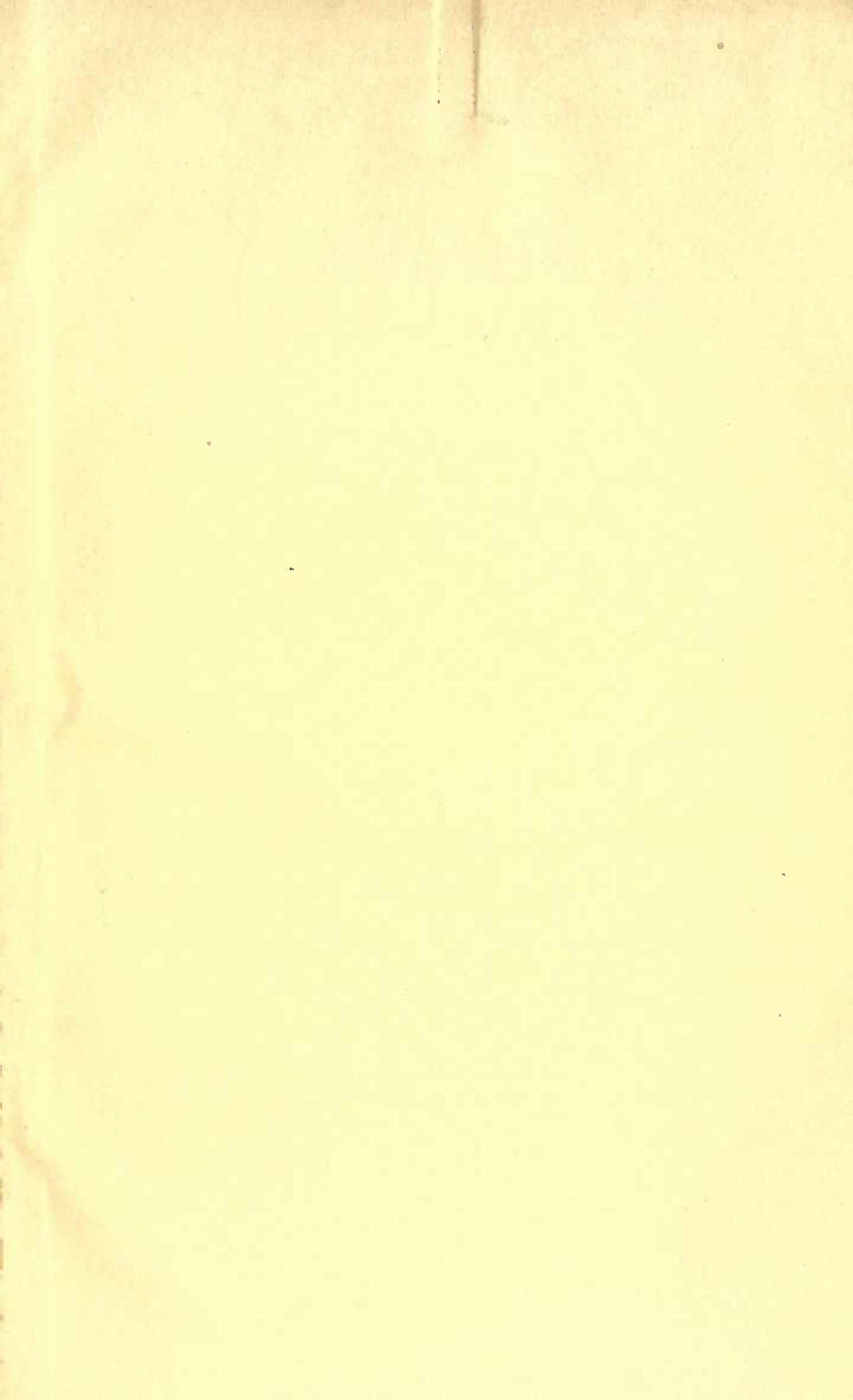
Zyklanten 1391.

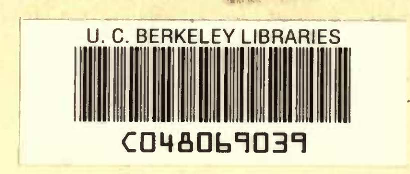
Zyklidensechsflach 1255, 1266.

Zyklische Perioden des Elementarintegrals dritter Gattung 631.

Zyklometrische Funktionen 37.

Zylinderkondensator kleinster Kapazität 346.




U. C. BERKELEY LIBRARIES
C048069039

